

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DES THERMICIENS

Section " RAYONNEMENT "
(Président : D. Balageas)

**LES CODES DE CALCUL DE
RAYONNEMENT THERMIQUE**

Journée d'Études du Mercredi 14 Février 1996

DISCLAIMER

Portions of this document may be illegible in electronic image products. Images are produced from the best available original document.

SOCIETE FRANCAISE DES THERMICIENS

*JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

SUR

LES CODES DE CALCUL DE RAYONNEMENT THERMIQUE

MODÉLISATION DU CHAMP RADIATIF DANS DES GÉOMÉTRIES COMPLEXES À L'AIDE D'OUTILS INFOGRAPHIQUES. APPLICATION A LA CARACTERISATION DU CONFORT DANS LES AMBIANCES MUNIES DE SOURCES RADIATIVES IMPORTANTES

par Mircea MANOLESCU, Maurice SPERANDIO, Francis ALLARD

Laboratoire d'Etude de Phénomènes de Transfert Appliqués aux Bâtiments (LEPTAB),
Université de La Rochelle, Av. Marillac, 17 042 La Rochelle.

Résumé

Les études bibliographiques dans le domaine du transfert thermique radiatif montrent l'impossibilité de résoudre le problème par des méthodes analytiques classiques dans des géométries complexes. La résolution numérique peut, théoriquement, approcher les résultats exacts mais la principale barrière est constituée par la taille mémoire requise pour les calculs. Notre contribution essentielle a été de recourir à l'emploi des techniques infographiques pour traiter des problèmes généraux de transfert radiatif dans des géométries complexes. L'article présente le modèle utilisé pour le calcul du transfert radiatif, la technique de calcul et les optimisations permettant une réduction considérable de l'espace mémoire nécessaire et du temps de calcul. Le code développé permet une présentation synthétique des résultats sous forme d'images suggestives facilitant ainsi les choix du concepteur ou du chercheur. Finalement, une application à la caractérisation des ambiances habitables en terme de confort est développée pour illustrer la démarche et les potentialités de celle-ci.

MODÉLISATION DU CHAMP RADIATIF DANS DES GÉOMÉTRIES COMPLEXES À L'AIDE D'OUTILS INFOGRAPHIQUES. APPLICATION A LA CARACTERISATION DU CONFORT DANS LES AMBIANCES MUNIES DE SOURCES RADIATIVES IMPORTANTES

Mircea MANOLESCU, Maurice SPERANDIO, Francis ALLARD

Laboratoire d'Etude de Phénomènes de Transfert Appliqués aux Bâtiments (LEPTAB),
Université de La Rochelle, Av. Marillac, 17 042 La Rochelle.

MOTS-CLES

Transfert chaleur, Rayonnement thermique, Modélisation, Infographie, Tracé rayon, Methode Monte Carlo

Résumé

Les études bibliographiques dans le domaine du transfert thermique radiatif montrent l'impossibilité de résoudre le problème par des méthodes analytiques classiques dans des géométries complexes. La résolution numérique à l'aide des ordinateurs peut, théoriquement, approcher les résultats exacts mais la principale barrière est constituée par la taille mémoire requise pour les calculs.

Des problématiques similaires existent dans le domaine de la synthèse d'image. Elles sont traitées à l'aide de méthodes numériques avancées, mais les hypothèses de travail sont spécifiques au domaine visible du rayonnement et les phénomènes physiques simplifiés en conséquence. Notre contribution essentielle a donc été de recourir à l'emploi des techniques infographiques pour traiter des problèmes généraux de transfert radiatif dans des géométries complexes.

L'article présente le modèle utilisé pour le calcul du transfert radiatif, la technique de calcul et les optimisations permettant une réduction considérable de l'espace mémoire nécessaire et du temps de calcul.

Le code développé, outre la prise en compte de géométries complexes munies d'obstacles et des caractéristiques radiatives réelles des surfaces, permet une présentation synthétique des résultats sous forme d'images suggestives facilitant ainsi les choix du concepteur ou du chercheur.

Finalement, une application à la caractérisation des ambiances habitables en terme de confort est développée pour illustrer la démarche et les potentialités de celle-ci.

Nomenclature:

L - la luminance	[W/m ² .sr]
F - facteur de forme	[-]
J - radiosité	[W/m ²]
T - température	[K]
n - indice de refraction	[-]
α - l'absorptivité	[-]
ε - émissivité	[-]
θ - angle zénithal	[deg]
λ - longueur d'onde	[μm]
ρ - la réflectivité	[-]
σ - la constante de Boltzmann	[W/m ² K ⁴]
τ - la transmissivité	[-]
φ - angle azimutal	[deg]
ω - angle solide	[sr]

Exposants:

' - directionnel
" - bidirectionnel
° - afférent au Corps Noir

Indices:

rm - radiant moyen
λ - spectral
bλ - bande de longueurs d'onde

1. INTRODUCTION

En physique du bâtiment, comme dans de très nombreux domaines industriels, l'ingénieur ou le concepteur se trouve confronté fréquemment à la caractérisation d'ambiances radiatives complexes comportant de nombreuses sources intégrées à des géométries particulières.

Si le calcul du flux radiatif échangé entre deux surfaces situées en visibilité directe dans un milieu transparent est un problème classique, à condition de connaître les propriétés radiatives réelles des deux corps ainsi que la géométrie du problème, dans la réalité, une scène comporte quelquefois un grand nombre de corps avec des propriétés radiatives différentes, séparés par des obstacles (un cloisonnement ou une partie des corps qui constituent la scène) et fréquemment le milieu est semi-transparent (ambiance de combustion, présence de vapeurs d'eau) et participe lui-même au transfert radiatif.

Même en se limitant au cas de milieu transparents, la résolution du transfert radiatif peut devenir extrêmement complexe et impossible à mener à bien par les méthodes analytiques classiques.

Les méthodes de résolution seront donc numériques, en essayant de reproduire les phénomènes réels par différents modèles physiques aussi proches que possible de la réalité.

Beaucoup de chercheurs ont abordé le sujet jusqu'à présent [1...13], en proposant différents modèles qui ne reproduisent que certains phénomènes ou qui font un certain compromis sur la modélisation du problème.

La plupart des modèles connus à ce jour traitent soit les transferts radiatifs dans des milieux semi-transparents dans des géométries simples, soit à travers un milieu transparent, dans une géométrie plus complexe, mais dans un domaine restreint du spectre de rayonnement.

Les programmes de synthèse d'image apparus récemment sont capables de modéliser une géométrie complexe, mais leur but initial est d'obtenir des images aussi proches que possible de la réalité ou des images virtuelles réalistes. Ces outils numériques ne traitent donc que le domaine visible du rayonnement (avec des longueurs d'onde comprises entre 0.38 et 0.78 μm), et ne s'intéressent pas aux échanges thermiques.

L'idée de base qui a guidé cette recherche [14] a donc été d'appliquer les techniques d'imagerie numérique à la résolution de problèmes de transferts radiatifs complexes au sein de cavités munies d'obstacles.

2. PROBLÉMATIQUE

Le but de notre travail a été de créer un outil de prévision et d'aide à la décision pour déterminer les champs radiatifs, qui permette de prendre en compte des cavités complexes encombrées d'obstacles et les propriétés radiatives réelles des corps.

Les problèmes à résoudre sont d'abord:

- modéliser une géométrie complexe,
- utiliser dans les calculs les propriétés radiatives réelles des corps.

La partie géométrique du rayonnement pouvant être traitée très efficacement par les techniques d'infographie, dans nos recherches nous nous sommes appuyés sur un code conçu au Laboratoire Lawrence Berkeley par G. WARD [19]. Ensuite il nous était nécessaire de résoudre plusieurs problèmes inhérents à la prise en compte des caractéristiques radiatives réelles des matériaux, à la représentation suggestive d'une scène radiative quelque soit le spectre du rayonnement traité, mais aussi au transfert des résultats et à leur exploitation.

Le modèle ainsi construit fournit un outil très efficace capable de résoudre rapidement des problèmes de transfert radiatif dans des enceintes de géométries complexes, comportant des obstacles, et quel que soit le domaine spectral d'intérêt [14...18].

De plus, nous souhaitons donner à nos résultats une présentation sous forme concise et suggestive qui permettent une prise de décision très rapide en cours d'exécution.

3. Le modèle physique

Le modèle physique, en dehors de l'émission propre, prend en compte la réflexion et la transmission bidirectionnelle, dissociées en une partie spéculaire et une autre partie diffuse (figure 1).

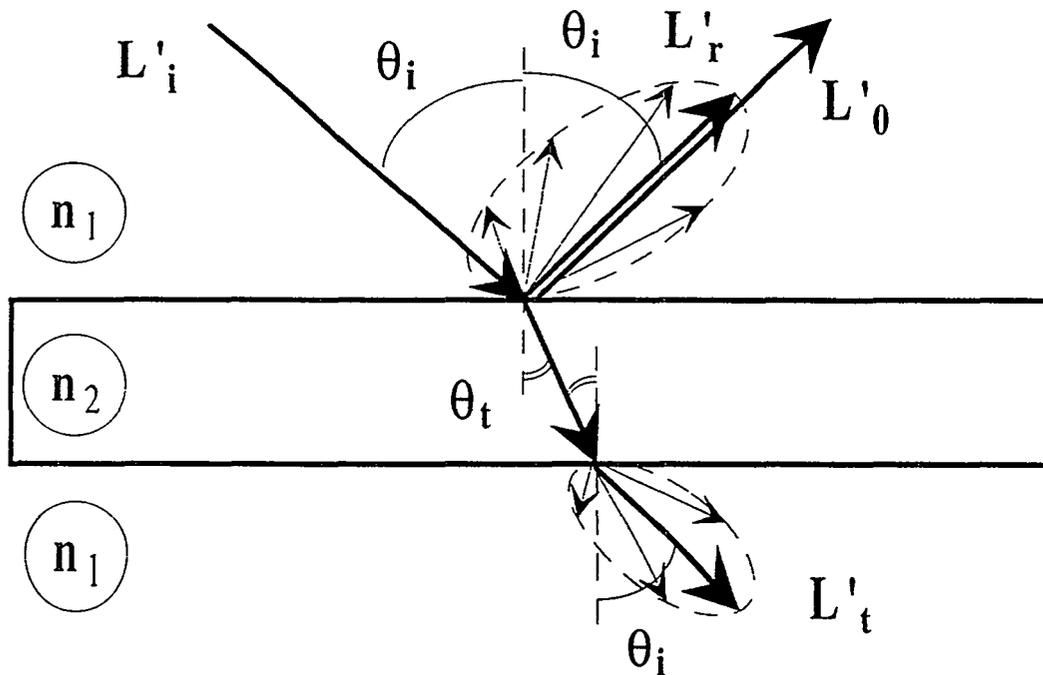


Figure 1 Le modèle utilisé

On peut considérer le problème résolu, si on connaît la luminance énergétique en chaque point du domaine géométrique d'intérêt.

Dans ce sens, en dehors de la luminance propre, on prend en compte le flux radiatif qui arrive au point de calcul par toutes les voies possibles: directe, réfléchi et transmise.

Le modèle peut être exprimé par les équations intégrales définissant la luminance issue du point P dans la direction i (équation 1).

$$L'(P, i) = \int_0^{\pi} \epsilon_{\lambda}(P, i) L_{\lambda}^0(P) d\lambda + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{\lambda}''(r, i) L_{\lambda, r}' \cos(\theta) d\omega d\lambda$$

$$+ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{\lambda}''(t, i) L_{\lambda, t}' \cos(\theta) d\omega d\lambda$$

(1)

On reconnaît dans l'équation 1 la partie émise par la surface, la partie réfléchie et la partie transmise.

La discrétisation spectrale et spatiale des équations permet d'accéder à la forme discrète (équation 2), qui est utilisée pour nos calculs:

$$L'(P, \bar{i}) = \sum_{b\lambda=1}^3 e_{b\lambda}(P, \bar{i}) L_{b\lambda}^0(P) + \sum_{b\lambda=1}^3 \left[\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \rho''_{b\lambda, jk}(\bar{x}, \bar{i}) L_{b\lambda, jk}' \cos(\theta) \right] + \sum_{b\lambda=1}^3 \left[\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \tau''_{b\lambda, jk}(\bar{t}, \bar{i}) L_{b\lambda, jk}' \cos(\theta) \right] \quad (2)$$

Le spectre global de longueurs d'onde a été partagé ici en trois bandes grises $b\lambda = 1..3$. Cette partition, si on le désire, peut être récursive, l'analyse spectrale devenant ainsi très détaillée.

L'hémisphère visible est, à son tour, partagé en $m.n$ angles solides selon une discrétisation azimutale et zénithale des angles.

4. LA MÉTHODE DE CALCUL

La méthode utilisée pour les calculs est la variante inverse du tracé de rayons, qui consiste à suivre les rayons transportant l'énergie sur leur chemin inverse depuis l'oeil de l'observateur vers la source.

Le principe de la méthode comprend 4 étapes, énoncées ici:

a. Lancer un rayon depuis l'oeil de l'observateur, à travers l'écran, vers la géométrie modélisée et déterminer le point d'intersection avec les objets de la scène.

On utilise l'écran pour stocker les résultats des calculs.

L'image qui constitue notre résultat est composée de points de l'écran, appelés *pixels*, dont les caractéristiques sont déterminées par la valeur de la luminance énergétique des points de discrétisation de notre géométrie dans la direction de l'observateur. Dans la figure 2 l'intersection du rayon tracé depuis le point de vue à travers l'écran, avec la géométrie modélisée est le point P.

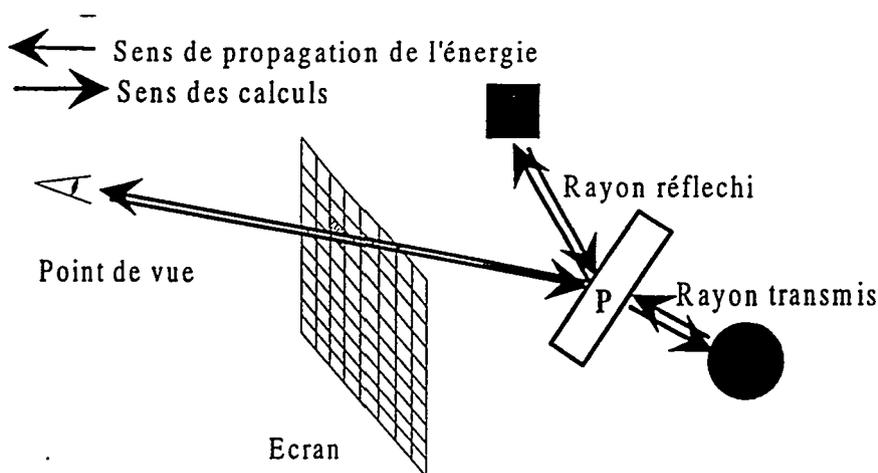


Figure 2 Génération de l'image

Pour le point déterminé:

b. Calculer la composante spéculaire directe de la luminance énergétique.

Les corps présents dans la scène, selon leur émission propre, se divisent en:

- corps à haut potentiel énergétique et
- corps à faible potentiel énergétique

Pour calculer la composante spéculaire directe on tire des rayons de manière déterministe vers ces premiers (figure 3).

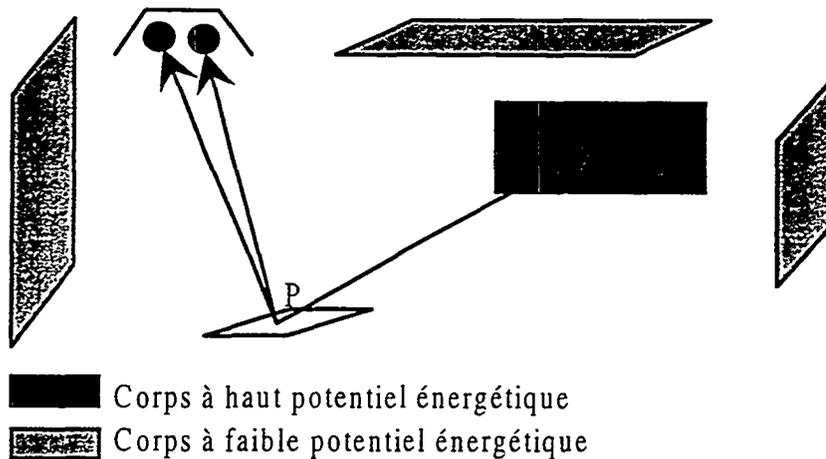


Figure 3 Calcul de la composante spéculaire directe

L'appartenance des corps à une ou l'autre des ces deux catégories est faite par l'opérateur selon le compromis: précision du résultat / vitesse de calcul qu'il doit faire. Considérer tous les corps de haut potentiel donne les résultats les plus précis mais engendre une forte pénalité pour le temps de calcul.

c. Calculer la composante spéculaire réfléchie.

