

*D*

PREMIER MINISTRE  
COMMISSARIAT A  
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

**FORMULATION GÉNÉRALE ET CALCUL PRATIQUE  
DU COEFFICIENT DE DIFFUSION  
DANS UN RÉSEAU COMPORTANT DES CAVITÉS**

PAR

P. BENOIST

Rapport CEA N° 1354

**1959**

CENTRE D'ÉTUDES  
NUCLÉAIRES DE SACLAY  
SERVICE DE DOCUMENTATION  
Boîte postale n° 2 - Gif-sur-Yvette (S.-et-O.)

- Rapport C.E.A. n° 1354 -

**FORMULATION GENERALE ET CALCUL PRATIQUE DU COEFFICIENT  
DE DIFFUSION DANS UN RESEAU COMPORTANT DES CAVITES**

par

P. BENOIST

## S O M M A I R E

	<i>Pages</i>
<b>INTRODUCTION      RAPPEL DE RESULTATS CLASSIQUES .....</b>	<b>1</b>
<b>1ère PARTIE      DEFINITION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION DANS UN RESEAU HETEROGENE .....</b>	<b>3</b>
Notations et approche du problème .....	3
Hypothèses .....	5
Première expression du coefficient de diffusion .....	6
<b>2ème PARTIE      NOUVELLE FORMULATION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION ..</b>	<b>8</b>
Section 1) ETUDE DE LA CONTRIBUTION PRINCIPALE $D_k^{(0)}$ (termes carrés) .....	8
Introduction des probabilités de collision.....	8
Relations utiles .....	10
Forme pratique de l'expression du coefficient de diffusion	11
Section 2) ETUDE DES TERMES DE CORRELATION ANGULAIRE (termes rectangles).....	12
<b>3ème PARTIE      APPLICATION AU CAS DE RESEAUX CLASSIQUES .....</b>	<b>14</b>
Section 1) CALCUL DE LA CONTRIBUTION PRINCIPALE .....	14
Problème à deux milieux .....	14
Problème à trois milieux .....	15
Comparaison avec les formules classiques .....	17
Application à la géométrie cylindrique .....	18
Symétrie de révolution .....	20
Section 2) CALCUL DES TERMES DE CORRELATION ANGULAIRE Remarque sur la convergence de la série des $Q_r^{(\lambda)}$ .....	21
Section 3) CALCUL DES TERMES D'INTERACTION ENTRE CANAUX DIFFERENTS .....	24
Section 4) CALCUL DE LA CORRECTION DEPENDANT DU LAPLACIEN .....	26

	<i>Pages</i>	
<b>4ème PARTIE</b>	<b>RESULTATS NUMERIQUES .....</b>	<b>27</b>
	Tableau 1 .....	28
	Tableau 2 .....	29
<b>5ème PARTIE</b>	<b>APPLICATIONS A DIVERSES GEOMETRIES .....</b>	<b>31</b>
<b>ANNEXE 1</b>	<b>ETABLISSEMENT DE LA PREMIERE EXPRESSION (12) DU COEFFICIENT DE DIFFUSION ; EQUIVALENCE A LA REPRESENTATION PAR LE CARRE MOYEN .....</b>	<b>33</b>
<b>ANNEXE 2</b>	<b>INFLUENCE DE L'HYPOTHESE D'EXTENSION A L'INFINI DES DOMAINES D'INTEGRATION .....</b>	<b>36</b>
<b>ANNEXE 3</b>	<b>CORRECTION DE NON-UNIFORMITE DU FLUX DANS LA CAVITE</b>	<b>37</b>
<b>ANNEXE 4</b>	<b>ETUDE ANALYTIQUE DE LA SERIE DES TERMES DE CORRELATION ANGULAIRE EN GEOMETRIE PLANE .....</b>	<b>38</b>
<b>REFERENCES</b>	.....	<b>44</b>
<b>FORMULAIRE PRATIQUE</b>	.....	<b>46</b>
<b>TABLE 1</b>	<b>Fonction <math>F(\alpha)</math> de BEHRENS .....</b>	<b>48</b>
<b>TABLE 2</b>	<b>Fonction <math>\bar{N}(\alpha)</math> .....</b>	<b>49</b>
<b>FIGURE 1</b>	<b>Fonctions <math>Q'_z</math> et <math>Q'_r</math> .....</b>	<b>50</b>
<b>FIGURE 2</b>	<b>Fonctions <math>W_z</math> et <math>W_r</math> .....</b>	<b>51</b>
<b>FIGURE 3</b>	<b>Fonctions <math>T_z</math> et <math>T_r</math> .....</b>	<b>52</b>
<b>FIGURE 4</b>	<b>Fonction <math>-[Q_r^{(1)} + Q_r'^{(1)}]</math> .....</b>	<b>53</b>
<b>FIGURE 5</b>	<b>Fonction <math>q_r</math> .....</b>	<b>54</b>
<b>FIGURE 6</b>	<b>Fonctions <math>\mathcal{E}_n(x)</math> .....</b>	<b>55</b>



## INTRODUCTION\*

### RAPPEL DE RESULTATS CLASSIQUES

Il est bien connu que le coefficient de diffusion en milieu homogène, pour des neutrons monocinétiques, est égal au tiers du libre parcours de transport. L'extension de cette formule au cas d'un réseau hétérogène suppose le choix préalable d'un certain mode de pondération des libres parcours des différents milieux. Soient  $V_i$  le volume du  $i^{\text{ème}}$  milieu constituant,  $\lambda_i = \frac{1}{\Sigma_i}$  son libre parcours de transport,  $\sum_i$  un symbole de sommation sur l'ensemble des milieux  $i$  et  $\phi_i$  le flux moyen dans le milieu  $i$ , pour un réseau infini. Deux procédés élémentaires de pondération se présentent immédiatement à l'esprit :

- Moyenne arithmétique des *sections efficaces*, pondérée sur les volumes et les flux :

$$(1) \quad D = \frac{1}{3 \Sigma} \quad \text{avec } \Sigma = \frac{\sum_i V_i \phi_i \Sigma_i}{\sum_i V_i \phi_i}$$

Il est évident que cette formule s'applique en particulier (avec  $\phi_i$  indépendant de  $i$ ) au cas d'un mélange homogène de plusieurs constituants (imbrication statistique de « grains » de dimensions très faibles devant leur libre parcours).

- Moyenne arithmétique des *libres parcours*, pondérée sur les volumes et les flux :

$$(2) \quad D = \frac{1}{3} \frac{\sum_i V_i \phi_i \lambda_i}{\sum_i V_i \phi_i}$$

Cette expression est équivalente à l'expression usuelle de l'aire de diffusion :

$$L^2 = \sum_i L_i^2 f_i$$

$L_i^2$  étant l'aire de diffusion relative au milieu  $i$  et  $f_i$  la proportion de neutrons capturés dans ce milieu.

Chacun de ces deux modes de pondération possède son domaine de validité particulier mais il est évident que l'application de l'un ou de l'autre de ces procédés au

(\*) Cette étude est le refonte d'un travail antérieur [1]; elle figure sous une forme plus condensée dans [2].

traitement d'un réseau hétérogène quelconque est erronée; il ne peut en être autrement, ne serait-ce qu'à cause de l'indépendance des expressions ci-dessus vis-à-vis de la forme des milieux constituants, qui exclut tout effet d'anisotropie. D'autre part, l'application de la formule (2) au cas d'un réseau comportant des cavités conduit à un coefficient de diffusion infini, ce qui n'a aucun sens. Le besoin se fait donc sentir d'un mode de pondération reposant sur des bases plus solides.

Divers auteurs ont proposé, pour des géométries particulières - réseau plan ou réseau de barres ou de canaux cylindriques - des expressions plus élaborées du coefficient (ou de l'aire) de diffusion. Certaines de ces expressions reposent sur la théorie élémentaire de la diffusion (SPINRAD [18]), d'autres sur une théorie de diffusion améliorée pour tenir compte plus ou moins complètement des effets de transport (BEHRENS [3], WEINBERG et NODERER [11], GRANT [6] et plus récemment GALANIN [19] et LESLIE [20]), d'autres enfin sur la théorie du transport proprement dite (DAVISON [21], LALETIN [7]). La théorie de la diffusion sous sa forme non modifiée met en évidence un effet d'anisotropie, mais sa condition de validité - milieux individuels de dimensions grandes vis-à-vis de leur libre parcours - exclut la possibilité de traiter un réseau comportant des cavités.

La théorie de BEHRENS exceptée, les différents calculs mentionnés ci-dessus ne s'appliquent qu'à une géométrie déterminée. Le but principal de la présente étude est d'établir un formalisme tout à fait général reposant sur la théorie du transport, en définissant un mode de pondération des libres parcours applicable à un réseau quelconque. Ceci fera l'objet des deux premières parties; l'expression obtenue sera ensuite mise à profit dans la troisième partie pour le calcul pratique d'un réseau classique comportant des cavités.



## 1ère partie

### DEFINITION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION DANS UN RESEAU HETEROGENE

#### **Notations et approche du problème**

En ne perdant pas de vue que le calcul des fuites hors d'une zone de réacteur est en pratique la seule raison d'être de la notion de coefficient de diffusion, nous allons redéfinir ce coefficient de manière cohérente. Les neutrons sont supposés monocinétiques, la loi de choc est quelconque. Soient alors, au point  $\vec{r}$  d'un réacteur de volume  $V_R$  :

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{1}{\Sigma(\vec{r})} \quad \text{le libre parcours total (non de transport)}$$

$\frac{1}{4\pi} c(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$  le nombre de neutrons émis dans une collision au point  $\vec{r}$ , dans l'angle solide unité entourant la direction  $\vec{\Omega}'$ , par un neutron incident dirigé suivant  $\vec{\Omega}$ .

$$r(\vec{r}) = \int_{(4\pi)} c(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad \text{le nombre global de secondaires par collision,}$$

$Q(\vec{r})$  la densité de sources, supposées isotropes (en pratique neutrons provenant d'un groupe d'énergie différent),

$D(\vec{r}, \vec{\Omega})$  la densité en phase relative à la direction  $\vec{\Omega}$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{(4\pi)} D(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad \text{le flux,}$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int_{(4\pi)} D(\vec{r}, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} d\Omega \quad \text{le vecteur courant,}$$

$$\frac{1}{4\pi} N(\vec{r}, \vec{\Omega}') = \Sigma(\vec{r}) \int_{(4\pi)} D(\vec{r}, \vec{\Omega}) C(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{la densité de collisions de diffusion, c'est-à-dire le nombre de neutrons émis par diffusion dans l'unité de volume entourant le point } \vec{r} \text{ et dans l'unité d'angle solide entourant la direction } \vec{\Omega}' \text{ (si le choc est isotrope, } N = r \Sigma \Phi).$$

Si  $\vec{r}_1$  est un autre point du réacteur, soient d'autre part :

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1 \quad R = |\vec{R}| \quad \vec{\Omega} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$\sum \vec{R}$  le « parcours optique » entre  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}$ .

La quantité que nous désirons atteindre est la fuite  $F$  (neutrons sortants - neutrons entrants) hors d'une certaine zone  $V$  du réacteur, cette fuite étant normalisée à un neutron dans la zone :

$$(3) \quad F = \frac{\int_V \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}) dv}{\int_V \Phi(\vec{r}) dv}$$

$dv$  étant l'élément de volume entourant le point  $\vec{r}$ . Le flux et le courant s'expriment par les relations :

$$(4) \quad \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{r(\vec{r}) \Sigma(\vec{r})} \int_{(4\pi)} N(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\Omega'$$

$$(5) \quad \vec{J}(\vec{r}) = \int_{V_R} dv_1 \vec{\Omega} \frac{e \cdot \widetilde{\Sigma R}}{4\pi R^2} [Q(\vec{r}_1) + N(\vec{r}_1, \vec{\Omega}')] \quad [Q(\vec{r}_1) + N(\vec{r}_1, \vec{\Omega}')]$$

La densité de diffusion  $N$  est régie par l'équation de BOLTZMANN :

$$(6) \quad N = H(Q + N)$$

$H$  étant l'opérateur intégral défini par la relation

$$(7) \quad H.f(\vec{r}_1, \vec{\Omega}) = \Sigma(\vec{r}) \int_{V_R} dv_1 \frac{e \cdot \widetilde{\Sigma R}}{4\pi R^2} c(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') f(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$$

le résultat étant une fonction de  $\vec{r}$  et de  $\vec{\Omega}'$ .

Supposons connue une bonne approximation  $N_0(\vec{r}, \vec{\Omega}')$  de la fonction  $(\vec{r}, \vec{\Omega}')$ . On peut regarder l'équation intégrale (6) comme une équation dont la fonction inconnue est la différence  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}') - N_0(\vec{r}, \vec{\Omega}')$ . En développant cette nouvelle fonction en série de LIJOUVILLE-NEUMANN, on obtient pour la fonction  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}')$  :

$$(8) \quad N = N_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} H^{(\ell-1)} [-N_0 + H(Q + N_0)]$$

$H^{(\ell-1)}$  étant l'opérateur  $H$  itéré  $(\ell-1)$  fois et  $\sum$  un symbole de sommation. On en déduit les développements de  $\Phi(\vec{r})$  et de  $\vec{J}(\vec{r})$  au moyen de (4) et (5) et l'expression de  $F$  au moyen de (3).

Nous ferons maintenant une hypothèse sur la densité de sources  $Q(\vec{r})$ , qui sera supposée factorisable en un produit d'une fonction « macroscopique »  $\Psi_0(\vec{r})$  par une fonction connue  $q(\vec{r})$  de même période que celle du réseau.

Nous choisirons d'autre part comme fonction d'essai  $N_0(\vec{r}, \Omega')$  une fonction factorisable elle aussi en un produit de la fonction macroscopique  $\Psi_0(\vec{r})$  par une fonction périodique  $n_0(\vec{r}, \Omega')$  de même période que celle du réseau ; cette dernière fonction sera supposée solution de l'équation de BOLTZMANN pour le réseau infini :

$$(9) \quad n_0 = H_\infty (q + n_0)$$

$H_\infty$  étant un opérateur semblable à  $H$ , mais dans lequel le domaine d'intégration est étendu à l'infini.

Quant à la fonction macroscopique  $\Psi_0(\vec{r})$ , elle sera supposée connue par ailleurs, et devra satisfaire dans la zone V à l'équation d'onde en milieu homogène. Cette équation étant toujours séparable dans les cas usuels, on peut envisager des laplaciens géométriques partiels (positifs ou négatifs), relatifs à la variable  $k$ , tels que :

$$(10) \quad (\nabla_k^2 + B_k^2) \Psi_0 = 0$$

Nous définirons maintenant le coefficient de diffusion  $D_k$  relatif à la variable  $k$  à partir de l'identité :

$$(11) \quad F = \sum_k D_k B_k^2$$

$\Sigma$  étant un symbole de sommation.

### Hypothèses

Dans la suite du calcul, on admet les hypothèses suivantes :

**Hypothèse (a)** Variation lente de la fonction macroscopique vis-à-vis de la période du réseau.

**Hypothèse (b)** Variation lente de la fonction macroscopique vis-à-vis de la période de décroissance de la fonction  $e^{-\sum R}$ , envisagée comme fonction de  $\vec{r}$ , pour un  $\vec{r}_1$  donné quelconque, et pour toute direction.

**Hypothèse (c)** Extension à l'infini des domaines d'intégration, (pour le calcul de  $\Phi(\vec{r})$  et de  $J(\vec{r})$ ), avec prolongement analytique des fonctions  $\Psi_0(\vec{r})$ ,  $q(\vec{r})$  et  $n_0(\vec{r}, \Omega')$  (hypothèse classique des « piles images »).

---

(\*) - Cette hypothèse serait inutile en théorie multigroupe, puisqu'on aurait à traiter un problème homogène, les sources dans un groupe étant déterminées par les flux dans les autres groupes.

L'hypothèse (c) est valable dans la mesure où l'hypothèse (b) est satisfaite, ce qui peut n'être qu'approximatif si le réseau comporte des canaux et *a fortiori* des fenêtres. On verra en 3ème partie (section 4) et en annexe 2 comment on peut s'affranchir de ces hypothèses et on calculera les corrections qui en résultent.

*Il est important de noter qu'aucune condition n'est imposée à la capture dans le réseau.*

#### Première expression du coefficient de diffusion

Le détail du calcul, exposé en annexe 1, conduit à l'expression suivante, où

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{r(\vec{r}) \Sigma(\vec{r})} \int_{(4\pi)} n_0(\vec{r}, \vec{\Omega}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad \text{est le flux en réseau infini, où } \Omega_k \text{ est}$$

la composante  $k$  du vecteur  $\vec{\Omega}$  et où  $R_\ell = \vec{r}_\ell \cdot \vec{r}_{\ell+1}$

$$(12) \quad D_k = \frac{1}{\int_{(\infty)} \phi(\vec{r}) d\vec{v}} \left\{ \int_{(\infty)} d\vec{v} \int_{(\infty)}^1 \frac{e^{-\sum R}}{4\pi R^2} \Omega_k^2 R [q(\vec{r}_1) + n(\vec{r}_1, \vec{\Omega})] \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{(\infty)} d\vec{v} \int_{(\infty)}^1 \frac{e^{-\sum R}}{4\pi R^2} \Omega_k H_{\infty}^{(\ell)} \Omega_{\ell,k} R_\ell [q(\vec{r}_{\ell+1}) + n_0(\vec{r}_{\ell+1}, \vec{\Omega})] \right\}$$

On montre en annexe 1 que cette expression est équivalente à la définition classique de l'aire caractéristique par le carré moyen de la distance en ligne droite jusqu'à absorption. Le premier terme représente la contribution des termes carrés (somme des carrés des parcours élémentaires) ; la série sur l'indice  $\ell$  représente la contribution des termes rectangles, figurant les corrélations angulaires entre parcours séparés par  $\ell$  collisions. Ces termes ne s'annulent pas dans un réseau hétérogène, même dans l'hypothèse du choc isotrope. Pour illustrer simplement cet effet, on peut dire qu'un neutron ayant traversé une cavité aura plus de chances de parcourir une grande distance lors de son parcours suivant s'il est diffusé vers l'arrière que s'il est diffusé vers l'avant; d'où, si le réseau comporte des canaux, une diminution sensible du coefficient radial, le coefficient axial n'étant pas affecté. Cet effet, négligé dans la théorie de BEHRENS [3], a été mis en évidence par SCHAEFER et PARKYN [5], par comparaison avec des résultats expérimentaux et au moyen de calculs Monte-Carlo, par GRANT [6] et par LALETTIN [7], en utilisant des méthodes analytiques.

