

1458-BR-3612



BR98B0261

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

MODELO RELATIVÍSTICO DO PRÓTON

Wilson Roberto Barbosa de Araújo

Dissertação de Mestrado

Comissão examinadora:

Prof.Dr.Tobias Frederico (I.T.A)

Prof.Dr.Antonio Delfino (U.F.F)

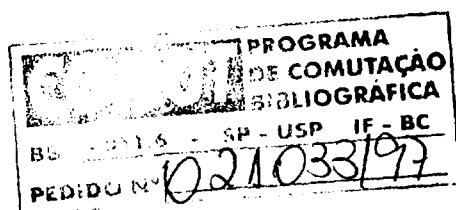
Prof.Dr.Fernando Navarra (U.S.P)



Tobias Frederico
Orientador: Dr. Tobias Frederico

IFUSP/1995

Manoel de Oliveira
Vice-Presidente em Exercício



11 FUSP

A 663 m

14

222.2

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

**Araújo, Wilson Roberto Barbosa de
Modelo Relativístico do Próton. São Paulo, 1995**

**Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Experimental.
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico**

**Unitermos: 1. Equação de Faddeev; 2. Interação de
contato; 3. Quarks constituintes; 4. Modelo não confiante.**

USP/IF/SBI - 09/96

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um modelo para o próton, cuja estrutura é formada por quarks constituintes relativísticos interagindo através de uma força de contato. Para tanto, construímos a função de onda do núcleon usando a equação de Faddeev no plano nulo. A covariância do modelo sob “boosts” cinemáticos no plano-nulo foi discutida. O fator de forma elétrico do próton, obtido da função de onda de Faddeev, reproduz os dados experimentais em baixos momentos transferidos e descreve qualitativamente a região assintótica para momentos transferidos em torno de 2 GeV.

Abstract

In this dissertation, we present a model for the nucleon, which is composed by three relativistic constituent quarks interacting through a contact force. The nucleon wave-function was obtained from the Faddeev equation in the null-plane. The covariance of the model under kinematical null-plane boosts is discussed. The electric proton form-factor, calculated from the Faddeev wave-function, was in agreement with the data for low-momentum transfers and described qualitatively the asymptotic region for momentum transfers around 2 GeV.

Índice

1	Introdução	1
2	Sistemas não-relativísticos de 2 e 3 bósons	6
2.1	Amplitude de espalhamento de dois bósons: interação de contato.	7
2.2	Renormalização da Matriz- τ	9
2.3	Função de onda total de três bósons	11
2.4	Equação integral de três bósons	12
2.5	Efeitos Thomas e Efimov	15
3	Sistemas relativísticos de 2 e 3 bósons no plano-nulo.	16
3.1	Coordenadas do plano-nulo	17
3.2	“Boosts” cinemáticos	18
3.3	Amplitude de espalhamento de dois bósons relativísticos com interação de contato	21
3.4	Equação Integral para o estado ligado de 3-bósons no plano-nulo.	25
3.5	Covariância por transformações cinemáticas	28
4	Fator de forma elétrico do próton	31
4.1	Corrente eletromagnética do núcleon	33
4.2	Fator de forma do “píon” como sistema de dois bósons	35
4.3	Cálculo do Fator de forma elétrico do próton	37
5	Resultados Numéricos	44
6	Conclusões	58
A	Regras de Feynman não-relativísticas	60

B Geradores cinemáticos	63
C Fatores de forma eletromagnéticos não relativísticos	67
D Limites não-relativísticos	70
Bibliografia	75

Capítulo 1

Introdução

Dirac em 1949 [1], mostrou que é possível descrever um sistema relativístico em qualquer superfície do espaço-tempo cujas distâncias sejam do tipo espaço. Isto permite construir o estado inicial do sistema, uma vez que as distâncias entre os pontos desta hiper-superfície não tem conexão causal. A evolução dinâmica corresponde ao sistema seguir uma trajetória através das hiper-superfícies. Por exemplo, a hiper-superfície a $t=0$, está associada ao nosso espaço tridimensional. Ele é invariante por translações e rotações. Porém qualquer transformação de referencial inercial que envolva “boosts”, a coordenada temporal é modificada e portanto a hiper-superfície $t=0$. Outras hiper-superfícies podem ser invariantes por alguns “boosts”. É o caso do plano-nulo, definido por $x^+ = t + z = 0$, que é a coordenada de “tempo” para o plano-nulo. Por exemplo, um “boost” na direção z não modifica o plano-nulo.

Do ponto de vista quântico, podemos definir o estado inicial do sistema em qualquer hiper-superfície, para a qual as distâncias entre dois pontos sejam do tipo espaço, e portanto sem conexão causal. A evolução quântica do sistema é dada pelo operador associado a translação “temporal” desta hiper-superfície. Uma vantagem do uso do plano-nulo, na descrição de sistemas quânticos é que podemos realizar “boosts” sem envolver a dinâmica, e descrever a função de onda em diversos referenciais.

Tem sido frequente o uso do plano-nulo para o estudo de sistemas relativísticos. Os campos de aplicação estendem-se desde sistemas com poucos núcleons [2, 3], até estudos sobre estrutura de hádrons leves [4, 5, 6]. Isto deve-se à possibilidade de tratar as funções de onda com um número pequeno de graus de liberdade. Porém, dentro da limitação de um número fixo de partículas, não é levado em conta a mistura de componentes mais complexas do espaço

de Fock, acreditando-se que tais contribuições para as funções de onda resultantes dessas misturas sejam pequenas, e por essa razão, razoável supor um número fixo de partículas [4].

Assim, também há a restrição de que esses sistemas devam estar sendo observados com pequena resolução, sendo suficiente para a sua descrição as componentes mais simples do espaço de Fock. Isso tanto no domínio da física nuclear, como em sistemas de hádrons leves. Elimina-se, portanto, graus de liberdade de estados intermediários, que correspondem a estados de Fock mais complexos. Isto possibilita, por exemplo, descrever o núcleo como nucleons interagindo via potenciais. Em relação aos hádrons leves, em baixa energia, acredita-se que sejam descritos por quarks constituintes interagindo via um potencial confinante. Aumentando-se a resolução com que observamos este sistema, componentes mais complexas do espaço de Fock passam a ser visíveis. Por exemplo, glúons, quarks e antiquarks passam a surgir [7].

Do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos usual, esse truncamento no espaço de Fock é problemático [7]. Em geral, mudando-se de referencial, através de “boosts”, há a criação de pares, tornando-se inconveniente este tratamento pois o número de partículas nesse novo referencial é diferente. É desejável, portanto, que essa dificuldade não exista e que seja possível encontrar uma descrição aproximada na qual o número de partículas não mude com o referencial, preservando essa descrição física.

Usando o plano-nulo como ferramenta de cálculo, o problema é solucionado, no que diz respeito a certos “boosts” [7]. As funções de onda hadrônicas envolvendo quarks constituintes são covariantes por “boosts” cinemáticos [8]. Os geradores das transformações cinemáticas não produzem pares ao serem aplicados no estado quântico, por não conterem a dinâmica. Como consequência, a invariância dos observáveis físicos em geral são evidentemente preservadas nesta aproximação: seções de choque, fatores de forma, etc.

Contudo, a covariância por “boosts” cinemáticos no plano-nulo é limitada. Por exemplo, não é possível garantir que os elementos de matriz da corrente eletromagnética de um estado ligado mantenham a invariância rotacional e de calibre sem que sejam incluídas, num sentido rigoroso, componentes “espúrias” da função de onda, correspondendo à mistura de componentes mais complexas do espaço de Fock. O cálculo dos elementos de matriz do operador corrente, em geral deve levar em conta componentes não-diagonais no espaço de Fock. Na limitação de se trabalhar num espaço de Fock truncado, devemos calcular apenas a componente “boa” da corrente eletromagnética ($J^+ = J^0 + J^3$) [9], que tem em geral elementos de matriz nulos fora da diagonal. É suficiente que sejam conhecidos os elementos de matriz de

J^+ para extrair-se os fatores de forma eletromagnéticos [2], e de certa forma o problema da conservação da corrente eletromagnética também é evitado. Quanto à invariância rotacional, a observação também se enquadra, porém, com a ressalva de que ela não ocorre para o caso do sistema ter spin maior ou igual a um [2, 3].

Iremos estudar um modelo para o núcleon com graus de liberdade de quarks constituintes. O quark constituinte corresponde a uma partícula efetiva, com o mesmo spin do quark despido, porém com uma massa efetiva da ordem de $1/3$ da massa do núcleon. Este grau de liberdade efetivo, seria decorrente da complexidade do vácuo da Cromodinâmica Quântica, onde efeitos não perturbativos são importantes, “vestindo” o quark e originando o quark constituinte. A motivação da descrição do hádron como sendo formado por quarks constituintes vem do trabalho de Nambu e Jona-Lasinio (N.J.L) [10]. Esse modelo, baseia-se na analogia com a aproximação de emparelhamento (B.C.S) [11] para a supercondutividade [10]. Ambos os tratamentos de N.J.L e B.C.S usam a idéia de quebra espontânea de simetria. A diferença está no tipo de simetria quebrada. No modelo de B.C.S, a simetria espontaneamente quebrada leva a não conservação do número de partículas, enquanto que em N.J.L a simetria quebrada é a simetria quiral, e origina uma massa para o férmion. Formalmente a analogia é completa. Destacamos aqui as equações de “gap” que motivam uma intuição física sobre a geração da massa dos quarks constituintes.

Com relação aos efeitos devido ao vácuo na Eletrodinâmica Quântica (QED) e na Cromodinâmica Quântica (QCD), vemos analogias, mas também diferenças qualitativas. Colocando-se uma carga elétrica de teste no vácuo, ela o polariza produzindo uma diferença entre carga “nua” e seu valor medido. No caso de se colocar um quark de teste no vácuo, há também a polarização do vácuo cromo-elétrico, porém com a diferença de ocorrer a liberdade assintótica em curtas distâncias e confinamento em grandes distâncias [12].

Parte dessas características são incorporadas em modelos fenomenológicos não-perturbativos para os quarks, baseados em N.J.L., onde as equações de “gap” são valores esperados do vácuo que geram a massa dinâmica quando a simetria quiral é quebrada [13]. Porém, o modelo de N.J.L. apresenta a característica de não ter confinamento. Seu uso está restrito a baixas energias. Ele congela os graus de liberdade de côm (gluons), gerando uma interação efetiva entre quarks constituintes. Outro ponto importante vindo de N.J.L é que a interação efetiva entre os quarks constituintes é de contato.

O objetivo desta dissertação é usar um modelo para o núcleon baseado nas idéias de N.J.L. para calcular o fator de forma de carga do próton. O ingrediente básico, aqui utilizado, é

o de quarks constituintes com interação de contato, sem confinamento. Neste modelo é fundamental ressaltar que os quarks são relativísticos, o que deve-se à massa do quark ser da ordem do inverso da escala hadrônica universal: em torno de 1 fm, aproximadamente o tamanho do próton. Os resultados que serão apresentados foram publicados recentemente [14].

A função de onda que obtivemos para o núcleon supõe três quarks constituintes ligados, interagindo via força de contato. Cada quark é considerado como bóson, e nesse contexto, restringimo-nos a estudar a componente espacial totalmente simétrica da função de onda do próton. Ela é construída da soma das componentes de Faddeev [15], correspondentes aos três quarks constituintes no plano-nulo. A equação dinâmica para cada componente de Faddeev de um estado ligado para três bósons interagindo com força de alcance zero no plano-nulo foi deduzida na Ref. [16]. Nessas componentes temos a soma de todos os processos de dois corpos onde é essencial a sua renormalização [16]. A função de onda do próton é obtida numericamente e a partir daí calculamos o fator de forma elétrico, e o comparamos com os dados experimentais oferecidos pela literatura [17, 18, 19]. Observamos aqui o contraste desta função de onda obtida dinamicamente com aquelas que contém confinamento (funções de onda gaussianas) [20, 21, 22] .

A apresentação que se segue, começa com o Capítulo 2, relativo ao sistema de três bósons ligados e não relativísticos. Abordamos o problema da renormalização da amplitude de dois corpos neste contexto, seguido da obtenção diagramática da equação para a componente de Faddeev da função de onda (equação de Skorniakov e Ter-Martirosian [23]). As regras de Feynman não-relativísticas são discutidas no Apêndice A. Terminamos esse capítulo abordando os efeitos Thomas e Efimov não relativísticos. Sua importância seria fornecer as comparações com equações integrais obtidas no plano-nulo, no capítulo seguinte.

No Capítulo 3, apresentamos o plano-nulo. Começamos pelas definições de suas coordenadas e uma discussão sobre “boosts” cinemáticos (definidos no Apêndice B) em sistemas de dois e três corpos. Na outra parte obtemos a amplitude de espalhamento de dois corpos, e, posteriormente, a função de onda do próton no plano-nulo. Discutimos a identificação entre o méson e diquark através das variáveis de Mandelstan; uma vez que na renormalização da amplitude de espalhamento de dois quarks constituintes introduzimos a informação física relativa à massa do estado ligado de dois quarks (diquark). Derivamos a equação integral para a componente de Faddeev do estado ligado de três-bósons no plano-nulo [16]; e, por fim, sua covariância por “boosts” cinemáticos no plano-nulo.

No Capítulo 4, obtemos o fator de forma elétrico do próton. Antes fazemos uma digressão sobre a obtenção dos fatores de forma eletromagnéticos a partir da corrente do núcleon e o seu raio quadrático médio. Calculamos o diagrama triangular para a corrente eletromagnética de um estado ligado de dois corpos no plano-nulo, que servirá como base para a construção do fator de forma elétrico para os três quarks ligados formando o próton.

Calculamos os fatores de forma elétricos não relativísticos de dois e três corpos no Apêndice C. No Apêndice D, comparamos os resultados do Apêndice C com os limites não relativísticos dos fatores de forma de dois corpos e do próton, obtidos no Capítulo 4. Neste apêndice, também obtemos os limites não-relativísticos das equações de dois e três corpos no plano-nulo do Capítulo 3 e comparamos com as respectivas equações não-relativísticas, discutidas no Capítulo 2.

No Capítulo 5 apresentamos os resultados numéricos deste modelo para o próton, e comparamos o fator de forma elétrico calculado com dados experimentais oferecidos pela literatura [17]. E por fim, no Capítulo 6, temos a conclusão com os principais resultados obtidos neste trabalho.

Capítulo 2

Sistemas não-relativísticos de 2 e 3 bósons

Neste capítulo iremos discutir a interação de contato em um sistema de dois e três bósons não relativísticos. Vamos utilizar o método diagramático de Feynman para construir as Equações de Bethe-Salpeter para dois e três corpos. Para tanto usaremos as "regras de Feynman" para o caso não-relativístico (Apêndice A). Esta discussão é um prelúdio à apresentação do modelo do núcleon, que será considerado como um sistema ligado de três quarks relativísticos com uma interação de contato.

A função de onda de três bósons é totalmente simétrica, e para um potencial separável de um termo, como é o caso da interação de contato, podemos separar o movimento da partícula espectadora do processo de interação das outras duas, sendo isto expresso em termos de uma função espectadora [24]. Esta última é função apenas da coordenada relativa da partícula espectadora em relação ao centro de massa das outras duas. Para ilustrar o nosso método de trabalho, iremos derivar a equação dinâmica para a função espectadora da Eq. de Bethe-Salpeter, realizando-se uma integração em energia. O resultado é a conhecida equação de Skorniakov e Ter-Martirosian [23] para três bósons. Esta discussão tem o intuito de tornar mais direta a derivação da equação integral para a função de onda espectadora do estado ligado relativístico de três-bósons no plano-nulo, que será feita no capítulo 3. Iremos também discutir que o limite não relativístico desta equação é dado pela Eq. de Skorniakov e Ter-Martirosian (Apêndice D).

Este capítulo segue o seguinte roteiro. Começamos construindo diagramaticamente a amplitude de espalhamento de dois corpos, denotada por τ , para o potencial de contato.

Devido a ocorrência de divergência na integração para obtermos τ , utilizaremos o método de regularização e em seguida estudaremos a renormalização da intensidade do potencial [25, 26]. É necessário inserir uma informação física do sistema de dois corpos para eliminar a dependência à forma de regularização. Escolhemos esta informação como sendo a energia de ligação de dois corpos.

Em seguida construiremos através das regras de Feynman, a Eq. de Bethe-Salpeter para a função espectadora. Esta equação é definida em um espaço quadridimensional, correspondendo às três componentes do momento da partícula espectadora e a sua energia de propagação. Cada partícula está fora da sua camada de energia. Estudaremos a estrutura analítica no kernel em função da energia da partícula espectadora. Isto é necessário para integração analítica na energia, observando porém a restrição quanto à região de analiticidade da função espectadora. Com isto obtemos uma equação integral tridimensional, que é a Eq. de Skorniakov e Ter-Martirosian. Discutiremos os efeitos Thomas [27] e Efimov [28] e a sua estreita relação.

Na equação de Skorniakov e Ter-Martirosian não há um limite mínimo para a energia de três corpos, o que corresponde ao colapso deste sistema, como previsto por Thomas em 1935 [27]. Esta equação é regularizada pela introdução de um parâmetro de corte no momento [29]. Ao introduzirmos este corte na equação integral e fazer o limite do corte tendendo para o infinito (o que significa grandes momentos para um alcance cada vez menor), o número de estados ligados torna-se infinito. Isto caracteriza o colapso do estado ligado e corresponde ao efeito Thomas. Por outro lado, quando fixamos o parâmetro de corte e fazemos o limite da energia de ligação de dois corpos ir à zero, o número de estados ligados também é infinito. E como veremos, no contexto não-relativístico, esses efeitos diferem apenas por uma mudança de escala [30, 31]. Cabe colocar que esses efeitos dependem da dimensionalidade do espaço, como por exemplo em duas dimensões, nas quais eles não existem [30, 32].

2.1 Amplitude de espalhamento de dois bósons: interação de contato.

O diagrama de Feynman referente à amplitude de dois corpos (τ) tem a representação pictórica da fig. (2.1):

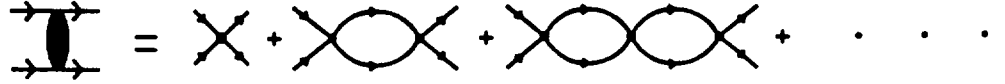


Figura 2.1

A interação é de contato, o que é uma simplificação considerável. Nesse caso, adotando um potencial separável com condição de alcance zero, temos no espaço dos momentos:

$$\langle \vec{k} | -iV | \vec{k}' \rangle = i\lambda \langle \vec{k} | \chi \rangle \langle \chi | \vec{k}' \rangle = i\lambda \chi(k) \chi(k'), \quad (2.1)$$

onde $\lambda > 0$ para uma interação atrativa e $\chi(k)$ depende do módulo de $\vec{k}$, correspondendo a uma interação na onda S.

A transformada de Fourier do potencial tipo Delta de Dirac é uma constante, e portanto o fator de forma no espaço de momentos é dado por

$$\chi(\vec{k}) = 1.$$

Assim, τ é representada pelos diagramas da fig. (2.1), e é dada pela série

$$\langle \vec{k}' | \tau(E_2) | \vec{k} \rangle = i\lambda + (i\lambda)^2 I(E_2) + (i\lambda)^3 I^2(E_2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (i\lambda)^n I^{n-1}(E_2); \quad (2.2)$$

onde E_2 é a energia total do sistema de dois corpos.

O diagrama "bolha" da fig. (2.2), no centro de massa do sistema de dois corpos, dado por $I(E_2)$, tem a representação integral abaixo, onde as nossas unidades são tais que $\hbar = 1$:

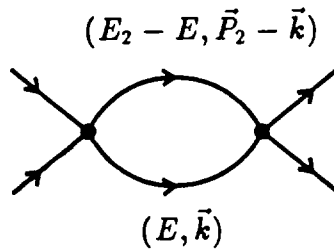


Figura 2.2

$$I(E_2) = \int \frac{dE}{2\pi} \frac{d^3k}{(2\pi^3)} \frac{i}{(E - \frac{\vec{k}^2}{2m} + i\epsilon)} \frac{i}{(E_2 - E - \frac{(\vec{P}_2 - \vec{k})^2}{2m} + i\epsilon)} ; \quad (2.3)$$

No centro de massa o momento total do sistema de duas partículas é nulo, $\vec{P}_2 = 0$.

Observe que $\tau(E_2) = (-i) T(E_2)$, onde T é a matriz-T usual de dois corpos [33].

De (2.2) e (2.3), $\tau(E_2)$ se reduz à

$$\langle \vec{k}' | \tau(E_2) | \vec{k} \rangle = \frac{i}{\lambda^{-1} - iI(E_2)} \equiv \tau(E_2) . \quad (2.4)$$

A integral na Eq. (2.3) possui dois polos em E . Um em cada semi-plano, o que faz que não haja restrição quanto ao caminho de integração a ser escolhido. Integrando por Cauchy temos o resultado abaixo:

$$I(E_2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{E_2 - \frac{k^2}{m} + i\epsilon} . \quad (2.5)$$

A integral $I(E_2)$ em (2.5) apresenta uma divergência linear, o que torna a amplitude de espalhamento mal definida. Assim, será necessário dar um tratamento baseado nas técnicas de regularização e renormalização [25].

2.2 Renormalização da Matriz- τ

Vamos seguir os trabalhos recentes das Refs. [25, 26]. O primeiro passo é a regularização da integral $I(E_2)$, Eq. (2.5). Esta etapa consiste em introduzir um corte no espaço dos momentos de maneira a tornar a integral finita. O corte pode ser colocado ou nos limites de integração, ou por uma expressão regularizada do propagador de dois corpos, que aparece em $I(E_2)$. Porém, apesar deste procedimento eliminar a divergência, o infinito existente anteriormente é eliminado "artificialmente" pelo corte. O passo seguinte, portanto, é incluir uma informação física do sistema de dois corpos, que reabsorve o infinito anteriormente desconsiderado.