Le calcul de la composante spéculaire réfléchie (figure 4) se fait de la même manière que précédemment, par un tirage déterministe, mais en tenant compte de la réflexion des surfaces.

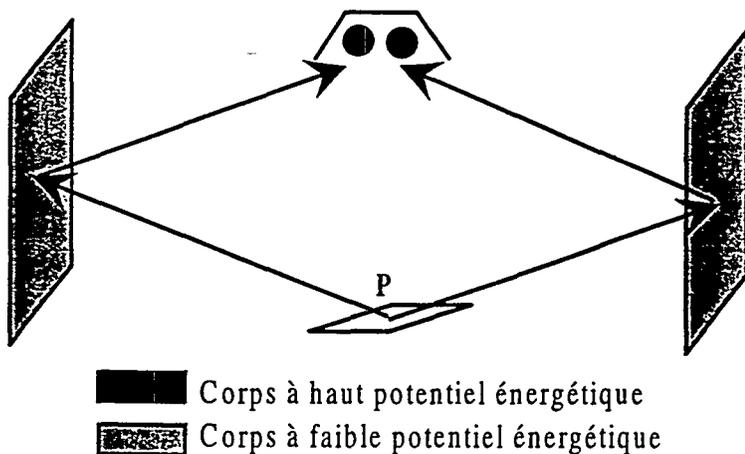


Figure 4 Calcul de la composante spéculaire réfléchie

Les rayons sont tirés depuis le point de calcul vers les corps à haut potentiel énergétique par réflexion sur les surfaces de la géométrie modélisée.

Pour calculer les interréflections cette étape est appliquée de manière récursive.

d. Calculer la composante diffuse.

La composante diffuse est obtenue par un tirage aléatoire de type Monte Carlo depuis le point P, en utilisant la méthode de l'hémisphère (figure 5). Dans cette figure on peut observer l'intérêt de deux premières étapes: dans certains cas le tirage aléatoire risque de rater une partie des corps à haut potentiel énergétique et on obtient ainsi des résultats erronés.

Au contraire, par les tirages déterministes les contributions exactes des corps à haut potentiel énergétique sont prises en compte.

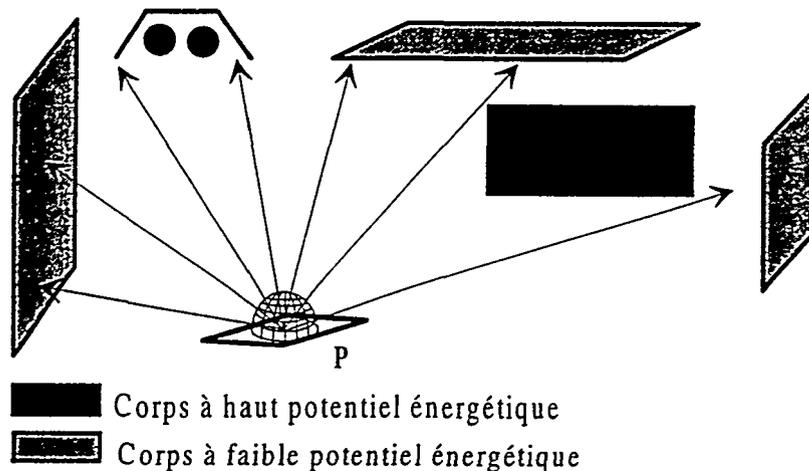


Figure 5 La méthode de l'hémisphère

Pour les tirages aléatoires la précision du résultat dépend directement du nombre de rayons lancés. L'augmentation du nombre de tirages exécutés implique une surcharge de la mémoire de l'ordinateur utilisé pour la modélisation et du temps de calcul. Pour les réduire certaines optimisations ont été faites:

Calcul de la composante diffuse par interpolation.

Puisque la composante diffuse varie plus lentement sur une surface, elle est calculée seulement en quelques points.

Pour les autres la valeur est obtenue par interpolation, en tenant compte du *gradient de translation*. Considérons en deux points A et B les calculs effectués de manière exacte, pour avoir la valeur d'un autre point P on définit un voisinage pour chacun des points A et B. Si le point P se trouve dans ce voisinage de A ou de B sa valeur est donnée par la valeur de A, respectivement B.

Si le point P se trouve dans le voisinage commun sa valeur est obtenue par interpolation. Si, par contre, le point P ne se trouve pas dans le voisinage d'une valeur exacte, il est nécessaire d'effectuer des nouveaux calculs.

Utilisation de corps virtuels

Afin de viser juste les corps à haut potentiel énergétique, pendant la phase de calcul de la composante spéculaire réfléchie, on utilise des corps virtuels (figure 6). Ils sont construits de manière symétrique par rapport aux surfaces spéculaires. Le rayon est tiré de manière déterministe vers ceux-ci, rencontre la surface réfléchissante et est dévié vers le corps réel.

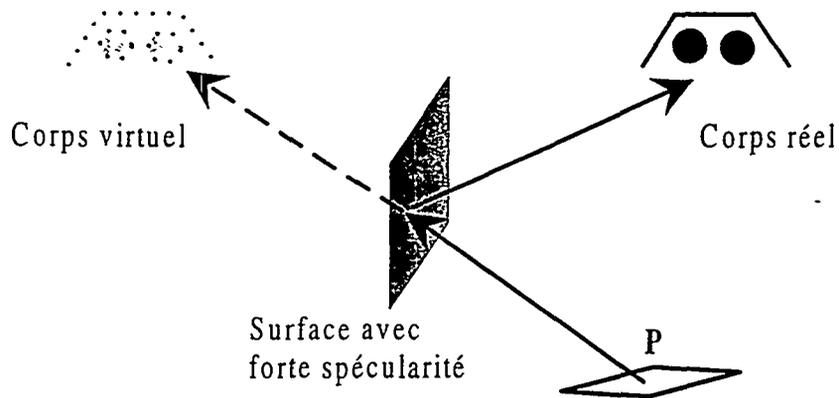


Figure 6 L'utilisation de corps virtuels

Test de profondeur

Les réflexions spéculaires peuvent être représentées par une structure arborescente (figure 7) où les lignes représentent la trajectoire du rayon et les noeuds les interceptions avec les surfaces.

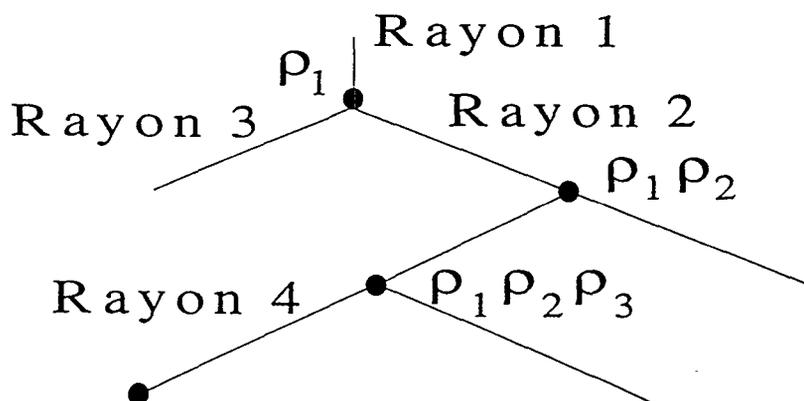


Figure 7 Le tirage récursif

La condition d'arrêt pour la récursivité du tracé spéculaire peut être exprimée :

- soit en niveau de réflexions (*profondeur de récursivité*)
- soit en poids du rayon, comme produit des coefficients de réflexion successifs des surfaces rencontrées

Les deux conditions peuvent être fixées par l'utilisateur.

5. RÉSULTATS

Les résultats des calculs peuvent être présentés sous plusieurs formes:

- à l'aide des couleurs conventionnelles
- par des lignes d'isovaleurs
- par des bandes d'isovaleurs
- par des valeurs numériques

Par exemple considérons la géométrie présentée figure 8. Dans la scène proposée: un bureau muni de meubles dont la géométrie est celle exposée, le chauffage est réalisé à l'aide de *deux cassettes rayonnantes* à 500 K.

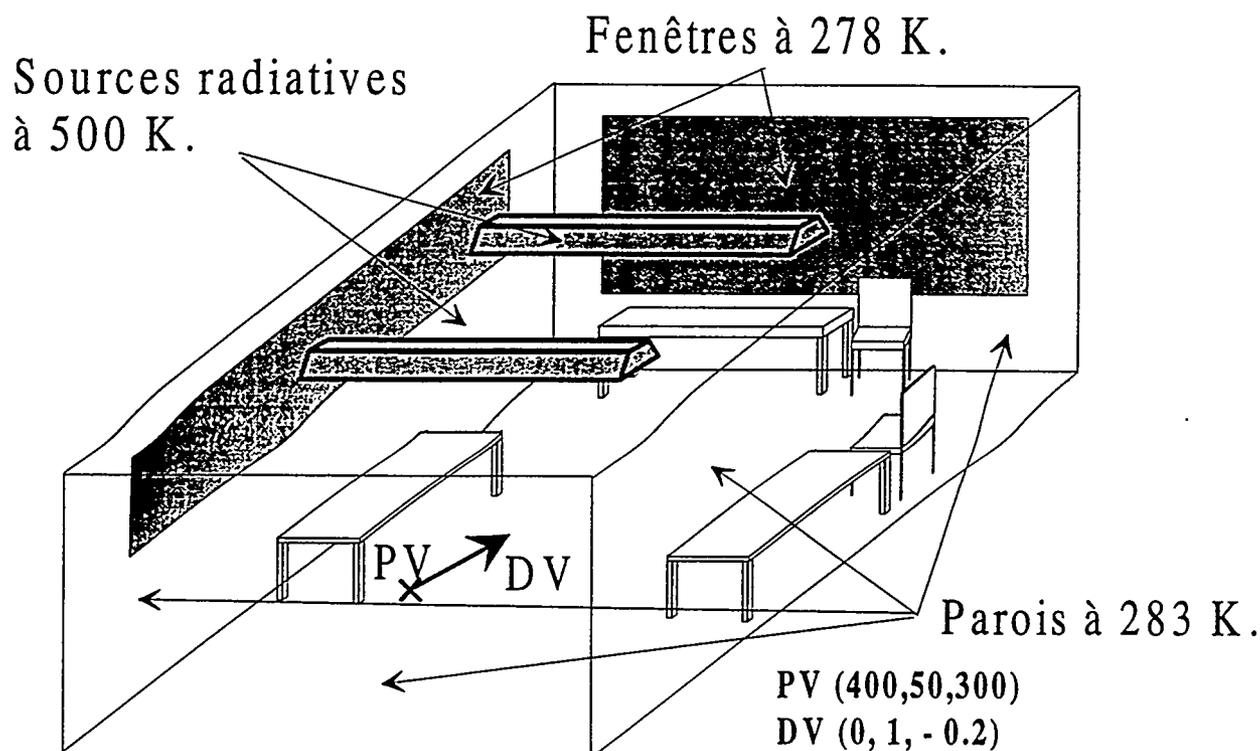


Figure 8 La géométrie utilisée

Avant de commencer les calculs il faut définir les *paramètres de vue*, dont les plus importants sont :

- le point de vue - PV, qui définit la position de l'observateur en coordonnées propres au repère de la scène
- la direction de vue - DV, qui définit la direction du regard et qui est un vecteur dans le même repère.

Comme les couleurs dans le domaine infrarouge perdent leur signification habituelle, après les calculs les résultats sont affichés selon une convention de couleurs (figure 9). Pour augmenter le potentiel de suggestion les couleurs évoluent du bleu vers le rouge avec l'augmentation de la luminance des points de la géométrie modélisée en direction de l'observateur.

On réalise facilement où se situent les valeurs maximales des luminances des surfaces par rapport à la géométrie de la pièce:

- sous les sources radiatives
- partiellement sur les plans de travail, plus proches des sources.

Le champ radiatif déterminé peut être présenté également par des lignes d'isovaleurs (figure