Si l'on compare maintenant l'expression (12) de  $D_k$  au développement (8) de la densité de diffusion  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}')$ , on constate que le fait de négliger la série des termes rectangles revient à approximer la fonction  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}')$  par la fonction d'essai  $N_o(\vec{r}, \vec{\Omega}') = \Psi_o(\vec{r}) n_o(\vec{r}, \vec{\Omega}')$ ; en d'autres termes, la représentation de la fonction  $N$ , et par conséquent du flux, par un produit d'une fonction macroscopique et d'une solution en réseau infini est incorrecte \*; ceci revient à admettre que l'existence d'un gradient macroscopique apporte une perturbation dans la structure fine du flux ; c'est le point de vue adopté dans [6] et [7]. Signalons enfin que dans une étude non publiée, A. AMOUYAL a montré, en partant d'un point de vue différent, que la factorisation du flux n'est pas compatible avec la conservation des neutrons.



---

(\*) La factorisation du flux introduit une erreur non seulement dans le calcul des fuites, mais aussi dans celui du facteur d'utilisation thermique; toutefois cette dernière erreur est négligeable et tend d'ailleurs vers zéro avec la laplacien.

## 2 ème Partie

### NOUVELLE FORMULATION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION

#### Section 1 - ETUDE DE LA CONTRIBUTION PRINCIPALE $D_k^{(0)}$ (TERMES CARRES)

##### *Introduction des probabilités de collision*

Malgré son intérêt physique la représentation par le carré moyen se prête mal, hormis dans quelques cas très simples, à un calcul pratique. L'expression (12) n'est pas plus utilisable; aussi allons-nous la transformer en fixant pour le moment notre attention sur la contribution principale  $D_k^{(0)}$ ; l'intégrale sur  $d\Omega_1$  peut s'exprimer en coordonnées sphériques, l'origine étant le point  $\vec{r}$ :

$$\int_{(4\pi)} \frac{d\Omega}{4\pi} \Omega_k^2 \int_0^\infty R e^{-\sum \widetilde{R}} [q(\vec{r}_1) + n_o(\vec{r}_1, \vec{\Omega})] dR$$

Une intégration par parties permet de transformer l'intégrale sur  $dR$  en

$$-\int_{R=0}^\infty R \int_R^\infty e^{-\sum \widetilde{R}'} [q(\vec{r}_1') + n_o(\vec{r}_1', \vec{\Omega})] dR' + \int_0^\infty dR \int_R^\infty e^{-\sum \widetilde{R}'} [q(\vec{r}_1') + n_o(\vec{r}_1', \vec{\Omega})] dR'$$

( $R'$  est la distance vraie et  $\sum \widetilde{R}'$  la distance optique entre  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_1'$ ). Le premier terme est nul puisque l'intégrale sur  $dR'$  est une fonction continue de  $R$  (seules les dérivées étant discontinues) qui est finie pour  $R = 0$  et qui tend vers zéro sensiblement comme une exponentielle quand  $R$  tend vers l'infini. Dans le second terme apparaît l'intégrale

$$\int_R^\infty e^{-\sum \widetilde{R}'} [q(\vec{r}_1') + n_o(\vec{r}_1', \vec{\Omega})] dR'$$

qui, compte tenu de la définition de la densité en phase  $v(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$  au point  $\vec{r}_1$ , peut encore s'écrire

$$4\pi e^{-\sum \widetilde{R}} v(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$$

d'où une nouvelle expression de  $D_k^{(0)}$ , qui ne fait plus intervenir les sources de manière explicite :

$$(13) \quad D_k^{(0)} = \frac{1}{\int_{(\infty)}^{} \phi(\vec{r}) dv} \int_{(\infty)}^{} dv \int_{(\infty)}^{} dv_1 \frac{e^{-\sum R}}{R^2} \Omega_k^2 \nu(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$$

Posons maintenant

$$(14) \quad P_{ij, k} = \frac{1}{V_i \phi_i \lambda_j} \int_{(j)}^{} dv \int_{(i)}^{} dv_1 \frac{e^{-\sum R}}{R^2} 3 \Omega_k^2 \nu(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$$

$V_i$  étant le volume du milieu  $i$ ,  $\phi_i$  le flux moyen dans ce milieu et  $\lambda_j$  le libre parcours total dans le milieu  $j$ .

Dans le cas d'un réacteur sphérique, cubique ou cylindrique optimum, ou plus généralement si  $\sum_k \Omega_k^2 B_k^2$  est indépendant de  $\vec{\Omega}$ , on n'aura à utiliser que des quantités  $P_{ij}$  moyennes, que l'on repérera par l'indice 0, dans lesquelles  $3 \Omega_k^2$  disparaît :

$$(15) \quad P_{ij, 0} = \frac{1}{V_i \phi_i \lambda_j} \int_{(j)}^{} dv \int_{(i)}^{} dv_1 \frac{e^{-\sum R}}{R^2} \nu(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$$

On définira de même un coefficient de diffusion moyen par  $D_0 = \frac{1}{3} \sum_k D_k$

La quantité  $P_{ij, 0}$  définie par (15) n'est autre que la probabilité pour un neutron naissant dans le milieu  $i$  suivant une distribution spatiale et angulaire proportionnelle à la densité en phase  $\nu(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$  régnant dans ce milieu, de subir sa première collision dans le milieu  $j$ . Par extension, nous pouvons considérer la quantité  $P_{ij, k}$  définie par (14) comme une probabilité orientée suivant la composante  $k$ , bien que le sens physique de cette quantité n'apparaisse pas clairement. Compte tenu de ces définitions, l'expression (13) devient :

$$(16) \quad D_k^{(0)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sum_i V_i \phi_i \lambda_j P_{ij, k}}{\sum_i V_i \phi_i}$$

Cette expression apparaît comme une généralisation des expressions (1) et (2). En effet, dans le cas d'un mélange homogène, on a  $P_{ij,k} = V_j \Sigma_j / \sum_j V_j \Sigma_j$  d'où l'expression (1). Pour obtenir l'expression (2), il faut supposer que  $P_{ij,k} = \delta_{ij}$ , c'est-à-dire qu'un neutron est certain de subir sa première collision dans le milieu où il est né, où encore que les dimensions de chaque milieu sont grandes vis-à-vis de son libre parcours. L'expression (2) est donc la limite de la contribution principale  $D_k^{(0)}$  de  $D_k$  lorsqu'on passe à l'approximation élémentaire de la diffusion.

On a vu que l'application de la formule (2) au cas d'un réseau comportant des cavités conduisait à un coefficient de diffusion infini. La formule (16) donne un résultat fini car, si le libre parcours  $\lambda_j$  dans le milieu  $j$  tend vers l'infini, la probabilité pour qu'un neutron subisse sa première collision dans ce milieu tend vers zéro et le produit  $\lambda_j P_{ij,k}$  reste fini, comme le montre l'expression (14).

### Relations utiles

Le problème est donc ramené au calcul des quantités  $P_{ij,k}$ . Ces quantités sont liées entre elles par certaines relations qui facilitent les calculs. Tout d'abord la relation de conservation :

(17)

$$\sum_j P_{ij,k} = 1$$

Cette relation ne s'applique en toute rigueur qu'aux probabilités moyennes  $P_{ij,0}$ , définies par (15) mais l'erreur induite sur  $D_k$  en l'appliquant aux probabilités orientées  $P_{ij,k}$  est insignifiante \*\*.

Une autre relation d'un emploi pratique peut être écrite si l'on accepte l'approximation suivante : en constatant que la densité en phase dans un milieu  $i$  est rarement très éloignée de l'uniformité et de l'isotropie, il est légitime de calculer  $P_{ij,k}$  en supposant que le neutron naît dans le milieu  $i$  non plus suivant une distribution proportionnelle à la densité en phase  $\nu(\vec{r}_1, \Omega)$ , mais suivant une distribution uniforme et isotrope. On verra en annexe 3 que cette approximation est justifiée dans les cas usuels et qu'il est de toute manière possible d'y remédier par des corrections simples. L'expression de  $P_{ij,k}$  devient

(\*) Mais il est important de noter que dans l'approximation de diffusion,  $D_k$  ne se réduit pas à l'expression (2); s'il en était ainsi, les effets d'anisotropie disparaîtraient dans cette approximation, ce qui serait en contradiction avec les résultats obtenus par SPINRAD [18] et par GALANIN [19]. Les termes de corrélation angulaire qui seront étudiés plus loin ne s'annulent pas dans l'approximation de diffusion et sont responsables des effets d'anisotropie. Cependant, pour une direction  $\vec{z}$  parallèle aux plans ou aux génératrices des cylindres, ces termes s'annulent identiquement (au moins si le choc est isotrope); dans ce cas, l'expression (2) est bien la limite de  $D_z$ , ce qui est en accord avec [18] et [19].

(\*\*) On peut en effet montrer aisément que :

$$\sum_i P_{ij,k} = \frac{1}{V_i \phi_i} \int_{(i)} d\vec{v}_1 \int_{(ij)} d\Omega \frac{3\Omega^2}{k} \nu(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$$

Développons la fonction angulaire  $\nu(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$  en harmoniques sphériques en repérant l'angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $k$ . On voit alors immédiatement que  $\int d\Omega \frac{3\Omega^2}{k} \nu(\vec{r}_1, \vec{\Omega})$  diffère de  $\phi(\vec{r}_1)$ , donc que  $\sum_i P_{ij,k}$  diffère de l'unité, si le coefficient de l'harmonique  $y_2^0(\theta, \phi)$  n'est pas nul au point  $\vec{r}_1$ , ce qui est le cas général. Mais on conçoit que l'erreur induite sur  $D_k^{(0)}$  en négligeant cette différence est insignifiante.

$$(18) \quad P_{ij, k} = \frac{1}{V_i \lambda_j} \int_{(j)} dv \int_{(i)} dv_1 \frac{e^{-\sum R}}{4\pi R^2} 3 \Omega_k^2$$

On peut alors écrire le théorème de réciprocité :

$$(19) \quad V_i \lambda_j P_{ij, k} = V_j \lambda_i P_{ji, k}$$

#### Forme pratique de l'expression du coefficient de diffusion

Il est commode dans la pratique d'introduire des probabilités réduites  $p_{ij, k}$  définies par

$$(20) \quad p_{ij, k} = \frac{\lambda_j}{r_j} P_{ij, k} \text{ avec } r_j = \frac{2 V_i}{S_j}$$

$S_j$  étant la surface du milieu  $j$ . Soient  $V_t = \sum_i V_i$  et  $\phi_t = \frac{\sum_i V_i \phi_i}{V_t}$ . Spécifions, dans l'ensemble des milieux  $i$ , un milieu particulier  $m$ . On peut alors obtenir, compte tenu des relations de conservation et de réciprocité, l'expression suivante où ne figurent plus que des probabilités indépendantes :

$$(21) \quad \frac{D_k^{(0)}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = 1 + \frac{\phi_m}{\phi_t} \left\{ \sum_i \frac{V_i}{V_t} \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \right) \right.$$

$$+ \sum_i \sum_{i \neq j} \mathcal{E}_{ij} \frac{V_i}{V_t} \frac{r_j}{\lambda_m} \left[ \left( \frac{\phi_i}{\phi_m} \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_j} \right) \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(\phi_j - \lambda_m)}{\phi_m \lambda_j} \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \right) \right] P_{ij, k} \right\}$$

les sommes s'étendant ici à tous les milieux sauf le milieu  $m$ , et  $\mathcal{E}_{ij}$  étant égal à 1 si  $i \neq j$  et à  $\frac{1}{2}$  si  $i = j$ .

**Section 2 - ETUDE DES TERMES DE CORRELATION ANGULAIRE (TERMES RECTANGLES)**

Nous allons maintenant étudier les termes de la série sur l'indice  $\ell$  apparaissant dans (12). En effectuant sur ces termes une intégration par parties en tout point analogue à celle effectuée sur le terme principal, on peut mettre le coefficient de diffusion sous la forme générale<sup>\*</sup>

$$(22) \quad D_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sum_{ij} v_i \phi_i \lambda_j [P_{ij,k}^{(\ell)} + \sum_{\ell=1}^{\infty} P_{ij,k}^{(\ell)}]}{\sum_i v_i \phi_i}$$

avec

$$(23) \quad P_{ij,k}^{(\ell)} = \frac{1}{v_i \phi_i \lambda_j} \int_{(j)} dv \int_{(\infty)} dv_1 \frac{e^{-\sum R}}{R^2} 3 \Omega_k H_{\infty} \prod_i \Omega_{\ell,k} \nu(\vec{r}_{\ell+1}, \vec{\Omega})$$

$$= \frac{1}{v_i \lambda_j} \int_{(j)} dv \int_{(\infty)} dv_1 \frac{e^{-\sum R}}{4\pi R^2} 3 \Omega_k H_{\infty}^{(\ell)} \prod_i \Omega_{\ell,k}$$

$\prod_i$  étant une fonction de la variable  $\vec{r}_{\ell+1}$  égale à 1 dans le milieu i et nulle ailleurs. Dans les quantités  $P_{ij,0}^{(\ell)} = \frac{1}{3} \sum_k P_{ij,k}^{(\ell)}$  apparaîtra le produit scalaire des vecteurs  $\vec{\Omega}_i$  et  $\vec{\Omega}_{\ell}$ .

Les  $P_{ij,k}^{(\ell)}$  n'ont pas de signification physique immédiate, mais on conçoit qu'ils représentent des probabilités pour un neutron né dans le milieu i de subir sa  $(\ell + 1)$ ème collision dans le milieu j, étant entendu qu'il existe une corrélation angulaire entre le premier et le dernier parcours et que les collisions intermédiaires peuvent se produire dans n'importe quel milieu. On définira des probabilités réduites  $p_{ij,k}^{(\ell)}$  en généralisant la relation (20).

Le théorème de réciprocité (19) peut encore servir; quant au théorème de conservation (17), il a pour équivalent lorsque le choc est isotrope :

$$(24) \quad \sum_j P_{ij,k}^{(\ell)} = 0$$

\* On peut encore écrire la somme  $P_{ij,k} + \sum_{\ell=1}^{\infty} P_{ij,k}^{(\ell)}$  sous une forme globale équivalente

$$P_{ij,k} + \sum_{\ell=1}^{\infty} P_{ij,k}^{(\ell)} = \frac{3}{v_i \phi_i \lambda_j} \int_{(j)} dv \int_{(4\pi)} d\Omega \int_{(j)} dv' \int_{(4\pi)} d\Omega' G(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \Omega_k \Omega_k' \nu(\vec{r}, \vec{\Omega})$$

où  $G(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}')$  est la densité en phase au point  $\vec{r}$  et dans la direction  $\vec{\Omega}$ , produite par une source unité située au point  $\vec{r}'$  et dirigée suivant la direction  $\vec{\Omega}'$ .

Dans le cas d'une loi de choc quelconque, si  $r_j$  est le nombre de secondaires par collision dans le milieu  $j$  et  $\overline{\cos \beta_j}$  le cosinus moyen de l'angle de diffusion dans ce milieu, on peut montrer que :

$$(25) \quad \sum_i p_{ij,k}^{(\ell)} = \sum_j p_{ij,k}^{(\ell-1)} r_j \overline{\cos \beta_j}$$

avec la convention  $p_{ij,k}^{(0)} = p_{ij,k}$

Si la structure du réseau est indépendante d'une variable  $k$  et si le choc est isotrope, les termes de corrélation angulaire relatifs à cette variable sont nuls.

Dans le cas particulier d'un milieu homogène, pour une loi de choc quelconque, on a  $P = 1, P^{(1)}$

$$= r \overline{\cos \beta}, P^{(2)} = r^2 \overline{\cos \beta}^2, \text{ d'où}$$

$$D_k = \frac{1}{3} \lambda (1 + r \overline{\cos \beta} + r^2 \overline{\cos \beta}^2 + \dots) = \frac{1}{3} \frac{\lambda}{1 - r \overline{\cos \beta}}$$

ce qui fait apparaître la notion de libre parcours de transport  $\lambda^{tr} = \frac{\lambda}{1 - r \overline{\cos \beta}}$

On peut montrer que l'expression pratique (21) est encore valable lorsqu'on tient compte des termes de corrélation angulaire. Il suffit d'ajouter aux probabilités réduites  $p_{ij,k}$  les séries  $\sum_{\ell=1}^{(\ell)} p_{ij,k}$  et de remplacer, partout où ils apparaissent explicitement, les libres parcours totaux dans chaque milieu par les libres parcours de trans-

port correspondants  $\frac{\lambda_i}{1 - r_i \overline{\cos \beta_i}}$ . Toutefois il importe de se souvenir que le calcul des quantités  $p_{ij,k}$  et  $p_{ij,k}^{(\ell)}$  doit s'effectuer, non à partir des libres parcours de transport, mais à partir des libres parcours totaux, la loi de choc intervenant dans les

$p_{ij,k}^{(\ell)}$  par l'intermédiaire de la fonction  $c(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$ . L'approximation consistant à calculer ces quantités à partir d'une loi de choc isotrope, en introduisant les libres parcours de transport, sera utilisée plus loin; elle ne repose que sur une base intuitive sommaire et n'a d'autre justification qu'un souci de simplicité.

### 3ème Partie

## APPLICATION AU CAS DE RESEAUX CLASSIQUES

### Section 1 - CALCUL DE LA CONTRIBUTION PRINCIPALE

#### Problème à deux milieux

En nous limitant pour le moment à l'étude de la contribution principale, nous commencerons par traiter le cas d'un réseau très simple, celui dans lequel la cellule élémentaire est composée d'un milieu matériel  $m$  quelconque entourant une cavité  $c$  de forme convexe ; la densité en phase est partout uniforme et isotrope. Nous supposerons pour l'instant que l'épaisseur de modérateur entre deux cavités est assez grande vis-à-vis du libre parcours  $\lambda_m$  (l'étude des termes d'interaction sera abordée plus loin). D'après (21), la seule probabilité à calculer est ici  $P_{cc,k}$ , définie par (14) et (20), qui peut se transformer en une intégrale étendue à la surface  $S_c$  de la cavité :

$$(26) \quad P_{cc,k} = \frac{1}{2 r_c V_c} \int_{(S_c)} ds \int_{(2\pi)} \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot 3 \Omega_k^2 X^2$$

où  $X$  est la longueur de la corde dans la cavité au point de la surface  $S_c$  et dans la direction  $\vec{\Omega}$  considérés, et où  $\mu$  est égal à  $|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|$ ,  $\vec{n}$  étant la normale unitaire à la surface; l'intégration angulaire s'étend à l'angle solide  $(2\pi)$  des directions de neutrons entrant dans la cavité.