No processo de regularização redefimos a constante de acoplamento em todas as ordens, para absorver as divergências na série perturbativa de τ . Em cada ordem a constante de acoplamento, ou intensidade do potencial, traz em si o corte na integração. Ela também será dada por uma série geométrica

$$\lambda^{(\infty)} = \lambda_{\Lambda_2} \sum_n (-\lambda_{\Lambda_2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Lambda_2^2 + \frac{k^2}{m}})^n . \quad (2.6)$$

Observe que somando a série geométrica em (2.6), teremos

$$(\lambda^{(\infty)})^{-1} = \lambda_{\Lambda_2}^{-1} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Lambda_2^2 + \frac{k^2}{m}} . \quad (2.7)$$

A matriz τ_{Λ_2} regularizada tem a forma

$$\tau_{\Lambda_2}(E_2) = i[(\lambda^{(\infty)})^{-1} - iI(E_2)]^{-1} ; \quad (2.8)$$

onde substituímos λ , na Eq. (2.4), por $\lambda^{(\infty)}$. Assim temos a regularização de $\tau_{\Lambda_2}(E_2)$. Isto é, ela é finita. Porém, depende do parâmetro de corte Λ_2 .

Substituindo (2.5) e (2.7) em (2.8), temos

$$\tau_{\Lambda_2}(E_2) = i[\lambda_{\Lambda_2}^{-1} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\frac{1}{\Lambda_2^2 + \frac{k^2}{m}} + \frac{1}{E_2 - \frac{k^2}{m} + i\epsilon})]^{-1} . \quad (2.9)$$

A matriz $\tau_{\Lambda_2}(E_2)$ regularizada, pode ser reescrita como

$$\tau_{\Lambda_2}(E_2) = i[\lambda_{\Lambda_2}^{-1} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} g_{\Lambda_2}(k, E_2)]^{-1} = [\lambda_{\Lambda_2}^{-1} - I_{\Lambda_2}(E_2)]^{-1} , \quad (2.10)$$

onde introduzimos a função de Green regularizada

$$g_{\Lambda_2}(k, E_2) = \frac{1}{\Lambda_2^2 + \frac{k^2}{m}} + \frac{1}{E_2 - \frac{k^2}{m} + i\epsilon} . \quad (2.11)$$

Cabe observar acima, na Eq. (2.10), que a parte imaginária não é afetada quando o corte é incluído, garantindo assim a unitariedade da amplitude de espalhamento de dois corpos.

Resumindo, introduzimos na amplitude de espalhamento (2.8), a constante de acoplamento redefinida em termos do parâmetro de corte (2.7) e obtivemos amplitude regularizada (2.10). Este método elimina a divergência linear para $k \rightarrow \infty$, que é "engolida" pelo corte introduzido.

O próximo passo então é renormalizar a intensidade do potencial, usando para isto alguma informação física do sistema de dois corpos. A amplitude de espalhamento renormalizada é obtida para $\Lambda_2 \rightarrow \infty$. Introduzimos a informação física do sistema de dois corpos na amplitude de espalhamento, a qual corresponde à energia de ligação de dois corpos ($-E_{2B}$). Com isto, (2.10) terá um polo na energia $-E_{2B}$, assim definindo a constante de acoplamento λ_{Λ_2} como

$$\lambda_{\Lambda_2}^{-1} = \lambda^{-1}(\mu_{2B}) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\Lambda_2^2 + \frac{k^2}{m}} - \frac{1}{E_{2B} + \frac{k^2}{m}} \right), \quad (2.12)$$

onde $\mu_{2B} = \sqrt{mE_{2B}}$ e $(\lambda(\mu_{2B}))^{-1} = 0$ (constante de acoplamento renormalizada). Com isto aparece o pólo na amplitude de espalhamento na energia $-E_{2B}$.

Substituindo (2.12) em (2.10), eliminamos o parâmetro de corte na integral finita, recuperando dessa maneira a informação física contida no "infinito perdido". A amplitude renormalizada de dois corpos é dada por

$$\tau_R(E_2) = i[(E_{2B} + E) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(E_{2B} + \frac{k^2}{m})(E_2 - \frac{k^2}{m} + i\epsilon)}]^{-1}. \quad (2.13)$$

Observemos na Eq.(2.13) que a parte relativa ao corte é cancelada, não influenciando portanto no limite $\Lambda_2 \rightarrow \infty$.

Integrando pelo teorema de Cauchy a integral em (2.13), obtemos a amplitude renormalizada:

$$\tau_R(E_2) = -4\pi i [m(\mu_{2B} + ik)]^{-1}, \quad (2.14)$$

onde $k = \sqrt{mE}$.

2.3 Função de onda total de três bósons

A função de onda de três bósons é totalmente simétrica e está escrita no espaço dos momentos. Ela é o "sanduíche" do "ket" $|\Psi\rangle$ com três "bras" pertencentes aos espaço de Hilbert produto, associados aos três bósons. Usando o potencial separável, a dinâmica fica contida na função espectadora, que expressa o movimento da chamada partícula espectadora [24]. A equação de *Schrödinger* com potencial separável, Eq. (2.1), para três bósons interagentes é escrita como

$$(-E_{3B} - H_0)|\Psi\rangle = \left(-\sum_{i=1}^3 \lambda |\chi_i\rangle\langle\chi_i|\right)|\Psi\rangle, \quad (2.15)$$

onde $E_{3B} > 0$ é a energia de ligação do estado ligado de três-bósons. A Hamiltoniana livre (H_0) é a dada pela soma das energias cinéticas das três partículas no centro de massa:

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{k}_i^2}{2m}, \quad (2.16)$$

Vamos adotar o referencial do centro de massa, onde $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$. Na equação (2.15), o produto escalar $\langle \chi_i | \Psi \rangle$ não é um número. Ele é um vetor no espaço de Hilbert correspondente à partícula i . Como $\langle \chi |$ só depende do momento relativo entre j e k , temos

$$\langle \chi_i | \vec{k}_i \vec{k}_j \vec{k}_k \rangle = |\vec{k}_i \rangle \langle \chi | \vec{k}_j \vec{k}_k \rangle = |\vec{k}_i \rangle \chi(\vec{k}_j, \vec{k}_k) \quad (2.17)$$

Na eq.(2.15), multiplicando o lado direito por $\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | (E_3 - H_0)^{-1}$ temos

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | \Psi \rangle = \frac{1}{-E_{3B} - H_0} \sum_{j=1}^3 \lambda \langle \vec{k}_j \vec{k}_k | \chi_i \rangle \langle \vec{k}_i | \langle \chi_i | \Psi \rangle . \quad (2.18)$$

A inversão do operador $-E_{3B} - H_0$ é possível, pois para o estado ligado de três corpos com $E_{3B} > 0$, ele não se anula.

O produto escalar $\langle \chi_i | \Psi \rangle$ é um "ket" na coordenada $\vec{k}_i$. Observemos na eq.(2.18), a dependência do momento relativo de j e k no fator de forma do potencial separável. Ou seja, a interação é do subsistema formado pelas partículas j e k , não havendo interferência da partícula i , que cumpre o papel de espectadora. Por isso as funções $\lambda \langle \vec{k}_i | \langle \chi_i | \Psi \rangle$ do lado esquerdo da eq.(2.18) são chamadas de espectadoras [24].

No caso de três bósons, ainda temos que

$$\lambda \langle \vec{k}_1 | \langle \chi_1 | \Psi \rangle = \lambda \langle \vec{k}_2 | \langle \chi_2 | \Psi \rangle = \lambda \langle \vec{k}_3 | \langle \chi_3 | \Psi \rangle = v(\vec{k}) , \quad (2.19)$$

para $\vec{k} = \vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k}_3$.

Vale lembrar que no caso do potencial de contato, temos que $\chi(\vec{k}_i, \vec{k}_j) = 1$, e portanto a função de onda do estado ligado de três bósons fica

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | \Psi \rangle = \frac{v(\vec{k}_1) + v(\vec{k}_2) + v(\vec{k}_3)}{E_{3B} + \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{k}_i^2}{2m}} . \quad (2.20)$$

2.4 Equação integral de três bósons

Vamos construir, usando os diagramas de Feynman, a equação integral para a função espectadora, que corresponde à equação de Skorniakov e Ter-Martirosian. Uma vez que já entendemos o conceito de função espectadora, vamos obter a equação de Bethe-Salpeter que $v(\vec{k}_i)$ satisfaz. Analogamente à obtenção da matriz τ de dois bósons, temos a

representação diagramática da equação de Bethe-salpeter para a função espectadora, que é desenhada abaixo:

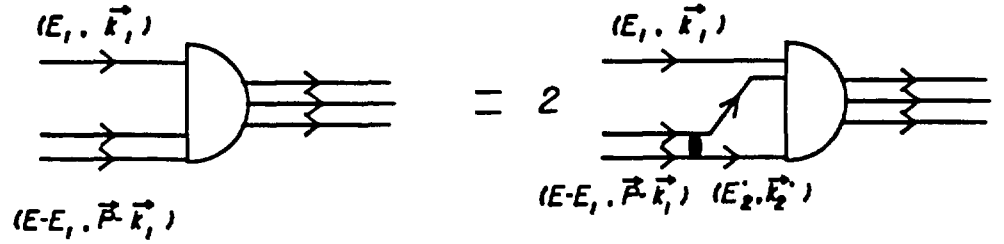


Figura 2.3

A equação diagramática acima será integrada na energia, no "loop" interno de momento, em um procedimento análogo ao aplicado para o sistema de dois corpos. O subsistema referente às partículas 2 e 3 é mostrado com energia e momento $-E_{3B} - E_1$ e $\vec{P}_{3B} - \vec{k}_1$, respectivamente. O momento total do sistema de três bósons é nulo, no centro de massa $\vec{P}_{3B} = \vec{0}$.

No lado direito, o diagrama representa uma equação integral de três corpos, com uma integração no "loop" de momento e energia. A "bola cheia", no lado direito do desenho, representa a matriz $\tau_R(E_{23})$ (2.14), calculada anteriormente. A energia de centro de massa do par, E_{23} , é dada por

$$E_{23} = -E_{3B} - E_1 - \frac{k_1^2}{4m}; \quad (2.21)$$

a partícula 1 é a partícula espectadora.

O subsistema dos bósons 2 e 3 está interagindo via força de alcance zero. O fator 2 vem da simetrização em relação às partículas 2 e 3.

Na construção da equação integral, somamos sobre todos os possíveis processos de dois corpos. Assim, utilizando as regras de Feynman, no referencial do centro de massa dos três bósons, obtemos

$$v(\vec{k}_1, E_1) = 2\tau_R(-E_{3B} - E_1 - \frac{k_1^2}{4m}) \int \frac{dE'_2}{2\pi} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3} \frac{dE'_3}{2\pi} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} \delta(-E_{3B} - \sum_i E'_i) \delta(\sum_i \vec{k}'_i) (2\pi)^4$$

$$\frac{i}{(E'_2 - \frac{k'^2_2}{2m} + i\epsilon)} \frac{i}{(E'_3 - \frac{k'^2_3}{2m} + i\epsilon)} v(\vec{k}'_3, E'_3). \quad (2.22)$$

A eq. (2.22) apresenta a simplificação do potencial de contato, o que suprime os fatores de forma. Observe também que denotamos a função espectadora pela função $v(\vec{k}, E)$, pois

em geral ela depende da energia independentemente de $\vec{k}$. Porém iremos mostrar que na equação integral apenas entra $E = \frac{1}{2m}k^2$, o que corresponde a partícula espectadora na sua camada de energia.

Integrando as funções delta provenientes da conservação de energia e momento na eq. (2.22), obtemos

$$v(\vec{k}_1, E_1) = 2\tau_R(-E_{3B} - E_1 - \frac{k_1^2}{4m}) \int \frac{dE'_3}{2\pi} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} \frac{i}{(-E_{3B} - E_1 - E'_3 - \frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}'_3)^2}{2m} + i\epsilon)} \cdot \frac{i}{(E'_3 - \frac{k_3'^2}{2m} + i\epsilon)} v(\vec{k}_3, E'_3) . \quad (2.23)$$

A equação (2.23) exige o conhecimento do comportamento analítico de $v(\vec{k}_3, E_3)$ no plano complexo de E_3 , para permitir a integração nesta variável de energia. A matriz $\tau_R(-E_{3B} - E_1 - \frac{k_1^2}{4m})$, (2.14), já calculada, é dada por

$$\tau_R(-E_{3B} - E_1 - \frac{k_1^2}{4m}) = -4\pi i [m(\sqrt{mE_{2B}} - \sqrt{m(E_{3B} + E_1 + \frac{k_1^2}{4m})})]^{-1} . \quad (2.24)$$

A amplitude $\tau_R(E - E_1 - \frac{k_1^2}{4m})$, como função de E_1 , é analítica no semi-plano inferior de E_1 -complexo. Isto pode ser entendido diretamente na eq. (2.13), onde em função de E , $\tau_R(E_2)$ é analítica no semi-plano superior de E -complexo. Note que no argumento de τ_R no sistema de três-bósons, aparece o sinal (-) em E_1 , pois temos $(E - E_1 - \frac{k_1^2}{4m})$, o que faz trocar o semi-plano onde ela é analítica.

O kernel da equação integral, (2.23), apresenta um corte no semi-plano complexo superior de E_1 , dado por $E_1 = -E_{3B} - E'_3 - \frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}'_3)^2}{2m} + i\epsilon$. Portanto $v(\vec{k}_1, E_1)$ é analítica no semi-plano complexo inferior, onde levamos em conta também a região de analiticidade de τ_R .

Assim efetuamos a integração no semi-plano inferior de E'_3 -complexo, na eq. (2.23), onde temos apenas a contribuição do pólo em $E'_3 = \frac{k_3'^2}{2m} - i\epsilon$, para o cálculo do resíduo. Ele faz com que a partícula espectadora esteja na camada de energia. Assim

$$v(\vec{k}_1) = \frac{8\pi}{m[\sqrt{mE_{2B}} - \sqrt{m(E_{3B} + \frac{3}{4m}k_1^2)}]} \int \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} \frac{v(\vec{k}_3)}{-E_{3B} - \frac{1}{2m}k_1^2 - \frac{1}{2m}(\vec{k}_1 + \vec{k}'_3)^2 - \frac{1}{2m}k_3'^2} \quad (2.25)$$

onde suprimimos a dependência em E na função espectadora. A equação (2.25) é a equação de Skorniakov e Ter-Martirosian [23] para o estado ligado de três bósons.

2.5 Efeitos Thomas e Efimov

A equação integral (2.25) não tem limite inferior para a energia de ligação de três-bósons. Isto corresponde ao colapso do sistema de três corpos, para o alcance da interação igual a zero. Para obtermos resultados finitos para a energia de ligação, podemos introduzir um corte na integração, no momento da partícula espectadora. O inverso deste corte, corresponde a um alcance atribuído ao potencial (r_0), o limite de alcance zero correspondente a este corte em momento ir para infinito [29]. Introduzindo o corte Λ_3 na integral e mudando as variáveis k_1 e k'_3 , na equação (2.25), para variáveis adimensionais, com $m=1$, temos

$$v(y) = \frac{2/\pi}{\sqrt{\varepsilon_3 + \frac{3}{4}y^2} - \sqrt{\varepsilon_2}} \int_0^1 dx x^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{\varepsilon_3 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (\vec{x} + \vec{y})^2)} v(x), \quad (2.26)$$

onde as quantidades adimensionais são dadas por:

$$y \equiv \frac{k_1}{\Lambda_3}; \quad x \equiv \frac{k'_3}{\Lambda_3}; \quad \varepsilon_2 \equiv \frac{E_{2B}}{(\Lambda_3)^2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{E_3}{(\Lambda_3)^2}.$$

Usamos na eq. (2.26) que a função de onda espectadora do estado ligado está na onda S, e portanto independe da direção do momento da partícula espectadora. Assim integrando também em $\cos\theta$, temos

$$v(y) = \frac{2/\pi}{\sqrt{\varepsilon_3 + \frac{3}{4}y^2} - \sqrt{\varepsilon_2}} \int_0^1 dx \frac{x}{y} \ln \left(\frac{x^2 + y^2 + \vec{x} \cdot \vec{y} + \varepsilon_3}{x^2 + y^2 - \vec{x} \cdot \vec{y} + \varepsilon_3} \right) v(x). \quad (2.27)$$

Para $\varepsilon_2 = 0$, a equação (2.27) apresenta infinitos estados ligados. O corte $\Lambda_3 \rightarrow \infty$ é interpretado como sendo proporcional à r_0^{-1} , e estes infinitos estados ligados correspondem ao Efeito Thomas, uma vez que neste limite $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Neste caso, a energia E_{3B}^0 , associada ao estado fundamental de (2.27), cresce sem limite, enquanto o alcance da interação vai à zero, ou seja,

$$E_{3B}^0 = \lim_{\Lambda_3 \rightarrow \infty} \varepsilon_3^0 \Lambda_3^2 \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

O Efeito Efimov é observado quando atingimos o limite $\varepsilon_2 = 0$, com Λ_3 fixo. Assim, $E_{2B} \rightarrow 0$. As energias de ligação dos três bósons irão se acumular em torno de zero, uma vez que as energias dos estados excitados ε_3^n tendem a zero, para $n \rightarrow \infty$ [31].

Capítulo 3

Sistemas relativísticos de 2 e 3 bósons no plano-nulo.

Na apresentação dos conceitos associados ao uso do plano-nulo ($x^+ = x^0 + x^3 = 0$), será dada ênfase em sua utilidade e uma posterior aplicação ao modelo de quarks constituintes. Aqui obteremos as equações de Bethe-Salpeter relativísticas para o sistema de dois e três quarks, com interação de contato. Usaremos a aproximação de escada para as equações de Bethe-Salpeter. No sistema de três quarks ligados, obteremos a equação de Bethe-Salpeter para a função espectadora.

Os modelos hadrônicos para bárions e mésons com funções de onda fenomenológicas definidas no plano-nulo, obtiveram algum sucesso [5]. O próximo passo é encontrar um formalismo dinâmico, onde a função de onda do bárion no plano-nulo seja obtida da interação entre os quarks constituintes. Escolhemos a interação de contato entre os quarks constituintes. Nosso modelo está baseado no sucesso de modelos do tipo de Nambu-Jona-Lasinio [10], para descrever a fenomenologia dos mésons leves e a quebra de simetria quiral responsável pela massa associada ao quark constituinte [13]. Nestes modelos, a interação entre os quarks é de contato. Usaremos a equação dinâmica para a função espectadora em um sistema de três-bósons no plano-nulo com interação de contato, desenvolvida na ref. [16]. O nosso modelo para a função de onda do núcleon, terá a parte espacial totalmente simétrica e desprezaremos o grau de liberdade de spin.

Do ponto de vista dos geradores cinemáticos (aqueles nos quais não é incluída a dinâmica do sistema), o uso do plano-nulo torna-se vantajoso por eliminar a dependência da dinâmica em alguns "boosts", como apresentado por Dirac [1]. Isto é um ganho considerável quando

comparamos com o plano usual ($x^0 = 0$), onde todos os "boosts" contém a interação. Consequentemente, há o aparecimento de características desejáveis que tornam conveniente o uso do plano-nulo: ênfase do papel do momento relativo; a existência de um vácuo físico no plano-nulo, o que permite construir os estados da base de Fock. Isto possibilita formular sistematicamente uma aproximação para estrutura dos Hádrons [7]. Outra característica é a linearização entre energia e momento do plano-nulo [34].

Porém, apesar dessa série de vantagens, há o inconveniente da perda de invariância rotacional. Isto traz dificuldades com relação à invariância rotacional de sistemas que apresentem spin maiores ou iguais a um [2, 3, 35, 36]. Apesar de ganharmos um gerador cinemático a mais no plano-nulo em relação ao plano usual, não podemos fazer rotações em torno dos eixos x e y , pois nesse novo contexto, os geradores equivalentes a essas rotações são dinâmicos.

Este capítulo começa apresentando as definições das coordenadas do plano-nulo seguida da discussão dos "boosts" cinemáticos, com um comentário sobre geradores, como fundamentação, no Apêndice B. Detalhamos a série de vantagens apresentadas, terminando na obtenção e discussão da equação de Bethe-Salpeter da função espectadora no sistema de três quarks e demonstrando sua covariância por "boosts" cinemáticos.

3.1 Coordenadas do plano-nulo

O plano-nulo é definido por $x^+ = x^0 + x^3 = 0$. As coordenadas e momentos canonicamente conjugados são :

$$x^+ = x^0 + x^3, \quad k^- = k^0 - k^3; \quad (3.1)$$

$$x^- = x^0 - x^3, \quad k^+ = k^0 + k^3; \quad (3.2)$$

$$\vec{x}_\perp = (x^1, x^2), \quad \vec{k}_\perp = (k^1, k^2). \quad (3.3)$$

Em relação ao plano usual $x^0 = 0$ essas coordenadas possuem significados análogos, que podem ser reconhecidos pela comparação do produto escalar escrito em termos das coordenadas usuais e do plano-nulo:

$$k^\mu x_\mu = \frac{1}{2}(k^+ x^- + k^- x^+) - \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp. \quad (3.4)$$

De (3.4) reconhecemos x^+ como tempo do plano-nulo com sua coordenada conjugada k^- que faz o papel da energia. k^+ e $\vec{k}_\perp$, são os momentos cinemáticos canonicamente conjugados à x^- e $\vec{x}_\perp$.

3.2 "Boosts" cinemáticos

Os "boosts" cinemáticos no plano-nulo são as transformações de Lorentz que mantêm o plano-nulo invariante, e que relacionam os quadrivetores $(A'^+, A'_\perp, A'^-)$ com $(A^+, A_\perp, A^-)$ em dois referenciais inerciais. Elas são construídas através de um conjunto de três geradores do grupo de estabilidade [34], três geradores de translação e um gerador de rotação ao longo do eixo z . No total há sete geradores das transformações cinemáticas. Todos os geradores, com exceção da rotação em z , são combinações lineares de geradores do grupo de Poincaré, quando definidos para o plano usual (Apêndice B).

Em relação ao plano usual, portanto, o número de geradores dinâmicos no plano-nulo (aqueles que envolvem a evolução temporal do sistema) é menor: três, enquanto que no plano usual há quatro geradores dinâmicos.

Assim, a exigência crucial para a construção dos "boosts" cinemáticos, é que não haja nenhum tipo de dependência dinâmica, isto é, estas transformações entre referenciais inerciais não devem misturar, nas componentes cinemáticas do quadrivetor, a componente dinâmica (-) deste.

Supomos primeiramente que a componente A'^+ no referencial $(')$ seja proporcional à A^+ do referencial $(.)$. As transformações de Lorentz são lineares :

$$A'^+ = Q^+ A^+ . \quad (3.5)$$

Devemos observar a exigência de invariância do plano-nulo $x'^+ = x^+ = 0$. Portanto, não há adição de mais nenhum termo nas componentes $(+)$.