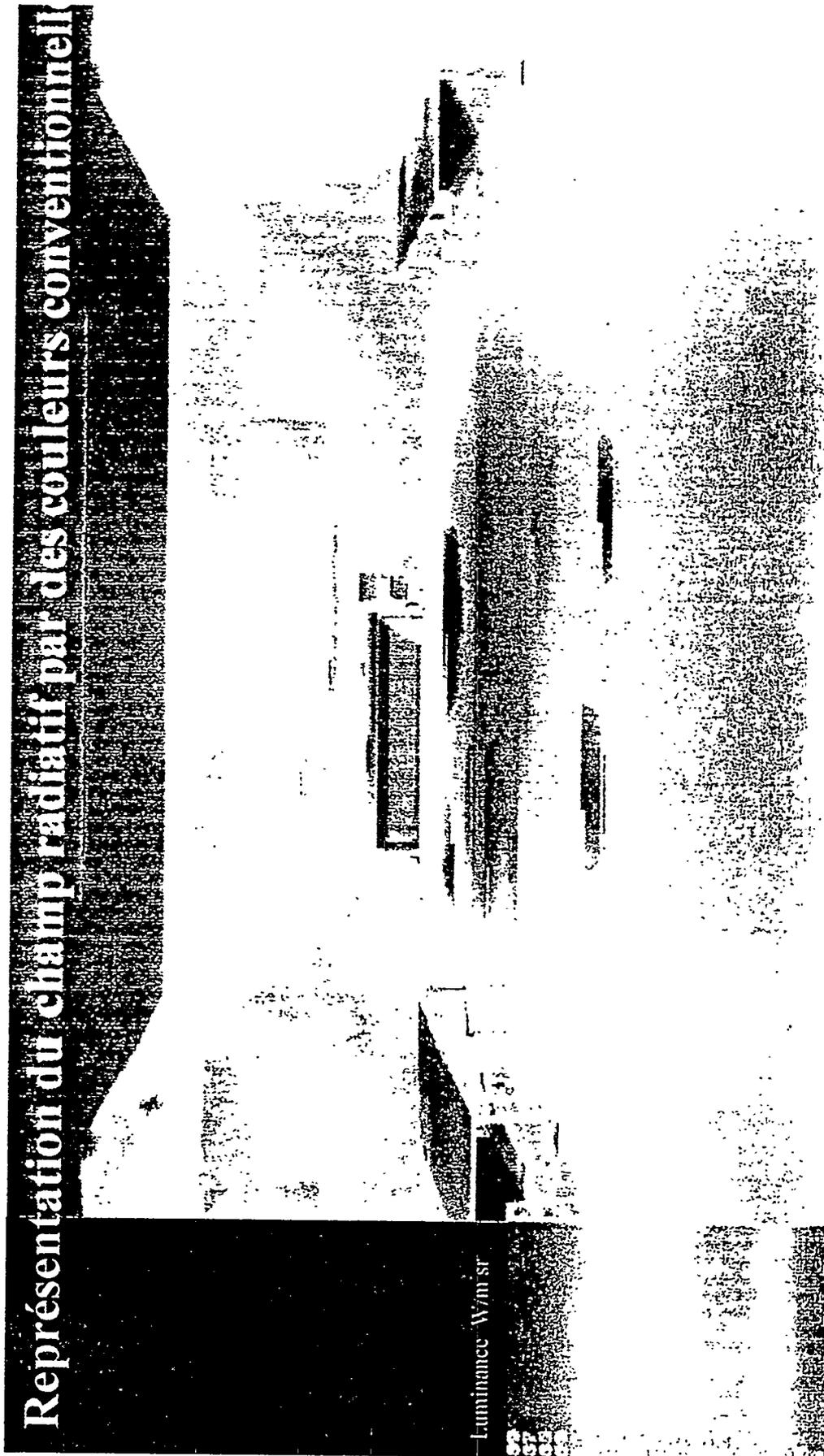


Figure 9 La luminance énergétique dans la géométrie étudiée

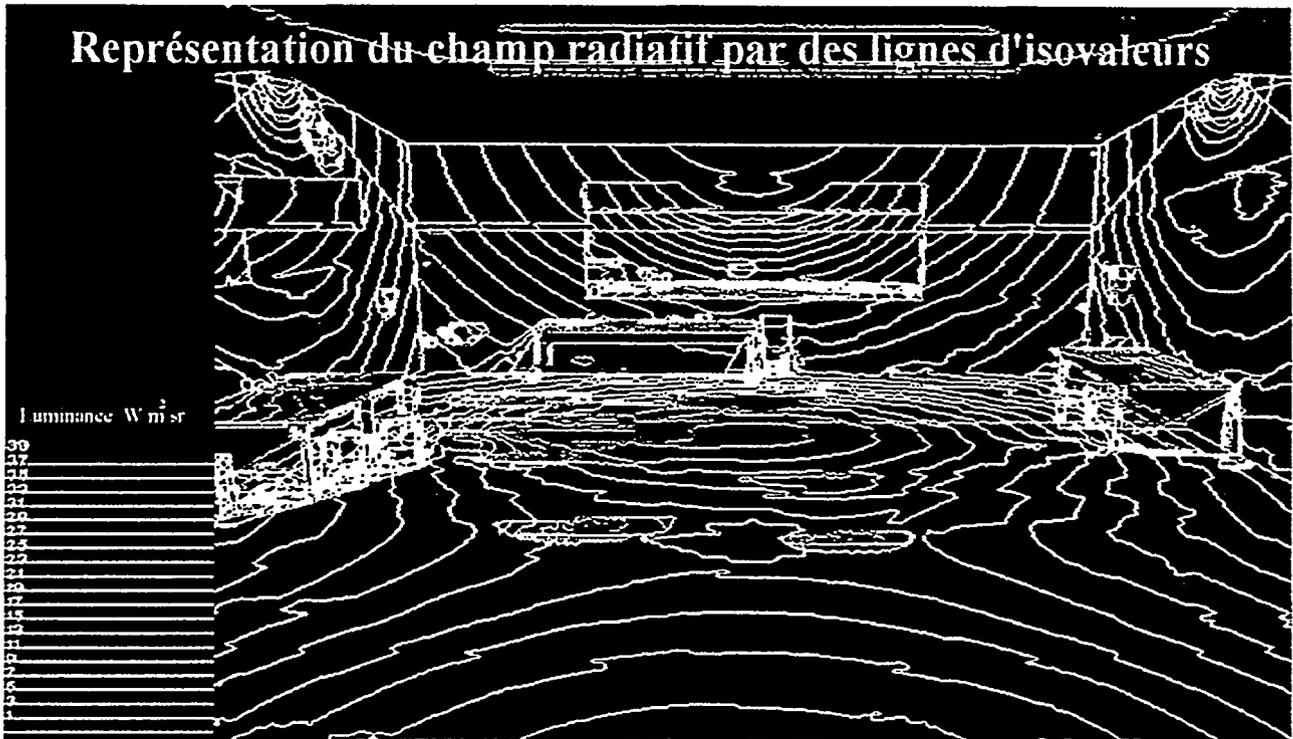


Figure 10 Les luminances sous forme de lignes d'isovaleurs

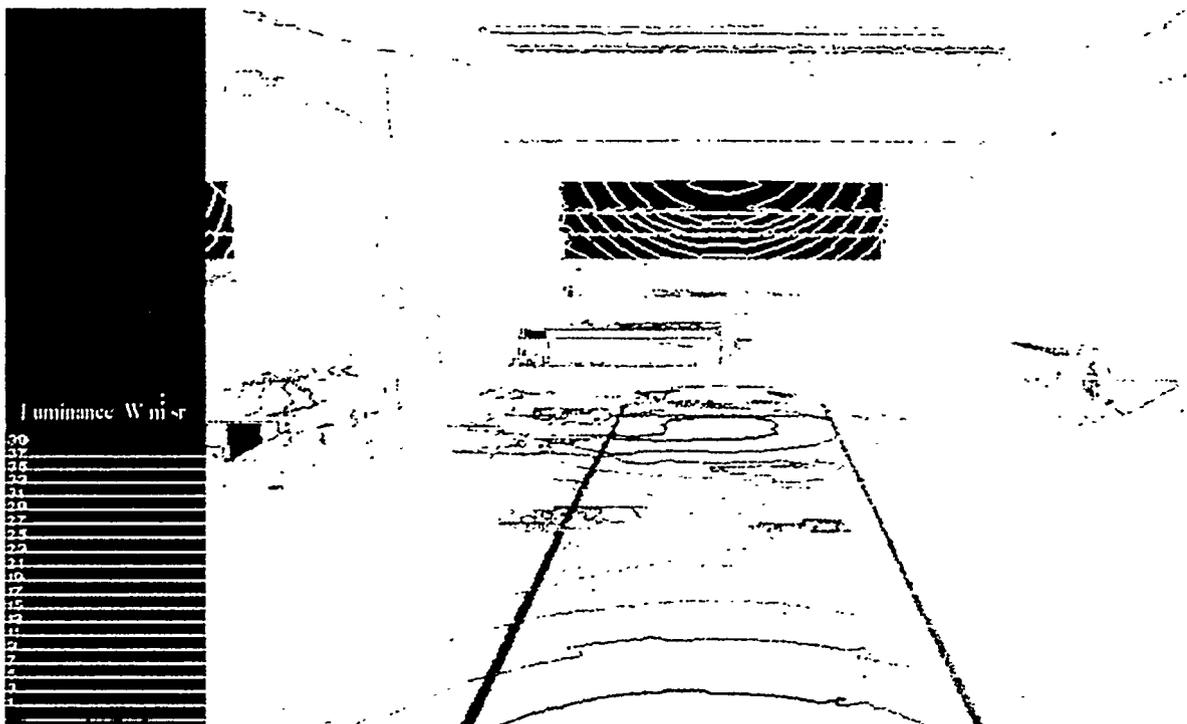


Figure 11 La superposition des résultats sur l'image visible associée.

10), ou par des bandes d'isovaleurs.

Finalement, par la superposition des lignes d'isovaleurs sur l'image visible associée (figure 11), la présentation des résultats augmente son potentiel de suggestion.

6. CARACTÉRISATION DU CONFORT DU À L'ASSIMÉTRIE DE RAYONNEMENT.

Une des applications de la simulation numérique dans le domaine de la physique du bâtiment est le calcul des indices de confort du à l'assimétrie de rayonnement.

Dans les pièces incluant des surfaces dont la température présente un fort gradient par rapport aux surfaces voisines il y a un risque d'apparition d'un inconfort du à l'assimétrie du champ radiatif.

On peut reproduire la situation réelle et complexe d'une ambiance, en prenant en compte les propriétés réelles des corps et une géométrie réaliste incluant les différents obstacles présents.

De par sa conception le code numérique que nous avons développé offre la possibilité de calculer toutes les valeurs relatives aux grandeurs radiatives, qui peuvent par la suite être intégrées dans les calculs des indices de confort.

Dans la géométrie présentée (figure 12) nous avons calculé les indices de confort dus à l'assimétrie de rayonnement verticale et horizontale selon la méthode proposée par le CSTB [15]:

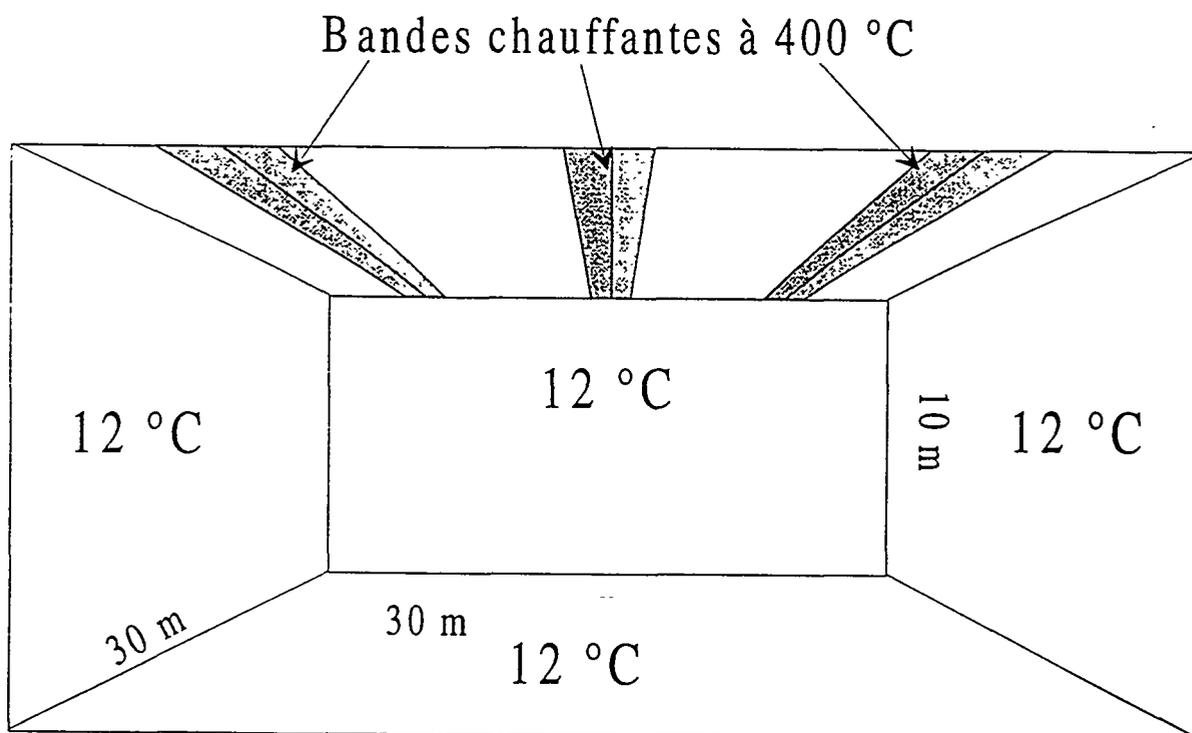


Figure 12 La géométrie étudiée pour l'étude de l'assimétrie de rayonnement

R_h - qui donne le pourcentage de personnes insatisfaites (ppd - le pourcentage de personnes qui, introduites dans la même pièce, ressent l'inconfort comme une sensation de trop froid ou de trop chaud) en fonction de la différence ΔT_{oh} des températures radiantes orientées dans le plan horizontal (axes Ox et Oy) :

$$ppd_{R_h} = 0.00089(\Delta T_{roh})^{3.738} \quad (3)$$

R_v - qui donne le ppd en fonction de la différence ΔT_{ov} des températures radiantes orientées dans le plan vertical (axe Oz) :

$$ppd_{R_v} = 0.176 (\Delta T_{rov})^{1.754} \quad (4)$$

Pour le calcul de la température radiative moyenne orientée (la température d'équilibre radiatif d'un corps noir soumis au rayonnement provenant d'un angle solide restreint de l'espace) on peut modéliser un corps noir sphérique (figure 13), le placer au point où on désire effectuer les calculs et envoyer des rayons de manière récursive dans l'angle solide considéré. Les valeurs récupérées sont les radiosités énergétiques globales.

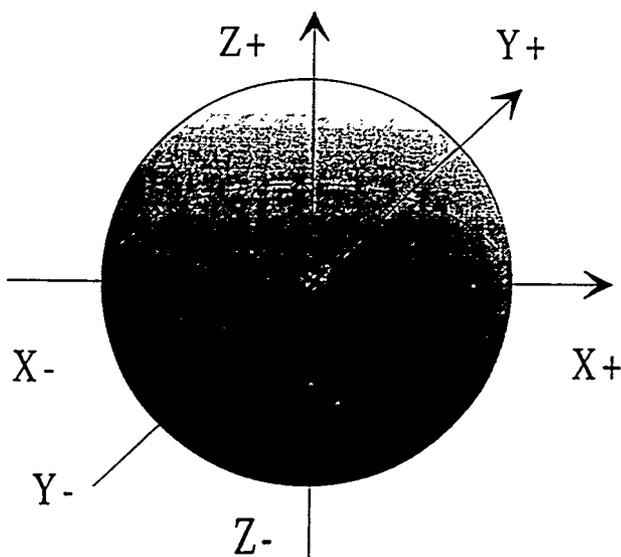


Figure 13 Le radiomètre virtuel

La température radiante orientée est, en ce cas, donnée par l'expression:

$$T_{rmo} = \sqrt[4]{\frac{\sum_{j=1}^n F_{ij} J_j}{\sigma}} \quad (5)$$

avec: j - corps situé dans le demi-espace d'intérêt. Pour le calcul du **PPD** nous avons modélisé 45 radiomètres sphériques d'émissivité $\epsilon = 1$, placés en 3 plans situés à 0.1 m, 1.2 m et 1.8 m du sol, au niveau des chevilles et de la nuque d'une personne considérée en posture assise et debout.

Dans chaque plan, les sphères sont placées dans la zone habitable, à 0.3 m du mur et à des intervalles égaux, en 5 lignes sur la profondeur et 5 colonnes sur la largeur, comme le montre le schéma, figure 14.

Les résultats, obtenus sous forme numérique, sont présentés ici sous forme graphique, à cause de son potentiel de suggestion (figures 15 et 16).

On observe un indice **PPD** plus élevé dans la zone situé en dessous des cassettes rayonnantes, du à la forte dissymétrie de rayonnement.

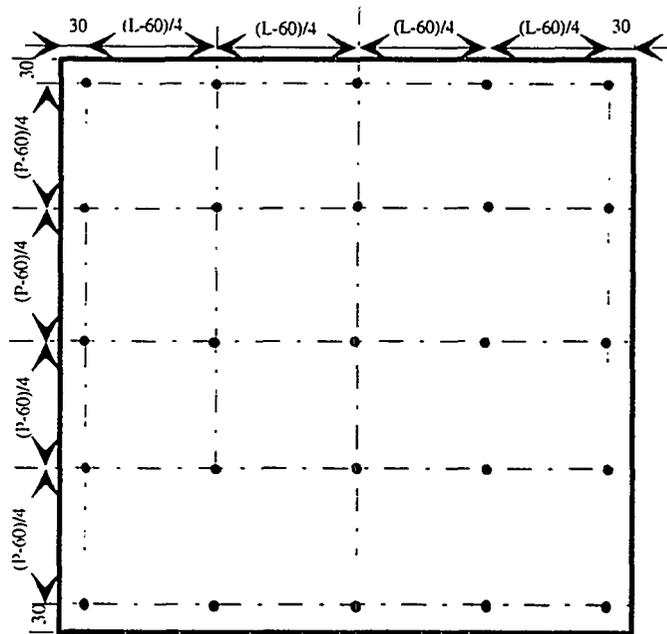


Figure 14 Le placement des radiomètres dans un plan

7. CONCLUSIONS

Le modèle ainsi construit fournit un outil très efficace capable de résoudre rapidement des problèmes de transfert radiatif dans des enceintes de géométries complexes, comportant des obstacles, et quel que soit le domaine spectral d'intérêt.

Il permet d'obtenir des résultats sous forme d'images suggestives, étant, de ce fait, un bon outil de prédiction et d'évaluation pour les ambiances radiatives dans le cadre de l'habitat ou de toute autre application de type industriel.

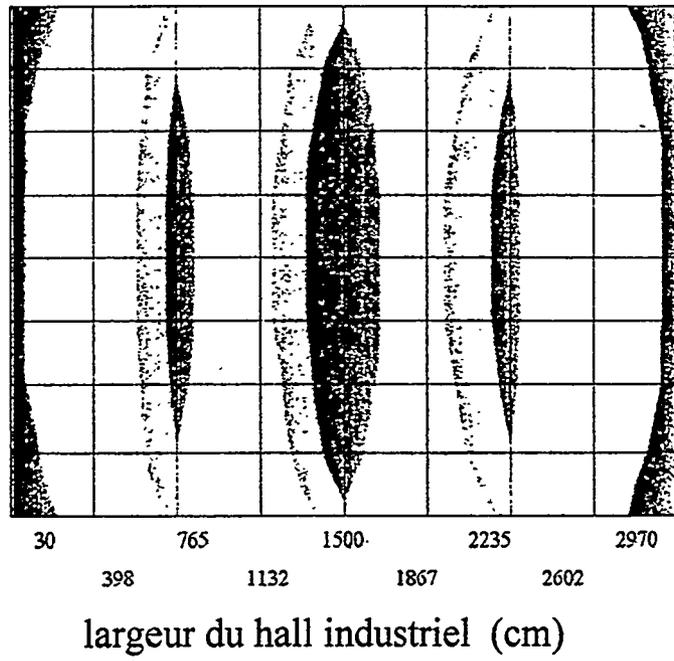
Pour l'instant nous sommes limités par les valeurs imposées des températures des parois. En perspective nous prévoyons l'extension du code par la prise en compte de la convection et de la conduction dans les parois.

Enfin, dans le cadre de notre étude nous nous sommes limités à des ambiances radiatives caractérisées par des milieux transparents (MT).

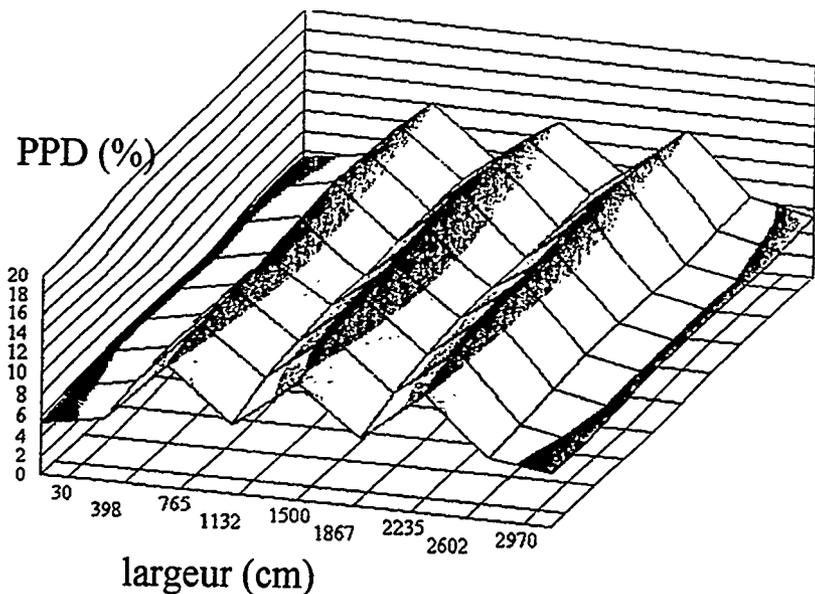
Le traitement de MST peut-être également une perspective importante qui trouve son utilité dans des applications industrielles spécifiques, comme les fours.