La quantité  $P_{cc,k}$  est le rapport du carré moyen de la composante  $k$  de la corde  $X$  au carré de la moyenne de cette composante. Prise en moyenne sur  $k$ , elle n'est autre que la quantité  $Q$  définie\* par BEHRENS [3].

L'expression (21) se réduit ici à la forme suivante, où l'on a posé  $P_{cc,k} = Q_k$  :

$$(27) \quad \boxed{\frac{D_k^{(0)}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = 1 + \frac{V_c}{V_t} + \frac{V_c}{V_t} \cdot \frac{r_c}{\lambda_m} Q_k}$$

---

(\*) La relation  $P_{cc,0} = \frac{r_c}{\lambda_c} Q$ , qui représente le premier terme du développement de la probabilité de collision classique  $P_c$  en puissances de la section efficace  $\frac{1}{\lambda_c}$ , figure également dans [8] (p. 41, éq. 2).

Comme la section de capture moyenne vaut ici  $\Sigma_m^c \frac{V_m}{V_c}$  (où  $\Sigma_m^c$

est la section de capture du milieu  $m$ ), il est facile de voir que cette expression est équivalente à celle obtenue par BEHRENS pour l'aire de diffusion :

$$\frac{L_k^2}{L_m^2} = 1 + \frac{2 V_c}{V_m} \frac{V_c}{V_m} \frac{r_c}{\lambda_m} Q_k$$

### Problème à trois milieux

Nous étudierons maintenant un réseau dont la cellule se compose d'un modérateur  $m$  entourant une cavité  $c$  dans laquelle se trouve un élément combustible  $u$  dont les caractéristiques diffèrent de celles du milieu  $m$ . Nous ne ferons aucune hypothèse sur la forme de chacun des milieux si ce n'est que les deux frontières devront être convexes ; nous maintenons pour le moment l'hypothèse relative à l'espacement des cavités. Nous aurons ici, d'après (21), trois probabilités indépendantes à calculer dont les deux premières peuvent s'écrire après transformation :

$$(28) \quad p_{uu,k} = T_k = \frac{\lambda_u}{r_u} \left[ 1 - \frac{\lambda_u}{V_u} \int_{(S_u)} ds \int_{(2\pi)} \frac{d\Omega}{4\pi} 3 \Omega_k^2 (1 - e^{-U/\lambda_u}) \right]$$

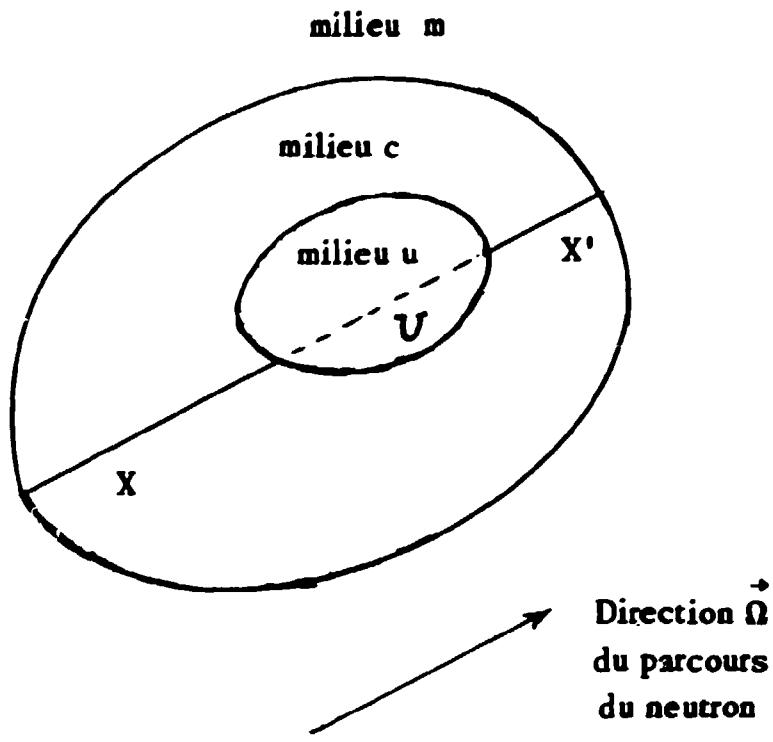
$$(29) \quad p_{cu,k} = W_k = \frac{\lambda_u}{r_u V_c} \int_{(S_u)} ds \int_{(2\pi)} \frac{d\Omega}{4\pi} 3 \Omega_k^2 X (1 - e^{-U/\lambda_u})$$

$U$  étant la corde dans le milieu  $u$  au point de la surface  $S_u$  et dans la direction  $\vec{\Omega}$  considérés, et  $X$  étant la corde correspondante dans la cavité, définie sur la figure ; on a  $\mu = |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|$ ,  $\vec{n}$  étant ici la normale unitaire à la surface  $S_u$ .

Quant à la troisième probabilité indépendante,  $p_{cc,k}$ , nous la décomposerons en une somme de deux termes

$$p_{cc,k} = \hat{p}_{cc,k} + \hat{p}'_{cc,k}$$

le premier étant relatif aux parcours d'un point à un autre de la cavité ne traversant pas le milieu  $u$ , et le second aux parcours traversant le milieu  $u$  sans y subir de collision ; nous poserons  $\hat{p}_{cc,k} = Q_k$  et  $\hat{p}'_{cc,k} = Q'_k$ . La première de ces quantités, définie



par BEHRENS [3] est donnée par l'expression (26) généralisée au cas d'une cavité annulaire, c'est-à-dire que la surface d'intégration comprendra ici les frontières intérieure et extérieure de la cavité. La seconde quantité aura pour expression

$$(30) \quad \hat{p}_{cc,k} = Q'_k = \frac{1}{r_c V_c} \int_{S_u} ds \int_{\mu} \frac{d\Omega}{4\pi} 3 \Omega_k^2 X X' e^{-U/\lambda_u}$$

avec les mêmes conventions que dans (28) et (29),  $X'$  étant la corde dans la cavité définie sur la figure.

L'expression (21) prend ici la forme :

$$(31) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{D_k^{(0)}}{1 - \frac{1}{3} \lambda_m} &= 1 + \frac{\phi_m}{\phi_t} \left\{ \frac{V_c + V_u (1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}) + \frac{V_c \phi_c r_c}{V_t \phi_m \lambda_m} (Q_k + Q'_k)}{V_t - V_u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_c r_u}{V_t \lambda_m} \left[ \frac{\phi_c}{\phi_m} \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{\phi_u}{\phi_m} \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right] W_k \right\} \\ &\quad + \left. \frac{V_u r_u}{V_t \lambda_m} \left( \frac{\phi_u}{\phi_m} \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) T_k \right\} \end{aligned}}$$

Pour le groupe rapide, la formule se simplifie puisqu'on peut admettre que  $\phi_u = \phi_c = \phi_m$ :

$$\frac{D_k}{\frac{1}{3} \lambda_m} = 1 + \frac{V_c}{V_t} + \frac{V_u}{V_t} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) + \frac{V_c}{V_t} \frac{r_c}{\lambda_m} (Q_k + Q'_k) + \frac{2V_c}{V_t} \frac{r_u}{\lambda_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \bar{W}_k + \frac{V_u}{V_t} \frac{r_u}{\lambda_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right)^2 T_k$$

Le flux moyen dans la cavité pourra se calculer au moyen de la formule :

$$\frac{\phi_c}{\phi_u} = G' + r_u \sum_u^c \bar{N}$$

$\sum_u^c$  étant la section de capture du milieu  $u$  et  $G'$  une quantité intervenant dans le calcul du facteur  $f$  [9, 10], égale approximativement au rapport du flux moyen sur la surface du milieu  $u$  au flux moyen dans son volume ; la quantité  $\bar{N}$  est donnée par :

$$\bar{N} = 1 - \frac{2}{V_c} \int_{(S_u)} ds \int_{(2\pi)} \mu \frac{d\Omega}{4\pi} X$$

### Comparaison avec les formules classiques

Dans le cas particulier traité par BEHRENS [3], - milieux  $u$  et  $m$  composés du même matériau, flux constant dans le réseau - la formule (31) obtenue ici se réduit à :

$$\frac{D_k}{\frac{1}{3} \lambda_m} = 1 + \frac{V_c}{V_t} + \frac{V_c}{V_t} \cdot \frac{r_c}{\lambda_m} (Q_k + Q'_k)$$

Au terme  $Q'_k$  près, cette formule est semblable à celle déduite de la théorie de BEHRENS.

La présence de ce terme traduit le fait, que, dans le cas d'une cavité concave comme une cavité annulaire, un neutron peut traverser deux fois la même cavité sans subir de choc dans le milieu  $u$ , et qu'il existe un certain couplage entre les deux parcours alignés ; en d'autres termes, le carré moyen du parcours total dans la cavité

n'est pas égal à la somme des carrés moyens des deux parcours partiels. Pour cette raison, l'application de la formule de BEHRENS (comme de celle de WEINBERG et NODE-RER [11] (pp. 51-58) ) à des cavités annulaires est erronée, d'autant plus que le milieu  $u$  est plus transparent, et indépendamment du fait qu'elle ne tient pas compte des termes de corrélation angulaire.

### Application à la géométrie cylindrique

Nous étudierons maintenant le cas où la structure du réseau est indépendante de l'une  $z$  des trois variables  $k$ . Nous supposerons, ou bien que le réseau présente les mêmes caractéristiques dans les directions définies par les deux autres variables, ou bien que la somme  $S_k \Omega_k^2 B_k^2$  est indépendante de la projection du vecteur  $\vec{\Omega}$  sur  $k \neq z$

le plan de ces deux variables (cas d'un réacteur à base circulaire ou carrée). C'est à l'une de ces conditions seulement qu'il est légitime de se limiter au calcul d'un coefficient axial  $D_z$  et d'un coefficient radial  $D_r$ .

Les frontières des milieux  $u$  et  $m$  sont des cylindres de section convexe quelconque. Soient alors  $U_0$ ,  $X_0$  et  $X'_0$  les projections des cordes  $U$ ,  $X$  et  $X'$  sur le plan normal aux génératrices et  $\phi$  l'angle de la normale à la surface au point considéré avec la projection du parcours du neutron sur ce plan. Si  $\sigma_c$  et  $\ell_c$  représentent respectivement

la section et le périmètre total du canal ( $r_c = \frac{2\sigma_c}{\ell_c}$ ), on a :

$$(32) \quad Q_k = \frac{1}{2\pi r_c^2 \sigma_c} \int_{(\ell_c)}^{d\ell} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi X_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta 3 \Omega_k^2$$

La quantité  $3 \Omega_k^2$  s'écrit, suivant que l'on s'intéresse au coefficient axial, radial ou moyen ( $D_0 = \frac{D_z + 2D_r}{3}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \Omega_z^2 = 3 \cos^2 \theta \\ 3 \Omega_r^2 = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \\ 3 \Omega_0^2 = 1 \end{array} \right.$$

L'intégration de (32) sur  $\theta$  est immédiate, d'où, comme l'a montré BEHNENS :

$$\begin{cases} Q_z = \frac{3}{2} Q_0 \\ Q_r = \frac{3}{4} Q_0 \end{cases}$$

D'autre part :

$$Q'_k = \frac{1}{2\pi r_c \sigma_c} \int_{(\ell_u)}^{\infty} d\ell \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi X_0 X'_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta 3 \Omega_k^2 e^{-\lambda_u \sin \theta} V_0$$

$$W_k = \frac{\lambda_u}{2\pi r_u \sigma_c} \int_{(\ell_u)}^{\infty} d\ell \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi X_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta 3 \Omega_k^2 (1 - e^{-\lambda_u \sin \theta}) V_0$$

$$T_k = \frac{\lambda_u}{r_u} \left[ 1 - \frac{\lambda_u}{2\pi \sigma_u} \int_{(\ell_u)}^{\infty} d\ell \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^2 \theta 3 \Omega_k^2 (1 - e^{-\lambda_u \sin \theta}) V_0 \right]$$

Ces expressions font apparaître des intégrales du type :

$$\mathcal{E}_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{\sin \theta}} \sin^n \theta d\theta$$

Ces fonctions qui sont, au signe près, les primitives successives de la fonction de Bessel  $K_0(x)$ , ont été tabulées sur calculateur MERCURY. Elles font intervenir les fonctions  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  et  $Kj_0(x) = \int_0^x K_0(t) dt$ . Leurs courbes représentatives sont tracées sur la figure 6.

On a enfin :

$$\bar{N} = 1 - \frac{1}{\pi \sigma_c} \int_{(\ell_u)}^{\infty} d\ell \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi X_0$$

(\*) Les expressions analytiques des  $\mathcal{E}_n(x)$  sont les suivantes :

$$\mathcal{E}_0(x) = \frac{\pi}{2} \cdot K_0(x)$$

$$\mathcal{E}_1(x) = x K_1(x) + x \left[ \frac{\pi}{2} \cdot K_0(x) \right]$$

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{x^2}{2} K_0(x) + \frac{x^3}{3} K_1(x) + \frac{x^4+1}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \cdot K_0(x) \right]$$

$$\mathcal{E}_3(x) = \frac{x^3}{6} K_0(x) + \frac{x^4+4x}{24} K_1(x) - \frac{x^5+3x}{6} \left[ \frac{\pi}{2} \cdot K_0(x) \right]$$

$$\mathcal{E}_4(x) = \frac{x^4+9x}{24} K_0(x) + \frac{x^5+7x^2}{24} K_1(x) + \frac{x^6+6x^2+9}{24} \left[ \frac{\pi}{2} \cdot K_0(x) \right]$$

Une table de la fonction  $Kj_0(x)$  est donnée dans [17].

### Symétrie de révolution

Si les frontières intérieure et extérieure du canal sont des cylindres de révolution concentriques de rayons respectifs  $a$  et  $c$ , on a, en posant  $\alpha = \frac{a}{c}$  et  $\eta = \frac{a}{\lambda_u}$

$$Q_0 = \frac{4}{3} F(\alpha)$$

où  $F(\alpha)$  est une fonction tabulée en particulier par BEHRENS et recalculée ici avec une précision accrue ; son expression analytique est :

$$F(\alpha) = \frac{1 - \frac{3\alpha}{4} + \frac{3\alpha^2}{4} - \frac{1}{2}[(1 + \alpha^2)E(\alpha) - (1 - \alpha^2)K(\alpha)]}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)}$$

$E(\alpha)$  et  $K(\alpha)$  étant les intégrales elliptiques complètes. D'autre part :

$$Q_k' = \frac{2\alpha}{\pi(1-\alpha)(1-\alpha^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi [\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \phi} \cdot \alpha \cos \phi]^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot 3\Omega_k^2 c \cdot \frac{2\eta \cos \phi}{\sin \theta}$$

$$W_k = \frac{2\alpha}{\pi(1-\alpha^2)\eta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi [\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \phi} \cdot \alpha \cos \phi] \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cdot 3\Omega_k^2 (1 - e^{-\frac{2\eta \cos \phi}{\sin \theta}})$$

$$T_k = \frac{1}{\eta} [1 - \frac{2}{\pi\eta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^2 \theta \cdot 3\Omega_k^2 (1 - e^{-\frac{2\eta \cos \phi}{\sin \theta}})]$$

$$(33) \quad \bar{N} = \frac{1 - \frac{2\phi_0}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin 2\phi_0}{1 - \alpha^2} \quad \text{avec } \phi_0 = \text{Arc sin } \alpha$$

$\bar{N}$  est assez bien approximé par  $1 - \alpha$ .

Les tables et courbes jointes à cette étude permettent de traiter immédiatement les problèmes à symétrie de révolution. On pourra éventuellement, si  $\phi_u$  est différent de  $\phi_m$ , effectuer la correction de l'annexe 3, pour tenir compte de la non-uniformité du flux dans la cavité (inégalité des courants de neutrons entrant dans la cavité par unité de surface des frontières  $S_u$  et  $S_m$ ), mais l'examen du tableau 1 montre que ce n'est pas nécessaire dans les cas usuels.

## Section 2 - CALCUL DES TERMES DE CORRELATION ANGULAIRE

(ℓ)

Le calcul pratique des termes  $p_{ij, k}$  a été effectué jusqu'à l'ordre 2 dans le cas du problème à trois milieux défini ci-dessus ; les expressions analytiques ne seront données que pour une symétrie cylindrique de révolution. On maintient pour l'instant l'hypothèse sur l'espacement des canaux. On suppose l'isotropie du choc, ce qui élimine les termes relatifs à la variable  $z$  ; l'erreur introduite par cette approximation sera corrigée tant bien que mal par l'emploi, dans les expressions des  $p_{ij, k}$  et des  $p_{ij, r}^{(\ell)}$ , des libres parcours de transport. D'autre part, dans le but de réduire le nombre de fonctions et de paramètres à manipuler, on admet, pour le calcul de ces termes, que le milieu  $u$  est composé du même matériau que le milieu  $m$  (même libre parcours, même capture, même flux) ; les seules quantités à calculer sont alors les  $p_{cc, r}^{(\ell)}$ , dépendant des deux paramètres  $\alpha = \frac{a}{c}$  et  $\gamma = \frac{c}{\lambda_m}$ . En tenant compte comme plus haut de la transparence du milieu  $u$  par des termes  $Q'_r^{(\ell)}$ , on a pour  $\ell = 1$  :

$$p_{cc, r}^{(1)} = Q_r^{(1)} + Q'_r^{(1)} = -\frac{3r}{\pi^2 y^3 (1-\alpha)(1-\alpha^2)} \left\{ \int_y^\infty s ds \left[ \int_0^{\phi_0} \xi \cos \phi \mathcal{E}_1(y) d\phi \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{\phi_1} \xi \cos \phi \mathcal{E}_1(y+z) d\phi \right]^2 \right\} \\ + \int_0^{ay} s ds \left[ \int_0^\pi \xi^i \cos \phi \mathcal{E}_1(y') d\phi \right]^2 \right\}$$

avec  $\phi_0 = \text{Arc sin } \frac{y}{s}$        $\phi_1 = \text{Arc sin } \frac{a y}{s}$

$$\xi = \begin{cases} \sqrt{y^2 - s^2 \sin^2 \phi} - \sqrt{a^2 y^2 - s^2 \sin^2 \phi} & (0 < \phi < \phi_1) \\ 2 \sqrt{y^2 - s^2 \sin^2 \phi} & (\phi_1 < \phi < \phi_0) \end{cases}$$

$$y = s \cos \phi - \sqrt{y^2 - s^2 \sin^2 \phi}$$

$$z = 2 \sqrt{a^2 y^2 - s^2 \sin^2 \phi}$$

$$\xi^i = \sqrt{y^2 - s^2 \sin^2 \phi} - \sqrt{a^2 y^2 - s^2 \sin^2 \phi}$$

$$y' = -s \cos \phi + \sqrt{a^2 y^2 - s^2 \sin^2 \phi}$$

---

(\*) Cette approximation fait perdre une partie de la précision gagnée dans le calcul de la contribution principale de  $D_r$ , quant à l'effet de transparence du milieu  $u$  ; elle sera abandonnée dans une étude ultérieure.