Para $A'_\perp$, temos a combinação linear das quantidades $A_\perp$ e A^+ excluindo-se A^- , que envolve a dinâmica:

$$\vec{A}'_\perp = \vec{A}_\perp + \vec{Q}_\perp A^+ . \quad (3.6)$$

Finalmente A'^- é obtido da invariância do produto escalar $A'^\mu A'_\mu = A^\mu A_\mu$, o que resulta em

$$A'^- = \frac{1}{Q^+} (A^+ Q_\perp^2 + 2\vec{Q}_\perp \cdot \vec{A}_\perp + A^-) . \quad (3.7)$$

Os "boosts" cinemáticos acima construídos, tem três geradores cinemáticos de um total de sete, correspondentes às transformações infinitesimais nos três parâmetros Q^+ e $\vec{Q}_\perp$ (Apêndice B). Os quatro geradores restantes equivalem à três translações no plano-nulo

e uma rotação em torno de z . Sendo dez o número de geradores do grupo de Poincaré, concluímos que há três geradores dinâmicos, sendo k^- o gerador de evolução temporal em x^+ .

A obtenção dos observáveis físicos podem ser calculados tanto no plano-usual como no plano-nulo. A conveniência de se realizar os cálculos no plano-nulo consiste em se evitar, em certos processos físicos, a criação de pares, que no contexto abordado acima, seria uma consequência da mistura de componentes cinemáticas e dinâmicas. Dada a importância desse tipo de vantagem, vamos enumerar uma série de outras vantagens do uso do plano-nulo:

1- A relação de Einstein $k^2 = m^2$, mostra uma dependência linear entre k^- e k^+ em contraste com a forma quadrática em k^0 e $\vec{k}$ [34]. No plano usual temos

$$k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (3.8)$$

e no plano-nulo

$$k^- = \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+}. \quad (3.9)$$

Para k^+ positivo, só há a existência de partículas. Como veremos adiante, na integração na energia do plano-nulo, nas equações de Bethe-Salpeter derivadas dos gráficos de Feynman, só aparecerão integrações para $k^+ > 0$, decorrente dos vários pólos que limitam a região de integração, eliminando assim a inclusão de anti-partículas.

A estrutura linear de k^- (3.9), tem uma certa analogia com caso não-relativístico. Quando estamos lidando com várias partículas - no nosso caso duas ou três partículas - podemos introduzir variáveis relativas análogas aos momentos de Jacobi. Essas coordenadas desacoplam o movimento do centro de massa da dinâmica interna [34]. Vamos exemplificar: Para duas partículas -ambas em suas "camadas de massa" ($k^2 = m^2$) - definimos os momentos relativos análogos ao esquema não relativístico. Definimos o momento total (P^μ), o momento relativo ($\vec{K}_\perp$) e as razões das componentes de momento (+), x_i para $i=1$ e 2 , como

$$P^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu; \quad \vec{K}_\perp = x_2 \vec{k}_{1\perp} - x_1 \vec{k}_{2\perp}; \quad x_i = \frac{k_i^+}{P^+}. \quad (3.10)$$

A soma das frações x_i é igual à unidade :

$$\sum_{i=1}^2 x_i = 1. \quad (3.11)$$

A separação da "energia cinética relativa" e da "energia cinética do centro de massa" das duas partículas de massas m_1 e m_2 (em suas "camadas de massa"), é dada por

$$k_1^- + k_2^- = \frac{k_{1\perp}^2 + m_1^2}{k_1^+} + \frac{k_{2\perp}^2 + m_2^2}{k_2^+} = \frac{P_\perp^2}{P^+} + \frac{1}{P^+} \left(\frac{K_\perp^2}{x_1 x_2} + \frac{m_1^2}{x_1} + \frac{m_2^2}{x_2} \right) \quad (3.12)$$

As quantidades x_i assumem o papel de "massa", apresentando a característica de serem invariantes por "boosts" cinemáticos.

Vamos calcular a diferença de massa total do sistema de dois corpos, em uma situação na qual P^+ é conservado. Como veremos, esta diferença aparece em denominadores correspondentes à propagação livre do sistema virtual de duas partículas com massa $M_{02}^2 = (k_1 + k_2)^2$. Se no estado inicial o sistema total tem massa $P^2 = M_2^2$ ($P^- = \frac{P_\perp^2 + M_2^2}{P^+}$), então

$$\begin{aligned} M^2 - M_{02}^2 &= P^2 - (k_1 + k_2)^2 = \\ P^+(P^- - k_1^- - k_2^-) - \vec{P}_\perp^2 &= P^+P^- - \left(\frac{K_\perp^2}{x_1 x_2} + \frac{m_1^2}{x_1} + \frac{m_2^2}{x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Reparemos que na eq. (3.13) temos uma estrutura do denominador do propagador de dois corpos relativísticos no plano-nulo análogo à $E - H_0$ (denominador do propagador não relativístico).

Em um referencial no qual $\vec{P}_\perp = 0$, temos que $\vec{k}_{1\perp} = -\vec{k}_{2\perp} = \vec{k}_\perp$, a massa livre do sistema de dois corpos fica

$$\begin{aligned} M_{02}^2 &= P^+P^- - P_\perp^2 = P^+(k_1^- + k_2^-) \\ &= P^+ \left(\frac{k_{1\perp}^2 + m_1^2}{k_1^+} + \frac{k_{2\perp}^2 + m_2^2}{k_2^+} \right) = \frac{k_\perp^2}{x_1 x_2} + \frac{m_1^2}{x_1} + \frac{m_2^2}{x_2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Observe que se identificarmos $\vec{k}_\perp$ com o momento relativo na Eq.(3.13), obtemos a mesma expressão M_{02}^2 que na Eq.(3.14). Isto significa que através de um "boost" cinemático no plano-nulo, podemos ir de qualquer referencial para aquele no qual $\vec{P}_\perp = 0$. Esta transformação (3.6) tem parâmetros dados por

$$\vec{P}'_\perp = \vec{P}_\perp + \vec{Q}_\perp P^+ = 0, \quad \vec{Q}_\perp = -\frac{\vec{P}_\perp}{P^+}; \quad (3.15)$$

e para os momentos individuais temos a transformação

$$\vec{k}'_{1\perp} = \vec{k}_{1\perp} - \frac{k_1^+}{P^+} \vec{P}_\perp = (1 - x_1) \vec{k}_{1\perp} - x_1 \vec{k}_{2\perp}. \quad (3.16)$$

Comparando a Eq.(3.16) com a definição do momento relativo, Eq.(3.10), observamos que podemos interpretar o momento relativo como o momento transversal de uma das partículas no referencial no qual $\vec{P}_\perp = 0$.

O caso de três partículas é totalmente análogo ao caso de dois corpos para a obtenção da massa livre, M_{03} . Os três corpos tem momento total $\vec{P}_3$:

$$\begin{aligned} M_{03}^2 &= P_3^2 = P_3^+ P_3^- - P_{3\perp}^2 \\ &= P_3^+ \left(\sum_{i=1}^3 k_i^- \right) - P_{3\perp}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{k_{i\perp}^2 + m_i^2}{x_i} - P_{3\perp}^2 . \end{aligned} \quad (3.17)$$

A transformação de referencial no qual o sistema de três corpos tem $\vec{P}_{3\perp} = 0$ é dada pelo parâmetro $\tilde{Q}_\perp = -\frac{\vec{P}_{3\perp}}{P_3^+}$ na transformação cinemática (3.6). Com isto temos que

$$\vec{k}'_{i\perp} = \vec{k}_{i\perp} - x_i \vec{P}_{3\perp} . \quad (3.18)$$

Usando a transformação (3.18), temos que o quadrado da massa de três corpos livres é dada por

$$M_{03}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{k_{i\perp}'^2 + m_i^2}{x_i} . \quad (3.19)$$

2- Outra vantagem do uso do plano-nulo e que é crucial para o modelo de 3-quarks, é a estabilidade do truncamento do espaço de Fock. Se fizermos "boosts" cinemáticos, não serão criado pares, permanecendo a estrutura de três quarks. Isto está refletido na covariância das equações de dois e três corpos por transformações cinemáticas no plano-nulo. Consistente com as propriedades enunciadas, temos que a componente "+" do operador de corrente eletromagnética é diagonal no espaço de Fock [34]. Veremos adiante a utilização deste operador de corrente no espalhamento elétron-próton.

Após a discussão das vantagens oferecidas por esse formalismo - uma vez que necessitaremos fazer mudanças de referencial, mantendo as equações dinâmicas covariantes - vamos calcular a amplitude de espalhamento de dois corpos e a função de onda três corpos no formalismo relativístico do plano-nulo.

3.3 Amplitude de espalhamento de dois bósons relativísticos com interação de contato

Semelhantemente ao caso não relativístico, temos a equação de Bethe-Salpeter relativística para a interação de contato na aproximação de escada [16], que é representada diagramaticamente :

Figura 3.1

onde

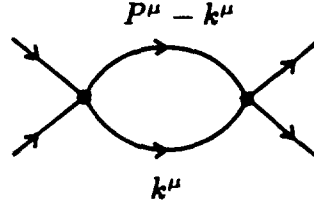


Figura 3.2

O diagrama acima é uma equação integral quadri-dimensional, cuja primeira integração fazemos na energia no plano-nulo, k^- . Com isso eliminamos a dependência na variável dinâmica, sobrando uma estrutura que é covariante por transformações cinemáticas no plano-nulo. Isto permite uma mudança de referencial - nesse caso escolheremos o centro de massa.

A amplitude de espalhamento é obtida de uma série perturbativa constituída por várias "bolhas" como na fig. (3.2). A "bolha" corresponde a uma quantidade escalar e portanto só depende da massa do sistema de duas partículas (M_2),

$$B(M_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(P_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (3.20)$$

Em termos dos momentos no plano-nulo, obtemos apenas uma região na qual a integração por resíduos, em k^- não será nula, que é $0 < k^+ < P_2^+$, sendo $P_2^\mu = (M_2, \vec{0})$:

$$B(M_2) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^{P_2^+} \frac{dk^+ d^2 k_\perp}{k^+ (P_2^+ - k^+)} \frac{1}{P_2^- - \frac{k_\perp^2 - m^2}{k^+} - \frac{(P_2 - k)_\perp^2 + m^2}{(P_2 - k)^+}} . \quad (3.21)$$

Introduzindo a quantidade invariante $x = \frac{k^+}{P_2^+}$ na eq. (3.21), obtemos

$$B(M_2) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^1 \frac{dx d^2 k_\perp}{x(1-x)} \frac{1}{P_2^+ P_2^- - \frac{k_\perp^2 + m^2}{x} + \frac{(P_2 - k)_\perp^2 + m^2}{1-x}} . \quad (3.22)$$

A estrutura do denominador presente em (3.22) é a mesma de (3.13). Em termos do momento relativo, $\vec{K}_\perp = (1-x)\vec{k}_\perp - x(\vec{P}_2 - \vec{k})_\perp$, a Eq. (3.22), fica

$$B(M_2) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^1 \frac{dx d^2 K_\perp}{x(1-x)} \frac{1}{M_2^2 - \frac{K_\perp^2 + m^2}{x(1-x)}} . \quad (3.23)$$

A condição de $P_2^+ > 0$ implica na supressão da propagação de anti-partículas no "loop" da integral, como observado anteriormente. Do diagrama da fig. (3.1), obtemos a expressão da amplitude de espalhamento de dois corpos (τ), somando a expressão da série geométrica:

$$\tau(M_2) = \frac{1}{i\lambda^{-1} - B(M_2)} , \quad (3.24)$$

sendo λ a constante de acoplamento.

A equação (3.23) possui uma divergência logarítmica que é absorvida na redefinição de λ . A renormalização é feita usando-se como informação física a massa de dois quarks ligados. Sendo o pólo de $\tau(M_2)$ em $M_2 = M_{2B}$, temos

$$i\lambda^{-1} = B(M_{2B}) . \quad (3.25)$$

A maneira pela qual renormalizamos a matriz τ é idêntica ao processo de renormalização apresentado no capítulo precedente. Ou seja, primeiro regularizamos a integral $B(M_{2B})$ - inicialmente divergente - com a introdução de um corte na integração em $K_\perp$. A subtração no denominador de (3.24) faz $\tau(M_2)$ finito. Usando o fato que $M_{2B} < 2m$, significando um estado ligado, verifiquemos o sinal de λ . De (3.25)

$$\lambda^{-1} = -iB(M_{2B}) < -iB(2m) , \quad (3.26)$$

onde

$$-iB(2m) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^2 K_\perp dx}{x(1-x)} \frac{1}{4m^2 - \frac{K_\perp^2 + m^2}{x(1-x)}} < 0 . \quad (3.27)$$

De (3.27), concluímos que a constante de acoplamento $-\lambda$ é positiva. Portanto, a força entre dois bósons, com a condição $2m > M_{2B}$ é atrativa.

A integral da equação (3.23) pode ser resolvida analiticamente para $M_2 < 2m$ [16], e obtemos

$$\tau(M_2) = -i(2\pi)^2 \left[\sqrt{\frac{m^2}{M_{2B}^2} - \frac{1}{4}} \arctan(2\sqrt{\frac{m^2}{M_{2B}^2} - \frac{1}{4}})^{-1} - \sqrt{\frac{m^2}{M_2^2} - \frac{1}{4}} \arctan(2\sqrt{\frac{m^2}{M_2^2} - \frac{1}{4}})^{-1} \right]^{-1}. \quad (3.28)$$

Reparemos na expressão da matriz $\tau(M_2)$, a consistência em relação às regras de Feynman para o potencial. Nas regras observamos um fator -i multiplicando o potencial, e na expressão (3.28) ele aparece explicitamente.

O limite não-relativístico de (3.28), para m e M_2 indo para infinito tal que $\frac{2m-M_2}{m} \rightarrow 0$, está de acordo com a amplitude de espalhamento não relativística para dois corpos (2.14), como mostramos no Apêndice D.

Olhando a solução da amplitude τ do ponto de vista das variáveis de Mandelstan para os canais s e t , verifiquemos que o pólo vindo do canal s - massa do estado ligado de dois bósons - é o mesmo que o pólo pertencente ao canal t - troca de momento, que equivale à massa do "méson" trocado no processo. Assim a amplitude de espalhamento no canal s está representada na fig. (3.1), enquanto que o diagrama referente ao canal t tem a representação pictórica:

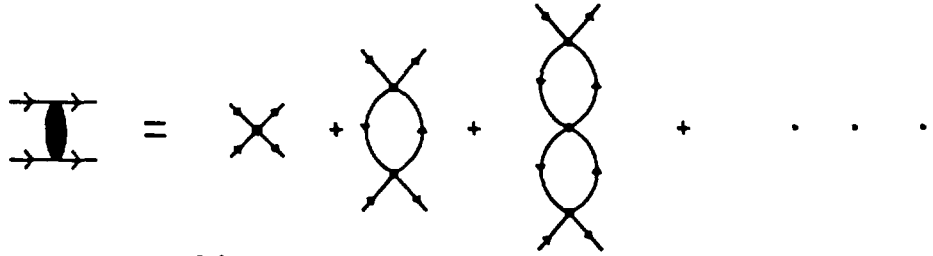


Figura 3.3

As variáveis de Mandelstan para os canais s e t , são definidas como

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2, \quad (3.29)$$

que no centro de massa corresponde ao quadrado da energia do sistema, e

$$t = (k'_1 - k_1)^2 = q^2 \quad (3.30)$$

que corresponde ao quadrado do momento transferido no processo de interação dos dois bósons.

De acordo as definições acima, reconhecemos que $\tau(M_2) = \tau(s^2)$, ou seja, a massa do sistema é a energia que flui pelo canal s . No canal t , o momento é transferido entre as partículas 1 e 2, e sua representação diagramática é mostrada abaixo:

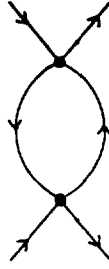


Figura 3.4

A série somada é também geométrica, cuja expressão é

$$\frac{-i}{\lambda^{-1} + iJ(q^2)} . \quad (3.31)$$

Renormalizando a expressão acima, temos de colocar na constante de acoplamento, a informação física da massa do estado ligado, que dará um pólo na amplitude de espalhamento, ou seja $t = M_{2B}$. Com isto temos:

$$\tau(t) = \frac{-i}{-iJ(M_{2B}) + iJ(t)} . \quad (3.32)$$

Comparando os pólos das amplitudes referentes ao canal s com o pólo do canal t, concluímos que a energia que flui é a massa do "méson" no canal t.

3.4 Equação Integral para o estado ligado de 3-bósons no plano-nulo.

Nesta seção iremos discutir o modelo da Ref. [16], desenvolvido no contexto de três-bósons.

A função de onda no plano-nulo para o estado ligado de três bósons é a soma de três componentes, onde cada componente contém um vértice que corresponde a uma função espectadora. No capítulo 4 iremos discutir a forma detalhada desta função de onda.

A função espectadora relativística, $v(q^\mu)$, depende apenas do quadrimomento da partícula espectadora, q^μ , uma vez que a interação entre as partículas é de contato. O diagrama de Feynman que representa a Eq. de Bethe-Salpeter para a função espectadora é dado abaixo:

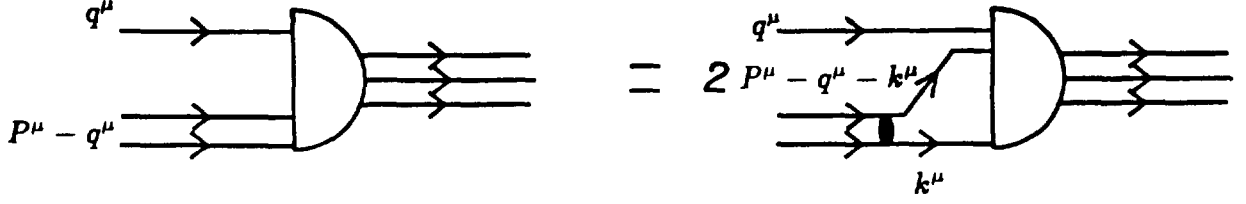


Figura 3.5

Na fig. (3.5), a "bolha cheia" representa a amplitude de espalhamento do subsistema de dois bósons dada pela expressão (3.28). A função espectadora é representada pelo vértice, onde estão denotadas as três partículas.

Usando as regras de Feynman no diagrama da fig. (3.5), obtemos

$$v(q^\mu) = 2\tau(M_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(P_3 - q - k)^2 - m^2 + i\epsilon} v(k^\mu), \quad (3.33)$$

onde $P_3^\mu = (M_{3B}, \vec{0})$; M_{3B} é a massa dos três bósons ligados; $M_2^2 = (P_3 - q)^2$ é o quadrado da massa do subsistema de dois bósons.

Introduzindo as variáveis do plano-nulo, apresentadas na secção (3.1), obtemos:

$$v(q^-, q^+, \vec{q}_\perp) = -\tau(M_2) \int \frac{dk^- dk^+ d^2k_\perp}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^+ (P_3 - q - k)^+} \frac{1}{[k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\epsilon}{k^+}]}$$

$$\frac{1}{P_3^- - q^- - k^- - \frac{(P_3 - q - k)_\perp^2 + m^2 + i\epsilon}{(P^+ - k^+ - q^+)}} v(k^-, k^+, \vec{k}_\perp). \quad (3.34)$$

Na integração de k^- pelo Teorema de Cauchy, a única região que dá contribuição não nula à integral é $0 < k^+ < P_3^+ - q^+$, desprezando a dependência da função espectadora em k^- . Esta simplificação implica que, após a integração por resíduos em k^- , temos $k^2 = m^2$ e portanto o bóson espectador passa a estar na "camada de massa". Isto é razoável pois ele se propaga livremente em relação ao par que interage via interação de contato [16].

Com a introdução das frações de momento, $x_i = \frac{k_i^+}{P^+}$ e $y_i = \frac{q_i^+}{P^+}$, obtemos na equação da função espectadora, denominadores onde aparece a massa livre do sistema de três corpos,

com a forma dada na secção 3.2 pela Eq.(3.19). A partícula espectadora está na camada de massa:

$$q^- = \frac{q_\perp^2 + m^2}{q^+}, k^- = \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+}. \quad (3.35)$$

O resultado da integração em k^- na Eq. (3.34) é

$$v(y, \vec{q}_\perp) = i\tau(M_2) \int \frac{dx d^2 k_\perp}{(2\pi)^3 x(1-x-y)} \frac{v(x, \vec{k}_\perp)}{M_{3B}^2 - \frac{q_\perp^2 + m^2}{y} - \frac{k_\perp^2 + m^2}{x} - \frac{(q+k)_\perp^2 + m^2}{1-x-y}}, \quad (3.36)$$

onde, em princípio $0 < x < 1 - y$. Adiante vamos discutir esta restrição.

No denominador de (3.36), aparece a massa de três bósons livres, M_{03}^2 dado por (3.19), para massas iguais:

$$M_{03}^2 = \frac{k_\perp^2 + m^2}{x} + \frac{q_\perp^2 + m^2}{y} + \frac{(q+k)_\perp^2 + m^2}{1-x-y}. \quad (3.37)$$

A introdução dessa definição, nos dá uma leitura estrutural da equação integral da função espectadora como constituída de vértice, espaço de fase $x(1-x-y)$ e do denominador $M_3^2 - M_{03}^2$. A dependência de v com q^- não aparece explicitamente, pois a partícula espectadora está na sua "camada de massa"; y e $\vec{q}_\perp$ descrevem o momento do bóson espectador.