L'extension aux milieux semi transparents (MST) ne poserait pas de difficulté formelle, même si l'investissement et le temps de calcul deviendraient alors évidemment importants.

PPD (%) pour la vue en plan



PPD (%) pour la vue isométrique



Figures 15 et 16 Les PPD pour la géométrie étudiée

Références bibliographiques

1. ALLARD F., INARD C., ROLDAN A. **Etude comparative de différentes méthodes de modélisation des échanges radiatifs de courtes et grandes longueurs d'onde dans une cellule d'habitation** - Annales de l'I.T.B.T.P., 1986 n° 442, 60 pag.
2. AUGUSTIN J. R., SADAT H., PEUBE J. L. **Calcul du rayonnement de surface entre éléments finis: application au couplage conduction - rayonnement** - Société Française des Thermiciens, Journée d'Etudes, Paris, 25.03.1992, 11pag.
3. BOUATOUCH K., LANGUENOU E., TELLIER P. **Modèles d'éclairage globaux: théorie et mise en oeuvre** - Société Française des Thermiciens, Journée d'Etudes, Paris, 25.03.1992, 14 pag.
4. CAI W., EL-KOURY K. **Formulation de modèles d'échanges radiatifs par suivi de rayons** - Société Française des Thermiciens, Journée d'Etudes, Paris, 25.03.1992, 12 pages.
5. COHEN M., GREENBERG D. **The hemicube : a radiosity solution for complex environnements** - Computer graphics, 1985, vol. 19, pp. 31-40.
6. COHEN M., GREENBERG D., IMMEL D. BROCK P. **An efficient Radiosity Approach for Realistic Image Synthesis** - IEEE Computer Graphics and Applications, 1986, vol. 6, pp: 26-35.
7. COHEN M., CHEN S., WALLACE J., GREENBERG D. **A progressive refinement approach to fast radiosity image generation** - Computer graphics, 1988, vol 22, pp.75-84.
8. COMPAGNON R. **Outils informatiques en lumière naturelle** - Lausanne, Ecole Polytechnique Fédérale, 1993, 142 pag., Projet NEFF 435.2.
9. DAURELLE J. V., OCCELLI R., MARTIN R. **Modélisation numérique du couplage conduction-rayonnement par la méthode des éléments finis** - Société Française des Thermiciens, Journée d'Etudes, Paris, 25.03.1992, 8 pag.
10. FONTOYNONT M. **Application des calculs d'échanges radiatifs à l'éclairage** - Société Française des Thermiciens, Journée d'Etudes, Paris, 25.03.1992, 8 pag.
11. GATENBY N. **Radiosity in computer graphics: A proposed alternative to the hemicube algorithm** - Master's thesis, University of Manchester, 1991, 12 pag.
12. GORTLER S.J., SCHRODER P., COHEN M.F., HANRAHAN P. **Wavelet Radiosity** COMPUTER GRAPHICS, 1993, vol. 22, pp 221-230.
13. HANRAHAN P., SALMAN D., AUPPERLE L. **A Rapid Hierarchical Radiosity Algorithm** - Computer Graphics, 1991, vol. 25, pp. 197-206.
14. MANOLESCU M. **Modélisation des échanges radiatifs dans des cavités complexes à l'aide d'outils infographiques. Application à la qualification des ambiances radiatives** - Thèse - INSA de Lyon, CETHIL, 1994, 221 pag.

15. MANOLESCU M. **Modélisation des échanges radiatifs à l'aide d'outils d'imagerie numérique** - rapport D.E.A. I.N.S.A. de Lyon, Laboratoire Equipement de l'Habitat, septembre 1991, 80 pag.
16. MANOLESCU M. **Caractérisation et qualification des ambiances radiatives à l'aide d'outils d'infographie** - Journée de la Recherche Scientifique à l'Université de La Rochelle, juin 1994, 6 pag.
17. MANOLESCU M., SPERANDIO M., ALLARD F. **Numerical modelling of radiative heat transfer in complex cavities using infographic techniques** - EUROTHERM Seminar 36, Futuroscope, Poitiers, septembre 1994, 8 pag.
18. MANOLESCU M., SPERANDIO M., ALLARD F. **Radiative field characterization in buildings using infographic tools** - European Conference on Energy Performance and Indoor Climate in Buildings, Lyon, novembre 1994, 6 pag.
19. WARD G. J., RUBINSTEIN F. M., CLEAR R. M. **A Ray Tracing Solution for Diffuse Interreflection** - Computer Graphics, 1988, vol. 22, n° 4, pp 85-92.

SOCIETE FRANCAISE DES THERMICIENS

JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)

Présentation du code D.A.R.C. Quel avenir pour un code de calcul universitaire ?

par A. MAVROULAKIS et A. TROMBE

Laboratoire d'Etudes Thermiques et Mécaniques, INSA - GENIE CIVIL, Complexe Scientifique de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex.

Résumé

On présente les principaux procédés permettant de déterminer et de comptabiliser en termes de facteur de forme la scène vue depuis un élément émetteur et projetée sur le récepteur. Les éléments qui composent l'émetteur sont de forme triangulaire tandis que le récepteur ne fait l'objet d'aucune subdivision. La méthode (analytique) de calcul du facteur de forme d'un élément face à un polygone récepteur est brièvement présentée.

Deux configurations d'enceinte sont présentées dont la seconde comporte des facettes non convexes n'ayant subi aucune subdivision préalable. Les sommes des facteurs de forme émanant d'un émetteur donné s'écartent de l'unité de moins de 0.01. Pour chaque configuration, l'influence des obstacles est chiffrée en taux de changement des facteurs de forme individuels.

Enfin, afin d'illustrer l'intérêt de ces calculs de facteurs de forme, les auteurs présentent des résultats de simulation obtenus en collaboration avec le Laboratoire GCET de l'ENSAI de Strasbourg, pour une cavité complexe.

1. Méthode de l'ombre projetée

En dehors des considérations relatives aux facteurs de forme, cette méthode [1 et 2] vise à déterminer la vue depuis un point d'observation sur une surface donnée (réceptrice), obstruée par des objets volumiques que l'on suppose composés de facettes planes. Les ombres portées par ces dernières (*Figure 1*) forment une ou plusieurs régions d'allure polygonale lesquelles peuvent devenir très complexes même pour un nombre réduit de facettes convexes. Ainsi, trois facettes convexes suffisent à former un polygone ombragé non convexe et troué (*Figure 2*) tandis que l'ajout de facettes supplémentaires peut conduire à des situations caractérisées par des régions occultées et visibles incluses les unes dans les autres (*Figure 3*).

Nous avons choisi de décrire la formation de ces aires polygonales, à mesure que les facettes de la scène sont projetées sur le récepteur, au moyen d'un algorithme récursif permettant de détecter les polygones occultés à l'intérieur de toute nouvelle enclave visible (trou) au même titre que s'agissant du récepteur initialement visible dans son intégralité. L'algorithme s'appuie sur deux opérateurs booléens permettant d'obtenir l'intersection et l'union (éventuellement trouée) normalisées (au sens de la *Géométrie Constructive du Solide*) [3] de deux polygones non troués, éventuellement concaves et ayant les contours non auto-intersectants.

Le facteur de forme $F_{di,j}$ depuis le barycentre de l'élément émetteur - assimilé au point de visée - est obtenu comme :

$$F_{di,j} = \sum_{k=1}^{N^{\square}} F_{di-k} - \sum_{l=1}^{N^{\blacksquare}} F_{di-l} \quad (1)$$

où $k=1, \dots, N^{\square}$ sont les polygones visibles dont le premier est le récepteur j lui-même
et $l=1, \dots, N^{\blacksquare}$ occultés, formés à l'intérieur des précédents.

La conséquence immédiate de cette démarche est que des situations complexes se résument à peu de poly-

gones. A titre d'exemple, la *Figure 3* correspond à $N^{\square}=5$ et $N^{\blacksquare}=7$. Le nombre de polygones par lesquels est représentée la scène projetée est directement lié à la complexité du calcul de F_{di-j} laquelle est en $O(N^{\square}+N^{\blacksquare})$.

2. Elimination des parties cachées des facettes

2.1. Effets d'auto-occlusion

Ils sont dûs à la position relative des facettes émettrice (I) et réceptrice (J) (*Figure 4*). Les faces actives de celles-ci sont désignées par les vecteurs normaux z et w respectivement, ce qui permet d'associer aux parties mutuellement visibles des coordonnées w (pour l'émetteur) et z (pour le récepteur) positives ou nulles. Le procédé s'apparente à une coupe de polygone par une droite [4].

2.2. Recherche des facettes pouvant occulter le récepteur

Le même procédé permet de déterminer les facettes comprises dans l'intersection des demi-espaces positifs de l'émetteur et du récepteur (*Figure 5*). Parmi celles-ci, pour chaque barycentre (E, *Figure 6*) d'élément triangulaire faisant partie de la discrétisation de l'émetteur (*Figure 7*), on recherche celles qui intersectent avec le cône $(E, 2\alpha_{\max})$ enveloppant le récepteur J. Cette opération se simplifie si l'on approxime l'intersection du cône avec le plan (M) d'une facette par un triangle isocèle (QQ_1Q_2) compris dans un cône plus large et dont les deux côtés égaux sont tangents au cône $(E, 2\alpha_{\max})$. Seules les intersections des facettes avec les triangles respectifs sont projetées sur le plan (J) du récepteur.

3. Calcul de F_{di-j}

L'analogie géométrique de Nusselt permet d'exprimer F_{di-j} comme $F_{di-j}=A_p/\pi$ où A_p est la projection orthographique sur le plan de l'émetteur de la projection radiale du récepteur sur l'hémisphère unitaire (*Figure 8*). Si C représente le contour de A_p orienté dans le sens trigonométrique, on peut appliquer la formule de Green: $A_p = \oint_C x_c dy_c$. En cas de contour polygonal, la contribution de chaque arête à l'intégrale curviligne peut

être obtenue analytiquement:

- Le plan défini par le centre E de l'hémisphère et l'arête S_1S_2 forme avec la base un angle α compris dans l'intervalle $]0, \pi/2[$ (*Figure 9*). La projection radiale de S_1S_2 étant toujours un arc de cercle unitaire (H_1H_2) , elle devient arc d'ellipse (P_1P_2) en projection orthographique sur la base. Si φ_1 et φ_2 sont les angles d'excentricité des points P_1 et P_2 ($\tan\theta = \cos\alpha \tan\varphi$, θ : angle polaire), l'intégrale curviligne le long de l'arc d'ellipse s'obtient comme $I^{\circ}(\alpha, \gamma, \varphi_1, \varphi_2)$.
- $\alpha=0$: $\widehat{H_1H_2} \equiv \widehat{P_1P_2}$ = arc du cercle de base et I° est fonction des angles polaires des P_1 et P_2 .
- $\alpha=\pi/2$: P_1P_2 est segment de droite passant par le centre de l'hémisphère.

4. Résultats

4.1. Résultats de calcul de facteurs de forme

Les résultats des configurations traitées (*Figures 10 et 11*) sont portés sous les *Tableaux I et II*.

4.2. Résultats de simulation

Il s'agit d'un travail qui a été réalisé par Messieurs Dondainas et Tribois du Laboratoire GCET de l'ENSAIS de Strasbourg. Le but principal de ce travail est de proposer une nouvelle méthode de calcul des échanges radiatifs qui permette de réduire les temps de calcul tout en conservant la précision des résultats.

Sans rentrer précisément dans le détail de leur méthode, rappelons qu'ils définissent une méthode dite du changement d'échelle qui s'appuie sur l'introduction de macro-surfaces. Ces macro-surfaces sont des regroupements de cellules (ou de surfaces élémentaires) sur lesquelles s'effectuent les calculs de rayonnement de manière exacte; les résultats en terme de flux sont ensuite redistribués de manière à respecter le principe de base de conservation de l'énergie et celui de réciprocité. L'autre avantage de leur méthode est que certaines variables peuvent ne pas être constantes comme dans les méthodes de zone classiques. Ainsi, certaines quantités sont calculées comme des moyennes pondérées, alors que d'autres se rattachent à la cellule élémentaire.

Mais pour arriver à ce résultat il leur est nécessaire de connaître avec suffisamment de précision les facteurs de formes élémentaires de cavités pouvant présenter une forme géométrique complexe [5]. Le but final de leur travail étant de pouvoir étalonner leur méthode, et notamment sa précision, par rapport à d'autres méthodes de calcul.

Nous avons retenu de leur étude globale [6], celle correspondant à une cavité en forme de "L" pour laquelle ont été précisées les conditions aux limites en température et les valeurs d'émissivité totale hémisphérique (*Figure 12*). Les résultats sont présentés (*Figures 13, 14*) pour six modes de calculs différents:

- la nouvelle méthode dite du changement d'échelle, fonction des macro-surfaces, et notée T(224-14) ou T(224-56);

- la méthode exacte notée T(224-224);

- la méthode de suivi de rayons "DTRM" implantée dans Fluent et notée T(4*4) ou T(9*9) suivant le nombre de rayons lancés par facettes;

Ces résultats montrent que par rapport à la solution exacte T(224-224), les autres solutions s'éloignent plus ou moins de celle-ci suivant le degré de raffinement des calculs. Le temps pris par les calculs et la place occupée par ceux-ci sur l'ordinateur étant directement liés au degré de raffinement de la méthode utilisée.