Le terme  $\ell = 2$  n'a pour l'instant été calculé que pour un canal vide ( $a = 0$ ) :

$$p_{cc, r}^{(2)}(0) = Q_r^{(2)}(0) = -\frac{3r^2}{\pi^3 y^3} \left\{ 2\pi \int_y^\infty s_1 ds_1 H(s_1) \int_{s_1}^\infty s_2 ds_2 H(s_2) \int_1^\infty dx I_1(xs_1) K_1(xs_2) \right. \\ \left. + \int_y^\infty s_1 ds_1 H(s_1) \int_y^\infty s_2 ds_2 H(s_2) \int_\mu^\pi d\omega \cos \omega \frac{K_{j_0}(\omega) - K_{j_0}(\tilde{\omega})}{\rho} \right\}$$

avec

$$\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos \omega} \\ \tilde{\rho} = \begin{cases} \rho & (0 < \omega < \mu) \\ \rho - 2\sqrt{y^2 - \frac{s_1^2 s_2^2}{\rho^2}} \sin^2 \omega & (\mu < \omega < \pi) \end{cases}$$

$$\mu = \text{Arc cos} \left\{ \frac{1}{s_1 s_2} [y^2 - \sqrt{y^4 - y^2 (s_1^2 + s_2^2)} + s_1^2 s_2^2] \right\}$$

$$H(s_1) = \int_0^{\text{Arc sin}(y/s_1)} d\phi \cos \phi \xi_1 \mathcal{E}_1(y_1)$$

$$\xi_1 = 2\sqrt{y^2 - s_1^2 \sin^2 \phi} \quad y_1 = s_1 \cos \phi \cdot \sqrt{y^2 - s_1^2 \sin^2 \phi} \quad K_{j_0}(\rho) = \int_0^\rho K_0(t) dt$$

Les fonctions  $I_1$ ,  $K_0$  et  $K_1$  sont des fonctions de Bessel.

Pour pouvoir appliquer cette expression au cas d'un canal annulaire, on se recalera sur le cas  $\ell = 1$  en admettant que

$$(34) \quad Q_r^{(2)}(a) + Q_r'^{(2)}(a) = [Q_r^{(1)}(a) + Q_r'^{(1)}(a)] \frac{Q_r^{(2)}(0)}{Q_r^{(1)}(0)}$$

On a tracé sur la figure 4 le graphique de  $-[Q_r^{(1)} + Q_r'^{(1)}]$  et sur la figure 5 celui de  $q_r = -[Q_r^{(1)} + Q_r'^{(1)} + Q_r^{(2)} + Q_r'^{(2)}]$  pour  $r = 1$  (le nombre moyen de secondaires par collision dans le réseau est très voisin de 1, qu'il s'agisse du groupe rapide ou du groupe thermique). On doit, dans l'expression (31), retrancher de  $Q_k$  un terme  $q_k$  égal à zéro pour  $k = z$  et à  $q_r$  pour  $k = r$ .

## REMARQUE SUR LA CONVERGENCE DE LA SERIE DES $Q_r^{(\ell)}$ .

Le terme  $Q_r^{(\ell)}$  est lié au produit scalaire moyen de deux parcours d'un neutron dans le canal, en projection sur le plan normal aux génératrices, ces deux parcours étant séparés par  $\ell$  collisions dans les milieux solides. Le terme  $Q_r^{(\ell)}$  est donc négligeable si un neutron a perdu après  $\ell$  collisions la mémoire de sa direction d'entrée dans le canal. Les  $Q_r^{(\ell)}$  sont négatifs et leur somme compense en partie le terme principal  $Q_r$  égal à l'unité.

L'étude analytique de la série des termes rectangles en géométrie plane est faite en annexe 4. Cette étude montre que pour cette géométrie, la somme des termes rectangles compense exactement le terme principal égal alors à  $\frac{3}{4}$ ; d'autre part, elle montre que dans ce cas, la convergence de la série est très lente. Dans le problème des canaux, un raisonnement physique simple permet de voir que la compensation n'est que partielle; d'autre part, la convergence de la série sera d'autant plus rapide que les canaux seront de plus faibles dimensions vis-à-vis du libre parcours; à la limite  $\gamma = 0$ , la série des termes rectangles s'annule. Mais pour des canaux d'assez grandes dimensions, il est probablement insuffisant de se limiter aux deux premiers termes. Une étude plus élaborée de la série est en cours.



### Section 3 - CALCUL DES TERMES D'INTERACTION ENTRE CANAUX DIFFERENTS \*

Pour pouvoir traiter des réseaux dans lesquels l'hypothèse de séparation des canaux est mal respectée, on a calculé les termes d'interaction  $\Delta Q_z$  et  $\Delta Q_r$  relatifs aux termes principaux  $Q_z$  et  $Q_r$  et le terme  $\Delta Q_r^{(1)}$  relatif au terme rectangle  $Q_r^{(1)}$ , ce dernier dans l'hypothèse du choc isotrope et moyennant une légère approximation d'autant plus justifiée que le pas est plus grand ; ces termes seront tabulés ultérieurement. Il est facile de voir que l'importance relative du terme  $\Delta Q_r^{(\ell)}$  par rapport au terme  $Q_r^{(\ell)}$  correspondant croît avec  $\ell$ , au moins pour les premières valeurs de  $\ell$  ; les termes d'ordre supérieurs ne doivent donc pas être négligeables pour des canaux très rapprochés. D'autre part, les termes d'interaction croissent très vite si l'on serre le réseau.

Les expressions analytiques de ces termes n'ont pour l'instant été établies que pour des canaux vides ; on doit les multiplier par le nombre de canaux voisins en interaction, soit 4 pour un pas carré.

$$\Delta Q_k = \frac{2}{\pi^2 \gamma} \int_0^{\omega_0} d\omega \int_{\zeta - a_0}^{\zeta + a_0} d\phi \cos^2 \phi Z \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta 3 \Omega_k^2 e^{-\frac{\rho}{\sin \theta}}$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 \gamma} \int_{\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_{\zeta - a_0}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos^2 \phi Z \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta 3 \Omega_k^2 e^{-\frac{\rho}{\sin \theta}}$$

avec

$$\omega_0 = \text{Arc cos} \frac{2\gamma}{\delta} \quad a_0 = \text{Arc sin} \frac{\gamma}{\ell}$$

$$Z = \frac{\delta^2 - 2\gamma\delta \cos \omega - \rho^2}{\rho} \quad \ell = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta \cos \omega}$$

$$\zeta = \text{Arc sin} \left( \frac{\delta \sin \omega}{\ell} \right) \quad \rho = \ell \cos \alpha - \sqrt{\gamma^2 - \ell^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\gamma = \frac{c}{\lambda_m} \quad \delta = \frac{d}{\lambda_m}$$

$d$  = distance entre les axes des deux canaux.

(\*) SCHAEFER et PARKYN [5] ont noté que la correction proposée par BEHRENS [3] pour rendre compte de cet effet est très insuffisante (dans le cas du réseau de pas 5,5 du tableau 2, elle augmente  $S_X$  de 0,01 seulement).

D'autre part :

$$\Delta Q_r^{(1)} = \frac{6}{\pi^3 \gamma^3} \int_0^\pi d\omega \int_\gamma^\infty \frac{g(\omega)}{s} ds H(s) H(s') \cos \mu$$

$$H(s) = \int_0^\infty \text{Arc sin}(y/s) d\phi \cos \phi \zeta E_1(y)$$

$$\xi = 2 \sqrt{\gamma^2 - s^2 \sin^2 \phi}$$

$$y = s \cos \phi + \sqrt{\gamma^2 - s^2 \sin^2 \phi}$$

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta}{2 \cos \omega} & \text{si } 0 < \omega < \frac{\pi}{2} \\ \infty & \text{si } \frac{\pi}{2} < \omega < \pi \end{cases}$$

$$s' = \sqrt{\delta^2 + s^2 - 2\delta s \cos \omega}$$

$$\cos \mu = \pm \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{s'^2} \sin^2 \omega}$$

$$\begin{cases} + \text{ si } s < \delta \cos \omega \\ - \text{ si } s > \delta \cos \omega \end{cases}$$

Pour pouvoir appliquer ces formules à des canaux annulaires, on pourra éventuellement opérer un truquage analogue à celui utilisé en (34) pour le calcul du terme  $Q_r^{(2)}$ , en se recalant sur le terme  $Q_r^{(1)}$ .



#### Section 4 - CALCUL DE LA CORRECTION DÉPENDANT DU LAPLACIEN

De même qu'en milieu homogène l'expression  $D = \frac{\lambda}{3}$  n'est que le premier terme du développement en puissance de  $B\lambda$  de l'expression  $D_k = \frac{1}{B^2 \lambda} (1 - \frac{1}{B\lambda} \text{arc tg } B\lambda)$ , où  $B = \sum_k B_k^2$  l'expression (22) de  $D_k$  n'est qu'une approximation valable lorsque la fonction macroscopique  $\psi_0(\vec{r})$  varie lentement le long d'un libre parcours de neutron (hypothèse (b) faite en première partie). Si le milieu comporte des canaux, et si le réacteur est de petites dimensions, cette condition peut être mal remplie. On peut alors montrer que les corrections à apporter aux probabilités pour s'affranchir de l'hypothèse (b) sont du second ordre en  $B_k$  sauf celle relative à la probabilité  $\hat{p}_{cc,z} = Q_z$  qui est du premier ordre en  $B_z$ ; comme les corrections du second ordre sont pratiquement négligeables, on peut se borner à retrancher de  $Q_z$  un terme correctif  $\delta Q_z$  tel que :

$$\delta Q_z = \frac{1}{2} B_z \frac{\overline{X_o}}{r_c^2}$$

$X_o$  étant la projection sur le plan radial de la corde  $X$  dans la cavité; en symétrie de révolution :

$$\delta Q_z = \frac{3\pi}{4} B_z (c + a) \overline{N}$$

---

$N$  étant la fonction de  $a = \frac{a}{c}$  définie en (33) (pour  $a = 0$ ,  $\delta Q_z = \frac{3\pi}{4} B_z c$ ). Cette correction n'a de sens que si  $B_z^2$  est positif. Ceci résulte de l'hypothèse d'extension à l'infini des domaines d'intégration (hypothèse (c)) admise plus haut. On trouvera en annexe 2 des résultats numériques permettant de mesurer l'influence de cette hypothèse.

## 4ème Partie

### RESULTATS NUMERIQUES

TABLEAU 1

Le tableau 1 permet de comparer les effets respectifs de l'inégalité des libres parcours  $\lambda_u$  et  $\lambda_m$ , de l'inégalité des flux moyens, de la non-uniformité du flux dans la cavité (annexe 3) et des termes de corrélation angulaire. Un calcul Monte-Carlo, limité au terme rectangle du premier ordre, a été effectué dans un cas par I.S. GRANT. Le rayon de la barre est de 1,30 cm, celui du canal de 3,50 cm ; dans les deux cas où le flux n'est pas uniforme, on a  $\frac{\phi_c}{\phi_u} = 1,470$  ( $\sum \frac{c}{u} = 0,323 \text{ cm}^{-1}$ ).

On voit dans ce tableau que l'erreur commise en négligeant la correction de l'annexe 3 peut être admise dans les cas usuels. D'autre part, on constate que l'erreur commise en posant  $\phi_u = \phi_c = \phi_m$  n'est pas prohibitive, et se trouve être de signe contraire à la précédente.

L'importance de l'effet d'inégalité des libres parcours, ainsi que celle des termes de corrélation angulaire, est par contre nettement mise en évidence.



Rayon de cellule	8,5								12							
$\phi_m / \phi_u$	1				1,656				1				1,734			
$\lambda_m$	1,65		1,65		2,55		1,65		1,65		1,65		2,55			
$\lambda_u$	4,83		1,65		1,65		4,83		1,65		1,65		1,65			
k	r	z	r	z	r	z	r	z	r	z	r	z	r	z	r	z
BEHRENS	1,362	1,578	1,362	1,578	1,286	1,426	1,286	1,426	1,182	1,290	1,182	1,290	1,143	1,214	1,143	1,214
Formule proposée sans termes rectangles	1,442	1,688	1,375	1,589	1,270	1,407	1,257	1,381	1,222	1,345	1,188	1,296	1,135	1,204	1,125	1,184
Formule proposée avec terme rectangle 1	1,400	*	1,333	*	1,242	*	1,232	*	1,201	*	1,167	*	1,122	*	1,113	*
Formule proposée avec termes rectangles 1 et 2	1,378	*	1,311	*	1,229	*	1,220	*	1,190	*	1,156	*	1,115	*	1,107	*
Correction annexe 3	*	*	*	*	*	*	1,226	1,393	*	*	*	*	*	*	1,110	1,189
Monte-Carlo	*	*	*	*	*	*	*	*	1,193	1,345	*	*	*	*	*	*
									$\pm 0,007$	$\pm 0,035$						

TABLEAU 1 - Valeurs de  $\frac{D_k}{\frac{1}{3} \lambda_m}$

## TABLEAU 2

Le tableau 2 montre l'influence respective des termes de corrélation angulaire, des termes d'interaction et de la correction dépendant du laplacien. Il s'agit de canaux vides disposés suivant un pas carré. On a adjoint à ce tableau les résultats obtenus (pour  $B_z = 0$ ) par SCHAEFER et PARKYN [5], par la méthode Monte-Carlo et par un calcul numérique du carré moyen ; ces calculs se limitent au terme rectangle du premier ordre ; ils tiennent compte de l'effet d'interaction. Cependant, les valeurs données dans [5] sont trop imprécises et présentent des anomalies trop accusées pour que la comparaison puisse apporter autre chose qu'une indication\*.

On voit que pour de gros canaux l'erreur commise en négligeant les  $Q_r^{(\ell)}$  d'ordre supérieur à 2 peut devenir appréciable. D'autre part, pour les réseaux de pas 6,0 et 5,5, l'interaction entre les canaux commence à se faire sentir; elle croîtra très rapidement si l'on serre le réseau.

La quantité calculée est ici, conformément à [5], le rapport de l'aire de diffusion du réseau à celle du modérateur..

---

(\*) Toutefois le désaccord entre les valeurs axiales BEHRENS et Monte-Carlo s'explique par le fait que ces dernières sont calculées à partir d'une source plane située à une cote fixée et non à partir d'une source répartie en volume comme cela doit se faire dans un calcul de réacteur (voir la discussion dans [5]). Les formules exposées ici sont donc bien adaptées à un calcul de réacteur, mais, pour le coefficient axial, exigent plus de prudence quant à l'interprétation d'une expérience exponentielle (indépendamment des difficultés rencontrées dans le calcul de la correction dépendant du laplacien). La méthode du Neutronstat, due à J. MARTELLY [15], est exempte de ces difficultés d'interprétation, puisque le flux y est sensiblement indépendant de la variable axiale.

Rayon du canal (en pouces)	2,0											
Libre parcours	1,0					0,5		1,5				
Pas	10,0		8,0		6,0		5,5		8,0			
k	r	z	r	z	r	z	r	z	r	z		
BEHRENS	1,57	*	1,86	1,98	2,47	3,14	4,52	3,84	5,26	2,47	3,44	
B. <sub>r</sub> + Q <sub>r</sub> <sup>(1)</sup>	1,51	*	*	1,87	*	2,92	*	3,54	*	2,25	*	
B. <sub>k</sub> + Q <sub>k</sub> <sup>(1)</sup> + Q <sub>k</sub> <sup>(2)</sup>	1,48	*	*	1,82 <sub>0</sub>	*	2,80	*	3,39	*	2,13	*	
B. <sub>k</sub> + Q <sub>k</sub> <sup>(1)</sup> + Q <sub>k</sub> <sup>(2)</sup> + 4ΔQ <sub>k</sub>	1,48	*	1,86	1,82 <sub>2</sub>	2,47	2,86	4,55	3,53	5,37	2,13	3,44	
B. <sub>k</sub> + Q <sub>k</sub> <sup>(1)</sup> + 4ΔQ <sub>k</sub> <sup>(1)</sup> + 4ΔQ <sub>k</sub> <sup>(2)</sup>	1,48	*	*	1,82 <sub>4</sub>	*	2,89	*	3,60	*	2,13	*	
B. <sub>k</sub> + Q <sub>k</sub> <sup>(1)</sup> + 4ΔQ <sub>k</sub> <sup>(1)</sup> + 4ΔQ <sub>k</sub> <sup>(2)</sup> - δQ <sub>k</sub> (pour B <sub>z</sub> <sup>2</sup> = 4.10 <sup>4</sup> cm <sup>-2</sup> )	*	1,83	*	2,42	*	4,45	*	5,24	*	3,35	*	
Monte-Carlo	1,51 ± 0,04	1,72 ± 0,05	1,84 ± 0,04	2,30 ± 0,08	2,92 ± 0,06	3,92 ± 0,10	*	*	2,22 ± 0,04	2,98 ± 0,10	1,73 ± 0,04	2,03 ± 0,06
Carré moyen sans termes rectangles	1,60 ± 0,03	1,86 ± 0,02	1,98 ± 0,03	2,43 ± 0,05	3,20 ± 0,02	4,10 ± 0,03	4,00 ± 0,05	5,30 ± 0,10	2,44 ± 0,02	3,33 ± 0,10	1,80 ± 0,02	2,16 ± 0,02
Carré moyen avec terme rectangle 1	1,55 ± 0,03	*	1,89 ± 0,03	*	3,00 ± 0,02	*	3,70 ± 0,05	*	2,22 ± 0,02	*	1,73 ± 0,02	

TABLEAU 2 - Valeurs de  $\frac{L^2 k}{L^2 m} = \frac{D_k}{\frac{1}{3} \lambda_m} \frac{V_t}{V_m}$

## 5ème Partie

### APPLICATION A DIVERSES GEOMETRIES

La méthode exposée se prête au calcul de réseaux de types variés. On peut traiter ceux-ci sous forme exacte, ou si la géométrie est trop complexe, par approximation.