As integrações em $k_\perp$ e k^+ são limitadas, como veremos a seguir. Impondo que a massa do subsistema de dois corpos seja real, temos

$$M_2^2 = (P_{3B} - q)^2 = (M_{3B} - q^+)(M_{3B} - \frac{q_\perp^2 + m^2}{q^+}) - q_\perp^2 > 0. \quad (3.38)$$

A desigualdade acima nos dá os limites para y , bem como para x :

$$\begin{aligned} (1-y)(M_{3B}^2 y - m^2) &> q_\perp^2 \\ (1-x)(M_{3B}^2 x - m^2) &> k_\perp^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sendo $q_\perp^2$ e $k_\perp^2$ positivos, os dois termos multiplicados em (3.39) devem ser positivos, uma vez que $x < 1$ e $y < 1$. Outras possibilidades são falsas! Assim

$$\begin{aligned} M_{3B}^2 y - m^2 > 0 &\longrightarrow y > \frac{m^2}{M_{3B}^2} \\ M_{3B}^2 x - m^2 > 0 &\longrightarrow x > \frac{m^2}{M_{3B}^2}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A condição de M_2 ser real também limita $k_\perp$ dentro da integração. Usando (3.39), temos

$$k_\perp < \sqrt{(1-x)(M_{3B}^2 x - m^2)} . \quad (3.41)$$

Introduzindo os limites dados por (3.40) e (3.41) na equação integral para a função espectadora, (3.36), temos

$$v(y, \vec{q}_\perp) = \frac{i}{(2\pi)^3} \tau(M_2) \int_{\frac{m^2}{M_{3B}^2}}^{1-y} \frac{dx}{x(1-y-x)} \int^{k_\perp^{max}} d^2 k_\perp \frac{v(x, \vec{k}_\perp)}{M_{3B}^2 - \frac{q_\perp^2 + m^2}{y} - \frac{k_\perp^2 + m^2}{x} - \frac{(q+k)_\perp^2 + m^2}{1-x-y}} , \quad (3.42)$$

onde $k_\perp^{max} = \sqrt{(1-x)(M_{3B}^2 x - m^2)} .$

Os limites de integração em $\frac{m^2}{M_{3B}^2} < x < 1-y$ e a condição imposta sobre y - vinda da escolha de M_2 ser real - , nos dá um limite inferior para a massa de três bósons . Ou seja,

$$1-y > x > \frac{m^2}{M_{3B}^2} , \quad (3.43)$$

o que implica em

$$1 - \frac{m^2}{M_{3B}^2} > \frac{m^2}{M_{3B}^2} \rightarrow M_{3B} > \sqrt{2}m . \quad (3.44)$$

A desigualdade (3.44) implica no desaparecimento do Efeito Thomas neste modelo relativístico no plano-nulo, uma vez que a massa do sistema ligado de três-bósons deve ser maior que $\sqrt{2}m$.

Supondo m muito grande, obtemos o limite não-relativístico da equação de Bethe-Salpeter para função espectadora, que se reduz a Eq. de Skorniakov e Ter-Martirosian (2.25). Os detalhes estão discutidos no Apêndice D. Assim obtemos

$$v_{NR}(\vec{q}) = \sqrt{m} \frac{1}{\pi^2(\sqrt{E_2} - \sqrt{E_{2B}})} \int \frac{d^3 k}{m^2} \frac{v_{NR}(\vec{k})}{E_{3B} + \frac{\vec{q}^2}{2m} + \frac{\vec{k}^2}{2m} + \frac{(\vec{q}+\vec{k})^2}{2m}} , \quad (3.45)$$

onde $E_2 = E_{3B} + \frac{3}{4}q^2$ é a energia do subsistema de dois corpos.

3.5 Covariância por transformações cinemáticas

A equação integral para a função espectadora é covariante por "boosts" cinemáticos no plano-nulo, como iremos demonstrar. Isso nos permite mudar para o referencial mais conveniente. Por exemplo, podemos realizar uma mudança de um referencial, inicialmente no

centro de massa para um outro onde o estado ligado de três-corpos tem momento $\vec{P}_{3\perp}$. O quadrimomento total muda de $(M_{3B}, \vec{0})$ para $(\sqrt{P_{3\perp}^2 + M_{3B}^2}, \vec{P}_{3\perp})$.

Os parâmetros do "boost" cinemático que leva o quadrimomento total de $(M_{3B}, \vec{0})$ para $(\sqrt{P_{3\perp}^2 + M_{3B}^2}, \vec{P}_{3\perp})$, são obtidos das transformações dadas pelas Eq.s (3.5), (3.6) e (3.7) :

$$\begin{aligned}\sqrt{M_{3B}^2 + P_{3\perp}^2} &= Q^+ M_{3B} \\ \vec{P}_{3\perp} &= \vec{0} + \vec{Q}_\perp M_{3B} \\ \sqrt{M_{3B}^2 + P_{3\perp}^2} &= \frac{1}{Q^+} (Q_\perp^2 M_{3B} + M_{3B}) .\end{aligned}\tag{3.46}$$

Portanto, os parâmetros cinemáticos são

$$\begin{aligned}Q^+ &= \sqrt{1 + \frac{P_{3\perp}^2}{M_{3B}^2}} \\ \vec{Q}_\perp &= \frac{\vec{P}_{3\perp}}{M_{3B}} .\end{aligned}\tag{3.47}$$

No referencial de Breit, que será utilizado no cálculo do fator de forma eletromagnético, a condição de que o núcleon só tenha momento na direção transversal, faz com que exista uma transformação cinemática do centro de massa do núcleon para este referencial. Desta forma, podemos obter a função de onda do núcleon no referencial de Breit a partir da função de onda no centro de massa.

A equação integral para a função espectadora (3.42), no referencial em que

$$P_3^\mu = (\sqrt{P_{3\perp}^2 + M_{3B}^2}, \vec{P}_{3\perp})$$

é dada por

$$v'(y', \vec{q}_\perp) = \frac{i}{(2\pi)^3} \tau(M_2') \int_{\frac{m^2}{M_{3B}^2}}^{1-y'} \frac{dx'}{x'(1-y'-x')} \int^{k_1'^{\max}} d^2 k_\perp \frac{v'(x', \vec{k}_\perp')}{M_{3B}^2 - M_{03}^2} ,\tag{3.48}$$

onde $k_1'^{\max}$ vem da desigualdade (3.38) no referencial no qual o momento transversal total é diferente de zero; as quantidades com (') estão definidas neste referencial.

Vamos reescrever a Eq. (3.48) como

$$v'(y', q'_\perp) = F(y', q'_\perp) I(y', q'_\perp) .\tag{3.49}$$

A expressão da qual partiremos é a obtida após a integração em k^- , (3.48). Após esse passo, podemos efetuar "boosts" cinemáticos para o centro de massa do sistema de três corpos. Então

$$F'(y', q'_\perp) = \frac{i}{(2\pi)^3} \tau(M'_2) \quad (3.50)$$

é um escalar de Lorentz, pois só depende da massa do subsistema de dois corpos, e portanto $M'_2 = M_2$.

A integral $I'(y', q'_\perp)$ é analisada abaixo:

$$I'(y', q'_\perp) = \int_{\frac{m^2}{M_{3B}^2}}^{1-y'} \frac{dx'}{x'(1-x'-y')} \int_0^{k'^{\max}} d^2 k'_\perp \frac{v'(x', \vec{k}'_\perp)}{M_{3B}^2 - M_{03}'^2}. \quad (3.51)$$

Assim, considerando que:

- 1) x e y são invariantes por transformações cinemáticas;
- 2) $\vec{k}'_\perp = \vec{k}_\perp + x\vec{P}_{3\perp}$ e $\vec{q}'_\perp = \vec{q}_\perp + y\vec{P}_{3\perp}$;
- 3) $d^2 k'_\perp = d^2 k_\perp$;
- 4) $M'_{03} = M_{03}$;

obtemos:

$$I(y, \vec{q}_\perp + y\vec{P}_{3\perp}) = \int_{\frac{m^2}{M_3^2}}^{1-y} \frac{dx}{x(1-x-y)} \int_0^{k^{\max}} d^2 k_\perp \frac{v'(x, \vec{k}_\perp + x\vec{P}_{3\perp})}{M_{3B}^2 - M_{03}^2}. \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.49), temos

$$v'(y, \vec{q}_\perp + y\vec{P}_{3\perp}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \tau(M_2) \int_{\frac{m^2}{M_3^2}}^{1-y} \frac{dx}{x(1-x-y)} \int_0^{k^{\max}} d^2 k_\perp \frac{v'(x, \vec{k}_\perp + x\vec{P}_{3\perp})}{M_{3B}^2 - M_{03}^2}, \quad (3.53)$$

e comparando com (3.42) temos que

$$v'(y', \vec{q}'_\perp) = v'(y, \vec{q}_\perp + y\vec{P}_{3\perp}) = v(y, \vec{q}_\perp). \quad (3.54)$$

A Eq. (3.54) é resultado da covariância da equação integral para a função espectadora, (3.42), sob transformações cinemáticas no plano-nulo. A transformação (3.54), permite construirmos a função de onda no referencial de Breit, partindo da função espectadora no referencial de centro de massa do núcleon. Isto será de extrema importância para calcularmos de um modo consistente o fator de forma elétrico do próton, no próximo capítulo.

Capítulo 4

Fator de forma elétrico do próton

No capítulo anterior obtivemos a função espectadora de um sistema de três bósons, que irá compor a função de onda do núcleon, onde cada bóson corresponde a um quark constituinte. Consideraremos apenas a parte espacial totalmente simétrica da função de onda, sendo que em princípio a anti-simetria total fica por conta dos outros números quânticos (spin, isospin e côr).

No capítulo 3, deduzimos diagramaticamente a Eq. de Bethe-Salpeter que as funções espectadoras satisfazem, e fizemos a integração na componente (-) do momento da partícula espectadora. Com isto reduzimos a Eq. de Bethe-Salpeter a uma equação integral no plano-nulo, onde apenas três partículas se propagam no estado intermediário. Isto corresponde ao truncamento do espaço de Fock no estado de três-quarks constituintes [7].

Dentro de um mar de glúons e pares de quark-antiquarks esta simplificação corresponde a um modelo efetivo que poderia ser originado pelo corte na escala de momentos em torno de 1 fm^{-1} , associada ao inverso do tamanho do núcleon [20]. O grau de liberdade efetivo dentro desta escala é o denominado quark constituinte com uma massa em torno de um terço da massa do núcleon (938 MeV). Ou seja, a massa do quark constituinte é da ordem do inverso da escala de momento, implicando na necessidade de um tratamento relativístico. Dentro desse esquema, foi usado o plano-nulo como ferramenta de cálculo, pois, como vimos, seu subgrupo de geradores cinemáticos é maior do que os do plano usual, permitindo que certos "boosts" não apresentem caráter dinâmico [37].

Neste capítulo construiremos o fator de forma elétrico do próton no plano-nulo, usando as funções de onda espaciais dos quarks constituintes totalmente simétricas. O fator de forma do núcleon será obtido utilizando uma formulação análoga à que discutiremos para o fator

de forma de um “píon” escalar. Este “píon” será considerado como um estado ligado de dois quarks constituintes sem spin.

Discutiremos o diagrama triangular no espalhamento elétron-“píon”. Este diagrama produz consequentemente, o acoplamento do fóton com o estado ligado e define o fator de forma eletromagnético. O uso do plano-nulo no cálculo deste diagrama, apresenta uma simplificação. Para o referencial no qual a componente (+) do momento transferido é nula, há a supressão da contribuição de processos de criação de pares [38, 39, 40].

Calcularemos apenas a componente (+) da corrente eletromagnética, J^+ , também chamada de “boa” componente. Esta componente permite obter todos os fatores de forma eletromagnéticos de partículas com e sem spin [2]. Tal componente da corrente recebe essa denominação segundo a qual “bom” quer dizer que os elementos de matriz no espaço de Fock são diagonais, enquanto que as outras componentes da corrente podem apresentar termos não diagonais no espaço de Fock (“más componentes”) [9]. Isto significa que há criação de pares.

O modelo efetivo para o núcleon, aqui apresentado, tem a característica de que as funções de onda são obtidas dinamicamente de uma interação de contato, em contraste com as funções de onda Gaussianas do tipo confinante que têm sido utilizadas [20]. Porém com a simplificação de não considerar explicitamente o spin dos quarks. Ressaltamos que o uso de modelos fenomenológicos devem-se à limitação do tratamento perturbativo da Cromodinâmica Quântica (QCD) para regiões de pequenas transferências de momento em espalhamento com léptons [12, 13].

A secção (4.1) deste capítulo, começa com a discussão do elemento de matriz da corrente do núcleon no referencial de Breit. Neste referencial, os fatores de forma elétrico e magnético são extraídos das componentes zero e vetorial da corrente, respectivamente. Eles nos dão informação sobre a distribuição de cargas e correntes, bem como o raio quadrático médio. Na secção (4.2), usamos o formalismo do plano-nulo para calcular a componente (+) da corrente eletromagnética do “píon”, construindo o diagrama triangular de dois corpos. Na secção (4.3), obtemos o fator de forma elétrico do núcleon, usando como base a discussão do fator de forma eletromagnético do “píon”. No apêndice C obtemos os fatores de forma eletromagnéticos do “píon” e do núcleon não relativísticos, que serão comparados com os limites não-relativísticos obtidos no apêndice D.

4.1 Corrente eletromagnética do núcleon

O processo físico que nos interessa é o espalhamento elétron-próton. A interação do elétron com o núcleon se dá com a troca de um fóton, que no caso do espalhamento elástico, só transfere momento do tipo espaço. Se adotarmos o referencial de Breit, o momento transferido é expresso como $q^\mu = P'^\mu - P^\mu$, onde $q^0 = 0$, $\vec{q}/2 = \vec{P}' = -\vec{P}$. $\vec{P}$ e $\vec{P}'$ são os momentos inicial e final do núcleon, respectivamente.

Assim, nosso estudo se limita ao acoplamento fóton-núcleon. Porém, adotaremos aqui um procedimento heurístico, que terá como ponto de partida o acoplamento fóton-méson. Ou seja, queremos saber a distribuição de carga de um estado ligado de dois corpos - na nossa simplificação dois bósons, estendendo posteriormente para o caso de três quarks, tomando como base a estrutura do méson.

Apesar de estarmos interessados no acoplamento de partículas sem spin com o campo eletromagnético, faremos uma breve apresentação da corrente eletromagnética do núcleon. A corrente do núcleon entre dois estados na camada de massa é dada por

$$\langle N' | J_\mu(0) | N \rangle = -ie \bar{u}_s(P') [\gamma_\mu F_1(q^2) + \sigma_{\mu\nu} q^\nu \frac{1}{2M_N} F_2(q^2)] u_s(P), \quad (4.1)$$

onde $\bar{u}_s(P')$ e $u_s(P)$ são os spinores de Dirac com normalização $\bar{u}u = 1$.

Da expressão (4.1), nota-se a presença do momento magnético anômalo no segundo termo do lado direito. No referencial de Breit, a componente escalar da corrente é expressa pelo fator de forma elétrico ($G_E(q^2)$) e a componente vetorial pelo fator de forma magnético ($G_M(q^2)$). Neste referencial, temos

$$\langle N'(\vec{q}/2, s') | J^0(0) | N(-\vec{q}/2, s) \rangle = \delta_{s',s} G_E(q^2) \quad (4.2)$$

$$\langle N'(\vec{q}/2, s') | \vec{J}(0) | N(-\vec{q}/2, s) \rangle = \frac{i}{2M_N} \langle s' | \vec{\sigma} \times \vec{q} | s \rangle G_M(q^2), \quad (4.3)$$

onde M_N é a massa do núcleon. G_E e G_M são escritos em termos das funções covariantes $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$:

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2) \quad (4.4)$$

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) - \frac{q^2}{4M_N^2} F_2(q^2) \quad (4.5)$$

Obtido $G_E(q^2)$, podemos calcular o raio quadrático médio. Ele nos dará a distribuição de cargas no espaço das posições . O raio quadrático médio é dado por

$$\langle r^2 \rangle = 6 \frac{d}{dq^2} G_E(q^2) . \quad (4.6)$$

Vamos agora discutir o acoplamento do fóton com um campo escalar complexo. O campo eletromagnético se acopla com o campo escalar de modo que a densidade de Lagrangeana seja invariante por transformações de Calibre locais [41]:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - ie(\Phi^*(\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*)\Phi)A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \Phi^* \Phi . \quad (4.7)$$

A interação do campo do bóson com o campo eletromagnético do elétron, na aproximação de troca de um fóton, é dada por $\mathcal{L}_{int}^\gamma$:

$$\mathcal{L}_{int}^\gamma = j^\mu A_\mu = -ie(\Phi^*(\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*)\Phi)A_\mu . \quad (4.8)$$

Da densidade de Lagrangeana de interação (4.8), obtemos a regra de Feynman para o acoplamento do campo eletromagnético com o campo escalar:

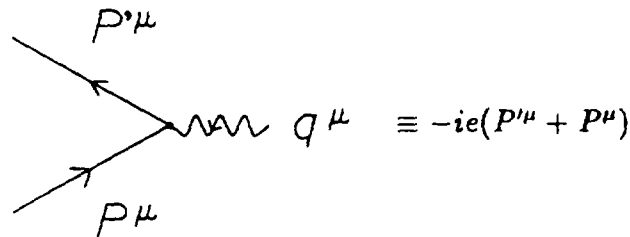


Figura 4.1

A regra de Feynman, na fig. (4.1), diz respeito a uma partícula puntual sem estrutura. Entretanto, considerando a possibilidade da partícula possuir distribuição de cargas, a regra de Feynman fica :

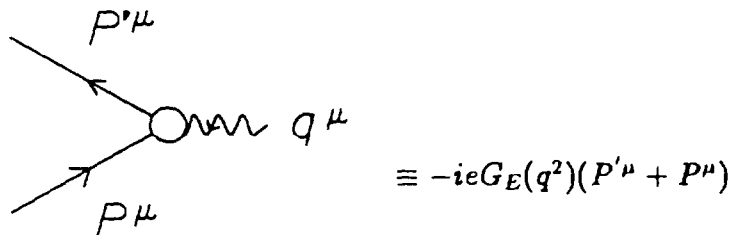


Figura 4.2

onde P^μ e P'^μ são os quadrimomentos do bóson - no caso de ser um estado ligado de três quarks, do núcleon -, ou os quadrimomentos do "píon" escalar, no caso de dois corpos. $G_E(q^2)$ é o fator de forma, e é representado na fig. (4.2) pela "bolha" do vértice .

4.2 Fator de forma do "píon" como sistema de dois bósons

Vamos agora calcular o diagrama triangular no espalhamento elétron- "píon". Iremos integrar em k^- , no "loop" de momento, no diagrama triangular. Em um referencial qualquer, haverá a contribuição de dois termos para o fator de forma. Dentro da particularidade do espalhamento elástico, a escolha do referencial de Breit com $q^+ = 0$ elimina um desses diagramas, restando aquele que podemos interpretar como correspondente à contribuição da função de onda no plano-nulo [39].

Nas variáveis do plano-nulo, o referencial de Breit é caracterizado por $q^+ = 0$ e $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y)$, onde q^μ é o momento transferido do fóton ao "píon". Calculamos apenas a componente I^+ da corrente, para obtermos o fator de forma eletromagnético.

O diagrama de Feynman triangular é apresentado abaixo:

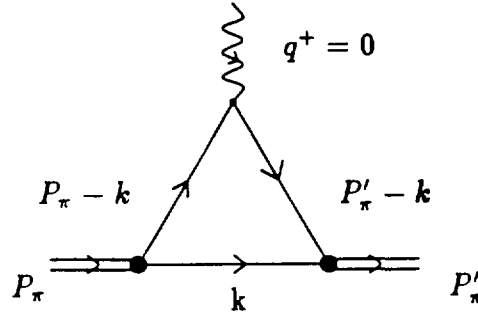


Figura 4.3

A corrente eletromagnética do "píon" é dada por

$$\langle \pi' | J^+ | \pi \rangle = -e(P_\pi^+ + P_\pi'^+) G_{E-\pi}(q^2) = -2eP_\pi^+ G_{E-\pi}(q^2) , \quad (4.9)$$

que será comparada com o diagrama triangular, para obtermos $G_E(q^2)$, lembrando que $P_\pi'^+ = P_\pi^+$, no referencial de Breit.

Estamos tratando o "píon" como um par quark-antiquark sem spin. Consequentemente, as constantes de acoplamento que aparecem no diagrama acima são escalares. Portanto

$$2eP^+ G_{E-\pi}(q^2) = 2e\Gamma_\pi^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (P^+ - k^+) \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{((P-k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{(P' - k)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.10)$$

onde m é a massa do quark, e Γ_π é a constante de acoplamento dos quarks com o "píon". Efetuamos a integração em k^- , com o objetivo de obtermos uma integral dependente das variáveis cinemáticas k^+ e $\vec{k}_\perp$. Fazendo essa integração através do Teorema de Cauchy, e colocando a definição da quantidade invariante $x = k^+/P^+$, obtemos

$$G_{E-\pi}(q^2) = \frac{\Gamma_\pi^2}{(2\pi)^3} \int \frac{dx d^2k_\perp}{x(1-x)} \frac{1}{[M_\pi^2 + P_\perp^2 - \frac{(P-k)_\perp^2 + m^2}{1-x} - \frac{k_\perp^2 + m^2}{x}]} \frac{1}{[M_\pi^2 + P_\perp'^2 - \frac{(P'-k)_\perp^2 + m^2}{1-x} - \frac{k_\perp^2 + m^2}{x}]} . \quad (4.11)$$

A expressão (4.11) está em função das variáveis cinemáticas. Usando dessa vantagem, podemos passar usar o momento relativo transversal, que corresponde ao momento de um dos quarks no referencial de centro de massa. Os momentos relativos $\vec{K}_\perp$ e $\vec{K}'_\perp$, correspondentes ao "píon" inicial e final, respectivamente, estão relacionados por uma transformação cinemática, com o momento no referencial de Breit, Eq.s (3.15) e (3.16), como

$$\vec{K}_\perp = \vec{k}_\perp - x\vec{P}_\perp = \vec{k}_\perp + x\frac{\vec{q}_\perp}{2}, \quad (4.12)$$

$$\vec{K}'_\perp = \vec{k}_\perp + x\vec{P}_\perp = \vec{k}_\perp - x\frac{\vec{q}_\perp}{2}. \quad (4.13)$$

Das duas equações acima obtemos a relação

$$\vec{K}'_\perp = \vec{K}_\perp - x\vec{q}_\perp. \quad (4.14)$$

Introduzindo os momentos relativos na Eq.(4.11), temos

$$G_{E-\pi}(q^2) = \frac{\Gamma_\pi^2}{(2\pi)^3} \int \frac{dx d^2k_\perp}{x(1-x)} \frac{1}{[M_\pi^2 - \frac{K_\perp^2 + m^2}{x(1-x)}][M_\pi^2 - \frac{K_\perp'^2 + m^2}{x(1-x)}]} . \quad (4.15)$$

Assim, de (4.15) definimos a função de onda no plano nulo do pión como

$$\Psi_{\pi}(x, \vec{K}_{\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{P_{\pi}^+ x(1-x)}} \frac{\Gamma_{\pi}}{M_{\pi}^2 - M_{02}^2} , \quad (4.16)$$

onde M_0^2 é a massa invariante livre do par quark-antiquark dada por (3.14):

$$M_{02}^2 = \frac{K_{\perp}^2 + m^2}{x(1-x)} . \quad (4.17)$$

Com isso, o fator de forma elétrico do Pión é escrito como

$$G_{E-\pi}(q^2) = \int dk^+ d^2 k_{\perp} \Psi_{\pi}(x, \vec{K}_{\perp}) \Psi'_{\pi}(x, \vec{K}'_{\perp}) , \quad (4.18)$$

onde Ψ_{π} e Ψ'_{π} são as funções de onda do pión inicial e final, respectivamente.