5. Conclusion

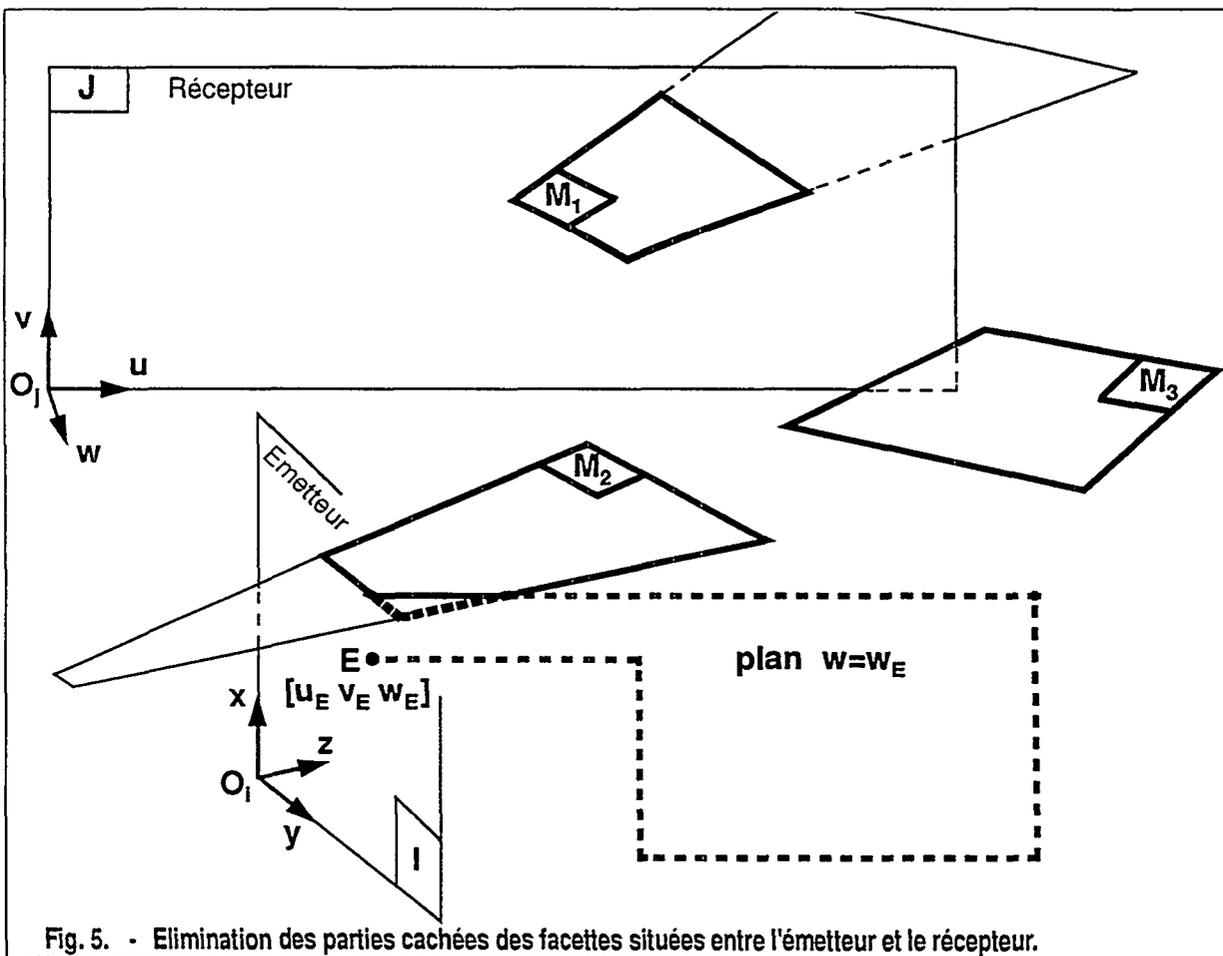
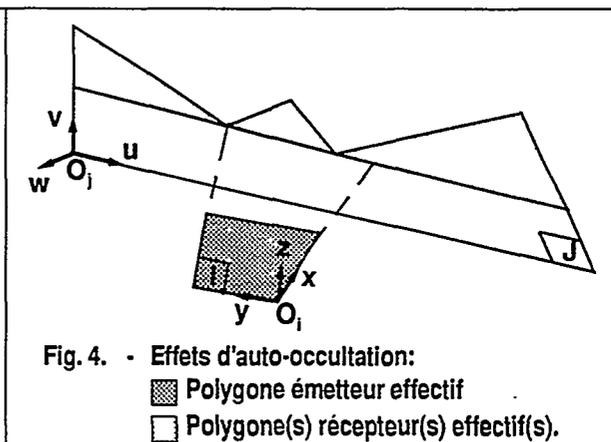
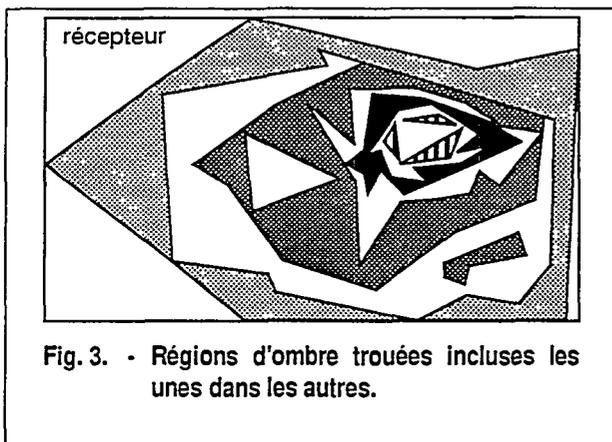
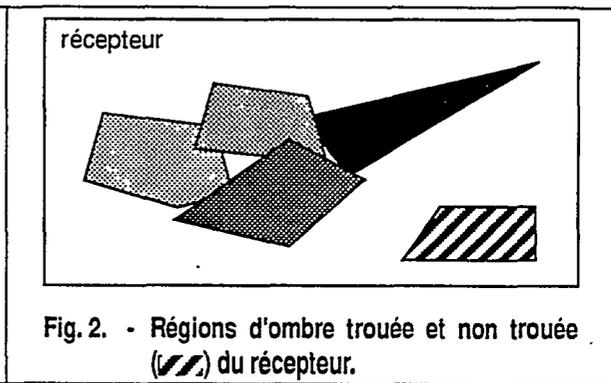
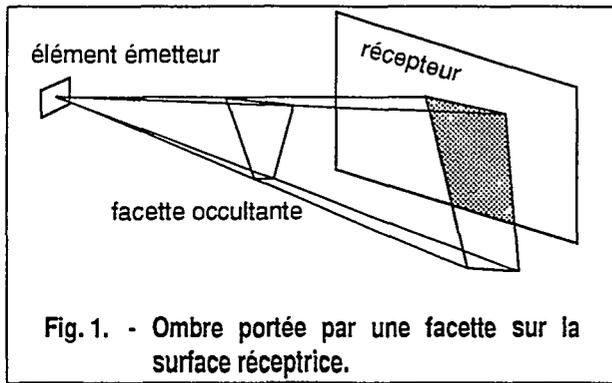
Le travail présenté montre les différentes possibilités du modèle mis au point pour la détermination de facteurs de forme de cavités complexes et éventuellement remplies d'obstacles. Il indique aussi l'intérêt que celui-ci peut présenter dans la recherche et dans la mise au point de méthodes originales comme celle dite du changement d'échelle proposée par le Laboratoire GCET de l'ENSAI de Strasbourg.

REFERENCES

- [1] WALTON (G.N.) - *Algorithms for Calculating Radiation View Factors Between Plane Convex Polygons With Obstructions*. National Bureau of Standards, report NBSIR 86-3463, 1986.
- [2] EMERY (A.F.), JOHANSSON (O.), LOBO (M.) and ABROUS (A.) - *A Comparative Study of Methods for Computing the Diffuse Radiation Viewfactors for Complex Structures*. Journal of Heat Transfer, Vol. 113, May 1991, p. 413-422.
- [3] REQUICHA (A.A.G.) and TILOVE (R.B.) - *Mathematical foundations of constructive solid geometry: General Topology of closed regular sets*. Tech. Memo. 27, Production Automation Project, Univ. of Rochester, Rochester, NY, March 1978.
- [4] PAVLIDIS (T.) - *Algorithms for Graphics and Image Processing*. Computer Science Press, 1982.
- [5] MAVROULAKIS A, SERRES L, TROMBE A - *Calcul de facteurs de forme de cavités complexes..* Septembre 1995.
- [6] DONDAINAS N, TRIBOIX A - *Comparaisons de méthodes de calcul des échanges de chaleur par rayonnement* Novembre, 1985.

Tableau I. - Facteurs de forme correspondant à la Figure 10. Temps CPU: 123 s (normalisation comprise)

		FACTEURS DE FORME AVANT NORMALISATION																
$i \setminus j$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Somme i
1		.0000000	.1913412	.0524388	.1692825	.2053666	.2174350	.0000000	.0094295	.1132411	.0094295	.0000000	.0016634	.0000000	.0004321	.0075930	.0218495	0.999502148064
2		.1301120	.0000000	.1431960	.1006317	.2009022	.2152176	.0131061	.1316084	.0194231	.0000000	.0000000	.0025273	.0194231	.0006792	.0097965	.0131542	0.999777401661
3		.0475445	.1909280	.0000000	.1677312	.2037141	.2161290	.0023456	.0085450	.0000000	.0085450	.0000000	.0015082	.1205712	.0003917	.0083531	.0229625	0.999269191068
4		.1354260	.1183903	.1479981	.0000000	.2143965	.2015942	.0126250	.0000000	.0223403	.1137764	.0000000	.0026503	.0223403	.0007991	.0071257	.0000000	0.999462162953
5		.1269539	.1826384	.1388960	.1656700	.0000000	.2074479	.0120037	.0331021	.0401864	.0331021	.0000000	.0000000	.0401864	.0000000	.0037576	.0169444	1.000888655563
6		.1232132	.1793480	.1350806	.1427959	.1901606	.0000000	.0119276	.0159654	.0221097	.0159654	.0000000	.0241449	.0221097	.0817116	.0000000	.0366210	1.001153690292
7		.0000000	.1872299	.0251317	.1533034	.1886290	.2044727	.0000000	.0000000	.1914070	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0158740	.0339263	0.999974006496
8		.0320602	.6580419	.0320438	.0000000	.1820614	.0957927	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	1.000000000000
9		.3850198	.0971154	.0000000	.0949463	.2210250	.1326582	.0669924	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0021245	0.999881597328
10		.0320602	.0000000	.0320438	.4835498	.1820614	.0957927	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.1744354	0.999943269825
11		.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	0.000000000000
12		.0113114	.0252729	.0113114	.0225273	.0000000	.2897389	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.6374406	.0027457	1.000348180815
13		.0000000	.0971154	.4521418	.0949463	.2210250	.1326582	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0021208	1.000007576070
14		.0029381	.0067920	.0029381	.0067920	.0000000	.9805397	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	1.000000000000
15		.0516324	.0979650	.0626481	.0605687	.0413332	.0000000	.0111118	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.6374406	.0000000	.0000000	.0000000	.0373962	1.000096105039
16		.0990508	.0876947	.1148124	.0000000	.1242588	.2929677	.0158323	.0000000	.0028326	.2325805	.0000000	.0018304	.0028278	.0000000	.0249308	.0000000	0.999618862239
		INFLUENCE DES OBSTACLES - CHANGEMENT RELATIF (%) DES FACTEURS DE FORME																
$i \setminus j$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1		0.00	-4.83	-54.45	-15.80	-14.92	-9.92	0.00	10.29	-6.08	10.29	0.00	10.29	0.00	10.29	-47.64	-7.86	
2		-13.71	0.00	-5.17	-51.92	-17.89	-12.03	-2.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-47.17	-63.32	
3		-58.70	-5.17	0.00	-16.69	-15.46	-10.31	-80.28	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-42.40	-3.12	
4		-10.19	-43.44	-1.99	0.00	-12.21	-17.40	-5.79	0.00	15.09	-13.55	0.00	4.87	15.09	17.65	-61.57	0.00	
5		-15.85	-10.42	-7.78	-18.59	0.00	-28.99	-15.95	9.09	9.09	9.09	0.00	0.00	9.09	0.00	-89.05	-29.69	
6		-18.33	-12.03	-10.31	-29.79	-34.91	0.00	-16.48	0.00	0.00	0.00	0.00	-68.74	0.00	0.00	0.00	-11.51	
7		0.00	-2.20	-80.28	-19.92	-22.96	-16.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-35.34	0.00	
8		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
9		-14.85	0.00	0.00	-2.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
10		0.00	0.00	0.00	-26.52	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
11		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
12		0.00	0.00	0.00	-10.86	0.00	-68.74	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
13		0.00	0.00	0.00	-2.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
14		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
15		-52.53	-47.17	-42.40	-67.33	-89.96	0.00	-35.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
16		-16.46	-63.32	-3.12	0.00	-35.55	-11.51	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-23.55	0.00	



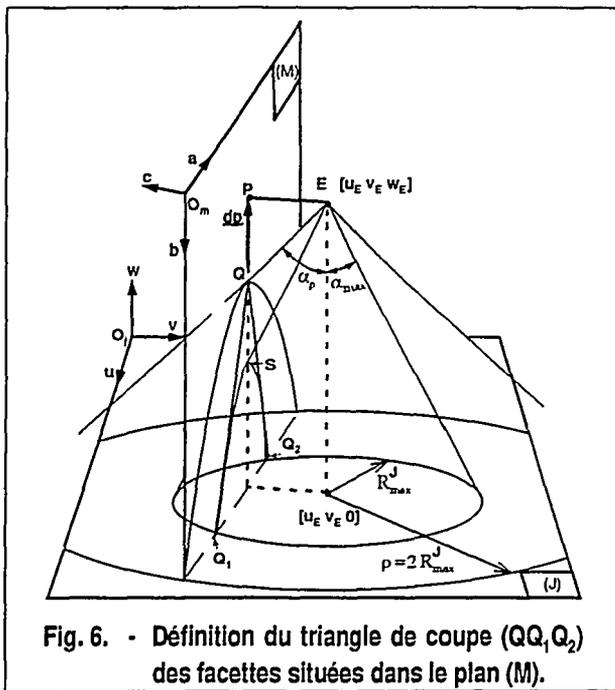


Fig. 6. - Définition du triangle de coupe (QQ₂) des facettes situées dans le plan (M).

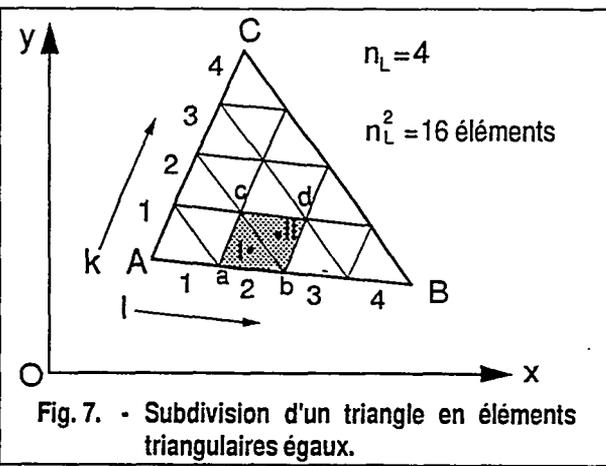


Fig. 7. - Subdivision d'un triangle en éléments triangulaires égaux.

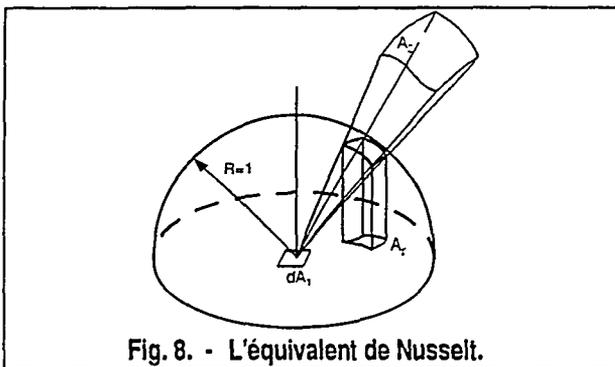


Fig. 8. - L'équivalent de Nusselt.

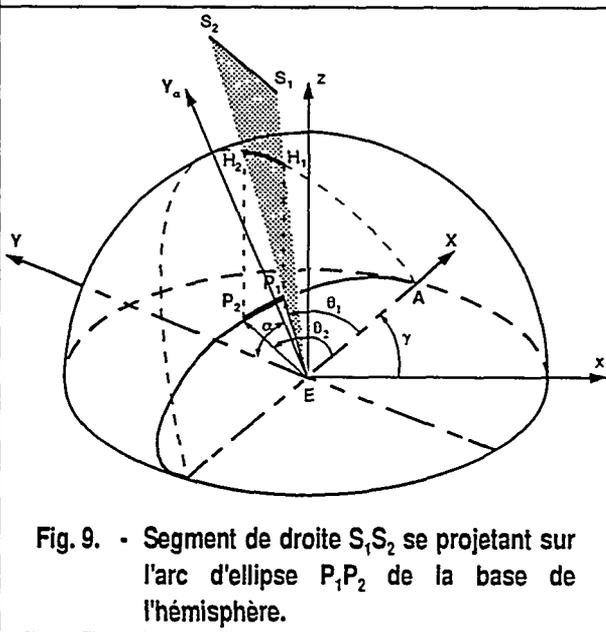


Fig. 9. - Segment de droite S₁S₂ se projetant sur l'arc d'ellipse P₁P₂ de la base de l'hémisphère.

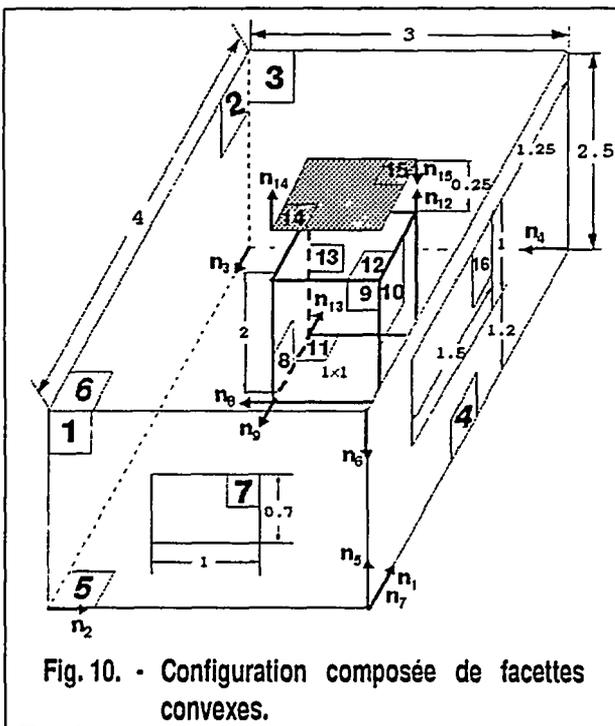


Fig. 10. - Configuration composée de facettes convexes.