L'approximation la plus simple, permettant le calcul de cellules dont l'élément de combustible est de forme compliquée, consiste à homogénéiser cet élément, sa gaine et le fluide de refroidissement dans un volume fictif - cylindre circulaire ou non - de même masse, ce volume étant égal par exemple au « volume de l'élastique ». Si le fluide de refroidissement est un liquide, cette approximation est raisonnable; s'il s'agit d'un gaz, elle est plus hasardée; en opérant ainsi, on sous-estime alors plus ou moins le coefficient de diffusion. Il convient cependant de remarquer que les formules pratiques établies ici pour le calcul d'une barre pleine rendent compte d'une manière correcte de l'inégalité des libres parcours dans la barre homogénéisée et le modérateur; ce perfectionnement, qui n'apporte pas de modifications énormes dans les résultats concernant une barre pleine classique, permet, lorsqu'il existe des cavités intérieures à l'élément de combustible, de tenir compte dans une certaine mesure des effets de transport dans celle-ci et aussi de la transparence de cet élément. On pourra traiter de la sorte des tubes, des systèmes de plaques pas trop allongées, des faisceaux, etc...

Le traitement exact de ces éléments de combustible est certainement possible à l'aide d'un calculateur électronique. Toutefois, si l'on veut se limiter à un calcul relativement simple, on pourra utiliser une approche un peu plus élaborée que le simple procédé d'homogénéisation. Cette approche consiste à attribuer au milieu u homogénéisé un libre parcours tel qu'il conduise à la même « transparence » que celle du milieu réel intérieur à la frontière de ce milieu (ensemble combustible - gaine - fluide). Cette transparence est définie comme la probabilité de sortie sans choc d'un neutron entrant par cette surface suivant une densité en phase isotrope. Dans le cas d'une cellule refroidie au gaz, si l'on admet que les chocs ne peuvent se produire que dans le combustible, la transparence  $1 - T$  est liée très simplement [9, 10] à la probabilité classique  $P_c$  pour un neutron né uniformément dans le combustible de subir sa première collision dans le combustible, par le théorème de réciprocité :

$$1 - T = 1 - \frac{4 V_{\text{comb}}}{S_u} \Sigma^c_{\text{comb}} (1 - P_c)$$

$V_{\text{comb}}$  étant le volume vrai du combustible,  $\Sigma_{\text{comb}}^c$  sa section vraie de capture et  $S_u$  la surface du milieu homogénéisé. Le calcul de  $P_c$  pour des volumes composés de plusieurs éléments pourra se faire d'une manière plus ou moins approchée. Cette quantité est d'ailleurs utilisée également dans le calcul du facteur  $\mathcal{E}$  et dans celui du facteur  $f$  [9, 10]. On pourra éventuellement définir un  $P_c$  axial et un  $P_c$  radial sans compliquer sensiblement le calcul.

Le traitement d'une cellule cylindrique à plusieurs milieux concentriques sera facilité par l'emploi des probabilités de collision calculées par C. MERCIER [16]. En ce qui concerne le calcul des faisceaux, les formules d'approximation mises au point par R. NAUDET [14] en vue du calcul de  $\mathcal{E}$  pourront être utiles.

Les gaines métalliques minces ne demandent pas, en général, à être traitées comme des milieux supplémentaires. Dans le cas d'une cellule classique dans laquelle la cavité est gainée intérieurement et extérieurement, on pourra alors utiliser les formules pratiques établies dans cette étude. Si les gaines sont composées d'un matériau très transparent aux neutrons (aluminium, magnésium), on pourra les traiter comme du vide et les englober dans la cavité; sinon, le mieux est de les englober dans le milieu matériel adjacent, éventuellement en comprimant ou en dilatant le matériau dont elles sont constituées de manière à ajuster leur libre parcours sur celui de ce milieu. Mais il est évident que la présence de ces gaines pourra affecter notablement les flux moyens dans les différents milieux. Le traitement de gaines situées à l'intérieur de la cavité, ainsi que celui d'ailettes, pourra à la rigueur s'effectuer suivant les mêmes recettes, avec moins de justification.

La détermination du coefficient de diffusion dans un réseau comprenant plusieurs types différents de barres entourées ou non de cavités est très facile, au moins s'il n'y a pas d'interaction entre les barres; la généralisation à une « supercellule » des formules établies dans cette étude est immédiate. Si en particulier, certaines de ces barres sont des barres de contrôle noires, les formules se simplifient, puisque le libre parcours est nul ( $Q'_k = \nabla_k = T_k = 0$ ).

Le traitement exact de réseaux à eau légère, dans lesquels les barres sont en général très serrées, exige probablement un calcul assez poussé des termes d'interaction. Mais, en l'absence de cavités, le procédé consistant à homogénéiser le réseau (formule (1)) doit déjà conduire à un résultat convenable; il semble d'ailleurs que les expressions (1) et (2) doivent borner inférieurement et supérieurement le coefficient de diffusion.

Signalons pour finir que la méthode de remplacement progressif de R. NAUDET [13], actuellement utilisée sur la pile AQUILON pour l'étude de réseaux à gaine d'air, avec barres pleines ou faisceaux, permettra dans un proche avenir une confrontation expérimentale des formules; les échanges de neutrons entre deux réseaux sont en effet très sensibles aux rapports de leurs coefficients de diffusion.

Les calculs numériques ont été dirigés par Mme PILLARD, M. AMOUYAL, Melle WAHL, Melle OLIVIE, MM. LECLERC et GUILLOU.

Nous tenons à exprimer nos remerciements au Dr. I.S. GRANT, qui a eu l'obligeance de nous communiquer des résultats de calculs par la méthode Monte-Carlo, et au Dr. D.C. LESLIE, qui a bien voulu nous faire part de ses récents travaux et avec qui nous avons eu d'intéressants entretiens. Nous voulons remercier également le Dr. A.D. GALANIN, dont les remarques nous ont permis de préciser certains points et qui nous a fait parvenir un exemplaire de son dernier travail.

## ANNEXE I

### ETABLISSEMENT DE LA PREMIERE EXPRESSION (12) DU COEFFICIENT DE DIFFUSION EQUIVALENCE A LA REPRESENTATION PAR LE CARRE MOYEN

La fonction macroscopique  $\Psi_0(\vec{r})$ , solution de  $(\nabla_{\vec{k}}^2 + B_{\vec{k}}^2)\Psi_0 = 0$ , peut s'écrire en toute généralité en posant  $B^2 = \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^2$

$$\Psi_0(\vec{r}) = \int_S f(\vec{\omega}) e^{iB\vec{\omega}\cdot\vec{r}} d\omega$$

$f(\vec{\omega})$  étant une certaine distribution complexe du vecteur unitaire  $\vec{\omega}$ , déterminée par les conditions auxquelles doit satisfaire  $\Psi_0(\vec{r})$  aux frontières de la zone V, et telle que  $\Psi_0(\vec{r})$  soit réelle en tout point. L'intégrale est étendue au domaine S des valeurs de  $\vec{\omega}$  telles que  $B_{\vec{\omega}}^2 = B_{\vec{k}}^2$  (certaines des composantes  $\omega_{\vec{k}}$  de  $\vec{\omega}$  peuvent éventuellement prendre une valeur imaginaire). On montre alors aisément que :

$$N(\vec{r}, \vec{\Omega}') = \int_S d\omega f(\vec{\omega}) e^{iB\vec{\omega}\cdot\vec{r}} \hat{n}_0(\vec{r}, \vec{\Omega}')$$

avec

$$\hat{n}_0 = n_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} K^{(\ell-1)} [-n_0 + K(q + n_0)]$$

où  $K$  est un opérateur égal à  $H_{\infty} e^{-iB\vec{\omega}\cdot\vec{R}}$ . Les fuites s'écrivent :

$$F = \frac{\int_S d\omega f(\vec{\omega}) \int_V \operatorname{div} \left\{ e^{iB\vec{\omega}\cdot\vec{r}} \int_{(-\infty)} dv_1 \vec{\Omega} \frac{e^{-\tilde{\Sigma}R}}{4\pi R^2} e^{-iB\vec{\omega}\cdot\vec{R}} [q(\vec{r}_1) + \hat{n}_0(\vec{r}_1, \vec{\Omega})] \right\}}{\int_S d\omega f(\vec{\omega}) \int_V dv e^{iB\vec{\omega}\cdot\vec{r}} \frac{1}{r(\vec{r}) \Sigma(\vec{r})} \int_{(4\pi)} \frac{d\Omega'}{4\pi} \hat{n}_0(\vec{r}, \vec{\Omega}')}$$

l'opérateur divergence agissant sur  $\vec{r}$ . L'intégrale sur  $\vec{r}$  au numérateur peut se décomposer en une somme de deux termes; le premier

$$\int_V dv e^{iB\vec{\omega}\cdot\vec{r}} \operatorname{div} \left\{ \int_{(-\infty)} dv_1 \vec{\Omega} \frac{e^{-\tilde{\Sigma}R}}{4\pi R^2} e^{-iB\vec{\omega}\cdot\vec{R}} [q(\vec{r}_1) + \hat{n}_0(\vec{r}_1, \vec{\Omega})] \right\}$$

peut être négligé. En effet la divergence de l'intégrale sur  $\vec{r}_1$  est un vecteur fonction périodique du point  $\vec{r}$ , de même période que celle du réseau; mais, d'après l'hypothèse

(a), la fonction  $e^{iB\vec{\omega} \cdot \vec{r}}$  varie lentement, ce qui permet de remplacer, dans l'intégration sur  $\vec{r}$ , la divergence par sa valeur moyenne sur tout l'espace, qui est nulle. Le numérateur se réduit alors à :

$$\int_S d\omega f(\vec{\omega}) \int_V dv e^{iB\vec{\omega} \cdot \vec{r}} \int_{(\infty)} dv_1 i B \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} \frac{e^{-\sum R}}{4\pi R^2} e^{-iB\vec{\omega} \cdot \vec{R}} [q(\vec{r}_1) + \hat{n}_0(\vec{r}_1, \vec{\Omega})]$$

L'hypothèse (a) autorise à nouveau à remplacer, au numérateur et au dénominateur, les fonctions périodiques par leur valeur moyenne :

$$F = \frac{\int_S d\omega f(\vec{\omega}) \left[ \int_V e^{iB\vec{\omega} \cdot \vec{r}'} dv' \right] \int_V \int_{(\infty)} dv'_1 i B \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} \frac{e^{-\sum R - iB\vec{\omega} \cdot \vec{R}}}{4\pi R^2} [q(\vec{r}_1) + \hat{n}_0(\vec{r}_1, \vec{\Omega})]}{\int_S d\omega f(\vec{\omega}) \left[ \int_V e^{iB\vec{\omega} \cdot \vec{r}'} dv' \right] \int_V \frac{1}{r(\vec{r}) \Sigma(\vec{r})} \int_{(4\pi)} \frac{d\Omega'}{4\pi} \hat{n}_0(\vec{r}, \vec{\Omega}')}$$

On peut montrer que, dans tous les cas envisagés en pratique, l'intégrale  $\int e^{iB\vec{\omega} \cdot \vec{r}'} dv'$  est indépendante de  $\vec{\omega}$  pour toutes les valeurs de  $\vec{\omega}$  telles que  $f(\vec{\omega}) \neq 0$ ; ceci permet de faire disparaître cette intégrale du numérateur et du dénominateur.

De cette expression de  $F$ , on peut, d'après (11) tirer une expression générale de  $D_k$ , dépendant des laplaciens  $B_k^2$ , en faisant apparaître la fonction  $\Psi_o(\vec{r} - \vec{r}_{\ell+1})$  au dénominateur et la composante  $k$  de son gradient au numérateur. Nous n'écrirons ici que la contribution principale, correspondant à  $i = 0$  :

$$D_k = \frac{1}{B_k^2 \Psi_o(0)} \frac{\int_{(\infty)} dv \int_{(\infty)} dv_1 \frac{e^{-\sum R}}{4\pi R^2} \Omega_k [\nabla_k \Psi_o(-\vec{R})] [q(\vec{r}_1) + n_0(\vec{r}_1, \vec{\Omega})]}{\int_{(\infty)} \phi(\vec{r}) dv}$$

L'intérêt de cette forme générale est de permettre le calcul de la correction axiale en  $B_z$  considérée plus haut \*. Intéressons-nous maintenant à la partie indépendante des laplaciens. On supposera la parité de la fonction  $\Psi_o$  (soit  $\nabla_k \Psi_o(0) = 0$ ), ce

(\*). Cette forme générale, indépendante de l'hypothèse (b), mais soumise aux restrictions consécutives à l'hypothèse (a), ne peut fournir pour les termes dépendant des  $B_k^2$  qu'une précision illusoire. Cependant, les termes dépendant du laplacien axial gardent un sens; en effet, cette hypothèse ne postule rien quant à la dépendance axiale de  $\Psi_o$ , puisque la structure du réseau ne dépend pas de la variable  $z$ .

Le calcul de cette correction axiale oblige à passer par l'intermédiaire de la forme générale; une fois calculé  $D_z$  sous cette forme, on développe le résultat en puissances de  $B_z$ . Mais un développement préalable sous le signe somme en puissances de  $B_z$  conduirait, pour les termes dépendant de  $B_z$ , à une divergence. Dans le problème des fentes, il se produit un phénomène analogue pour le coefficient parallèle à la fente, mais cette fois même le terme indépendant du laplacien diverge, remarque déjà faite par BEHRENS [3]. L'application de la forme générale au problème des fentes conduit (bien qu'il ne s'agisse pas ici d'un réseau) aux formules données dans [12] par J. CHERNICK et I. KAPLAN.

qui dans les cas pratiques ne limite pas la généralité. Le développement de la fonction  $\Psi_0(\vec{r} - \vec{r}_{\ell+1})$  en série de Taylor au voisinage de  $\vec{r} - \vec{r}_{\ell+1} = 0$  conduit alors directement, compte tenu de (9) et de (10), à l'expression (12).

Une intégration par parties sur le rayon vecteur  $R$  permet de transformer l'expression (12) de  $D_k$  de manière à retrouver la définition usuelle de l'aire de diffusion  $L_k^2$  par le carré moyen (on pose  $R_k = R \Omega_k$ ) :

$$L_k^2 = \frac{\frac{1}{2} \int_{(\infty)} d\mathbf{v} \sum(\vec{r}) \int_{(\infty)} d\mathbf{v}_1 \frac{e^{-\sum R}}{4\pi R^2} \left\{ R_k^2 [q(\vec{r}_1) + n_0(\vec{r}_1, \vec{\Omega})] + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} R_k H_\infty R_{\ell, k}^{(\ell-1)} [q(\vec{r}_{\ell+1}) + n_0(\vec{r}_{\ell+1}, \vec{\Omega}_{\ell+1})] \right\}}{\int_{(\infty)} \Sigma^c(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\mathbf{v}}$$

La quantité  $\frac{\int_{(\infty)} \Sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\mathbf{v}}{\int_{(\infty)} \Sigma^c(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\mathbf{v}}$  est le nombre moyen de parcours élémentaires d'un neutron durant sa vie.

La contribution du premier terme du numérateur représente alors clairement la demi-somme des carrés moyens des composantes  $k$  des parcours élémentaires d'un neutron durant sa vie. La contribution du terme  $\ell$  de la série représente la somme des moyennes des produits des composantes de deux parcours élémentaires séparés par  $\ell$  collisions, durant une vie de neutron. L'aire de diffusion peut donc s'interpréter comme le demi-carré moyen de la composante  $k$  du vecteur joignant le point de naissance du neutron à son point de capture.

## ANNEXE 2

### INFLUENCE DE L'HYPOTHESE D'EXTENSION A L'INFINI DES DOMAINES D'INTEGRATION

Pour étudier l'influence de l'hypothèse (c) ( « piles images »), on a, dans quelques cas particuliers, calculé le terme  $Q_z$  en évitant cette hypothèse ( $Q_z$  n'est pratiquement pas affecté). Ces résultats ne sont donnés qu'à titre indicatif car certains termes ont été négligés dans le calcul.

$$1^{\circ}) \text{ Cas } B_z^2 > 0 \quad (\Psi_0(z) = \cos B_z z)$$

- Canal vide de rayon 4 cm

Réacteur de hauteur infinie :

$$\begin{array}{ll} Q_z = 2 & \text{pour } B_z = 0 \\ Q_z = 1,834 & \text{pour } B_z = \frac{\pi}{170} \text{ cm}^{-1} \text{(correction } \delta Q_z \text{ proposée} \\ & \text{plus haut)} \end{array}$$

Réacteur de hauteur 170 cm :

$$\begin{array}{ll} Q_z = 1,840 & \text{pour } B_z = 0 \\ Q_z = 1,772 & \text{pour } B_z = \frac{\pi}{170} \text{ cm}^{-1} \end{array}$$

On voit que l'hypothèse (c) introduit une erreur qui, bien que moins importante que dans le problème des tentes [12], est loin d'être négligeable. La seule correction  $\delta Q_z$  est insuffisante, mais a le mérite de la simplicité.

$$2^{\circ}) \text{ Cas } B_z^2 < 0 \quad (\Psi_0(z) = \operatorname{ch} \beta_z z)$$

- Canal vide de rayon 2,5 cm

Réacteur de hauteur infinie :

$$\begin{array}{ll} Q_z = 2 & \text{pour } \beta_z = 0 \\ Q_z = \infty & \text{pour } \beta_z = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} \end{array}$$

Réacteur de hauteur 140 cm :

$$\begin{array}{ll} Q_z = 1,872 & \text{pour } \beta_z = 0 \\ Q_z = 1,916 & \text{pour } \beta_z = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} \end{array}$$

### ANNEXE 3

#### CORRECTION DE NON-UNIFORMITE DU FLUX DANS LA CAVITE

Dans le cas où le flux dans la cellule est variable, on peut se demander si l'hypothèse d'uniformité du flux *dans chaque milieu*, admise en deuxième partie, est justifiée.