4.3 Cálculo do Fator de forma elétrico do próton

Vamos agora obter o fator de forma de carga eletromagnético para o próton, no modelo simplificado de três quarks interagindo com força de contato. Aqui não utilizaremos diretamente o diagrama triangular. Usaremos o elemento de matriz da componente positiva da corrente e integramos no espaço das variáveis cinemáticas (k^+ e $\vec{k}_{\perp}$). Assim temos

$$\langle \Phi_f | J^+ | \Phi_i \rangle = \langle \Phi_f | \sum_{i=1}^3 j_i^+ | \Phi_i \rangle . \quad (4.19)$$

As correntes j_i^+ se referem às correntes de cada quark. Incluindo resoluções da unidade no plano-nulo em k^+ e $k_{\perp}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \Phi_f | J^+ | \Phi_i \rangle &= \langle \Phi_f | j_1^+ + j_2^+ + j_3^+ | \Phi_i \rangle = \\ &= \int \prod_{i=1}^3 d\vec{k}'_i d\vec{k}_i \langle \Phi_f | \vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \vec{k}'_3 \rangle \langle \vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \vec{k}'_3 | \sum_{i=1}^3 j_i^+ | \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3 \rangle \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3 | \Phi_i \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

Na integral (4.20), definimos

$$|\vec{k}\rangle \equiv |k^+ \vec{k}_{\perp}\rangle , \quad (4.21)$$

com a normalização

$$\langle k'^+ \vec{k}'_{\perp} | k^+ \vec{k}_{\perp} \rangle = \delta(k'^+ - k^+) \delta(\vec{k}'_{\perp} - \vec{k}_{\perp}) . \quad (4.22)$$

O elemento de matriz da corrente (+) de cada quark nos estados (4.21), para a transferência de momento $q^+ = 0$, no referencial de Breit, para o próton, é dado por

$$\langle \vec{k}' | j^+ | \vec{k} \rangle = 2\delta(\vec{k}'_{\perp} - \vec{k}_{\perp} - \vec{q}_{\perp})\delta(k'^+ - k^+) . \quad (4.23)$$

Usando a mesma definição de normalização da corrente eletromagnética do quark para o próton, temos, no referencial de Breit

$$\langle \vec{P}'_N | J^+ | \vec{P}_N \rangle = 2G_{E-N}(q^2)\delta(\vec{P}'_{N\perp} - \vec{P}_{N\perp} - \vec{q}_{\perp})\delta(P'^+_N - P^+_N) . \quad (4.24)$$

A normalização da corrente do quark é escolhida de modo que a corrente do pión, construída com as regras (4.22) e (4.23), resulte na expressão derivada da integração do diagrama triangular (4.18).

A função de onda do próton fica

$$\Phi(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \delta(\vec{P}_N - \sum_i \vec{k}_i)\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) , \quad (4.25)$$

onde o momento $\vec{k}_3 = \vec{P}_N - \vec{k}_1 - \vec{k}_2$.

Introduzindo (4.23) e (4.25) em (4.20), obtemos o elemento de matriz da corrente do próton. Depois de quatro integrações em (4.20), onde usamos as funções delta de Dirac nos momentos cinemáticos do plano nulo, obtemos

$$\langle \Phi_f | J^+ | \Phi_i \rangle = 2\delta(\vec{P}' - \vec{P} - \vec{q}) \sum_{i=1}^3 \int d\vec{k}_i d\vec{k}_j \Psi_f(\vec{k}_i, \vec{k}_j) \Psi_i(\vec{k}_i, \vec{k}_j) . \quad (4.26)$$

O quark k absorve o fóton, e portanto temos

$$\vec{k}'_{k\perp} = \vec{k}_{k\perp} + \vec{q}_{\perp} , \quad k'^+ = k^+ . \quad (4.27)$$

Em (4.26), usando que a função de onda Ψ é totalmente simétrica por permutação nos momentos dos quarks e a definição da corrente do próton, (4.24), obtemos o fator de forma elétrico do próton:

$$G_{E-N}(q^2) = \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \Psi_f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \Psi_i(\vec{k}_1, \vec{k}_2) . \quad (4.28)$$

Na Eq. (4.28), o quark 3 é aquele que absorve o fóton, $\vec{k}'_{3\perp} = \vec{k}_{3\perp} + \vec{q}_{\perp}$.

A expressão para o fator de forma elétrico do próton é semelhante à expressão para o fator de forma do "píon" (4.18). Observando a estrutura da função de onda do píon no plano-nulo, inferimos por analogia a função de onda do núcleon. Assim, para o píon, no centro de massa, temos

$$\Psi_{\pi}(x, K_{\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma_{\pi}}{\sqrt{P_{\pi}^{+}x(1-x)(M_{\pi}^2 - M_{02}^2)}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma_{\pi}}{\sqrt{P_{\pi}^{+}k_1^{+}k_2^{+}(P_{\pi}^{-} - P_2^{-})}} . \quad (4.29)$$

Os elementos que compõe a função de onda do "píon", (4.29), são: constante de acoplamento do píon, espaço de fase do plano-nulo no espaço dos momentos e a diferença entre as energias total (P_{π}^{-}) e livre (P_2^{-}) (análogo à $E - H_0$ para o sistema não-relativístico). Daqui inferimos a função de onda do núcleon no centro de massa:

$$\begin{aligned} \Psi_N(x_1, k_{1\perp}; x_2, k_{2\perp}) &= \frac{\Gamma_N(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}; x_3, \vec{k}_{3\perp})}{\sqrt{P_N^{+}k_1^{+}k_2^{+}k_3^{+}(P_N^{-} - P_3^{-})}} \\ &= \frac{\Gamma_N(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}; x_3, \vec{k}_{3\perp})}{P_N^{+}\sqrt{x_1x_2x_3}(M_N^2 - M_{03}^2)} . \end{aligned} \quad (4.30)$$

A função de onda do núcleon está definida no centro de massa, e os momentos satisfazem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ e } \vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp} + \vec{k}_{3\perp} = 0.$$

A diferença fundamental entre as funções de onda do "píon" e do núcleon, nesse contexto simplificado, diz respeito ao vértice. Enquanto que na primeira ele é uma função de um momento, no segundo ela é composta pelas componentes de Faddeev do vértice (funções espectadoras), resultando na função de onda do núcleon totalmente simétrica. Portanto

$$\Psi_N(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) = \frac{\sum_{i=1}^3 v(x_i, \vec{k}_{i\perp})}{P_N^{+}\sqrt{x_1x_2x_3}(M_N^2 - M_{03}^2)} . \quad (4.31)$$

Reescrevendo o fator de forma elétrico do núcleon, (4.28), em termos dos momentos, temos

$$G_{E-N}(q^2) = \int dk_1^{+} dk_2^{+} d^2k_{1\perp} d^2k_{2\perp} \Psi_N^f(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) \Psi_N^i(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) . \quad (4.32)$$

As funções Ψ'_N e Ψ_N^i diferem pelo momento do fóton absorvido pelo quark 3. Vejamos abaixo o diagrama triangular para o núcleon no referencial de Breit, como ilustração do processo de espalhamento do elétron:

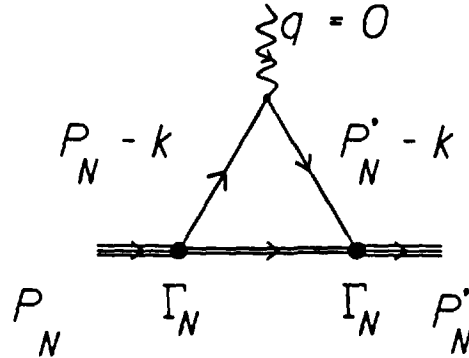


Figura 4.4

Segundo o esquema acima, após a absorção do fóton os três quarks inicialmente da função de onda Ψ_N^i , formam a função de onda Ψ'_N final. No referencial de Breit ($\vec{P}_{N\perp} = -\frac{\vec{q}_\perp}{2}$ e $\vec{P}'_{N\perp} = \frac{\vec{q}_\perp}{2}$), a função de onda final é escrita em termos da função de onda no centro de massa com o seguintes argumentos:

$$\Psi'_N(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) = \Psi_N(x_1, \vec{k}_{1\perp} - x_1 \frac{\vec{q}_\perp}{2}; x_2, \vec{k}_{2\perp} - x_2 \frac{\vec{q}_\perp}{2}). \quad (4.33)$$

Enquanto que a função de onda inicial é escrita como

$$\Psi_N^i(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) = \Psi_N(x_1, \vec{k}_{1\perp} + x_1 \frac{\vec{q}_\perp}{2}; x_2, \vec{k}_{2\perp} + x_2 \frac{\vec{q}_\perp}{2}). \quad (4.34)$$

Observemos que os argumentos das funções de onda inicial e final estão conectados por uma transformação cinemática, entre os referenciais de centro de massa da função de onda final e inicial:

$$\vec{k}_{i\perp}^f = \vec{k}_{i\perp}^i - x_i \vec{q}_\perp, \quad (4.35)$$

onde $\vec{k}_{i\perp}^f = \vec{k}_{i\perp} - x_i \frac{\vec{q}_\perp}{2}$ e $\vec{k}_{i\perp}^i = \vec{k}_{i\perp} + x_i \frac{\vec{q}_\perp}{2}$ são os momentos finais e iniciais, no centro de massa, respectivamente.

Escrevendo as funções de onda em termos das funções espectadoras, temos para a função de onda inicial

$$\Psi_N^i(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) = \frac{v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) + v(x_2; \vec{k}_{2\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2) + v(x_3; \vec{k}_{3\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3)}{P_N^+ \sqrt{x_1 x_2 x_3} (M_N^2 - M_{03}^2)}. \quad (4.36)$$

Para a função de onda final

$$\Psi_N^f(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) = \frac{v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) + v(x_2; \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2) + v(x_3; \vec{k}'_{3\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3)}{P_N^+ \sqrt{x_1 x_2 x_3} (M_N^2 - M_{03}'^2)}, \quad (4.37)$$

onde M_{03}' é a massa livre do sistema de três quarks depois da absorção do fóton.

As componentes transversais do quark 3 no plano-nulo, são dados por

$$\vec{k}_{3\perp} = -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2}, \quad (4.38)$$

$$\vec{k}'_{3\perp} = -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2}, \quad (4.39)$$

com o que obtemos $\vec{k}'_{3\perp} = \vec{k}_{3\perp} + \vec{q}_\perp$.

Multiplicando explicitamente Ψ_N^i e Ψ_N^f , obtemos quatro tipos de integrais que, quando somadas dão o fator de forma elétrico

$$G_{E-N}^{(1)} = \int \frac{dx_1 dx_2 d^2 k_{1\perp} d^2 k_{2\perp}}{x_1 x_2 x_3} \frac{v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) + v(x_2; \vec{k}_{2\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2) v(x_2; \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2)}{(M_N^2 - M_{03}^2)(M_N^2 - M_{03}'^2)}. \quad (4.40)$$

Como estamos tratando de bósons, as partículas 1 e 2 são indistinguíveis, o que equivale a dizer que

$$G_{E-N}^{(1)} = 2 \int \frac{dx_1 dx_2 d^2 k_{1\perp} d^2 k_{2\perp}}{x_1 x_2 x_3} \frac{v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1)}{(M_N^2 - M_{03}^2)(M_N^2 - M_{03}'^2)}. \quad (4.41)$$

O outro tipo de integração também cai no caso da indistingüibilidade entre as partículas 1 e 2:

$$G_{E-N}^{(2)} = \int \frac{dx_1 dx_2 d^2 k_{1\perp} d^2 k_{2\perp}}{x_1 x_2 x_3} \frac{v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_2; \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2) + v(x_2; \vec{k}_{2\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2) v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1)}{(M_N^2 - M_{03}^2)(M_N^2 - M_{03}'^2)}. \quad (4.42)$$

Assim temos

$$G_{E-N}^{(2)} = 2 \int \frac{dx_1 dx_2 d^2 k_{1\perp} d^2 k_{2\perp}}{x_1 x_2 x_3} \frac{v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_2; \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2)}{(M_N^2 - M_{03}^2)(M_N^2 - M_{03}'^2)} . \quad (4.43)$$

Temos uma parte do fator de forma elétrico que envolve a multiplicação das partículas 1 e 2 pela partícula 3 - escolhemos essa como aquela que recebe o momento do fóton. Então esse termo contém o seguinte produto de funções espectadoras:

$$v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_3; \vec{k}_{3\perp} + \vec{q}_\perp - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3) + v(x_2; \vec{k}_{2\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2) v(x_3; \vec{k}_{3\perp} + \vec{q}_\perp - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3) \\ + v(x_3; \vec{k}_{3\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3) v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) + v(x_3; \vec{k}_{3\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3) v(x_2; \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_2) , \quad (4.44)$$

onde substituímos o momento transversal por $\vec{k}'_{3\perp} = \vec{k}_{3\perp} + \vec{q}_\perp$.

Pela indistinguibilidade das partículas 1 e 2 temos:

$$2v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_3; \vec{k}_{3\perp} + \vec{q}_\perp - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3) + 2v(x_3; \vec{k}_{3\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_3) v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) . \quad (4.45)$$

Usando as condições (4.38) e (4.39), o argumento da função espectadora para partícula três fica

$$2v(x_1; \vec{k}_{1\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_3; -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} (x_1 + x_2)) \\ + 2v(x_3; -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} (x_1 + x_2)) v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) . \quad (4.46)$$

As funções espectadoras tem paridade definida, assim, $v(\vec{k}_{i\perp}) = v(-\vec{k}_{i\perp})$. O segundo termo de (4.46) corresponde a trocar $\vec{q}_\perp$ por $-\vec{q}_\perp$ no primeiro termo. Assim, na integração, esses dois termos tem a mesma contribuição:

$$G_{E-N}^{(3)} = 4 \int \frac{dx_1 dx_2 d^2 k_{1\perp} d^2 k_{2\perp}}{x_1 x_2 x_3} \frac{v(x_1; \vec{k}_{1\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} x_1) v(x_3; -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} (x_1 + x_2))}{(M_N^2 - M_{03}^2)(M_N^2 - M_{03}'^2)} . \quad (4.47)$$

Temos ainda uma contribuição para o fator de forma elétrico, dada apenas pelo produto das componentes de Faddeev do quark 3:

$$G_{E-N}^{(4)} = \int \frac{dx_1 dx_2 d^2 k_{1\perp} d^2 k_{2\perp}}{x_1 x_2 x_3} \frac{v(x_3; -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} - \frac{\vec{q}_\perp}{2} (x_1 + x_2)) v(x_3; -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} + \frac{\vec{q}_\perp}{2} (x_1 + x_2))}{(M_N^2 - M_{03}^2)(M_N^2 - M_{03}'^2)} . \quad (4.48)$$

Portanto, a expressão para o fator de forma elétrico é a soma de quatro integrais, Eq.s (4.41),(4.43), (4.47) e (4.48):

$$G_{E-N}(q^2) = G_{E-N}^{(1)}(q^2) + G_{E-N}^{(2)}(q^2) + G_{E-N}^{(3)}(q^2) + G_{E-N}^{(4)}(q^2) . \quad (4.49)$$

A normalização da função espectadora é escolhida de modo que $G_{E-N}(0) = 1$.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

O modelo dinâmico para o núcleon que formulamos nos capítulos anteriores requer dois parâmetros como entrada: a massa do quark e a massa do méson ou diquark. A massa do núcleon está fixa e seu valor é $M_N = 938$ MeV. Em função disso, usamos a razão $\frac{\mu}{m_q}$ como parâmetro livre, onde μ é a massa do méson e m_q é a massa do quark constituinte.

Apresentamos abaixo, na Tabela I, os resultados dependentes da razão $\frac{\mu}{m_q}$. Nela estão a massa do quark constituinte, a energia de ligação do próton ($3m_q - M_N$), a massa do méson, o raio do núcleon, o produto da massa do núcleon pelo seu raio, e o fator de forma em momentos transferidos quadráticos próximos à 1GeV^2 . Na última linha apresentamos os dados experimentais, para o raio [18, 19] e para o fator de forma elétrico do próton em momento transferido q^2 próximo à 1GeV^2 [17].

Na fig. (5.1), apresentamos a massa do méson em função da energia de ligação dos quarks no núcleon. Nota-se aqui um valor máximo da massa do méson em 695 MeV que refere-se à razão $\frac{\mu}{m_q} = 1.8$. Os valores experimentais para o raio e fator de forma elétrico a 1GeV^2 são consistentes com o modelo nesta região de parâmetros (Tabela I). A média das massas dos mésons ρ e ω é de 780 MeV, o que também é razoavelmente consistente com os valores de μ que concordam com o raio e fator de forma experimentais do próton.

Na fig. (5.2), temos o gráfico da massa do méson em função da massa do quark e observamos um ponto de máximo justamente pertencente à razão $\frac{\mu}{m_q} = 1.8$, semelhante a fig. (5.1). A fig. (5.3) mostra o comportamento do produto da massa do próton pelo seu raio em função da energia de ligação. Aqui podemos observar um ponto mínimo para o valor de 220 MeV da energia de ligação e que, de acordo a Tabela I, é o valor vindo da razão $\frac{\mu}{m_q} = 1.8$. Curiosamente verificamos que esse modelo ajusta os dados experimentais

em torno desse ponto.

Também na Tabela I, observamos que os valores do fator de forma elétrico do próton calculados para $q^2 \sim 1\text{GeV}^2$ quando comparados ao valor experimental, mostram que a região de valores de $\frac{\mu}{m_q}$ entre 1.6 até 1.95, produz fatores de forma razoavelmente de acordo o dado experimental. Nota-se que a razão $\frac{\mu}{m_q} = 1.8$ possui o valor máximo para o fator de forma em $q^2 \sim 1\text{GeV}^2$. Assim temos que neste modelo a energia de ligação dos quarks constituintes está dentro do intervalo $115 < 3m_q - M_N < 331\text{MeV}$; e a massa do méson no intervalo $677 < \mu < 695\text{MeV}$, razoavelmente consistente com o valor experimental de 780 MeV.

$\frac{\mu}{m_q}$	$m_q(MeV)$	$\mu(MeV)$	$3m_q - M_N(MeV)$	$r_N(fm)$	$M_N r_N$	$G_E(q^2 \sim 1GeV^2)$
1.0	519	519	619	1.05	4.99	.050
1.2	488	586	526	.95	4.52	.090
1.4	457	640	433	.88	4.18	.129
1.6	423	677	331	.82	3.90	.161
1.7	406	690	280	.81	3.85	.172
1.8	386	695	220	.80	3.80	.177
1.9	364	692	154	.81	3.85	.172
1.95	351	683	115	.84	3.99	.161
Exp.		780		$.81 \pm 0.4[18]$ $.862 \pm 0.12[19]$		$.179 \pm 0.06$

Tabela I: Resultados numéricos previstos pelo modelo mantendo-se a massa do próton fixa em 938 MeV e variando-se a razão μ/m_q . Nas duas últimas linhas apresentamos os dados experimentais, para a média da massa do méson ρ e ω (780 MeV), os raios do núcleon e o fator de forma elétrico para $q^2 = 1GeV^2$.

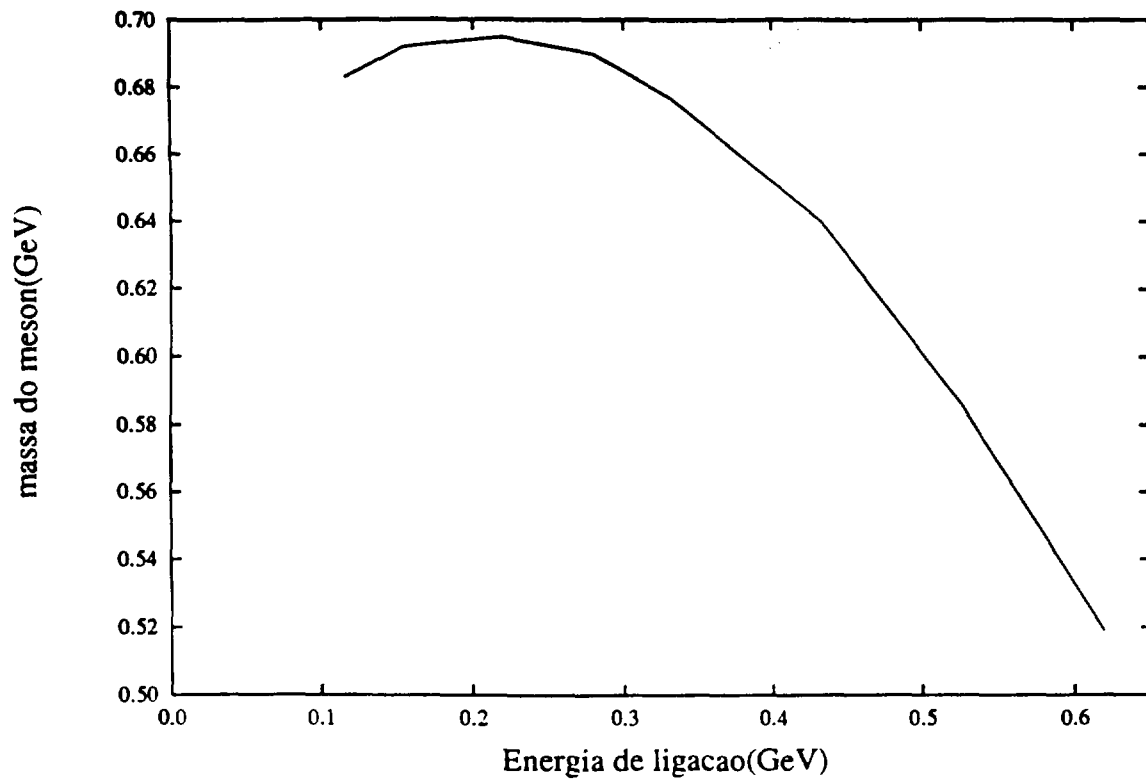


Fig. 5.1: Massa do méson ou diquark em função da energia de ligação, para a massa do núcleon fixa em 938 MeV e variando-se a razão μ/m_q .