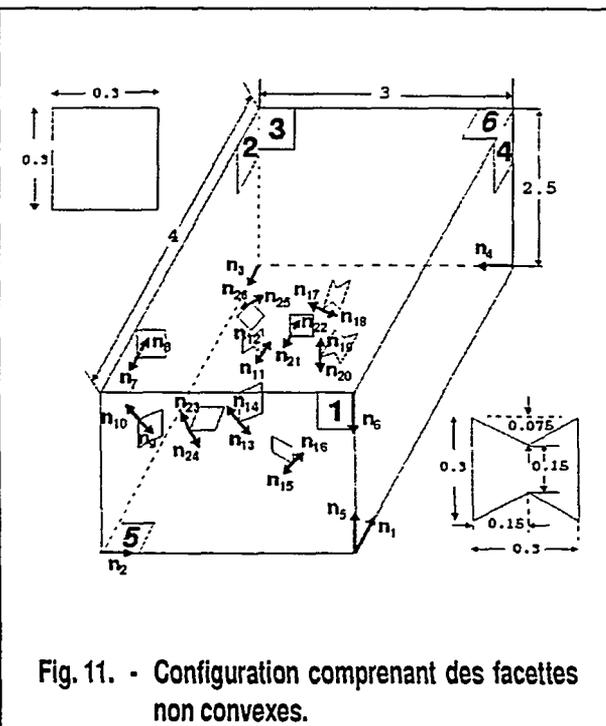


Fig. 11. - Configuration comprenant des facettes non convexes.

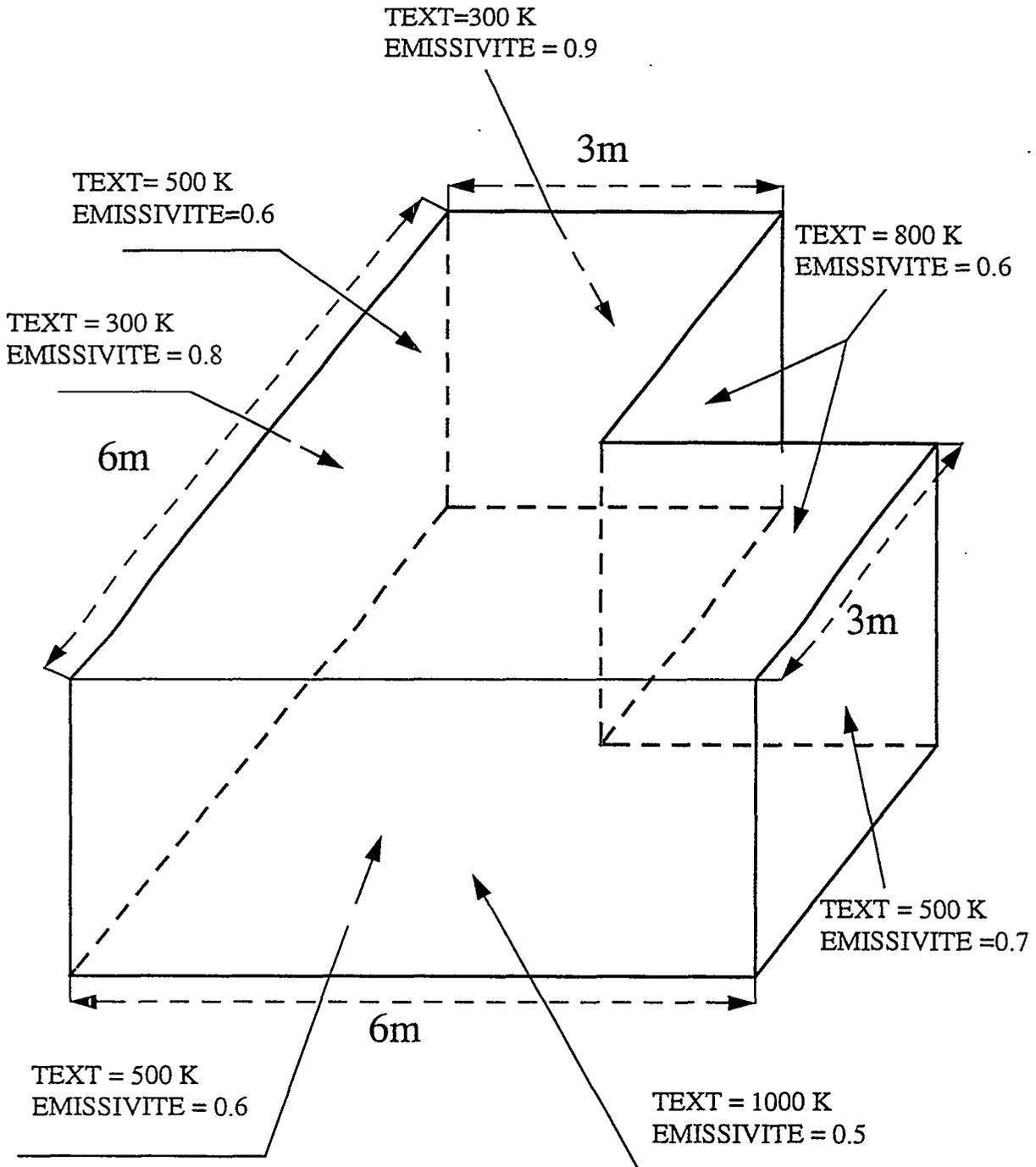


Fig 12 : Dimensions et conditions aux limites de la cavite étudiée

Contribution : N. DONDAINAS - A. TRIBOIX
 LGCET - ENSAI de STRASBOURG

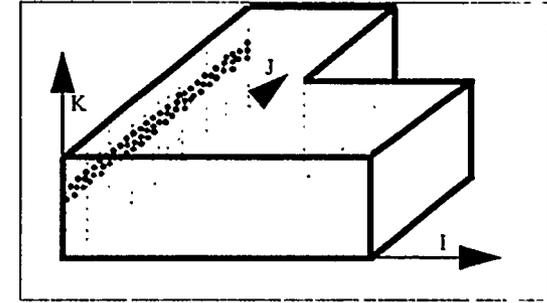
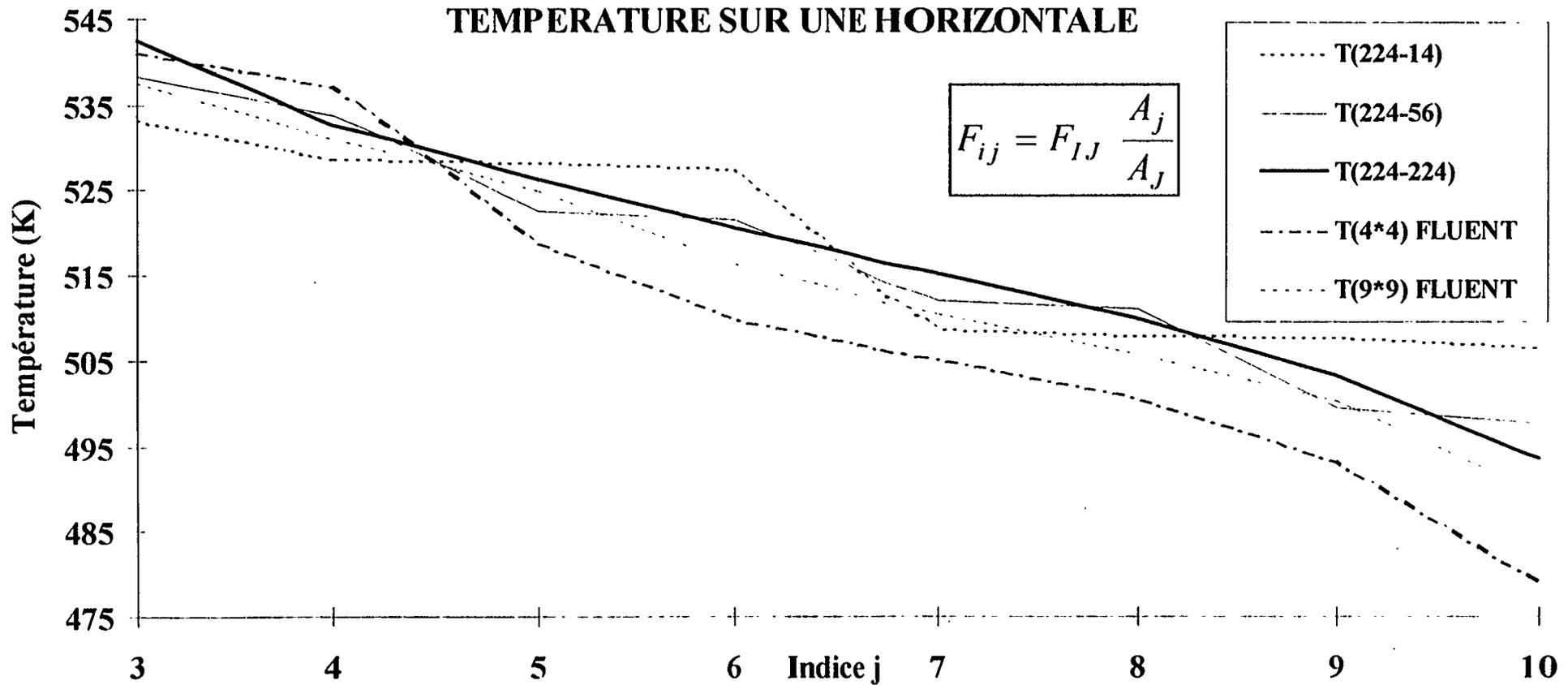


Figure 13 : Configuration L224
TEMPERATURE SUR UNE HORIZONTALE



Contribution : N. DONDAINAS - A. TRIBOIX
 LGCET - ENSAI de STRASBOURG

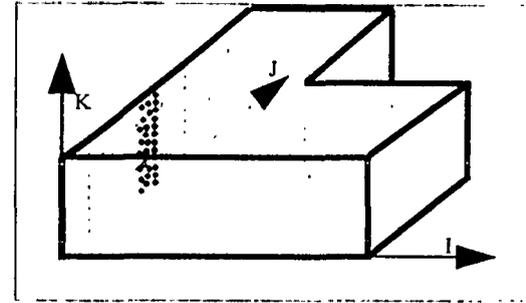
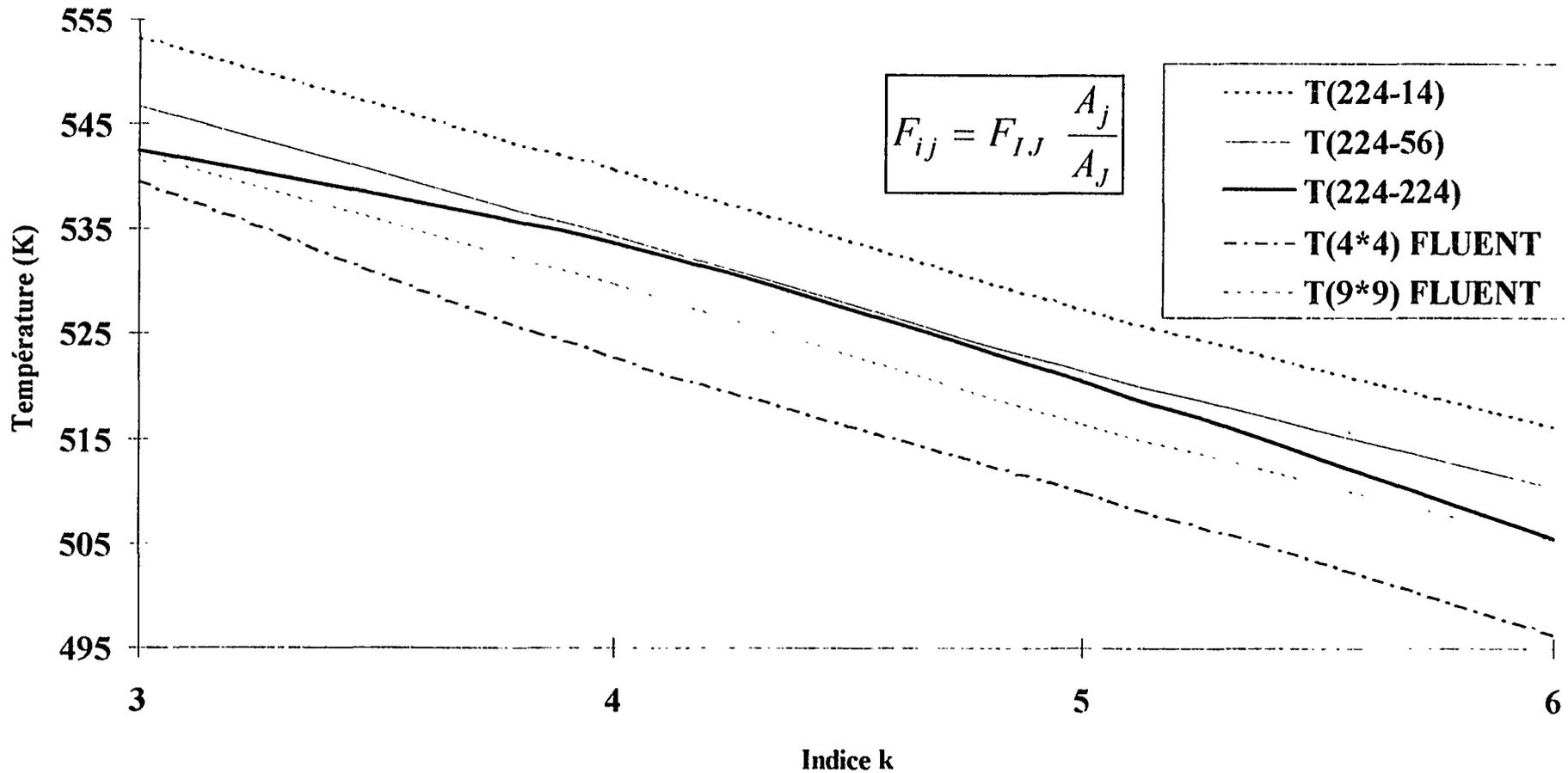
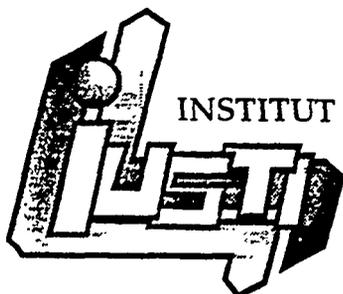


Figure 14: CONFIGURATION L224
TEMPERATURE SUR UNE VERTICALE





INSTITUT UNIVERSITAIRE DES SYSTEMES THERMIQUES INDUSTRIELS

CNRS U.M.R. 139 Université de Provence - Centre de Saint-Jérôme

Journée d'études S.F.T., Section Rayonnement
Mercredi 14 Février 1996

LES CODES DE CALCUL DE RAYONNEMENT THERMIQUE

Modélisation par éléments finis de transferts radiatifs entre surfaces mobiles

J.V. Daurelle, V. Cadene et R. Occelli

I. Introduction

Les échanges radiatifs sont difficiles à prendre en compte dans la modélisation numérique de problèmes thermiques industriels. Ils nécessitent souvent une grande taille mémoire et des temps de calculs importants. Ces difficultés sont particulièrement sensibles si l'on modélise des transferts radiatifs couplés à des transferts diffusifs par éléments finis. En effet l'architecture des éléments finis est lourde et demande beaucoup de mémoire. Si de plus les frontières où ont lieu les échanges radiatifs sont mobiles, les méthodes utilisées doivent être optimisées.

Le modèle que nous présentons traite des échanges radiatifs entre surfaces grises diffuses. Ces transferts par rayonnement sont couplés à des transferts par conduction sur les limites du domaine opaque diffusif. Les géométries traitées sont bidimensionnelles et tridimensionnelles. Deux configurations de frontières mobiles sont prises en compte. Dans la première, la frontière se déforme avec le maillage, et dans la seconde la frontière se déplace sur le maillage qui lui reste fixe. Le déplacement de matière est pris en compte par le terme de transport de l'équation de l'énergie et par une variation appropriée des propriétés thermophysiques des éléments au passage du front entre le milieu opaque et le milieu transparent.

Après une description de l'introduction des conditions aux limites radiatives dans un modèle thermique éléments finis, nous exposons les méthodes originales que nous avons utilisées pour optimiser les temps de calcul. Deux exemples d'applications illustrent les

approches utilisées. La première concerne la modélisation des échanges radiatifs entre des crayons combustibles lors d'un accident de refroidissement. Le second exemple est l'étude des transferts de chaleur dans l'entrefer d'un moteur électrique. La méthode d'identification de la surface mobile sur le maillage fixe est décrite.

II. Formulation par éléments finis des transferts radiatifs surfaces

La formulation éléments finis utilisées est de type Galerkin. Elle est largement décrite dans la littérature par exemple par Touzot et All. [1] et plus récemment par G. Comini et al. [2]. Dans notre cas le rayonnement intervient comme une condition aux limites du système éléments finis appliquée à l'équation de l'énergie. Les flux radiatifs vont créer des sollicitations aux noeuds des surfaces limitant les domaines opaques. Pour calculer ces flux les méthodes traditionnelles consistent à découper les surfaces radiatives en surfaces élémentaires isothermes. Ces flux radiatifs sont alors exprimés avec des facteurs de forme. Pour les éléments finis ce sont les éléments d'échanges qui sont considérés comme des surfaces isothermes.