On peut montrer que l'hypothèse d'uniformité du flux dans le modérateur n'introduit qu'une erreur insignifiante dans les cas pratiques. La non-uniformité du flux dans la cavité, qui résulte de l'inégalité des courants de neutrons *entrant* dans la cavité par unité de surface des frontières  $S_u$  et  $S_m$ , fait apparaître une correction un peu plus importante, mais qui peut encore être négligée dans les cas usuels, comme le montre le tableau 1 ; cette correction dont BEHRENS, dans une seconde publication [4] et GRANT [6] ont tenu compte, se calcule aisément :

$$\frac{\Delta D_k}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{V_c \phi_u}{V_t \phi_t} r_u \Sigma_u^c \left\{ (1 - \bar{N}) \left[ \frac{r_c}{\lambda_m} (Q_k + Q'_k) + \frac{r_u}{\lambda_m} (1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}) W_k \right] - 2 M_k \right\}$$

avec

$$M_k = \frac{1}{2 r_c V_c} \int_{(S_u)} ds \int \mu \frac{d\Omega}{4\pi} 3 \Omega_k^2 X^2$$

$$= \frac{\omega_k}{6(1-a)(1-a^2)} \left\{ 3a + a^3 - 2[(1+a^2) E(a) - (1-a^2) K(a)] \right\}$$

$(\omega_z = 2, \omega_r = 1)$

$E(a)$  et  $K(a)$  sont les intégrales elliptiques complètes.

Cette correction peut devenir un peu plus importante si la barre est très capturante et le canal de grandes dimensions ( $\phi_u \ll \phi_m$ ).

## ANNEXE 4

### ETUDE ANALYTIQUE DE LA SERIE DES TERMES DE CORRELATION ANGULAIRE EN GEOMETRIE PLANE

Pour simplifier nous supposerons le choc isotrope. Dans le cas d'une géométrie quelconque, on peut mettre la série sous la forme

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{S}_{p_{ij,k}} = -\frac{3}{r_j V_i} \int_{(\infty)} dv \int_{(\infty)} dv' \frac{r(\vec{r})}{\lambda(\vec{r}')} F_{j,k}(\vec{r}) F_{i,k}(\vec{r}') \left[ \delta(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{r(\vec{r}')}{\lambda(\vec{r}')} G(\vec{r}, \vec{r}') \right]$$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$  étant le flux produit au point  $\vec{r}$  par une source isotrope unité située au point  $\vec{r}'$ , et  $F_{j,k}(\vec{r})$  étant donné par

$$F_{j,k}(\vec{r}) = \int_{(j)} dv_1 \frac{e^{-\frac{r}{R}}}{4\pi R^2} \Omega_k$$

$F_{i,k}(\vec{r}')$  est défini de façon équivalente.

Nous nous intéresserons maintenant au calcul de cette série en géométrie plane, plus précisément dans le cas d'un réseau constitué de fentes pratiquées dans un réseau homogène; la direction étudiée est la direction normale aux fentes. Nous supposons les fentes suffisamment espacées vis-à-vis du libre parcours pour que l'on puisse négliger les effets d'interaction.

Bien que ce problème ne présente guère d'intérêt pratique, il est cependant instructif de l'étudier à titre d'exemple, car il peut être intégralement traité de manière analytique. Ceci est dû au fait qu'il est possible de ramener le calcul des intégrales sur  $dv'$  à un calcul en milieu infini et homogène, en rapprochant les deux parois de la fente; le noyau de diffusion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  est alors un simple noyau de déplacement. Si  $e$  est l'épaisseur de la fente, on a alors, en posant  $\lambda_m = 1$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{S}_{p_{cc,\perp}}^{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} Q_L^{(\ell)} = -\frac{3r}{e^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x) F(x') \left[ \delta(x-x') + r G(|x-x'|) \right]$$

avec

$$F(x) = \frac{e}{2} s(x) \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^2} e^{-|x|y}$$

$s(x)$  étant égal à 1 si  $x > 0$  et à -1 si  $x < 0$ .

Faire tendre la capture vers zéro dans cette expression revient à conserver seulement le premier terme  $\frac{1}{t}$ , ce qui conduit exactement à la formule obtenue par G R A N T :

$$D_{\perp} = 1 + \frac{V_0}{V_n}$$

## TERMES D'INTERACTION EN GEOMETRIE PLANE :

Nous ne ferons maintenant aucune hypothèse sur l'épaisseur  $t$  (exprimée en libres parcours) de milieu matériel entre deux fentes consécutives. Un calcul en tout point analogue au précédent permet de montrer que l'interaction de deux fentes séparées par une épaisseur de matière ne s'exprime pour une capture quelconque, par la forme analytique

$$\sum_{l=0}^{\infty} Q_{\perp n}^{(l)} = \frac{3}{n} (1-\tau) \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2} \frac{1 - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z}{1 - \frac{\tau}{z} \operatorname{arctg} z} \cos(n t z)$$

(l'interaction d'une fente avec elle-même, étudiée plus haut, revient à poser  $n = 0$ ). On peut montrer que pour tout  $n$  cette expression tend vers zéro avec la capture, mais il est en réalité erronné de faire tendre la capture vers zéro avant d'avoir sommé sur toutes les valeurs de  $n$ ; la relation  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n t z) = \frac{2\pi}{t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(z - \frac{2m\pi}{t})$  permet d'écrire :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} Q_{\perp n}^{(l)} = \frac{1}{t} + \frac{3t}{2n^2} (1-\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1 - \frac{t}{2m\pi} \operatorname{arctg} \frac{2m\pi}{t}}{1 - \frac{\tau}{2m\pi} \operatorname{arctg} \frac{2m\pi}{t}}$$

.../...

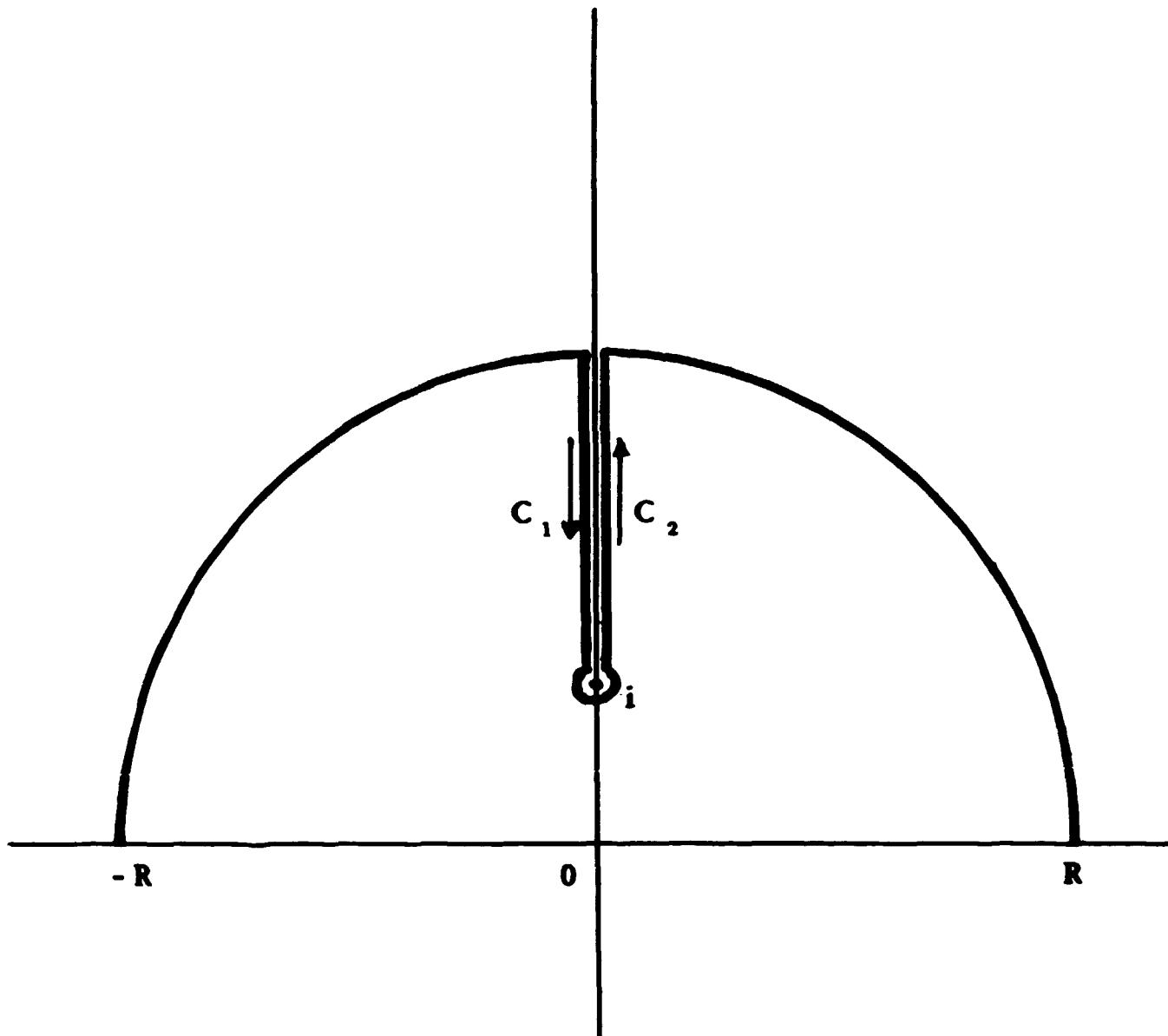
Le noyau  $G(|x-x'|)$  est ici le flux produit au point d'abscisse  $x$  par une source plane isotrope unité d'abscisse  $x'$ . Une première intégration sur  $dx'$  conduit à l'expression :

$$\tilde{S}_{Q_1}^{(\ell)} = -6r \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} \int_1^\infty \frac{dy'}{y'^2} \cdot \frac{1}{y^2 - y'^2} \cdot \left[ 1 + r \int_0^\infty e^{-uy} G(u) du \right]$$

$$= -r(1 - \log 2) - 6r^2 \int_1^\infty \frac{dy}{y^3} \left( 1 - \frac{1}{y} \operatorname{argth} y \right) \int_0^\infty e^{-uy} G(u) du$$

L'approximation consistant à prendre pour  $G(u)$  la seule partie asymptotique  $\frac{3e^{-\kappa|u|}}{2\kappa^2}$ , avec  $\kappa = 3(1-r)$ , en négligeant la partie transitoire au voisinage de  $u \approx 0$  conduit, dans le cas où  $r = 1$ , à une valeur de la série égale à  $-\frac{1}{10}(1 + 8 \log 2) = -0,655$ , qui comme on va le voir est inexacte d'environ 13%. On peut éviter cette approximation en opérant de la façon suivante. L'intégrale sur  $dy$  peut s'écrire, en posant  $z = iy$  :

$$A(u) = \int_{-i}^{i\infty} \frac{dz}{z^3} \left( \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z - 1 \right) e^{iuz}$$



Dans le plan complexe le point d'affixe  $i$  est un point critique logarithmique pour la fonction  $\operatorname{arctg} z$  dont la valeur augmente de  $\pi$  après rotation d'un tour dans le sens direct autour de ce point. Nous pouvons alors considérer l'intégrant dans l'intégrale ci-dessus comme la différence entre les déterminations  $f_+(z)$  et  $f_-(z)$  d'une certaine fonction  $f(z)$ , la détermination  $f_-$  s'obtenant à partir de  $f_+$  par rotation d'un tour dans le sens direct autour du point  $i$ . Il est facile de trouver une telle fonction  $f(z)$  :

$$f(z) = \frac{1}{\pi z^3} \operatorname{arctg} z \left( \frac{1}{2z} \operatorname{arctg} z - 1 - \frac{\pi}{2z} \right) e^{iz}$$

d'où l'expression de l'intégrale  $A(u)$  :

$$A(u) = \int_i^{i\infty} \left[ f_+(z) - f_-(z) \right] dz = \int_{(C_1)} f(z) dz + \int_{(C_2)} f(z) dz$$

L'intégrale de  $f(z)$  le long du demi-cercle de rayon  $R$  dans le demi-plan supérieur tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini ; de même l'intégrale sur le cercle centré sur le point  $i$  tend vers zéro avec son rayon. Comme l'origine est le seul pôle de la fonction  $f(z)$ , on peut remplacer l'intégrale sur le contour  $C_1 + C_2$  par une intégrale sur l'axe réel prise entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , à condition de retrancher de  $f(z)$

sa partie principale  $\frac{1}{\pi z^3} \left( \frac{\pi z^2}{6} - \frac{z}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi z^3} \left( \frac{\pi z^2}{6} - \frac{z}{2} - \frac{\pi}{2} \right) e^{iz}$

au voisinage de l'origine, ce qui est légitime puisque la différence  $f_+(z) - f_-(z)$  n'en est pas affectée :

$$A(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(z) - \frac{1}{\pi z^3} \left( \frac{\pi z^2}{6} - \frac{z}{2} - \frac{\pi}{2} \right) e^{iz} \right] dz$$

Il en résulte :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} Q_1^{(\ell)} = -r(1-\log 2) - 6r^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ f(z) e^{-iz} - \frac{1}{\pi z^3} \left( \frac{\pi z^2}{6} - \frac{z}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \int_0^{\infty} e^{iuz} G(u) du$$

Comme l'expression entre crochets est une fonction réelle, ainsi que l'intégrale double, et comme la fonction  $G(u)$  est paire, on peut écrire :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} Q_1^{(\ell)} = -r(1-\log 2) - 3r^2 \int_0^{\infty} dz \left[ f(z) e^{-iz} + f(-z) e^{iz} - \frac{1}{\pi z^2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuz} G(u) du$$

$$= -r(1-\log 2) - \frac{3r^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2} \left( 1 - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuz} G(u) du$$

D'après un résultat classique, la transformée de Fourier du noyau G (u) vaut

$$\frac{1}{z} \operatorname{arctg} z$$


---


$$1 - \frac{r}{z} \operatorname{arctg} z$$

d'où :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} S_{Q \perp}^{(\ell)} = -r(1-\log 2) - \frac{3r^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} \operatorname{arctg} z \frac{(1 - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z)^2}{1 - \frac{r}{z} \operatorname{arctg} z}$$

Si la capture du milieu matériel tend vers zéro, r tend vers l'unité et :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} S_{Q \perp}^{(\ell)} = -(1 - \log 2) - \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} \operatorname{arctg} z \left(1 - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z\right)$$

$$= -\frac{3}{4}$$

Si l'on calcule maintenant le terme principal  $Q_{\perp}$  correspondant, on trouve sans difficulté qu'il est égal à  $\frac{3}{4}$ . En géométrie plane, dans le cas d'une capture nulle, la série des termes rectangles compense donc exactement le terme principal, ce qui revient à dire que le carré moyen de la composante normale de la somme vectorielle des parcours d'un neutron dans une fente est nul, ce que laisse d'ailleurs prévoir l'intuition. La formule du coefficient de diffusion est alors :

$$\frac{D_{\perp}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = 1 + \frac{V_c}{V_t}$$

On retrouve bien la formule obtenue par GRANT [6] au moyen d'un raisonnement physique simple; cette formule est en effet

$$\frac{D_{\perp}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = 1 + \frac{V_c}{V_m}$$

et se réduit à la précédente dans l'hypothèse d'espacement des fentes admise plus haut.

Si l'on désire calculer séparément chacun des termes de corrélation angulaire, il suffit de développer la transformée de Fourier de  $G(u)$  en puissances de  $r$ , d'où :

$$Q_{\perp}^{(\ell)} = - \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2} \left(1 - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z\right) \left(\frac{\operatorname{arctg} z}{z}\right)^{(\ell-1)}$$

soit :

$Q_{\perp}^{(1)}$	$= - (1 - \log 2)$	$= - 0,307$
$Q_{\perp}^{(2)}$		$= - 0,133$
$Q_{\perp}^{(3)}$		$= - 0,057$
$Q_{\perp}^{(4)}$		$= - 0,036$
$Q_{\perp}^{(5)}$		$= - 0,026$
$Q_{\perp}^{(6)}$		$= - 0,019$
$Q_{\perp}^{(7)}$		$= - 0,015$
$Q_{\perp}^{(8)}$		$= - 0,012$
$Q_{\perp}^{(9)}$		$= - 0,010$
$Q_{\perp}^{(10)}$		$= - 0,008$

La somme de ces dix premiers termes rectangles vaut seulement - 0,62; la série converge donc très lentement.

Dans le problème des canaux, il est facile de voir que la série des termes rectangles ne compense que partiellement le terme principal  $Q_r$  égal alors à l'unité.

Mais là aussi on peut s'attendre, à la lumière des résultats obtenus en géométrie plane, à ce que la convergence de la série soit lente pour des canaux de grandes dimensions vis-à-vis du libre parcours (pour  $y \rightarrow \infty$  et  $a = 0$ , on a environ  $Q_r^{(1)} = -0,23$  et  $Q_r^{(2)} = -0,12$ ); le calcul des deux premiers  $Q_r^{(\ell)}$ , auquel on s'est limité dans cette étude, est probablement dans ce cas insuffisant; une étude plus élaborée de la série des  $Q_r^{(\ell)}$  est en cours, ainsi que de la série des termes d'interaction qui risque aussi de converger lentement. Cependant, compte tenu du fait que la série des  $Q_r^{(\ell)}$  tend vers zéro avec les dimensions du canal, on peut, pour des canaux suffisamment espacés et de dimensions pas trop grandes devant le libre parcours, utiliser avec sécurité les formules pratiques établies dans ce rapport.