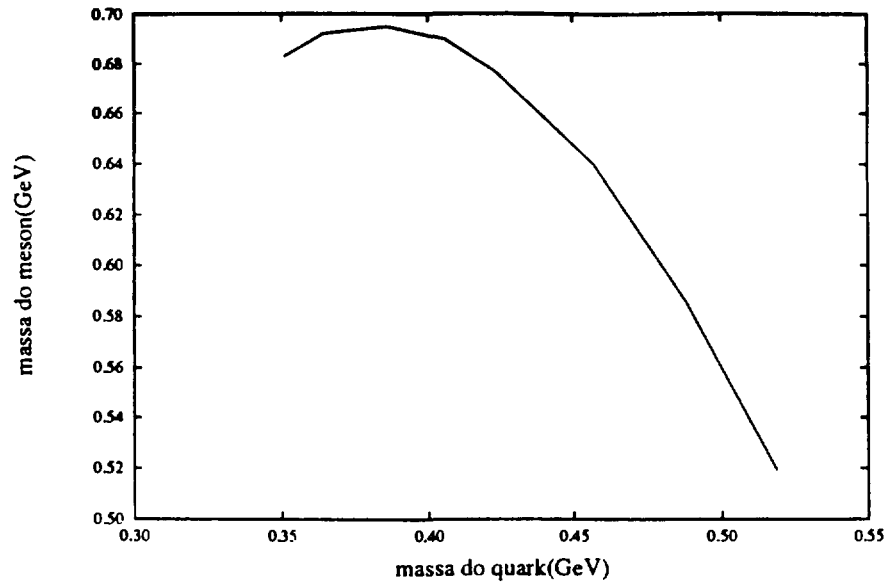


Fig. 5.2: Massa do méson em função da massa do quark, para a massa do núcleon fixa em 938 MeV e variando-se a razão μ/m_q .

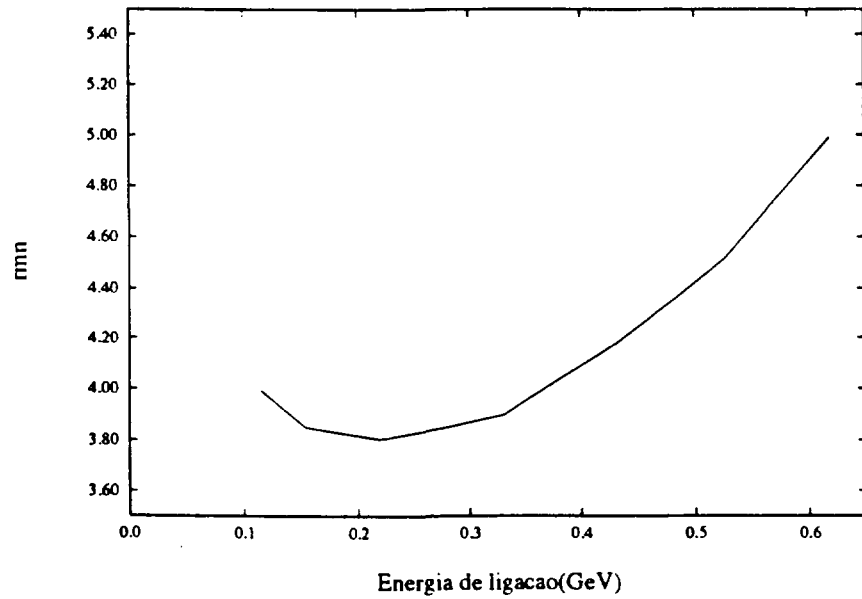


fig. 5.3: Produto da massa do núcleon pelo seu raio em função da energia de ligação dos quarks no núcleon, para sua massa fixa em 938 MeV.

Abaixo segue uma série de gráficos do fator de forma elétrico em função do quadrado do momento transferido, que são comparados com os dados experimentais da Ref. [17]. Neles, apresentamos cálculos nos quais variamos a razão μ/m_q , enquanto a massa do núcleon foi mantida fixa em 938 MeV. Nas figuras (5.4) até (5.7), temos o fator de forma elétrico em uma região de momentos transferidos de até $2GeV^2$.

Na fig. 5.4, temos os resultados do fator de forma elétrico do próton referentes às razões $\frac{\mu}{m_q} = 1.0, 1.2$ e 1.4 , para $q^2 < 2GeV^2$. Observamos que a medida que aumentamos o valor de $\frac{\mu}{m_q}$, os cálculos se aproximam dos dados experimentais, como também observamos na Tabela I. Na fig. 5.5, estão os resultados para as razões $\frac{\mu}{m_q} = 1.6, 1.7$ e 1.8 ; para 1.6 temos um acordo com os dados experimentais, enquanto para 1.7 e 1.8 as curvas estão um pouco acima dos resultados experimentais. O valor do raio do próton para 1.6 (Tabela I) é de 0.82 fm, sendo um pouco menor para os outros dois valores de 1.7 e 1.8, naturalmente para um raio um pouco menor temos um fator de forma que decresce mais lentamente. A medida em que aumentamos a razão o raio tende a aumentar (Tabela I), e o fator de forma elétrico volta a ficar muito próximo dos dados experimentais.

Na fig. (5.6), apresentamos os fatores de forma elétrico do próton para as razões $\frac{\mu}{m_q} = 1.9$ e 1.95 , observamos que para 1.95 temos o acordo com os dados experimentais. Essas razões expressam de certa forma a energia de ligação do quark antiquark para formar o méson, ou seja, quanto mais ligado o méson menor a razão $\frac{\mu}{m_q}$ ou, do contrário, quanto menos ligado, maior a razão $\frac{\mu}{m_q}$. Com isso, apresentamos na fig. (5.7), os gráficos para o fator forma correspondentes às razões $\frac{\mu}{m_q} = 1.0, 1.8$ e 1.95 , significando um méson fortemente ligado, medianamente ligado e fracamente ligado, respectivamente. Claramente os dados experimentais indicam que os cálculos para as razões 1.6 (fig. 5.5) e 1.95 são os preferidos, embora o intervalo de 1.6 a 1.95, produz ainda valores razoáveis. As razões $\frac{\mu}{m_q} = 1.6$ e 1.95 tem valores para a massa do méson de 677 MeV e 683 MeV, respectivamente, consistentes com a média da massa experimental do méson ρ e ω , como vemos na Tabela I.

Nas figs. (5.8), (5.9) e (5.10) apresentamos os resultados do produto $q^4 G_E(q^2)$ em função de q^2 , para valores do quadrado do momento transferido abaixo de $6 GeV^2$. Na fig. (5.8), vemos os resultados para $\mu/m_q = 1, 1.2$ e 1.4 , que estão bem abaixo dos valores experimentais, porém com o aumento de μ/m_q as curvas aumentam de valor, em acordo com a Tabela I, onde o raio está diminuindo. Além disso observamos que o produto tende para a saturação com o aumento do momento transferido, como verificamos explicitamente calculando para grandes momentos.

Na fig. (5.9), temos os resultados para $\mu/m_q = 1.6, 1.7$ e 1.8 . Os resultados são consistentes com os dados experimentais. Na fig. (5.10), temos os resultados comparados para 1.8 e 1.95 , sendo que o valor da razão de 1.8 , apresenta o maior valor assintótico. Para completar, os valores de $q^4 G_E(q^2)$ assintóticos para $\mu/m_q = 1.6, 1.8$ e 1.95 , são $0.33, 0.33$ e 0.26 , respectivamente.

Através da análise comparativa com os dados experimentais do fator de forma elétrico para o próton temos que a região de energias de ligação dos quarks no próton de aproximadamente 115 MeV até 331 MeV, produzem resultados consistentes com esses dados. Isto reflete uma faixa de uso do modelo com razões da massa do diquark ou méson para o quark entre 1.6 e 1.95 .



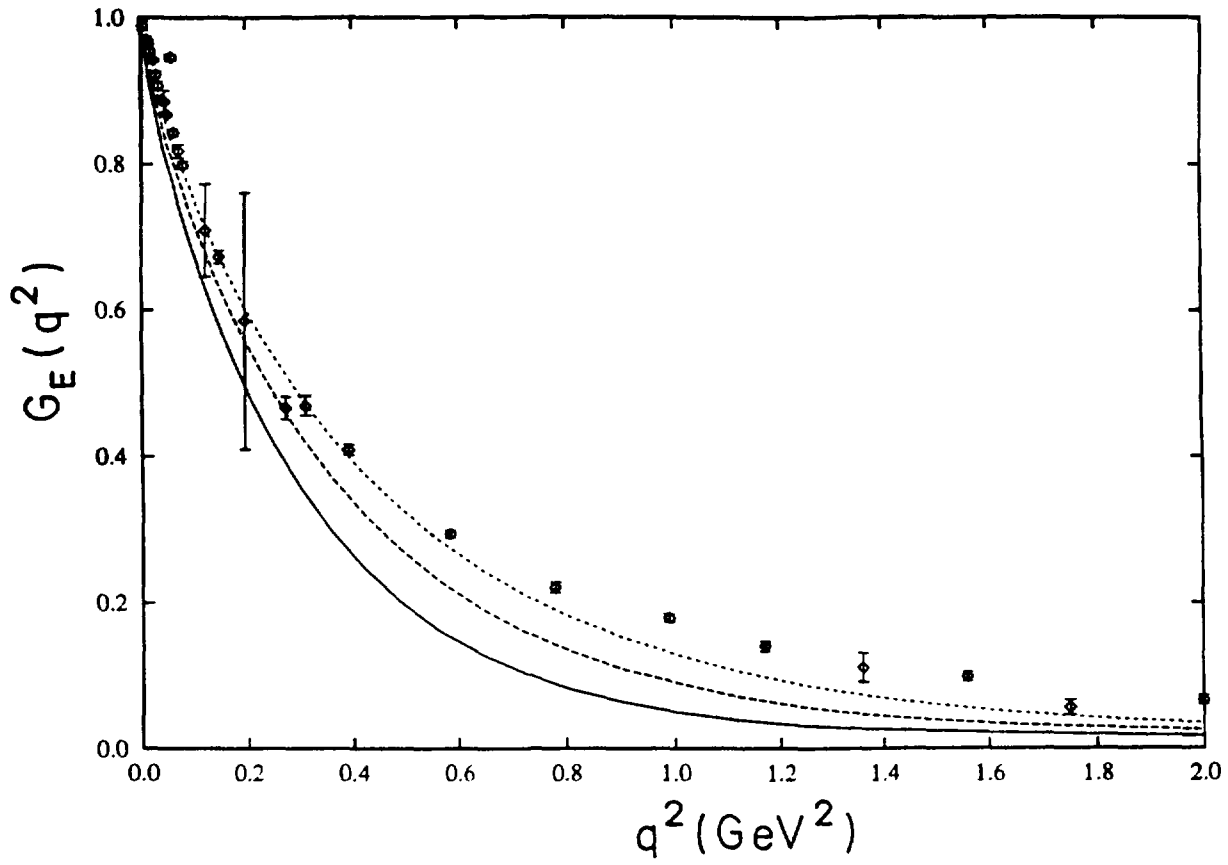


Fig. 5.4: Fator de forma elétrico do próton em função do quadrado do momento transferido, para $q^2 < 2\text{GeV}^2$. Resultados para os valores de $\frac{\mu}{m_q} = 1.0$ (linha contínua), 1.2 (linha tracejada) e 1.4 (linha pontilhada). Dados experimentais da Ref. [17].

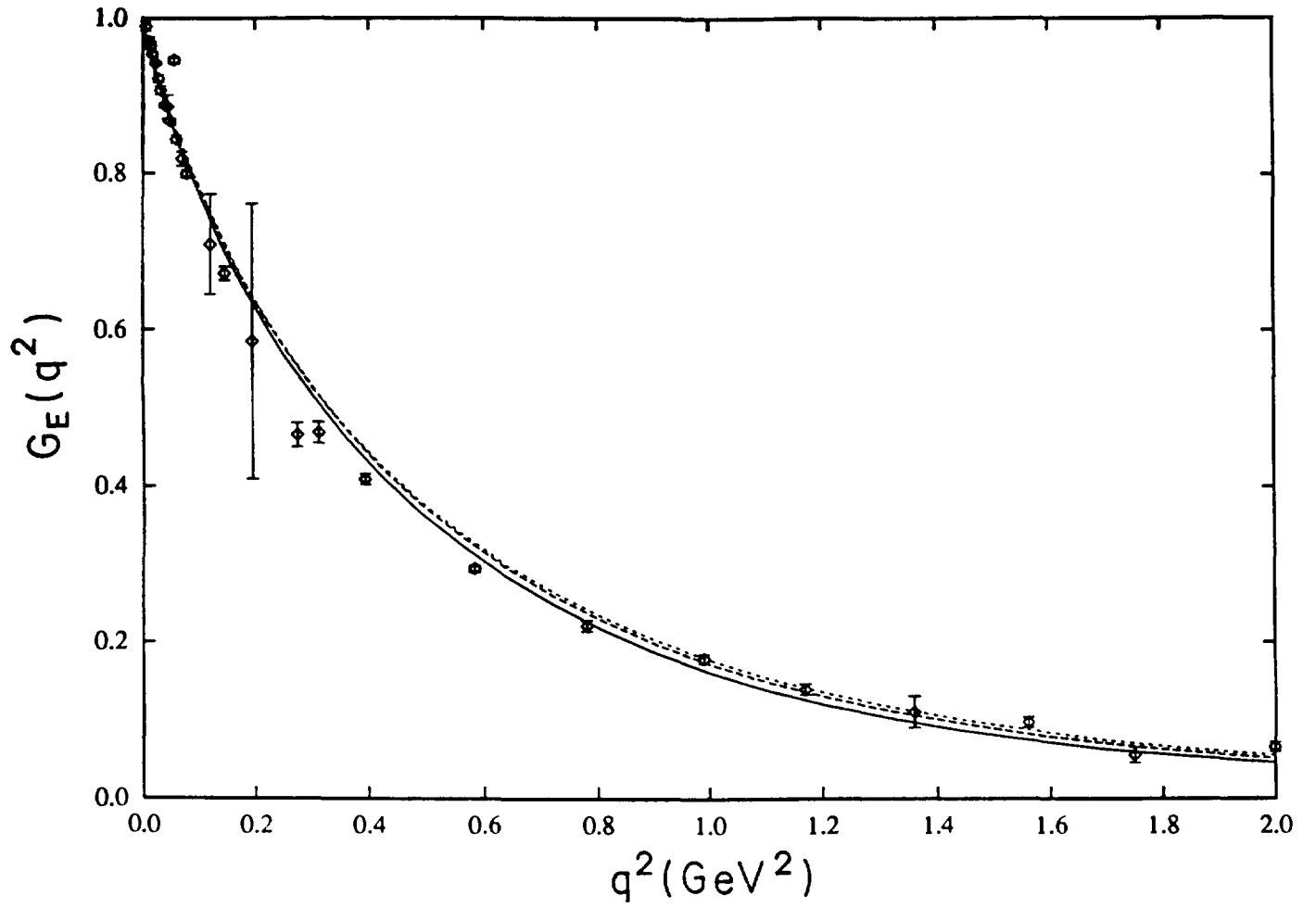


Fig. 5.5: Fator de forma elétrico do próton em função do quadrado do momento transferido, para $q^2 < 2\text{GeV}^2$. Resultados para os valores de $\frac{\mu}{m_q} = 1.6$ (linha contínua), 1.7 (linha tracejada) e 1.8 (linha pontilhada). Dados experimentais da Ref. [17].

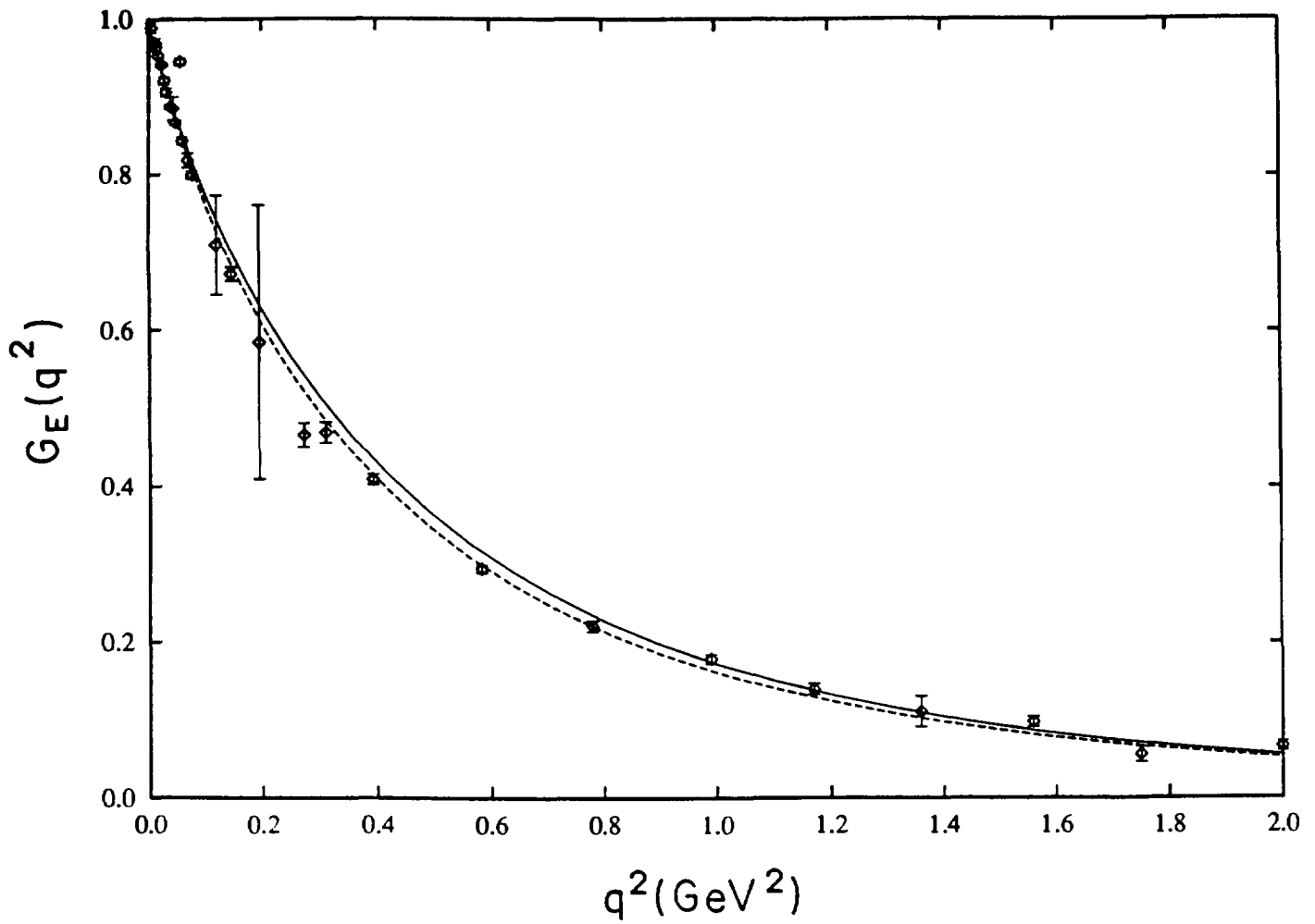


Fig. 5.6: Fator de forma elétrico do próton em função do quadrado do momento transferido, para $q^2 < 2\text{GeV}^2$. Resultados para os valores de $\frac{\mu}{m_q} = 1.9$ (linha contínua), 1.95 (linha tracejada). Dados experimentais da Ref. [17].

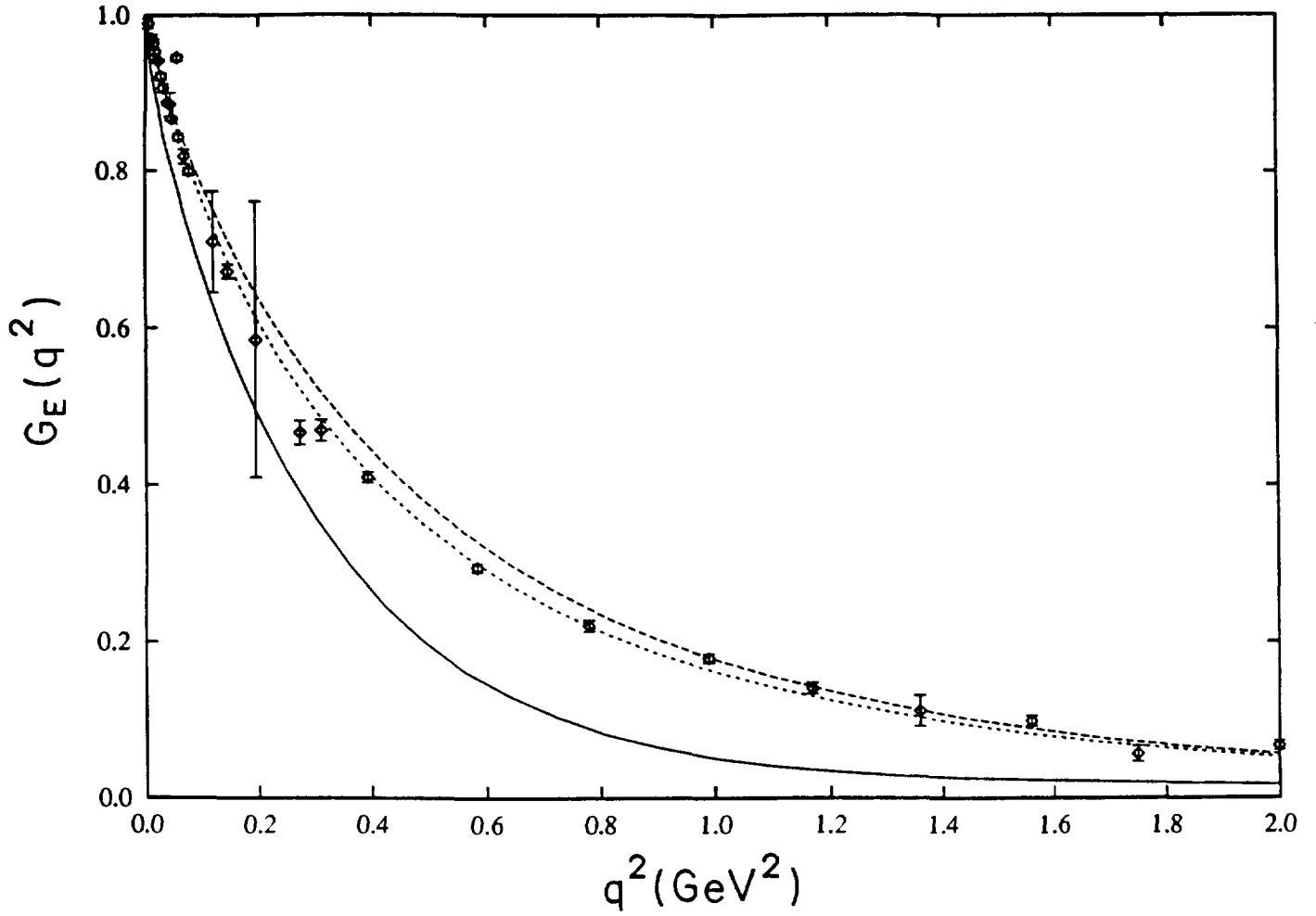


Fig. 5.7: Fator de forma elétrico do próton em função do quadrado do momento transferido, para $q^2 < 2\text{GeV}^2$. Resultados para os valores de $\frac{\mu}{m_q} = 1$ (linha contínua), 1.8 (linha tracejada) e 1.95 (linha pontilhada). Dados experimentais da Ref. [17].