L'approximation isotherme notée A.I. implique l'utilisation de maillages très fins. cette méthode sera donc peu efficace car le nombre de facteur de forme à calculer est très important. Nous avons développé une méthode plus précise qui permet une diminution significative du nombre d'éléments. Cette approche (notée I.D.) consiste à intégrer directement dans la formulation élément finis le calcul du rayonnement reçu par la surface afin de tenir compte des variations de l'intensité du rayonnement sur l'élément. Ce calcul est plus lent que l'approximation isotherme. Cette méthode n'est nécessaire que si l'élément émetteur du rayonnement est proche de l'élément récepteur.

Nous proposons donc une méthode hybride qui utilise les deux approches approximation isotherme et intégration directe. C'est une méthode rapide et précise qui est facile à implanter dans un code d'élément finis.

II.1. Introduction du rayonnement dans le système éléments finis

L'équation de conservation de l'énergie discrétisée par éléments finis s'écrit après intégration par partie sous la forme intégrale faible suivante:

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{e=1}^{N \text{ éléments}} I_e = 0 \\
 I_e &= \int_{\Omega_e} \delta T \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \bar{\nabla} \delta T \cdot (K_T \bar{\nabla} T) d\Omega_e \\
 &\quad - \int_{\Gamma_e} \delta T \phi_{\text{limite}} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \delta T \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} T d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{1}$$

Les termes de rayonnement de surfaces interviennent comme des conditions aux limites de flux imposées sur les frontières des milieux opaques du domaine. Pour tenir compte des effets de rayonnement il faut ajouter à la forme intégrale I_e le terme I_{er} .

$$I_{er} = - \int_{\Gamma_e} \delta T \phi_{er} d\Gamma_e \quad (2)$$

Le flux radiatif net Φ_{er} s'exprime sur un éléments sous la forme suivante:

$$\phi_{er} = \varepsilon_e \sigma T_e^4 - \varepsilon_e \sum_{n=1}^{N_{ev}} \left(\int_{\Gamma_n} R_n \frac{\cos\theta_e \cos\theta_n}{\pi r_{e-n}^2} d\Gamma_n \right) \quad (3)$$

Si la surface Γ_e est grise diffuse ce flux peut s'exprimer sans la sommation sur les éléments vus.

$$\phi_{er} = \frac{\varepsilon_e}{1 - \varepsilon_e} (\sigma T_e^4 - R_e) \quad (4)$$

Pour diminuer la non linéarité du système éléments finis, cette forme intégrale élémentaire I_{er} est décomposée en deux formes intégrales l'une correspondant au flux radiatif émis I_{ere} et l'autre au flux radiatif reçu I_{err} .

$$I_{er} = I_{ere} + I_{err} \quad (5)$$

Le terme relatif au rayonnement émis s'exprime en fonction de la température sous la forme:

$$I_{ere} = - \int_{\Gamma_e} E \delta T \sigma T_e^4 d\Gamma_e \quad (6)$$

Surfaces grises $E = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$

Surfaces noires $E = 1$

Le vecteur élémentaire des résidus nodaux correspondant au rayonnement émis s'exprime en fonction du vecteur des températures nodales $\{T_e\}$ et d'une matrice élémentaire du rayonnement émi $[k_{re}]$:

$$I_{ere} = \langle \delta T_e \rangle [k_{re}] \{T_e\} \quad (7)$$

En intégrant par la méthode de Gauss l'expression de $[k_{re}]$ devient :

$$[k_{re}(T_e^3)] = - \sum_{k=1}^{Pg} E \sigma \left(\sum_{i=1}^m N_i(\xi_k) T_{ei} \right)^3 j_{\xi}(\xi_k) \langle N(\xi_k) \rangle \{N(\xi_k)\} \quad (8)$$

Modélisation par éléments finis de transferts radiatifs entre surfaces mobiles

Cette matrice élémentaire est assemblée dans le système éléments finis global. L'expression du flux de chaleur radiatif est donc linéarisée car elle s'exprime au degré 3 dans cette matrice globale.

Le terme relatif au rayonnement reçu s'exprime en fonction de la radiosité sous la forme intégrale suivante:

$$I_{\text{err}} = \sum_n^{N_{\text{ev}}} \int_{\Gamma_e} \delta T \int_{\Gamma_n} R_n \frac{\cos(\theta_e) \cos(\theta_n)}{r_{e-n}^2} d\Gamma_n d\Gamma_e \quad (9)$$

Si la surface de Γ_e est supposée grise diffuse ces intégrales s'écriront sous la forme:

$$I_{\text{err}} = - \int_{\Gamma_e} \delta T_e \frac{\epsilon_e}{1 - \epsilon_e} R_e d\Gamma_e \quad (10)$$

L'introduction des fonctions d'interpolation conduit à l'expression des vecteurs élémentaires du rayonnement reçu.

$$I_{\text{err}} = \langle \delta T_e \rangle \{f_{\text{er}}\} \quad (11)$$

L'expression de ce vecteur dépend de la nature des surfaces (grise ou noires). Si les surfaces sont grises diffuses ce vecteur s'exprime simplement:

$$\{f_{\text{er}}\} = \int_{\Gamma_e} \langle \delta T_e \rangle \frac{\epsilon_e}{1 - \epsilon_e} R_e d\Gamma_e \quad (12)$$

Si par contre l'élément est noir l'expression de ce vecteur est une somme sur tous les éléments vus de vecteurs élémentaires $\{f_{\text{er}}\}_n$.

$$\begin{aligned} \{f_{\text{er}}\} &= \sum_n^{N_{\text{ev}}} \{f_{\text{er}}\}_n \\ \{f_{\text{er}}\}_n &= \int_{\Gamma_e} \langle \delta T_e \rangle \int_{\Gamma_n} R_n \frac{\cos(\theta_e) \cos(\theta_n)}{r_{e-n}^2} d\Gamma_n d\Gamma_e \end{aligned} \quad (13)$$

Pour exprimer ces vecteurs nous avons deux possibilités. L'approche classique [3] utilise les facteurs de formes pour éviter la double intégration sur les éléments Γ_e et Γ_n . La surface est alors supposée isotherme et soumise à un éclaircissement constant. La seconde option est d'intégrer par une méthode de Gauss afin de tenir compte des variations de la température et de l'éclaircissement sur les éléments.

Avec l'approximation isotherme ce vecteur s'écrit:

$$\{f_{\text{er}}\}_n = \frac{1}{S_e} (F_{e-n} R_n \text{ average}) \sum_1^{Pg} \{N_e(\xi_i)\} j_{\xi}(\xi_i) \quad (14)$$

Le temps de calcul ne dépend que du nombre de noeuds et du nombre d'éléments N_{ev} .

En intégrant par la méthode de Gauss ce vecteur devient:

$$\{f_{er}(\tau_n^+)\}_n = \sum_{l=1}^{Pg} j_e(\xi_l) \{N(\xi_l)\} \sum_{k=1}^{Pg} j_n(\xi_k) dF_{e-n}(\xi_l, \xi_k) K_0(\xi_l, \xi_k) R_n(\xi_k) \quad (15)$$

Les temps de calculs sont alors proportionnels au nombre de noeuds comme avec l'approximation isotherme mais aussi au carré du nombre de points de Gauss. Néanmoins la description du flux est plus précise surtout dans le cas où il existe une ombre entre les éléments [4]. Cette ombre est prise en compte de manière fine avec un facteur d'ombre entre chaque point de Gauss $K_0(\xi_e, \xi_n)$.

On emploie l'approximation isotherme pour la majorité des couples d'éléments. L'intégration directe n'est appliquée qu'entre les éléments les plus proches. Le choix de l'une ou l'autre des méthodes de calcul du vecteur $\{f_{er}\}_n$ est effectué suivant la fraction du flux total reçu par l'élément Γ_e issu de Γ_n [5].

$$C_{\Gamma_e-n} = \frac{\phi_{ray\ e-n}}{\sum_n \phi_{ray\ e-n}} \quad (16)$$

On impose une valeur de C_{Γ_e-n} en dessous de laquelle (13) est exprimée avec l'approximation isotherme. En général on choisit 5%.

II.2. Calcul des valeurs nodales des radiosités

Pour calculer les valeurs nodales des radiosités intervenant dans (3) et (4) nous appliquons une formulation éléments finis de type Galerkin au bilan radiatif sur chaque élément.

$$\begin{aligned} \sum_e^{Nelt} \left(\int_{\Gamma_e} \delta R_e \left(R_e - \sum_n^{Nelt} \int_{\Gamma_n} \rho_e R_n dF_{n-e} d\Gamma_n \right) d\Gamma_e \right) \\ = \sum_e^{Nelt} \left(\int_{\Gamma_e} \delta R_e \epsilon_e \sigma T_e^4 d\Gamma_e \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Ces équations conduisent à la résolution d'un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales des radiosités. La discrétisation est similaire à celle effectuée pour le

flux radiatif, elle est décrite par Reddy et Murty [6].

Pour diminuer au maximum les temps de calcul on utilise une résolution avec décomposition LU et seul le second membre du système est calculé à chaque itération. Dans le cas où les frontières évoluent il faut calculer la matrice du système et la décomposition LU à chaque modification de la géométrie du contour.

Comme pour l'expression du flux radiatif, l'équation (16) fait apparaître une intégrale double sur les éléments Γ_e et Γ_n . Dans ce système cette sommation n'apparaît que pour les surfaces grises. On peut alors utiliser l'approximation isotherme pour augmenter la rapidité des calculs ou l'intégration directe pour augmenter la précision chaque couple d'éléments (Γ_e, Γ_n) . Le choix de l'une ou l'autre des méthodes est réalisé sur le même critère que pour le flux radiatif.

II.3. Système global élément finis thermique

Si l'on néglige le terme de transport le système global obtenu est identique à ceux correspondant aux problèmes de diffusion avec des conditions aux limites classiques (convection, flux imposé, rayonnement avec un milieu extérieur à température constante). Le couplage avec des conditions de type interactions radiatives est effectué par addition des matrices $[k_{er}]$ et des vecteurs $\{f_{er}\}$ décrit au §II.1.

$$\sum_e^{N_{ele.}} \{[k_{ec}] + [k_{eh}] + [k_{er}]\} \{T\} - \sum_e^{N_{ele.}} \{\{f_{ei}\} + \{f_{eh}\} + \{f_{er}\}\} = 0 \quad (11)$$

- $[k_{eh}]$ Matrice élémentaire correspondant aux conditions aux limites de convection
- $[k_{ec}]$ Matrice élémentaire correspondant à la diffusion
- $[k_{er}]$ Matrice élémentaire correspondant au rayonnement émis
- $\{f_{eh}\}$ Vecteur élémentaire correspondant aux conditions aux limites de convection
- $\{f_{ei}\}$ Vecteur élémentaire correspondant aux conditions aux limites de flux imposé
- $\{f_{er}\}$ Vecteur élémentaire correspondant aux conditions aux limites de rayonnement reçu

L'utilisation sélective des deux méthodes va intervenir dans le calcul du vecteur $\{f_{er}\}_n$ et pour les matrices des radiosité qui est effectué avec I.D. ou IA. Le système

algébrique obtenu est fortement non-linéaire. La matrice contient des termes en T^3 et le second membre des termes en T^4 . Un solveur de type Newton-Raphson avec un schéma d'Euler implicite est utilisé.

III. Calcul de facteurs de forme

Les facteurs de forme sont utilisés dans l'approximation isotherme. La précision du calcul des facteurs de forme est importante pour l'exactitude du bilan des échanges radiatifs dans une enceinte. L'inexactitude de ce bilan entraîne une erreur sur les grandeurs recherchées (températures ou/et flux de chaleur) et peut même compromettre la convergence du système des radiosités. Le choix des méthodes que nous utilisons a été dicté par la recherche du meilleur compromis entre la vitesse et la précision mais aussi par la simplicité du calcul. En effet la prise en compte de frontières mobiles implique que le calcul des facteurs de formes soit inclus dans le code éléments finis car il est exécuté à chaque pas de temps.

III.1. Cas bidimensionnel

Le calcul des facteurs de forme dans le cas de géométries bidimensionnelles ne pose pas de problème particulier de précision ou de temps de calcul. Sans ombre c'est la méthode des cordes croisées de Hottel [7] qui est utilisée. Dans le cas où il y a des ombres entre les éléments on utilise une méthode de Gauss avec trois points par éléments.

III.2 Cas tridimensionnel

Pour les géométries tridimensionnelles le calcul des facteurs de forme reste problématique malgré le grand nombre de méthodes développées. A. F. Emery et Al. [8] les comparent sur des exemples industriels.

Nous utilisons une méthode type intégration de surfaces. Pour optimiser ce calcul nous avons développé une méthode adaptative [9]. Suivant la configuration géométrique des deux éléments le facteur de forme sera calculé soit analytiquement [10], soit par intégration de Gauss avec un nombre de points d'intégration variable.

Le nombre de points de Gauss diminue lorsque la distance entre les éléments augmente [11]. Dans le cas des éléments quadrilatères à quatre noeuds utilisés dans l'exemple § III.1, pour conserver une précision inférieure à 10^{-3} et limiter les temps de calcul, on prend :

1 point de Gauss si $r_{e-n} > 30*\sqrt{S}$

4 points de Gauss pour $30*\sqrt{S} \leq r_{e-n} \leq 10*\sqrt{S}$

9 Points de Gauss pour $r_{e-n} < 10*\sqrt{S}$.

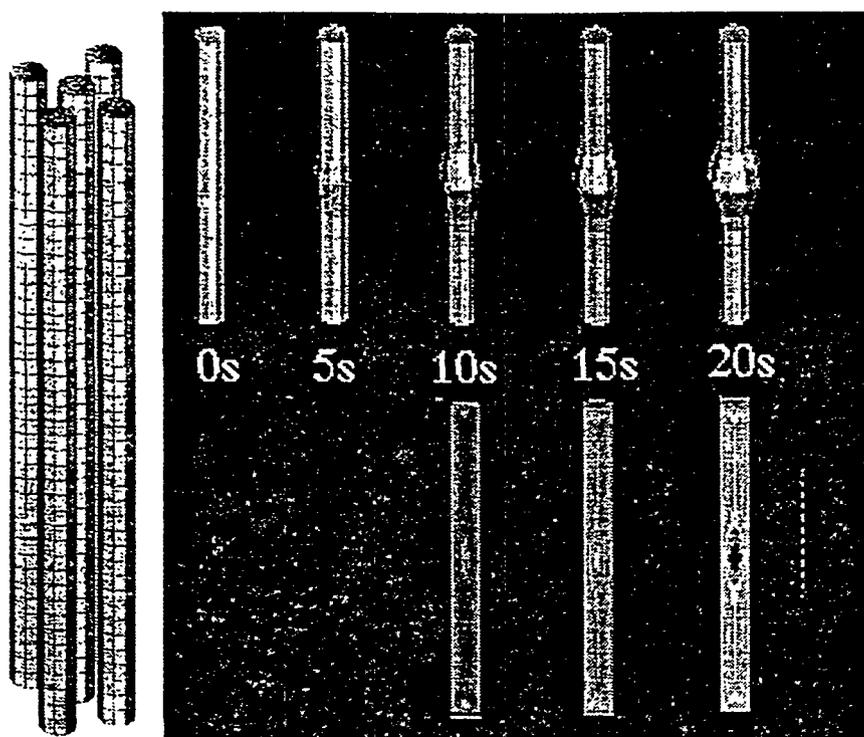
Même avec 9 points de Gauss la précision est mauvaise lorsque r_{e-n} tend vers 0. Si les éléments ont une arête commune on utilise donc une méthode d'intégration de contour [12]. Elle se révèle plus efficace dans ce cas car elle supprime le terme $1/r_{e-n}^2$.

IV. Application au problème avec frontières mobiles.

Nous avons choisi deux exemples d'applications. Le premier est tridimensionnel avec un seul milieu opaque et le second est bidimensionnel avec deux milieux l'un opaque l'autre transparent. Dans le premier cas les surfaces radiatives se déforment avec le maillage et dans le second cas les surfaces radiatives se déplacent dans le maillage.

IV.1. Modélisation des transferts radiatifs durant la déformation de crayons combustibles.

Il s'agit de la dégradation de crayons combustibles dans un coeur de réacteur nucléaire. Lors d'un accident où le refroidissement n'est plus assuré les transferts radiatifs entre les crayons sont importants. Lorsque la température augmente il arrive qu'un phénomène de "ballooning" apparaisse sur un crayon. La matière dans la partie centrale du crayon est déformée. Nous avons modélisé les échanges radiatifs entre deux crayons lorsque l'un des crayons est soumis au "ballooning". La loi de déformation est donnée à priori à chaque pas de temps. Sur la figure (page suivante) on a représenté la déformation du crayon au cours du temps et le champs de température du crayon voisin.



Cette application a montré que les méthodes employées sont efficaces. Mais le

Modélisation par éléments finis de transferts radiatifs entre surfaces mobiles

temps de calcul des parties cachées et des ombres est long. Il doit être amélioré. si l'on veut résoudre des problèmes avec des maillages de plusieurs milliers d'éléments radiatifs tout en conservant des temps de calcul acceptables.