*Manuscrit reçu le 20 Novembre 1959*

## REFÉRENCES

- [1] BENOIST P. - *Formulation générale du coefficient de diffusion dans un milieu hétérogène comportant éventuellement des cavités.*  
- *Rapport S.P.M. 522, Saclay (1958).*
- [2] " - *Formulation générale et calcul pratique du coefficient de diffusion dans un réseau comportant des cavités.*  
- *J. Nuclear Energy, à paraître*
- [3] BEHRENS D.J. - *The effect of holes in a reacting material on the passage of neutrons - Proc. of Phys. Soc 62, 10, 358 A (1949)*
- [4] " - *The migration length of neutrons in a reactor*  
*Rapport A . E . R . E . T/R 877, Harwell (1956) (voir aussi A . E . R . E . T/R 221 et 289)*
- [5] SCHAEFER, G.W. PARKYN D.M. - *A Monte-Carlo study of thermal utilisation factor and diffusion area : gas-cooled graphite-moderated lattices.*  
- *Mémoire P/310 (A/15), Conférence de Genève (1958)*
- [6] GRANT I.S. - *Neutron streaming in gas-cooled reactors*  
- *Rapport A . E . R . E . R/R 2568, Harwell (1958)*
- [7] LALETIN N.I. - *Passage of neutrons in a heterogeneous medium*  
- *Mémoire P/2189 (A/15) U.R.S.S. Conférence de Genève (1958).*
- [8] CASE K.M., DE HOFFMANN F., PLACZEK G. - *Introduction to the theory of neutron diffusion. Vol.1. Los Alamos (1953).*
- [9] AMOUYAL A., BENOIST P. - *Nouvelle méthode de détermination du facteur d'utilisation thermique d'une cellule.*  
- *Rapport C.E.A. 571, Saclay (1956).*
- [10] AMOUYAL A., BENOIST P., HOROWITZ J. - *Nouvelle méthode de détermination du facteur d'utilisation thermique d'une cellule. -*  
*J. Nuclear Energy - 6, 79 (1957)*
- [11] WEINBERG A.M., NODERER L.C. - *Theory of neutron chain reactions.*  
- *Rapport A.E.C.D. 3471, Oak Ridge (1951).*

- [12] CHERNICK J, KAPLAN I.- *The nuclear reactor with a transverse air gap.-*  
*J. Nuclear Energy* 2, 41 (1955)
- [13] NAUDET R. - *Mesure de laplaciens dans Aquilon par la méthode de remplacement progressif.-*  
*Rapport C.E.A. 930, Saclay (1959).*
- [14] e - *Calcul du facteur de fission rapide.*  
*Rapport S.P.M. 401, Saclay (1958).*
- [15] MARTELLY J. - *Une méthode d'expérimentation sous-critique : le Neutrostat.*  
*Mémoire P/1193 (B/21), Conférence de Genève (1958).*
- [16] MERCIER C. - *Etude de certaines probabilités intervenant dans le calcul des piles.*  
*Rapport S.P.M. 162, Saclay (1956).*
- [17] MULLER G.M. - *Table of the function*  

$$Kj_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x u^{-n} K_0(u) du$$
- *Rapport H 7 - 30323, Harford (1954).*
- [18] SPINRAD B.I. - *Anisotropic diffusion lengths in diffusion theory.*  
- *J. Applied Physics*, 26, 548 (1955).
- [19] GALANIN A.D. - *Théorie des réacteurs hétérogènes à barres cylindriques de rayon fini.*  
*Communication privée à paraître (1959).*
- [20] LESLIE D.C. - *Communication privée (1959).*
- [21] DAVISON B. - *Effective thermal diffusion length in a sandwich reactor.*  
*J. Nuclear Energy*, 7, 51 (1958).

## FORMULAIRE PRATIQUE

Formules à utiliser pour le calcul du coefficient de diffusion dans une cellule composée d'un modérateur  $m$ , d'un canal cylindrique annulaire  $c$  et d'une barre combustible  $u$ .

$$\frac{D_k}{\frac{1}{3}\lambda_m} = 1 + \frac{\phi_m}{\phi_t} \left\{ \frac{V_c}{V_t} + \frac{V_u}{V_t} \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{V_c \phi_c}{V_t \phi_m} \frac{c-a}{\lambda_m} (Q_k + Q'_k - q_k) \right.$$

3

$$+ \frac{V_c}{V_t} \frac{a}{\lambda_m} \left[ \frac{\phi_c}{\phi_m} \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{\phi_u}{\phi_m} \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right] W_k$$

$$\left. + \frac{V_u}{V_t} \frac{a}{\lambda_m} \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \left( \frac{\phi_u}{\phi_m} \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) T_k \right\}$$

Pour le groupe rapide la formule se simplifie puisqu'on peut admettre que  $\phi_u = \phi_c = \phi_m$ :

$$\frac{D_k}{\frac{1}{3}\lambda_m} = 1 + \frac{V_c}{V_t} + \frac{V_u}{V_t} \left( 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{V_c}{V_t} \frac{c-a}{\lambda_m} (Q_k + Q'_k - q_k)$$

3

$$+ 2 \frac{V_c}{V_t} \frac{a}{\lambda_m} \frac{1-\lambda_m}{\lambda_u} W_k + \frac{V_u}{V_t} \frac{a}{\lambda_m} \frac{(1-\lambda_m)^2}{\lambda_u} T_k$$

L'indice  $k$  désigne la direction pour laquelle on veut calculer le coefficient de diffusion ( $z$  pour axial,  $r$  pour radial).

$\lambda_i$  est le libre parcours (total) de transport du milieu  $i$

$V_i$  est le volume du milieu  $i$  et  $V_t$  le volume total de la cellule.

$\phi_i$  est le flux moyen dans le milieu  $i$ , et  $\phi_t = \frac{V_m \phi_m + V_c \phi_c + V_u \phi_u}{V_t}$  le flux moyen dans toute la cellule.

Si  $a$  est le rayon de la barre et  $c$  le rayon extérieur du canal, soit

$$a = \frac{a}{c} \quad \eta = \frac{a}{\lambda_u} \quad \gamma = \frac{c}{\lambda_m}$$

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_z = 2 F(a) \\ Q_r = F(a) \end{array} \right.$$

$F(\alpha)$  est donné par la table 1 ci-après.

$Q'_k$  et  $W_k$  sont des fonctions de  $\eta$  et  $\alpha$  données pour les deux valeurs de  $k$  par les courbes des figures 1 et 2. La fonction  $T_k$  ne dépend que de  $\eta$  et est donnée par les courbes de la figure 3.

Le terme de corrélation angulaire  $q_k$  est nul pour  $k=z$  et est donné pour  $k=r$  par les courbes de la figure 5 en fonction de  $\gamma$  et  $\alpha$ .

Le calcul du flux moyen  $\phi_c$  dans la cavité pourra s'effectuer au moyen de la formule :

$$\frac{\phi_c}{\phi_u} = G' + \alpha \sum_u^c \bar{N}$$

$\sum_u^c$  étant la section macroscopique de capture du milieu  $u$ ,  $G'$  une quantité intervenant dans le calcul de  $f$ , égale approximativement au rapport du flux à la surface de la barre au flux moyen dans son volume, (voir [9,10]) et  $\bar{N}$  une fonction de  $\alpha$  donnée par la table 2.

Pour une barre très capturante placée dans un canal de grandes dimensions ( $\phi_u \ll \phi_m$ ), on pourra éventuellement appliquer la correction de l'annexe 3.

#### Condition de validité des formules

L'épaisseur de modérateur entre deux canaux doit être supérieure à une distance de l'ordre de deux libres parcours. Sinon, il faut tenir compte des termes d'interaction étudiés en 3ème partie (section 3).

#### Correction pour les réacteurs de petites dimensions

Si  $B_z^2$  est le laplacien axial, on pourra retrancher du terme  $Q_k$  un terme  $\delta Q_k$  tel que

$$\delta Q_k = \frac{3\pi}{4} B_z (c + a) \bar{N}$$

Cette correction n'est valable que si  $B_z^2 > 0$ .

#### Approximations

- On peut admettre le plus souvent que  $\phi_t \approx \phi_m$ .
- La fonction  $\bar{N}$  est assez bien approximée par  $1 - \alpha$ .
- Le terme  $T_k$  est en général négligeable, sauf si la barre est très transparente.
- L'erreur commise en posant  $\phi_u = \phi_c = \phi_m$  n'est souvent pas considérable, et peut être admise pour une estimation rapide.
- L'influence de gaines métalliques minces peut en général être négligée pour le calcul de  $D_k$ .

TABLE I.- Fonction  $F(\alpha)$  de BEHR. M. Lim  $F(\alpha) = 1,046 - 0,177 \log(1-\alpha)$   
 $\alpha \rightarrow 1$

$\alpha$	$F(\alpha)$	$\Delta F$									
0	1,0000		0,25	1,0683	31	0,50	1,1566	42	0,75	1,2972	80
0,01	1,0025	25	0,26	1,0714	31	0,51	1,1608	44	0,76	1,3052	84
0,02	1,0050	25	0,27	1,0745	31	0,52	1,1652	44	0,77	1,3136	87
0,03	1,0075	26	0,28	1,0776	31	0,53	1,1696	45	0,78	1,3223	91
0,04	1,0101	26	0,29	1,0807	32	0,54	1,1741	45	0,79	1,3314	95
0,05	1,0127	25	0,30	1,0839	32	0,55	1,1786	46	0,80	1,3403	100
0,06	1,0152	26	0,31	1,0871	32	0,56	1,1832	48	0,81	1,3509	105
0,07	1,0178	27	0,32	1,0903	33	0,57	1,1880	49	0,82	1,3614	111
0,08	1,0205	26	0,33	1,0936	33	0,58	1,1929	50	0,83	1,3725	118
0,09	1,0231	27	0,34	1,0969	33	0,59	1,1979	50	0,84	1,3843	124
0,10	1,0253	27	0,35	1,1002	34	0,60	1,2029	52	0,85	1,3967	134
0,11	1,0285	27	0,36	1,1036	35	0,61	1,2081	55	0,86	1,4101	142
0,12	1,0312	27	0,37	1,1071	35	0,62	1,2134	54	0,87	1,4243	153
0,13	1,0339	27	0,38	1,1106	36	0,63	1,2188	56	0,88	1,4396	167
0,14	1,0366	28	0,39	1,1142	36	0,64	1,2244	57	0,89	1,4563	182
0,15	1,0394	28	0,40	1,1178	35	0,65	1,2301	58	0,90	1,4745	20
0,16	1,0422	28	0,41	1,1213	37	0,66	1,2359	60	0,91	1,494	23
0,17	1,0450	28	0,42	1,1250	38	0,67	1,2419	62	0,92	1,517	25
0,18	1,0478	29	0,43	1,1288	38	0,68	1,2481	64	0,93	1,542	30
0,19	1,0507	29	0,44	1,1326	38	0,69	1,2545	65	0,94	1,572	34
0,20	1,0536	29	0,45	1,1364	39	0,70	1,2610	68	0,95	1,606	43
0,21	1,0565	29	0,46	1,1403	40	0,71	1,2678	69	0,96	1,649	54
0,22	1,0594	29	0,47	1,1443	41	0,72	1,2747	72	0,97	1,703	
0,23	1,0623	30	0,48	1,1484	41	0,73	1,2819	75	0,98	1,78	
0,24	1,0653	30	0,49	1,1525	41	0,74	1,2894	78	0,99	1,85	
0,25	1,0683		0,50	1,1566		0,75	1,2972		1	$\infty$	- 48 -

TABLE 2 .- Fonction  $\bar{N}(\alpha) = \left(1 - \frac{2\varphi_0}{\pi} - \frac{1}{\pi} \ln 2\varphi_0\right) \cdot \frac{1}{1-\alpha^2}$

$\varphi_0 = \text{Arc sin } \alpha$

$\alpha$	$\bar{N}(\alpha)$	$\alpha$	$\bar{N}(\alpha)$	$\alpha$	$\bar{N}(\alpha)$	$\alpha$	$\bar{N}(\alpha)$
0	1	0,31	0,6767474	0,62	0,4297912	0,93	0,1628217
0,01	0,9873666	0,32	0,6680346	0,63	0,4222191	0,94	0,1501966
0,02	0,9749269	0,33	0,6593948	0,64	0,4146418	0,95	0,1366194
0,03	0,9626749	0,34	0,6508255	0,65	0,4070559	0,96	0,1217543
0,04	0,9506049	0,35	0,6423242	0,66	0,3994577	0,97	0,1050663
0,05	0,9387113	0,36	0,6338883	0,67	0,3918435	0,98	0,0854822
0,06	0,9269886	0,37	0,6255156	0,68	0,3842093	0,99	0,0602320
0,07	0,9154317	0,38	0,6172035	0,69	0,3765508	1	0
0,08	0,9040355	0,39	0,6089497	0,70	0,3688635		
0,09	0,8927950	0,40	0,6007518	0,71	0,3611426		
0,10	0,8817057	0,41	0,5926075	0,72	0,3533830		
0,11	0,8707628	0,42	0,5845144	0,73	0,3455791		
0,12	0,8599622	0,43	0,5764702	0,74	0,3377250		
0,13	0,8492994	0,44	0,5684726	0,75	0,3298140		
0,14	0,8387703	0,45	0,5605193	0,76	0,3218392		
0,15	0,8283710	0,46	0,5526080	0,77	0,3137927		
0,16	0,8180975	0,47	0,5447363	0,78	0,3056661		
0,17	0,8079460	0,48	0,5369021	0,79	0,2974499		
0,18	0,7979129	0,49	0,5291029	0,80	0,2891335		
0,19	0,7879946	0,50	0,5213363	0,81	0,2807051		
0,20	0,7781876	0,51	0,5136002	0,82	0,2721515		
0,21	0,7684885	0,52	0,5058919	0,83	0,263575		
0,22	0,7588941	0,53	0,4982092	0,84	0,2546058		
0,23	0,7494010	0,54	0,4905496	0,85	0,2455763		
0,24	0,7400063	0,55	0,4829106	0,86	0,2363457		
0,25	0,7307069	0,56	0,4752896	0,87	0,2268864		
0,26	0,7214996	0,57	0,4676840	0,88	0,2171654		
0,27	0,7123818	0,58	0,4600912	0,89	0,2071425		
0,28	0,7033504	0,59	0,4525084	0,90	0,1967688		
0,29	0,6944027	0,60	0,4449327	0,91	0,1859817		
0,30	0,6855359	0,61	0,4373614	0,92	0,1747013		