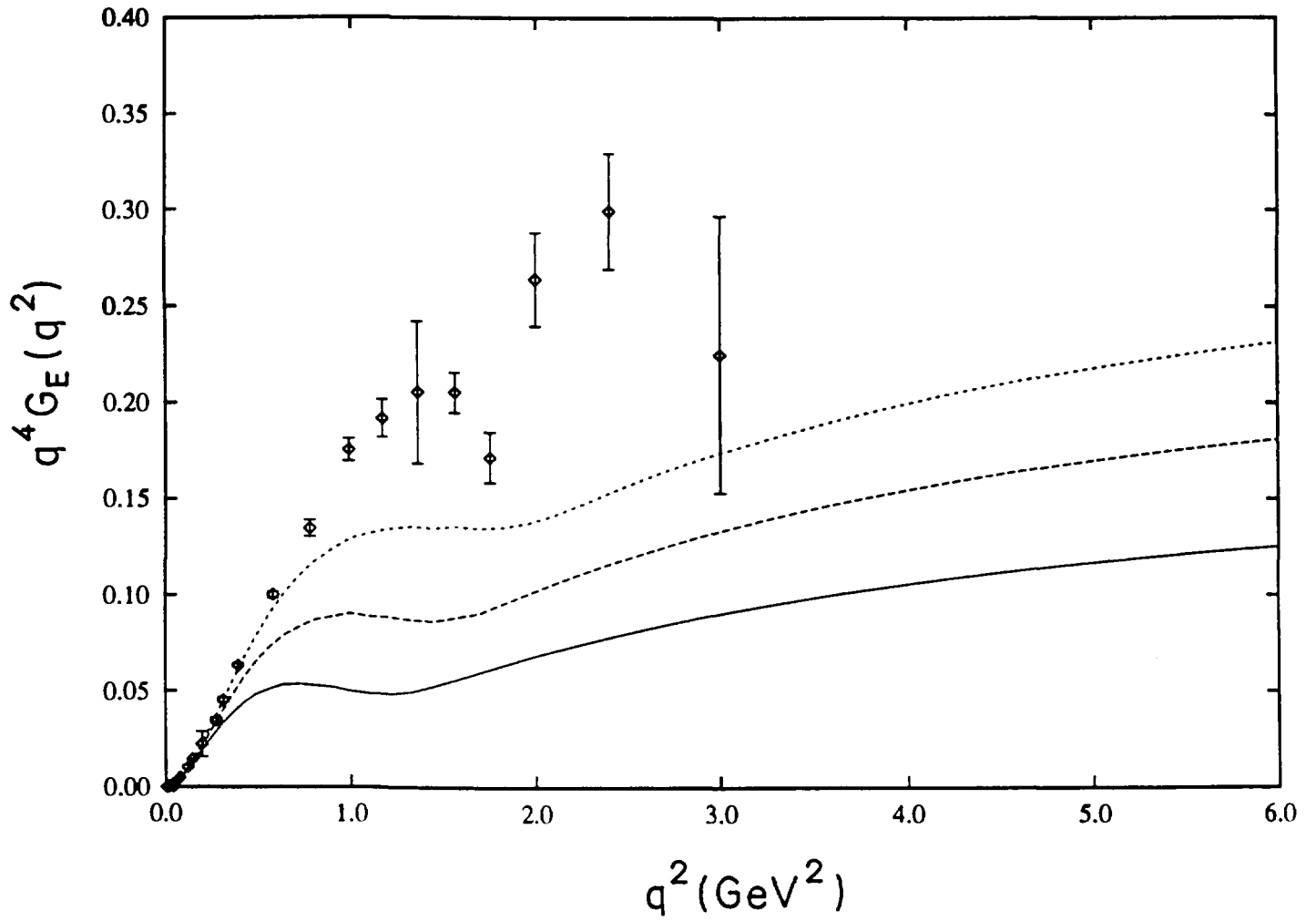


Fig. 5.8: Produto $q^4 G_E(q^2)$ em função de q^2 (GeV^2), para valores abaixo de 6 GeV^2 . Resultados para os valores de $\frac{\mu}{m_q} = 1$ (linha contínua), 1.2 (linha tracejada) e 1.4 (linha pontilhada). Dados experimentais da Ref. [17].

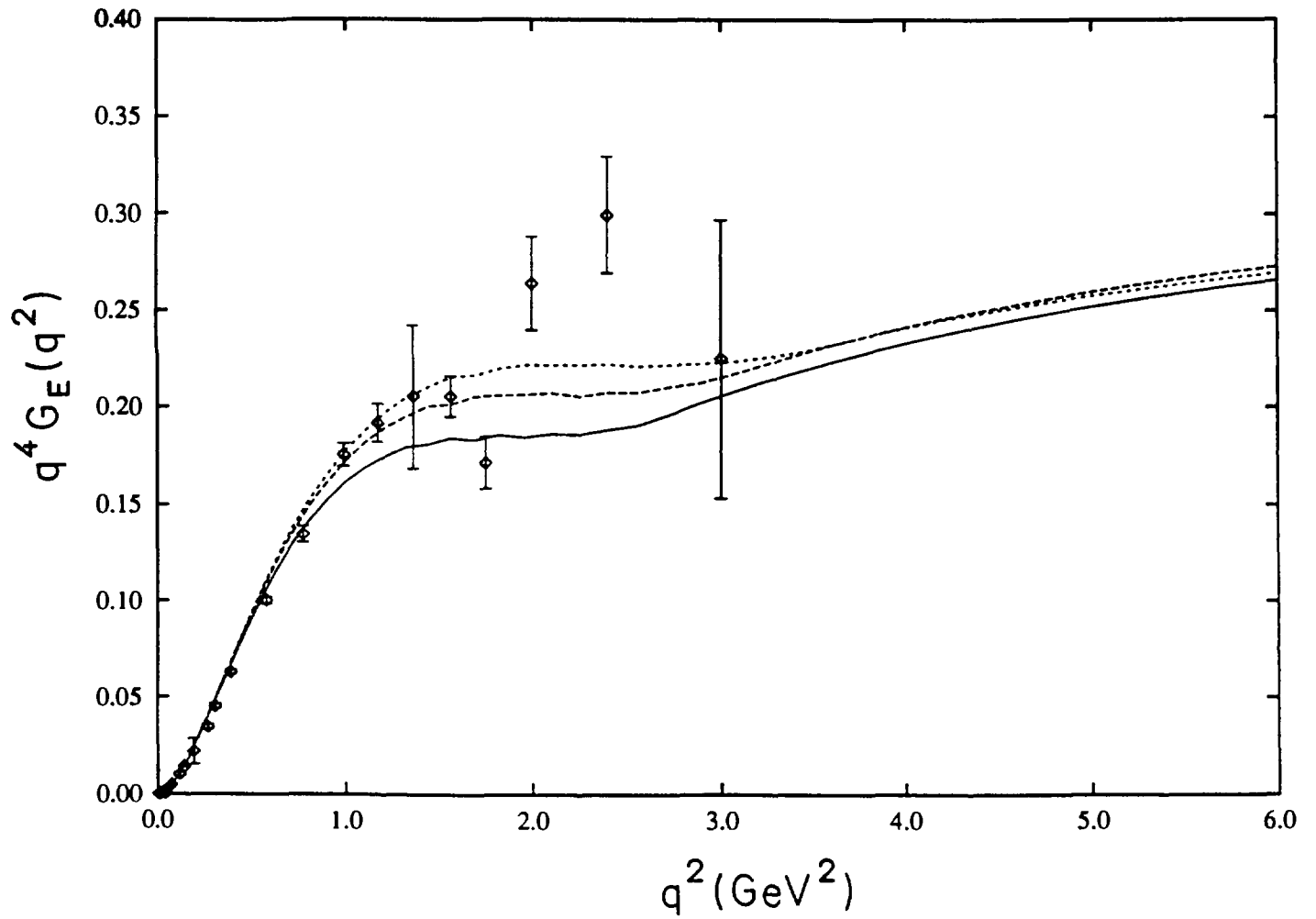


Fig. 5.9: Produto $q^4 G_E(q^2)$ em função de q^2 (GeV^2), para valores abaixo de 6 GeV^2 . Resultados para os valores de $\frac{\mu}{m_q} = 1.6$ (linha contínua), 1.7 (linha tracejada) e 1.8 (linha pontilhada). Dados experimentais da Ref. [17].

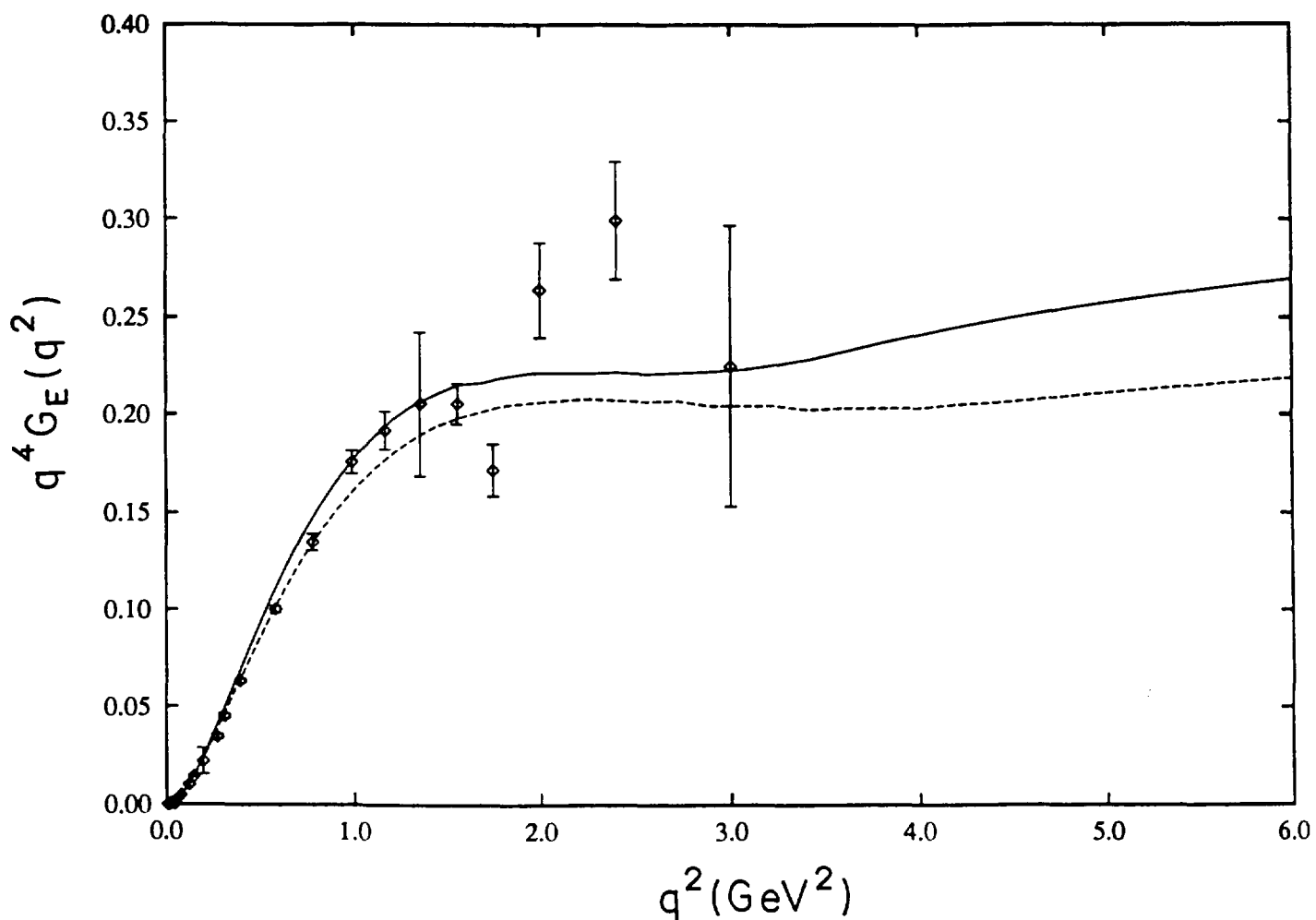


Fig. 5.10: Produto $q^4 G_E(q^2)$ em função de q^2 (GeV^2), para valores abaixo de 6 GeV^2 . Resultados para os valores de $\frac{\mu}{m_q} = 1.8$ (linha contínua) e 1.95 (linha tracejada). Dados experimentais da Ref. [17].

Capítulo 6

Conclusões

Obtivemos um modelo dinâmico covariante para o núcleon no plano-nulo baseado na noção de quarks constituintes, com interação de contato, motivado pelo modelo de Nambu-Jona-Lasinio.

Construímos o fator de forma elétrico do próton e o comparamos com dados experimentais. Apesar da simplicidade do modelo, obtivemos uma descrição simultânea do raio e massa do núcleon. O fator de forma foi bem descrito para transferência de momentos abaixo de 2GeV^2 , enquanto descreveu qualitativamente a região de grandes momentos transferidos.

Mostramos também que após fixada a massa do núcleon, temos um único parâmetro livre. A massa do diquark ou a massa do méson deste modelo, é aproximadamente duas vezes a massa do quark, para uma boa aproximação do fator de forma elétrico experimental. Assim o ajuste dos dados experimentais prefere um méson fracamente ligado.

As energias de ligação dos quarks no núcleon para o ajuste do fator de forma tem valores entre 115 e 331 MeV, coincidindo com o intervalo de valores de trabalhos recentes que usam equações de Faddeev motivadas no contexto do modelo de N.J.L. [42].

Mostramos explicitamente que não é necessário o confinamento dos quarks para um ajuste razoável da distribuição de carga experimental do próton e que a noção de quarks constituintes interagindo via força efetiva de contato é suficiente. É necessário observar que não podemos interpretar diretamente a energia de ligação nos termos usuais, pois não existem quarks livres até onde sabemos. A noção destes graus de liberdade efetivos dos quarks constituintes devem ser entendidos como válidos em uma região confinada do núcleon.

Os resultados obtidos podem ser melhorados com a introdução do grau de liberdade de spin, o que permitirá também calcular os fatores de forma magnéticos do próton e neutron.

Apêndice A

Regras de Feynman não-relativísticas

A evolução temporal da função de onda, de t_0 para um tempo futuro t , é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = U(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle . \quad (\text{A.1})$$

O operador U é unitário (uma exigência da conservação da probabilidade). Ou seja,

$$\langle \Psi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle \Psi(t_0)|\Psi(t_0)\rangle = 1 . \quad (\text{A.2})$$

Segue que

$$U(t - t_0)U^\dagger(t - t_0) = 1 . \quad (\text{A.3})$$

Introduzindo o gerador da translação temporal, podemos escrever o operador unitário como uma translação infinitesimal no tempo. Assim, com $\hbar = 1$, temos

$$U(dt) = 1 - iHdt , \quad (\text{A.4})$$

onde H é o gerador das translações temporais. A unitariedade de U implica H ser hermitiano.

U satisfaz a equação diferencial de primeira ordem.

$$U(t + dt) = U(dt)U(t) = (1 - iHdt)U(t) , \quad (\text{A.5})$$

então

$$U(t + dt) - U(t) = (-iHdt)U(t) , \quad (\text{A.6})$$

resultando em

$$i\frac{d}{dt}U(t-t_0) = HU(t-t_0) . \quad (\text{A.7})$$

Essa é a equação de *Schrödinger* para o operador evolução. Multiplicando ambos os lados por $\Psi(t_0)$, obtemos a equação para de *Schrödinger*. Se H é independente do tempo, então

$$U(t-t_0) = \exp[-iH(t-t_0)] . \quad (\text{A.8})$$

De posse do operador evolução, introduzimos agora a idéia de propagador, definido como

$$S(t-t_0) = U(t-t_0)\theta(t-t_0) , \quad (\text{A.9})$$

onde $\theta(t-t_0) = 1$ para $t > t_0$ e $\theta(t-t_0) = 0$ para $t < t_0$.

Substituindo em (A.7), obtemos a equação que o propagador satisfaz

$$i\frac{d}{dt}S(t-t_0) - HS(t-t_0) = i\delta(t-t_0) . \quad (\text{A.10})$$

Se compararmos com a equação correspondente para função de Green, obtemos

$$G(t-t_0) = -iS(t-t_0) . \quad (\text{A.11})$$

A equação de *Schrödinger* para o propagador, separando-se o potencial da Hamiltoniana livre, pode ser escrita como

$$i\frac{d}{dt}S(t-t_0) - H_0S(t-t_0) = i\delta(t-t_0) + VS(t-t_0) . \quad (\text{A.12})$$

A solução da eq.(A.12) para o propagador, é escrita em termos do propagador livre como

$$S(t-t_0) = S_0(t-t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 S_0(t-t_1)(-iV)S_0(t_1-t_0) . \quad (\text{A.13})$$

O propagador livre satisfaz a equação (A.12) com $V = 0$. A interpretação de (A.13) é dada através da sua iteração, construindo, dessa maneira, a série perturbativa

$$S(t-t_0) = S_0(t-t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 S_0(t-t_1)(-iV)S_0(t_1-t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 S_0(t-t_1)(-iV) \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 S_0(t_1-t_2)(-iV)S_0(t_2-t_0) + \dots . \quad (\text{A.14})$$

E a série (A.14) é representada graficamente:

$$\text{---} \blacksquare \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \bullet \bullet \text{---} + \dots$$

Dessa representação temos as regras de Feynman:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \equiv S_0(t-t_0)$$

$$\longrightarrow \bullet \longrightarrow \equiv -iV$$

As regras de Feynman são escritas em termos da energia e momento. Portanto a transformada de Fourier para energia é encontrada a partir de

$$\tilde{S}_0(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iEt} S_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{i(E-H_0+i\epsilon)t} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}(E-H_0+i\epsilon)}, \quad (\text{A.15})$$

para o propagador livre. No caso do propagador do sistema interagente temos

$$\tilde{S}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iHt} e^{iEt} \theta(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{i(E-H+i\epsilon)t} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}(E-H+i\epsilon)}. \quad (\text{A.16})$$

Como há singularidade, introduzimos o fator de convergência $i\epsilon$.

Assim, o propagador do sistema interagente é dado por

$$S(t-t_0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{e^{-iE(t-t_0)}}{E-H+i\epsilon}, \quad (\text{A.17})$$

onde o propagador de Feynman é dado por

$$S_F = \frac{i}{E-H+i\epsilon}. \quad (\text{A.18})$$

Portanto, as regras de Feynman para os propagadores e potencial são, respectivamente:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \equiv \frac{i}{E - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon}$$

$$\longrightarrow \bullet \longrightarrow \equiv -iV$$

Apêndice B

Geradores cinemáticos

O grupo de estabilidade é formado por sete geradores cinemáticos:

$$K = (P_{\perp}, P^+, E_1, E_2, K_3, J_3) ; \quad (\text{B.1})$$

onde:

- a) $P_{\perp} = (P_1, P_2)$ são os momentos na direção x e y .
- b) $P^+ = P^0 + P^3$ é momento do plano-nulo canonicamente conjugado à coordenada de posição x^- .
- c) J_3 é o gerador da rotação em torno do eixo z .
- d) $E_1 = K_1 + J_2$ sendo K_1 um "boost" na direção x e J_2 o gerador de uma rotação em torno da direção y .
- e) $E_2 = K_2 - J_1$ sendo K_2 um "boost" na direção y e J_1 o gerador de uma rotação em torno da direção x .
- f) K_3 "boost" no eixo z .

Os geradores $P_{\perp}$ e P^+ são geradores de translação e todos eles mantêm o plano-nulo invariante. O gerador J_3 também mantém o plano-nulo invariante. Ele roda o plano x - y que está contido no plano-nulo. Já os três geradores restantes são provenientes das transformações cinemáticas, apresentadas no capítulo 3. Provemos que do ponto de vista do plano usual, eles são dados por d), e) e f).

As transformações cinemáticas tem a forma

$$\begin{pmatrix} A'^+ \\ A_\perp \\ A'^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^+ A^+ \\ A_\perp + Q_\perp A^+ \\ \frac{1}{Q^+}(Q_\perp^2 A^+ + 2Q_\perp A_\perp + A^-) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Separando a parte relativa à matriz unidade, temos a transformação infinitesimal

$$\begin{pmatrix} A'^+ \\ A_\perp \\ A'^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ A_\perp \\ A^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q^+ - 1 & 0 & 0 \\ Q_\perp & 0 & 0 \\ \frac{Q_\perp^2}{Q^+} & 2\frac{Q_\perp}{Q^+} & \frac{1}{Q^+} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ A_\perp \\ A^- \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Definindo o parâmetro $\alpha^+ = Q^+ - 1$ e tomando os limites $\alpha^+ \rightarrow 0$ e $Q_\perp \rightarrow 0$, obtemos, da segunda matriz do lado direito os geradores

$$M = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \alpha^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} Q_\perp \quad (\text{B.4})$$

onde I é a matriz identidade e M foi definido como

$$M \equiv I + \begin{pmatrix} Q^+ - 1 & 0 & 0 \\ Q_\perp & 0 & 0 \\ \frac{Q_\perp^2}{Q^+} & 2\frac{Q_\perp}{Q^+} & \frac{1}{Q^+} - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Levando-se em conta o caráter bi-dimensional de $Q_\perp = (Q_x, Q_y)$, a expressão acima pode ser reescrita como

$$M = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \alpha^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} Q_y \quad (\text{B.6})$$

As três matrizes acima são as representações dos três geradores cinemáticos do plano-nulo.

A matriz R que conecta os quadrivetores $(A^+, \vec{A}_\perp, A^-)$ com $(A^0, \vec{A})$ é

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

sendo que

$$\begin{pmatrix} A^+ \\ \tilde{A}_\perp \\ A^- \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} A^0 \\ \tilde{A}_\perp \\ A^3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, do ponto de vista do plano usual, os geradores são vistos como

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_3 \quad (\text{B.8})$$

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_1 + J_2 \quad (\text{B.9})$$

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = K_2 - J_1 \quad (\text{B.10})$$

$$(\text{B.11})$$

O grupo de estabilidade forma uma álgebra fechada. Ou seja, temos as seguintes relações de comutação:

$$[K_3, E_r] = -iE_r \quad (\text{B.12})$$

$$[K_3, P^+] = -iP^+ \quad (\text{B.13})$$

$$[J_3, E_r] = i\epsilon_{rs}E_s \quad (\text{B.14})$$

$$[J_3, P_r] = i\epsilon_{rs}P_s \quad (\text{B.15})$$

$$[E_r, P_s] = -i\delta_{rs}P^+ \quad (\text{B.16})$$

Acrescentamos que as relações de comutação restantes entre os elementos do grupo de estabilidade são zero.

Apêndice C

Fatores de forma eletromagnéticos não relativísticos

Nessa secção obtemos os fatores de forma eletromagnéticos não relativísticos de dois e três bósons .Usaremos um procedimento análogo ao caso relativístico. Aqui também usamos o referencial de Breit.

C.1)Fator de forma eletromagnético não relativístico de dois bósons(“Píon”)

No diagrama triangular da figura abaixo, temos a componente zero do momento transferido nula:

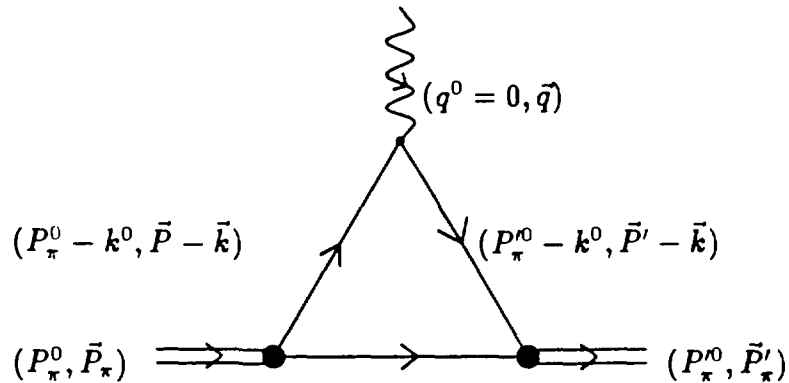


Figura C.1

A componente zero da corrente não relativística é a carga, e nos dá a expressão onde usamos uma aproximação não relativística do vértice bóson-fóton:

$$4mG_{E-\pi}^{NR}(q^2) = \int \frac{dk^0 d^3k}{(2\pi)^4} 2m \frac{(\Gamma_\pi^{NR})^2 i}{k^0 - \frac{\vec{k}^2}{2m} + i\epsilon} \frac{i}{P^0 - k^0 - \frac{(\vec{P}-\vec{k})^2}{2m} + i\epsilon} \frac{i}{P^0 - k^0 - \frac{(\vec{P}'-\vec{k})^2}{2m} + i\epsilon} \quad (C.1)$$

No referencial de Breit temos

$$\vec{P} = -\frac{\vec{q}}{2}; \vec{P}' = \frac{\vec{q}}{2}, \quad (C.2)$$

sendo

$$P^0 = \frac{\vec{q}^2}{16m} - E_{2B}; P'^0 = \frac{\vec{q}^2}{16m} - E_{2B}. \quad (C.3)$$

Integrando em k^0 por Cauchy, obtemos a seguinte expressão no referencial de Breit:

$$G_{E-\pi}^{NR} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\Gamma_\pi^{NR})^2}{(P^0 - \frac{\vec{k}^2}{2m} - \frac{(\vec{P}-\vec{k})^2}{2m} + i\epsilon)(P'^0 - \frac{\vec{k}^2}{2m} - \frac{(\vec{P}'-\vec{k})^2}{2m} + i\epsilon)}. \quad (C.4)$$

Na eq.(C.4) podemos reescrever o momento $\vec{k}$ em termos dos momentos relativos no estado inicial e final. Assim,

$$\vec{K} = \frac{2\vec{k} - \vec{P}}{2} = \vec{k} + \frac{\vec{q}}{4}, \quad (C.5)$$

para o estado inicial, e

$$\vec{K}' = \frac{2\vec{k} - \vec{P}'}{2} = \vec{k} - \frac{\vec{q}}{4}, \quad (C.6)$$

para o estado final.

Escrevendo o fator de forma em termos dos momentos relativos temos

$$G_{E-\pi}^{NR} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{(\Gamma_\pi^{NR})^2}{(-E_{2B} - \frac{\vec{K}^2}{m})(-E_{2B} - \frac{\vec{K}'^2}{m})}, \quad (C.7)$$

onde

$$\vec{K}' = \vec{K} - \frac{\vec{q}}{2}. \quad (C.8)$$

C.2) Para três bósons

O procedimento é o mesmo do método relativístico que obtemos anteriormente. Ou seja, o ponto de partida é a equação(C.7). Ela pode ser reescrita como

$$G_{E-\pi}^{NR} = \frac{1}{2} \int d^3k \Psi_{\pi}^{NR}(\vec{K}') \Psi_{\pi}^{NR}(\vec{K}) , \quad (C.9)$$

onde $G_{E-\pi}^{NR}$ é o fator de forma do “píon” não relativístico e

$$\Psi_{\pi}^{NR} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma_{\pi}^{NR}}{E_{2B} + \frac{\vec{K}^2}{m}} , \quad (C.10)$$

sua função de onda.

Portanto inferimos o fator de forma do núcleon e sua função de onda. Ambos possuem formas análogas às equações (C.9) e (C.10). No entanto, a constante de acoplamento é formada pelas componentes de Faddeev não-relativísticas do vértice, o que nos dá

$$G_{E-N}^{NR} = \int d^3k_1 d^3k_2 \Psi_N^{NR}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \Psi_N^{NR}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) , \quad (C.11)$$

onde a função de onda no referencial do centro de massa é dada por

$$\Psi_N^{NR} = \frac{\Gamma_N^{NR}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{E_{3B} + \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m}} = \frac{\sum_{i=1}^3 v_{NR}(\vec{p}_i)}{E_{3B} + \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m}} , \quad (C.12)$$

sendo $\vec{p}_i$ os momentos das partículas no C.M, com $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$.

No referencial de Breit, obtemos o seguinte fator de forma elétrico não relativístico para o próton:

$$G_{E-N}^{NR}(q^2) = \int d^3k_1 d^3k_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 v_{NR}(\vec{k}_i + \frac{\vec{q}}{6})}{E_{3B} + \sum_{i=1}^3 \frac{(\vec{k}_i + \frac{\vec{q}}{6})^2}{2m}} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^2 v_{NR}(\vec{k}_i - \frac{\vec{q}}{6}) + v_{NR}(\vec{k}_3' - \frac{\vec{q}}{6})}{E_{3B} + \sum_{i=1}^2 \frac{(\vec{k}_i - \frac{\vec{q}}{6})^2}{2m} + \frac{(\vec{k}_3' - \frac{\vec{q}}{6})^2}{2m}} \right) . \quad (C.13)$$

onde $\vec{k}_3' = \vec{k}_3 + \vec{q}$.

Apêndice D

Limites não-relativísticos

Aqui obteremos os limites não relativísticos da matriz τ de dois corpos Eq.(3.28) e da equação integral para a função espectadora no plano-nulo Eq.(3.42), do capítulo 3. Efetuamos também este limite para os fatores de forma relativísticos de dois corpos ligados Eq.(4.15) e do próton Eq.(4.49), do capítulo 4. O objetivo é comparar esses resultados com a matriz τ não relativística Eq.(2.14); com a equação de Skorniakov e Ter-Martirosian (2.25) do Capítulo 2, e também com os fatores de forma de dois corpos ligados (C.7) e três corpos ligados (C.13).

D.1) Matriz τ para dois bósons.

A matriz τ (3.28) foi obtida como

$$\tau(M_2) = -i(2\pi)^2 \left[\sqrt{\frac{m^2}{M_{2B}^2} - \frac{1}{4}} \arctan(2\sqrt{\frac{m^2}{M_{2B}^2} - \frac{1}{4}})^{-1} - \sqrt{\frac{m^2}{M_2^2} - \frac{1}{4}} \arctan(2\sqrt{\frac{m^2}{M_2^2} - \frac{1}{4}})^{-1} \right]^{-1}. \quad (\text{D.1})$$

Para m grande, o termo $\sqrt{\frac{m^2}{M_{2B}^2} - \frac{1}{4}}$ fica

$$\sqrt{\frac{m^2}{M_{2B}^2} - \frac{1}{4}} \sim \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{E_{2B}}{m}} - 1 \right)} \sim \sqrt{\frac{E_{2B}}{4m}}, \quad (\text{D.2})$$

onde usamos a aproximação

$$\left(1 - \frac{E_{2B}}{m}\right)^{-1} \sim 1 + \frac{E_{2B}}{m}. \quad (\text{D.3})$$

O termo $\arctan(2\sqrt{\frac{m^2}{M_2^2} - \frac{1}{4}})$ fica:

$$\arctan(2\sqrt{\frac{m^2}{M_2^2} - \frac{1}{4}})^{-1} \longrightarrow \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{\frac{E_{2B}}{4m}}}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (D.4)$$

Portanto, o limite não-relativístico para a matriz τ de dois bósons é

$$\tau = \frac{-16\pi i \sqrt{m}}{\sqrt{E_{2B}} - \sqrt{E_2}}. \quad (D.5)$$

D.2) Limite não-relativístico da equação integral de três bósons.

Verifiquemos o limite para m muito grande da Eq.(3.36). Assim temos

$$M_3^2 - M_{03}^2 = (M_3 + M_{03})(M_3 - M_{03}) = 6m(3m - E_{3B} - 3m - \sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{2m}), \quad (D.6)$$

$$x = \frac{k^+}{P^+} = \frac{E_k + k_z}{M_3} \longrightarrow \frac{1}{3}, \quad (D.7)$$

onde E_k é a energia do bóson com momento $\vec{k}$. Ainda temos

$$\frac{dx}{dk_z} \longrightarrow \frac{x}{m}, \quad (D.8)$$

$$(1 - x - y) \longrightarrow \frac{1}{3}. \quad (D.9)$$

Sabendo que $M_3 = 3m - E_{3B}$ para m grande e que o limite não relativístico é dado pela Eq.(D.5), obtemos

$$v_{NR}(\vec{q}) = \frac{-\sqrt{m}}{\pi^2(\sqrt{E_{2B}} - \sqrt{E_2})} \int \frac{d^3k}{m^2} \frac{v_{NR}(\vec{k})}{E_{3B} + \frac{q^2}{2m} + \frac{\vec{k}^2}{2m} + \frac{(\vec{q}+\vec{k})^2}{2m}}. \quad (D.10)$$

Observe que a a Eq.(D.10) é a equação de Skorniakov e Ter-Martirosian (2.25)

D.3) Limite não relativístico do fator de forma eletromagnético de dois bósons.

A equação (4.15) é escrita como

$$G_{E-\pi}(q^2) = \frac{\Gamma_\pi^2}{(2\pi)^3} \int \frac{dx d^2k_\perp}{x(1-x)} \frac{1}{[(M_\pi^2 - \frac{K^2 + m^2}{x(1-x)})][(M_\pi^2 - \frac{K'^2 + m^2}{x(1-x)})]}, \quad (D.11)$$

onde

$$\vec{K}'_{\perp} = \vec{K}_{\perp} + x\vec{q}_{\perp} . \quad (\text{D.12})$$

Para m grande temos

$$dx = \frac{dk_z}{2m} \quad (\text{D.13})$$

e

$$x \longrightarrow \frac{1}{2} . \quad (\text{D.14})$$

No centro da massa de dois corpos,

$$\frac{K_{\perp}^2 + m^2}{x(1-x)} = 4(\vec{K}^2 + m^2) , \quad (\text{D.15})$$

e o mesmo para $\vec{K}'$.

Substituindo a massa livre de dois corpos pela Eq.(D.15), e usando a Eq.(D.13) em (D.11), temos que

$$G_{E-\pi}^{NR} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2m} \frac{4(\Gamma_{\pi}^{NR})^2}{M_2^2 - 4(\vec{K}^2 + m^2)} \frac{1}{M_2^2 - 4(\vec{K}'^2 + m^2)} , \quad (\text{D.16})$$

onde

$$\vec{K}' = \vec{K} - \frac{\vec{q}}{2} . \quad (\text{D.17})$$

Usando que $M_2^2 \approx 4m(2m - E_{2B})$, o fator de forma eletromagnético fica de acordo com a Eq.(C.7):

$$G_{E-\pi}^{NR} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{8m^3} \frac{(\Gamma_{\pi}^{NR})^2}{(-E_{2B} - \frac{\vec{K}^2}{m})(-E_{2B} - \frac{\vec{K}'^2}{m})} . \quad (\text{D.18})$$

Observemos que a Eq.(D.18) está de acordo com a Eq.(C.7), levando em conta que o fator $\frac{1}{(2m)^{\frac{3}{2}}}$ é absorvido pela constante de acoplamento, na normalização da função de onda. As unidades são tais que $\hbar = c = 1$.

D.4) Limite não relativístico do fator de forma de três bósons

A equação do fator de forma do próton não relativístico é escrita como

$$G_{E-N}(q^2) = \int \frac{dx_1 dx_2 d^2 k_{1\perp} d^2 k_{2\perp}}{x_1 x_2 x_3} \frac{\sum_{i=1}^3 v(x_i; \vec{k}_{i\perp} + x_i \frac{\vec{q}_\perp}{2})}{M_N^2 - M_{03}^2} \frac{\sum_{i=1}^2 v(x_i; \vec{k}_{i\perp} - x_i \frac{\vec{q}_\perp}{2}) + v(x_3; \vec{k}'_{3\perp} - x_3 \frac{\vec{q}_\perp}{2})}{M_N^2 - M_{03}^{'2}} . \quad (D.19)$$

Vejamos os limites:

$$\frac{dx_i}{dk_{iz}} \longrightarrow \frac{x_i}{m} , \quad (D.20)$$

com $i=1, 2$ e 3 ;

$$x_3 = (1 - x - y) \longrightarrow \frac{1}{3} , \quad (D.21)$$

$$M_N^2 - M_{03}^2 \longrightarrow 6m(E_{3B} - \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m}) ; \quad (D.22)$$

onde $\vec{p}_i$ são os momentos das partículas no centro de massa do sistema de três corpos.

E a Eq.(D.10) nos dá o limite não relativístico da função espectadora:

$$v(x_i; \vec{k}_{i\perp} \pm x_i \frac{\vec{q}_\perp}{2}) \longrightarrow v_{NR}(\vec{k}_i \pm \frac{\vec{q}}{6}) . \quad (D.23)$$

Substituindo os limites acima no fator de forma elétrico relativístico do próton, obtemos o fator de forma elétrico não relativístico, observando que as constantes são absorvidas na normalização da função espectadora:

$$G_{E-N}^{NR}(q^2) = \int d^3 k_1 d^3 k_2 \frac{\sum_{i=1}^3 v_{NR}(\vec{k}_i + \frac{\vec{q}}{6})}{E_{3B} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^2 (\vec{k}_i + \frac{\vec{q}}{6})^2} \frac{\sum_{i=1}^2 [v_{NR}(\vec{k}_i - \frac{\vec{q}}{6}) + v_{NR}(\vec{k}'_3 - \frac{\vec{q}}{6})]}{E_{3B} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^2 (\vec{k}_i - \frac{\vec{q}}{6})^2 + \frac{1}{2m} (\vec{k}'_3 - \frac{\vec{q}}{6})^2} , \quad (D.24)$$

onde $\vec{k}'_3 = \vec{k}_3 + \vec{q}$. Esta expressão corresponde a Eq.(C.13) para o fator de forma elétrico do estado ligado de três bósons.

Bibliografia

- [1] P.A.M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [2] P.L.Chung, F. Coester, B. D. Keister and W.N. Polizou, Phys. Rev. **37** (1988) 2000; I.L.Grach and L.A. Kondratyuk, Sov. J. Nucl. Phys. **39** (1984) 198.
- [3] T. Frederico, E.M. Henley and G.A. Miller, Nucl. Phys. **A533**, 617 (1991); L. L. Frankfurt, T. Frederico and M. I. Strikman, Phys. Rev. **C48**, 2182 (1993).
- [4] M. V. Terent'ev, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 106; L. A. Kondratyuk and M.V.Terent'ev , Sov. J. Nucl. Phys. **31** (1980) 561.
- [5] Z. Dziembowski and L. Mankiewicz, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 2175.
- [6] P. L. Chung , F. Coester and W. N. Polizou , Phys. Lett. **B205** (1988) 545.
- [7] R.J.Perry, A.Harindranath and K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 2959.
- [8] B.D.Keister and W.N. Polizou, Adv. Nucl. Phys. **20** (1991) 225.
- [9] R. Dashen and M. Gell-Mann, 1966, in Proceedings of the 3rd Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High-Energy (Freeman); S. Fubini, G. Segré and D. Walecka, Ann. Phys. **39** (1966) 381; V. de Alfara, S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti, "Currents in Hadron Physics", North Holland, Publishing Amsterdam 1973.
- [10] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345; **124**,246.
- [11] A.L. Fetter and J.D.Walecka, " Quantum Theory of Many-Particle Systems" (McGraw-Hill, 1971).
- [12] M. K. Banerjee, Progress in Particle and Nuclear Physics **31** (1993) 77.

- [13] U.Vogl and W. Weise, Prog. Nucl. Part. Phys. **27** (1991) 195.
- [14] W.R.B. de Araújo, J.P.B.C. de Melo and T.Frederico, Phys. Rev. **C52** (1995) 2773.
- [15] L. D. Faddeev, Sov. Phys. JETP **12** (1960) 1014.
- [16] T. Frederico, Phys. Lett. **B282** (1992) 409, S. K. Adhikari, Lauro Tomio and T.Frederico, Ann. Phys. **235**, (1994) 77.
- [17] G. Hohler et. al., Nucl. Phys. **B144** (1976) 505.
- [18] S.J.Brodsky e J.R.Primack, Ann.Phys. **52** (1969) 315.
- [19] J.J.Murphy II, Y.M.Shin, e D.M.Skopik, Phys.Rev. **C9** (1974) 3125.
- [20] Z. Dziembowski, Phys. Rev. **D37** (1988) 778.
- [21] P.L.Chung and F. Coester, Phys. Rev. **D44** (1991) 229.
- [22] Z. Dziembowski, Phys. Rev. **D37** (1988) 2030; Z. Dziembowski and J. Franklin, Phys. Rev. **D42** (1990) 905.
- [23] G.V.Skornyakov and K.A. Ter-Martirosian, Sov.Phys.JETP **4**(1957)648.
- [24] A.N.Mitra "The Nuclear Three-body Problem", Advances in Nuclear Physics Vol.3 (Plenum Press 1969).
- [25] S.K.Adhikari, T.Frederico and I.D.Goldman, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 487.
- [26] S.K.Adhikari and T.Frederico, Phys. Rev. Lett **74** (1995) 4572.
- [27] L.H.Thomas, Phys.Rev. **47** (1935) 903.
- [28] V.Efimov, Phys.Lett.**33B** (1970) 563.
- [29] V.F.Kharchenko, Sov. J. Nucl. Phys. **16** (1973) 173.
- [30] S.K. Adhikari, A. Delfino, T. Frederico, I. D. Goldman and L. Tomio, Phys. Rev. **A37** (1988) 3666; S. K. Adhikari, A.Delfino, T.Frederico and L. Tomio, Phys. Rev. **A47** (1993) 1093.
- [31] A.E.A. Amorim, Lauro Tomio and T. Frederico, Phys. Rev. **C46** (1992) 2224.

- [32] J.A.Tjon, Phys.Rev.A**21** (1980) 1334.
- [33] C.J.Joachain,"Quantum Collision Theory" (Amsterdam, North-Holand).
- [34] J.M. Namyslowski, Progress in Particle and Nuclear Physics **14** (1985) 49.
- [35] B.D. Keister, Phys. Rev. **D49** (1994) 1500.
- [36] F. Cardarelli, I.L.Grach, I.M. Narodetskii, E. Pace, G. Salmé and S. Simula, Phys. Lett. **B359** (1995) 1.
- [37] H.Leutwyler and J.Stern, Ann.Phys.(N.Y) **112** (1978) 94.
- [38] L.L.Frankfurt and M.I.Strikman, Nucl. Phys. **B148** (1979) 107; *ibid.*, Phys. Rep. **76** (1981) 215.
- [39] M. Sawicki, Phys. Rev. **D46** (1992) 474.
- [40] T. Frederico and G.A. Miller, Phys. Rev. **D45** (1992) 4207; Phys. Rev. **D50** (1994) 210.
- [41] J. D. Bjorken and S. D. Drell, "Relativistic Quantum Fields"; McGraw-Hill, 1965.
- [42] N.Ishii, W.Bentz and K.Yazaki, Phys.Lett. **B301** (1993) 165; Phys.Lett. **B318** (1993) 26; S.Huang and J.Tjon, Phys.Rev. **C49** (1994) 1702; C.Hanhart and S.Krewald, Phys.Lett. **B344** (1995) 55.