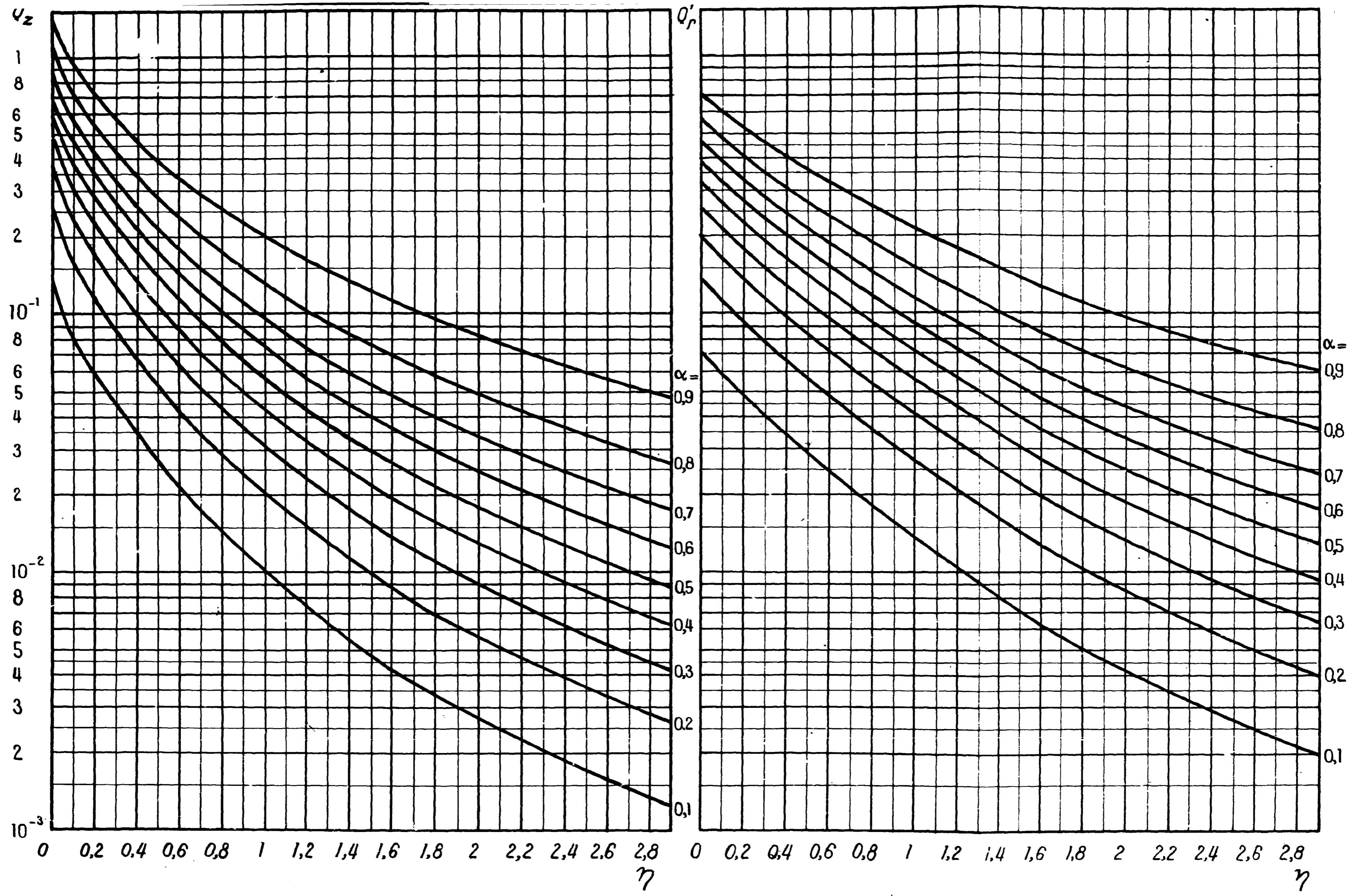


Figure 1 - Fonctions  $Q'_z$  et  $Q'_r$  dépendant de  $\eta$  et de  $\alpha$

quand  $\alpha = 0,1$  nous trouvons  $Q'_z = 0,1$  et  $Q'_r = 0,1$

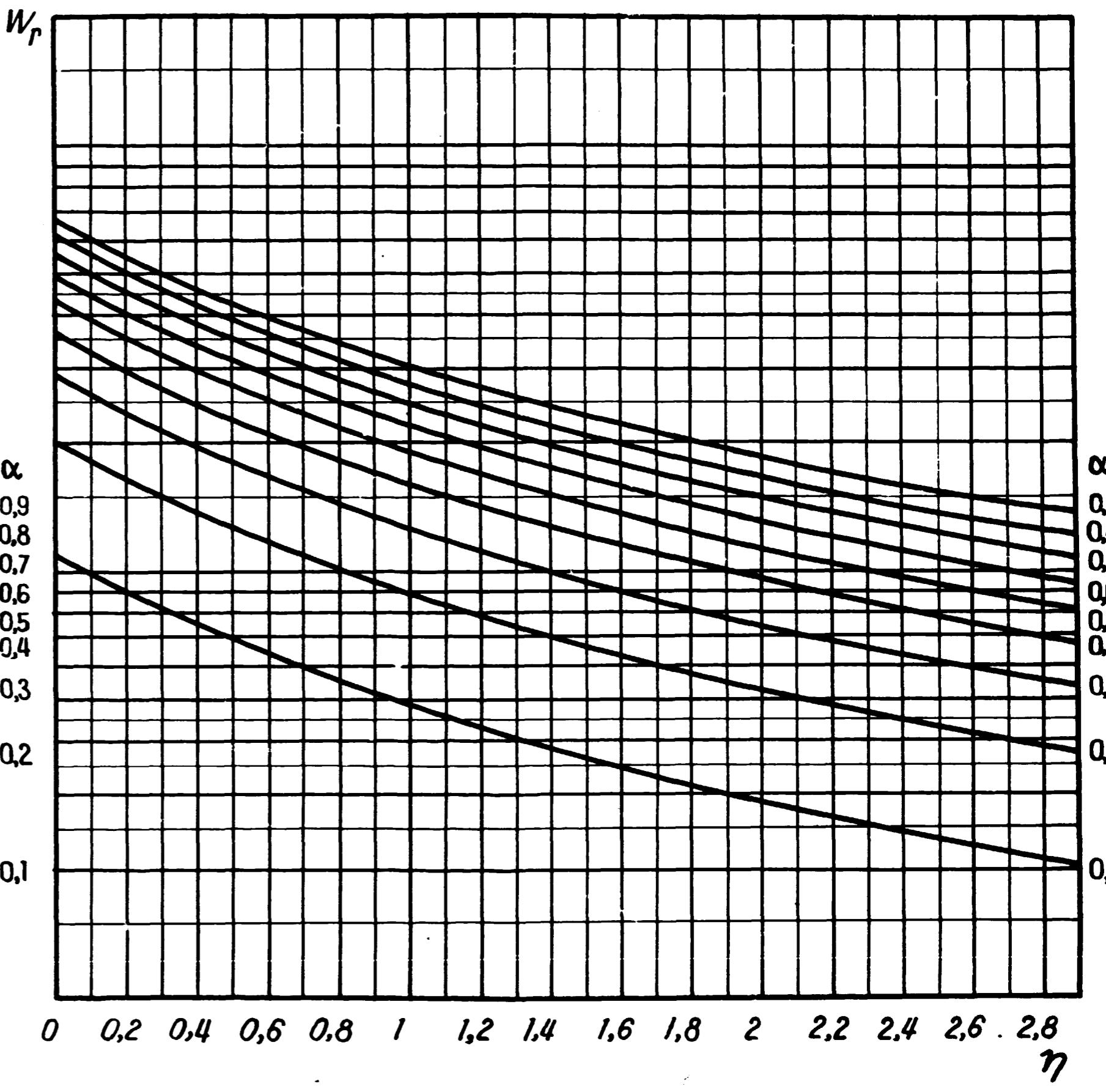
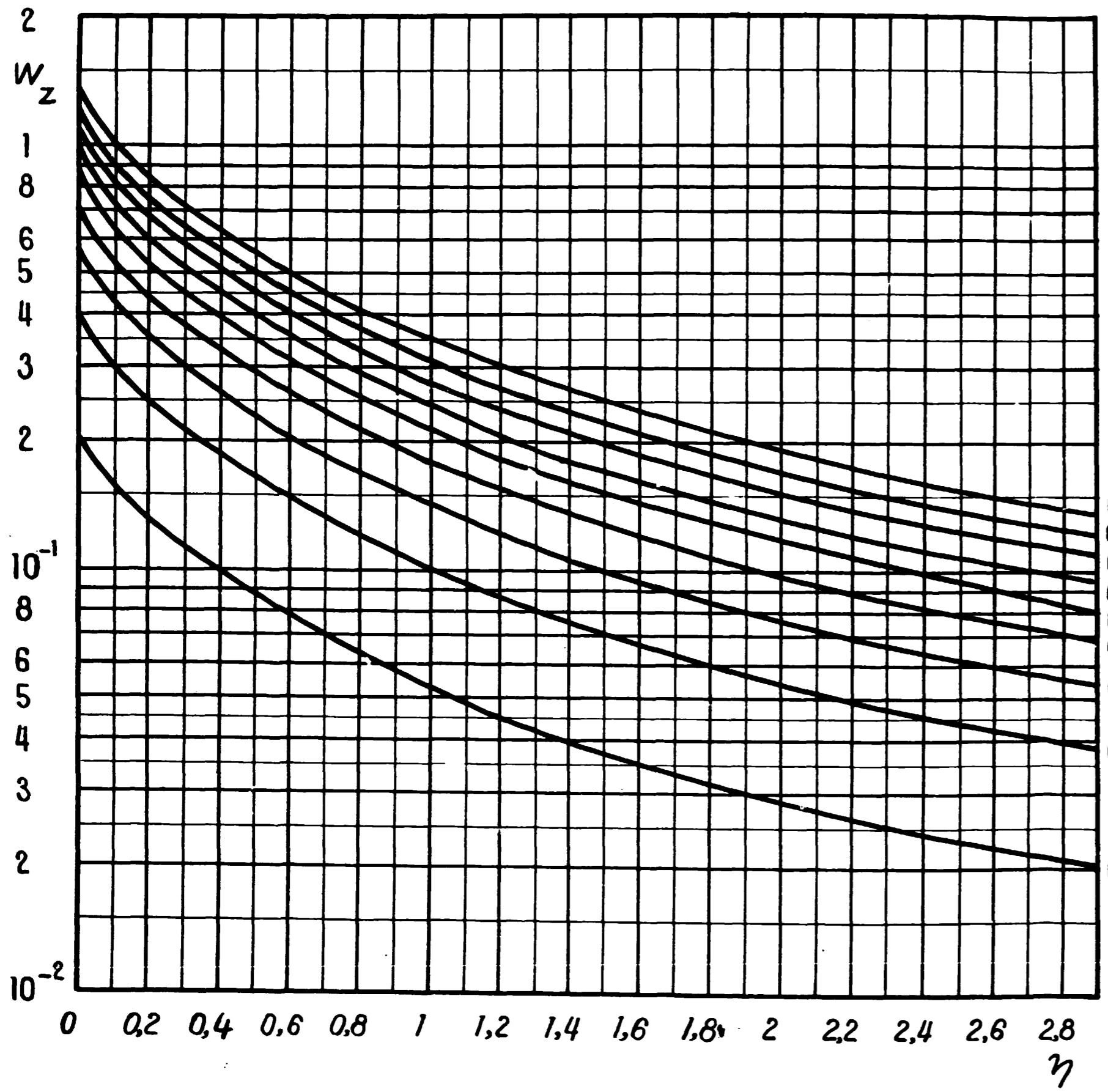


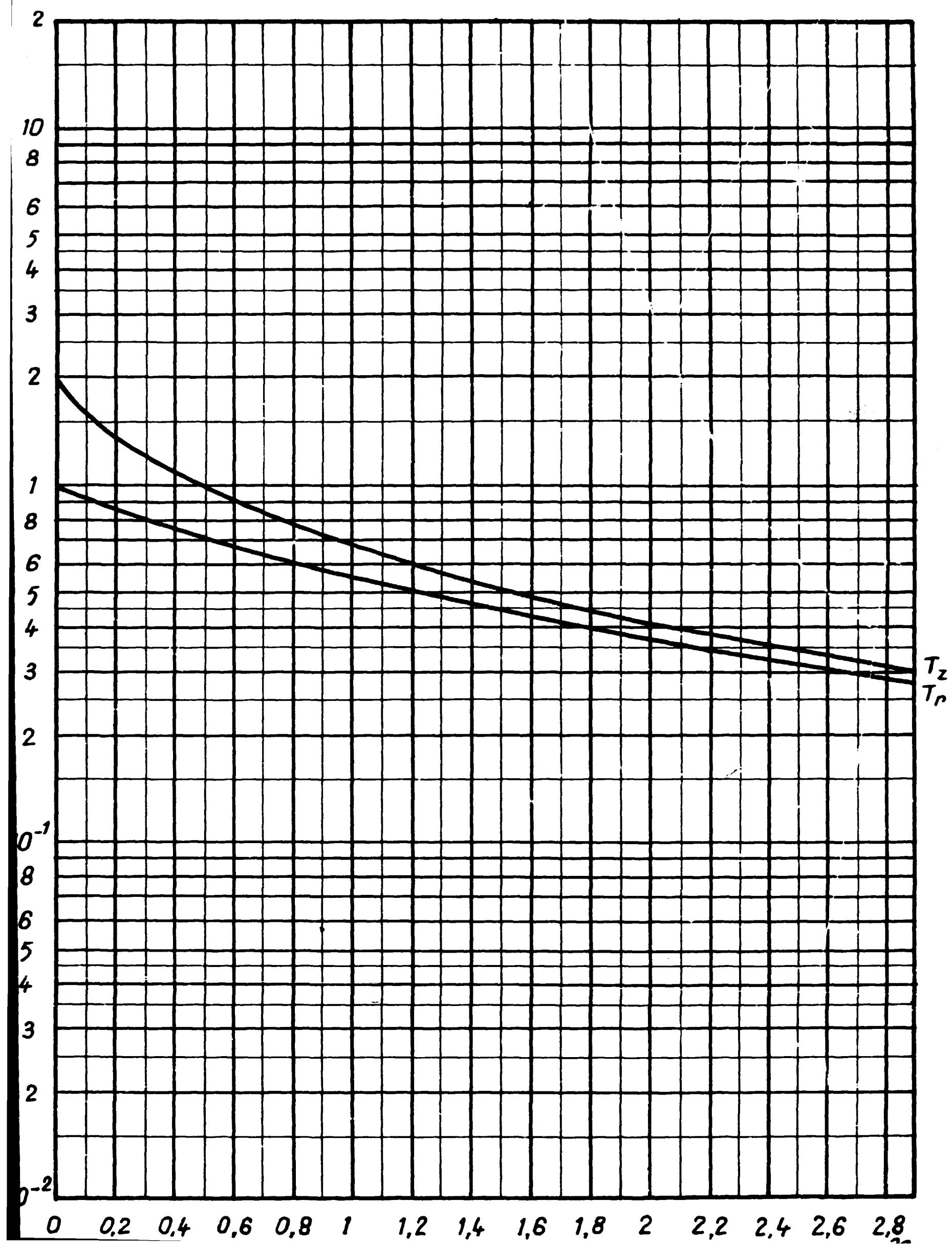
Figure 2 - Fonctions  $W_z$  et  $W_r$  dépendant de  $\eta$  et de  $\alpha$

Quand  $\eta \rightarrow \infty$

Quand  $\alpha \rightarrow 0$

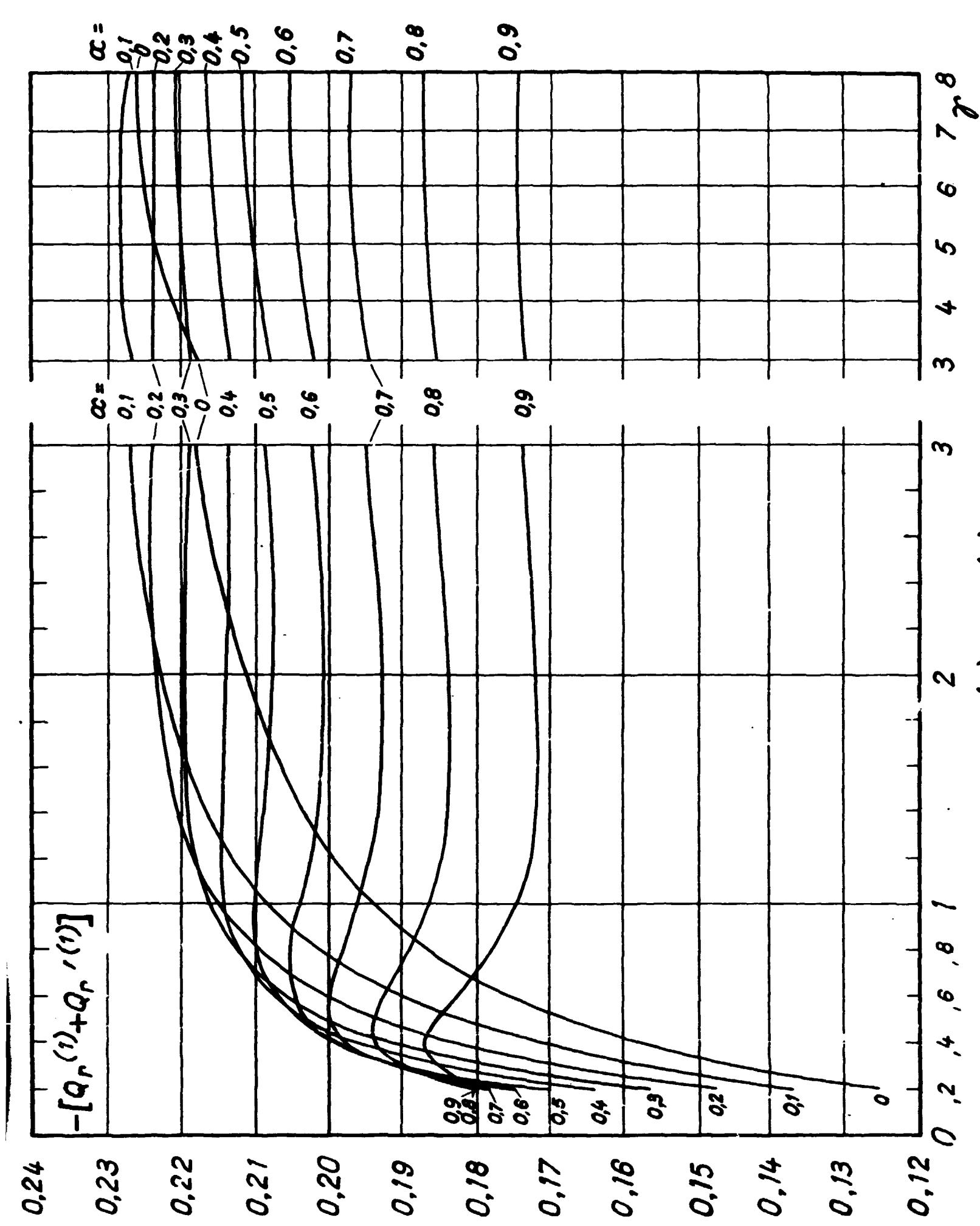
$W_k \rightarrow 0$  pour tout  $\alpha$

$W_k \rightarrow 0$  pour tout  $\eta$



53

Figure 4 - Fonction  $-[Q_r(1) + Q_{r'}(1)]$  dépendant de  $\gamma$  et de  $a$   
 Quand  $\gamma \rightarrow 0$   $-[Q_r(1) + Q_{r'}(1)] \rightarrow 0$  pour tout  $a$



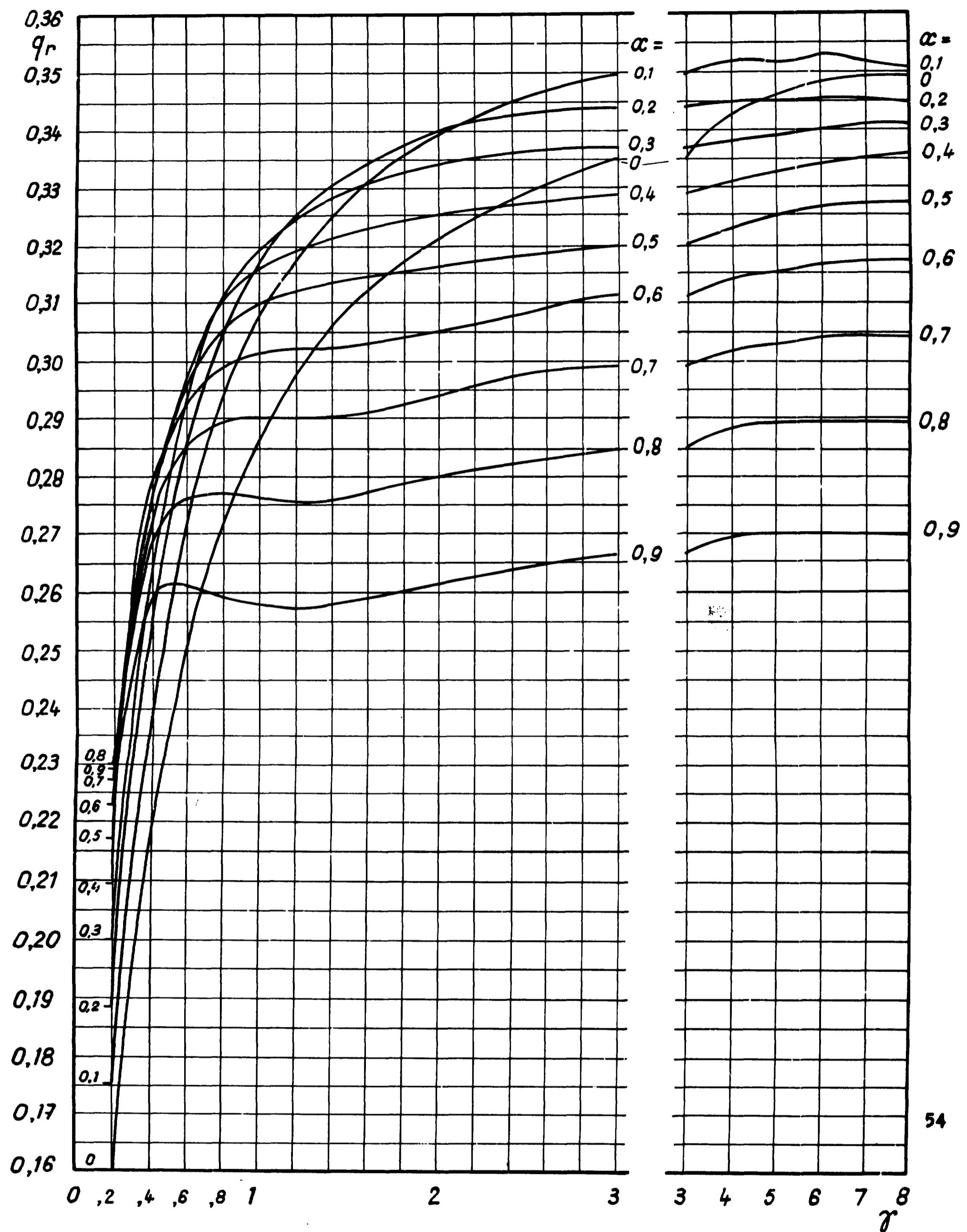


Figure 5

- Fonction  $q_r = - [Q_r^{(1)} + Q'_r^{(1)} + Q_r^{(2)} + Q'_r^{(2)}]$  dépendant de  $\gamma$  et de  $\alpha$

Quand  $\gamma \rightarrow 0$   $q_r \rightarrow 0$  pour tout  $\alpha$

**FIN**