IV.2. Modélisation des échanges radiatifs dans l'entrefer d'un moteur électrique.

Il s'agit des transferts de chaleur dans un entrefer de moteur électrique (Figure IV.2). L'air, considéré comme fluide newtonien, est confiné entre deux parois. Le rapport d'aspect (épaisseur de l'entrefer sur rayon extérieur du rotor) est inférieur à un. Dans le modèle développé, les phénomènes de thermique (conduction-rayonnement) sont couplés aux phénomènes convectifs ; l'influence de la gravité est négligée du fait des faibles dimensions par rapport aux vitesses de rotation.

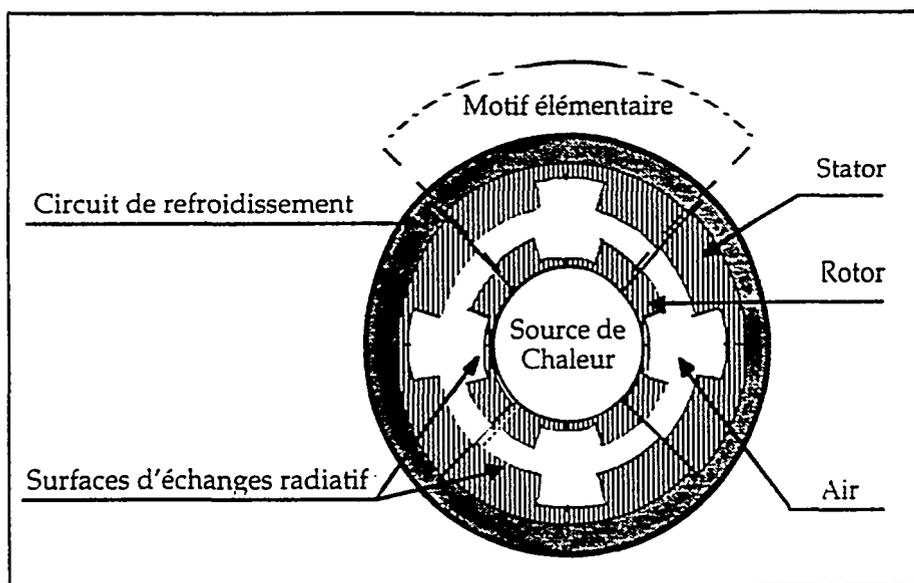


Figure IV.2. Le domaine modélisé

Le rotor fournit un apport de chaleur au fluide contenu dans l'entrefer. Cet apport est dû à l'échauffement des enroulements résistifs. Un circuit refroidissement par circulation d'eau est placé sur la partie externe du stator.

Les encoches étant réparties régulièrement sur les parois du rotor et du stator on ne modélise qu'un seul secteur angulaire. Il faut alors introduire des conditions de périodicité sur les limites radiales du motif élémentaire modélisé.

IV.2.1 Problème physique

L'étude est bidimensionnelle. Elle se limite au cas laminaire stable. Les équations de conservation régissant l'écoulement sont les équations de Navier-Stokes et l'équation de

continuité sont résolue par la méthode des éléments finis sur la partie fluide du domaine. L'équation de l'énergie régissant les transferts thermiques (1) est couplée aux équations de Navier et Stokes par le terme de transport.

IV.2.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites des équations de fluide et d'énergie sont décrites sur la figure IV.3 :

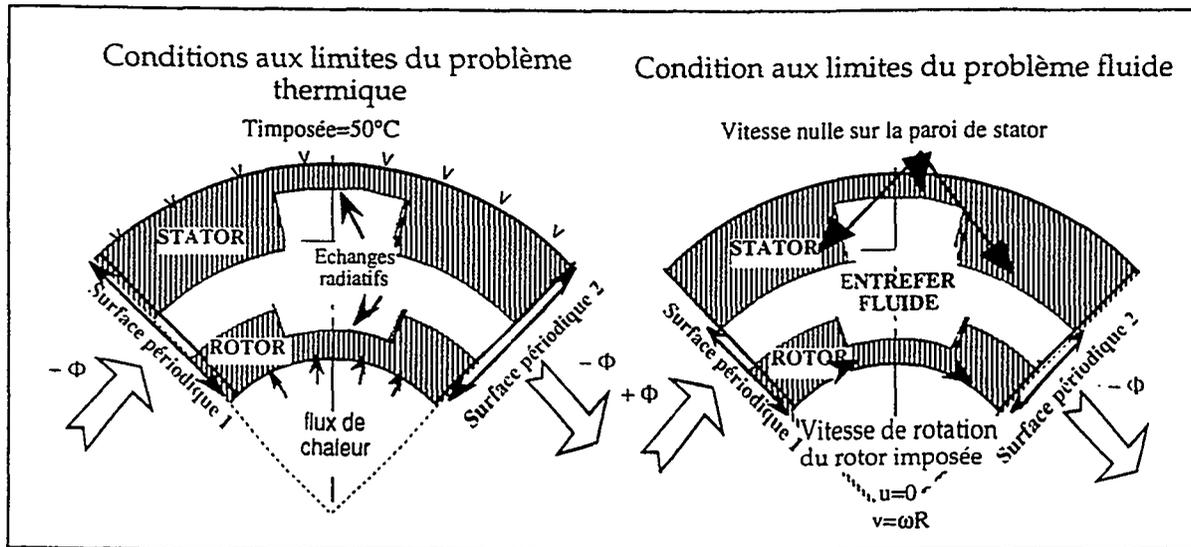


Figure IV.3 Conditions aux limites

Conditions sur les surfaces circulaires

Pour le problème de fluide, une vitesse tangentielle est imposée au rotor alors que la vitesse est nulle au stator.

Pour le problème thermique, un flux de chaleur constant est imposé au rotor. Une température de 50°C est imposée sur la partie extérieure du stator. Les parois extérieures du rotor et intérieures du stator sont grises diffuses. La condition de rayonnement est appliquée au niveau de ces deux parois, l'air étant considéré comme un fluide transparent.

Conditions aux limites périodiques sur les surfaces radiales.

Pour chaque problème, ainsi que dans le cas du rayonnement, une condition de périodicité est imposée aux extrémités latérales du modèle. La géométrie du rotor et du stator ainsi que le phénomène physique (gravité négligée) sont périodiques. En imposant des conditions aux limites périodiques, il est possible de ne modéliser qu'un secteur angulaire de l'ensemble rotor-stator. Pour ce secteur angulaire formant le motif élémentaire modélisé (Figure IV.3) les flux de masse et d'énergie sortant par la face 2 sont imposés sur la face 1 et inversement.

Pour les flux diffusifs et les flux massifs, la prise en compte de conditions périodiques ne présente pas de difficulté particulières. Il suffit de reporter les sollicitations nodales de la surface d'entrée sur la surface de sortie et inversement. En ce qui concerne les

échanges radiatifs, la prise en compte de conditions périodiques est plus complexe. L'action à distance du rayonnement implique que l'expression du flux sortant par une ouverture fait intervenir une grande partie des surfaces radiatives. De même le flux radiatif entrant par cette ouverture ne s'applique pas directement sur celle-ci, mais se répartit sur les surfaces opaques.

Il est possible de prendre en compte des conditions aux limites périodiques en rayonnement. Pour cela, il faut que l'ouverture d'entrée 1 et l'ouverture de sortie 2 ne se voient pas. Cette condition de périodicité sera alors prise en compte lors du calcul des facteurs de forme. Le motif élémentaire modélisé est dupliqué virtuellement pour tenir compte de la présence du motif précédent et du motif suivant (Figure IV.4).

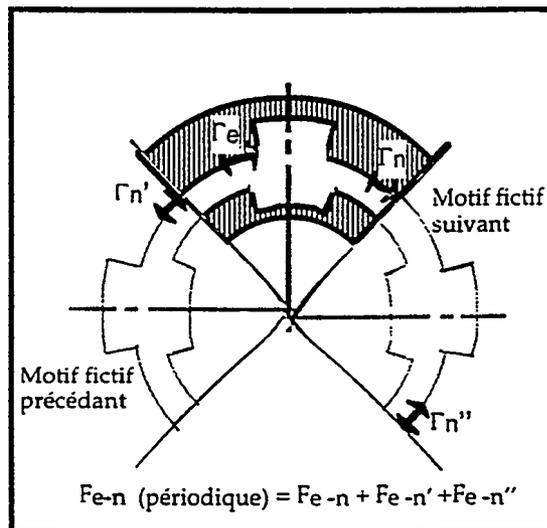


Figure IV.4: Conditions périodiques de rayonnement

Pour chaque élément vu Γ_n , on a créé deux éléments fictifs Γ_n' et Γ_n'' . Ces éléments représentant l'élément Γ_n des motifs précédent et suivant. La valeur du facteur de forme entre Γ_e et Γ_n est la somme de trois facteurs, l'un pour l'élément vu Γ_n les autres pour Γ_n' et Γ_n'' . Cette condition périodique radiative permet de réduire considérablement les temps de calculs. De plus elle ne modifie en rien l'expression du système d'éléments finis car elle ne change que le calcul des facteurs de forme.

IV.2.3. Identification du milieu fluide et de l'interface

On veut modéliser les transferts de chaleur dans un domaine composé de deux milieux, l'un entièrement transparent au rayonnement l'autre opaque. L'identification des milieux se fait par une grandeur scalaire F qui prendra la valeur zéro à l'interface des valeurs négatives dans le milieu opaque et positives dans le milieu transparent. Sur un élément ou l'interface est présente, celle-ci peut être localisée par les valeurs aux noeuds (Figure IV.5). Dans le cas où l'interface n'est pas présente, on a choisi de limiter leur valeurs à -1 et 1. Le calcul de cette fonction sort du cadre de cette exposé et ne présente pas de difficulté

particulière. La valeur de F peut être le résultat d'un calcul de mécanique des fluides comme par exemple le remplissage de moule, ou calculée en fonction du temps (rotation d'un moteur électrique).

La prise en compte des changements de milieu dans l'équation de la chaleur se fait par des propriétés thermophysiques calculées à partir de cette fonction F . Si F prend la valeur -1 les propriétés sont celles du solide opaque. Si par contre $F = 1$ les propriétés sont celles de l'air. Pour la résolution du problème fluide la prise en compte du milieu se fera en changeant les valeurs de viscosité. Si l'élément est dans le fluide sa viscosité est celle de l'air, si par contre il est solide sa viscosité est infinie.

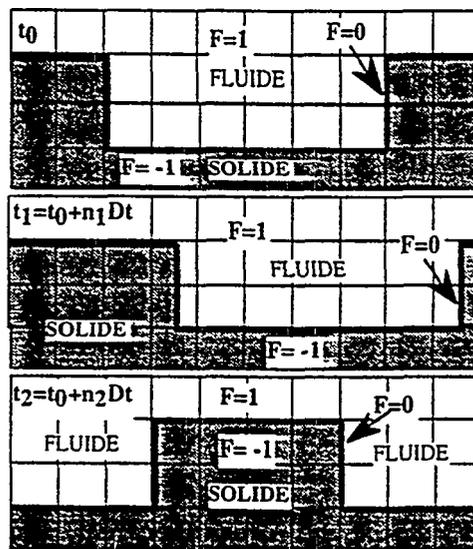


Figure IV.5 : évolution des propriétés matériau

IV.2.4. Maillage des surfaces radiatives mobiles

La surface d'échange doit être remaillée à chaque évolution et les facteurs de forme doivent être recalculés suivant la nouvelle position de l'interface ($F=0$). En ce qui concerne le remaillage deux options sont possibles.

La première consiste à reconstruire l'ensemble du domaine modélisé en remaillant les surfaces d'échanges et les volumes. Cette démarche présente l'avantage de bien identifier l'interface entre les milieux. Elle est par contre très coûteuse en mémoire ou/et en temps de calcul car il faut reconstruire un nouveau maillage sans détruire totalement l'ancien pour interpoler les valeurs nodales des inconnues entre les nouveaux et les anciens noeuds. De plus, comme la plupart des codes de calcul nous utilisons un stockage des matrices sous forme de ligne de ciel. Un remaillage du domaine implique une longue renumérotation des noeuds ou un stockage en matrice pleine.

La deuxième approche consiste à ne pas remailler le domaine mais uniquement les surfaces radiatives. Le maillage diffusif reste fixe, le changement de milieu se fait par une variation des propriétés des matériaux. L'interface n'est plus clairement définie dans le

maillage de domaine mais est diffusée sur un élément. Par contre il est nécessaire d'identifier précisément la surface radiative pour calculer les facteurs de forme.

L'avantage de cette approche est que seules les surfaces d'échanges sont remaillées. La seule opération d'interpolation est effectuée pour distribuer les sollicitations de flux radiatif sur les noeuds du maillage fixe diffusif. Les flux radiatifs sont pris en compte comme des source de chaleurs interne. Bien que moins précise que la méthode du remaillage total cette approche est économe en mémoire et en temps de calcul. De plus elle s'adapte bien à une évolution de code existant. C'est donc cette voie que nous avons choisie.

Le maillage radiatif est construit en suivant les valeurs nulles de la fonction F. Pour accélérer les calculs on peut approximer la position de la surface radiative aux noeuds les plus proches de l'interface (Figure IV.6).

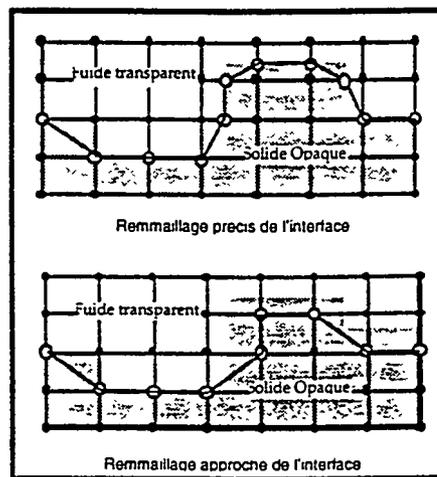
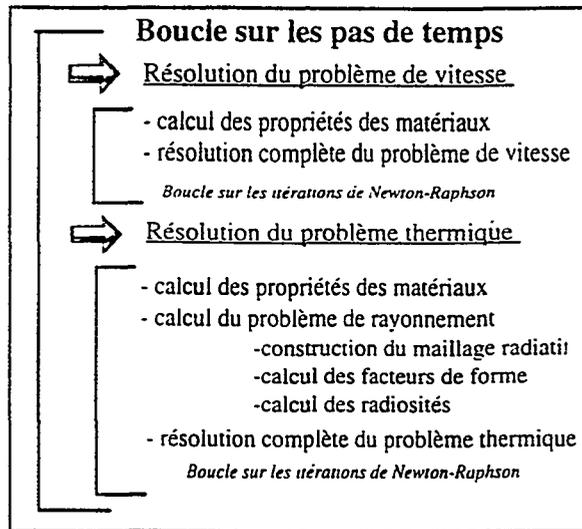


Figure IV.6. Maillage de l'interface radiative

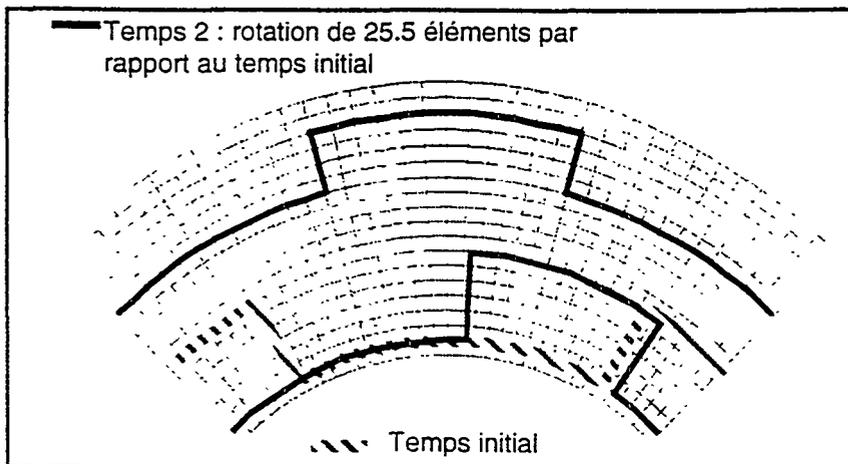
IV.2.5 Algorithme de résolution

Les problèmes de vitesse et de température sont résolus séquentiellement en utilisant une méthode de Newton-Raphson et un schéma temporel d'Euler implicite en suivant l'algorithme suivant :



IV.2.6. Exemple de résultats

Dans l'exemple présenté le fluide est de l'air. Rotor et Stator sont en acier. La vitesse de rotation est de 0.2 Rad/s. Le flux de chaleur rapporté au rayon mini du rotor est de 100 W/m^2 . Le fluide de refroidissement est supposé maintenir la face extérieure du stator à 50°C . On présente les résultats obtenus pour deux positions du rotor.



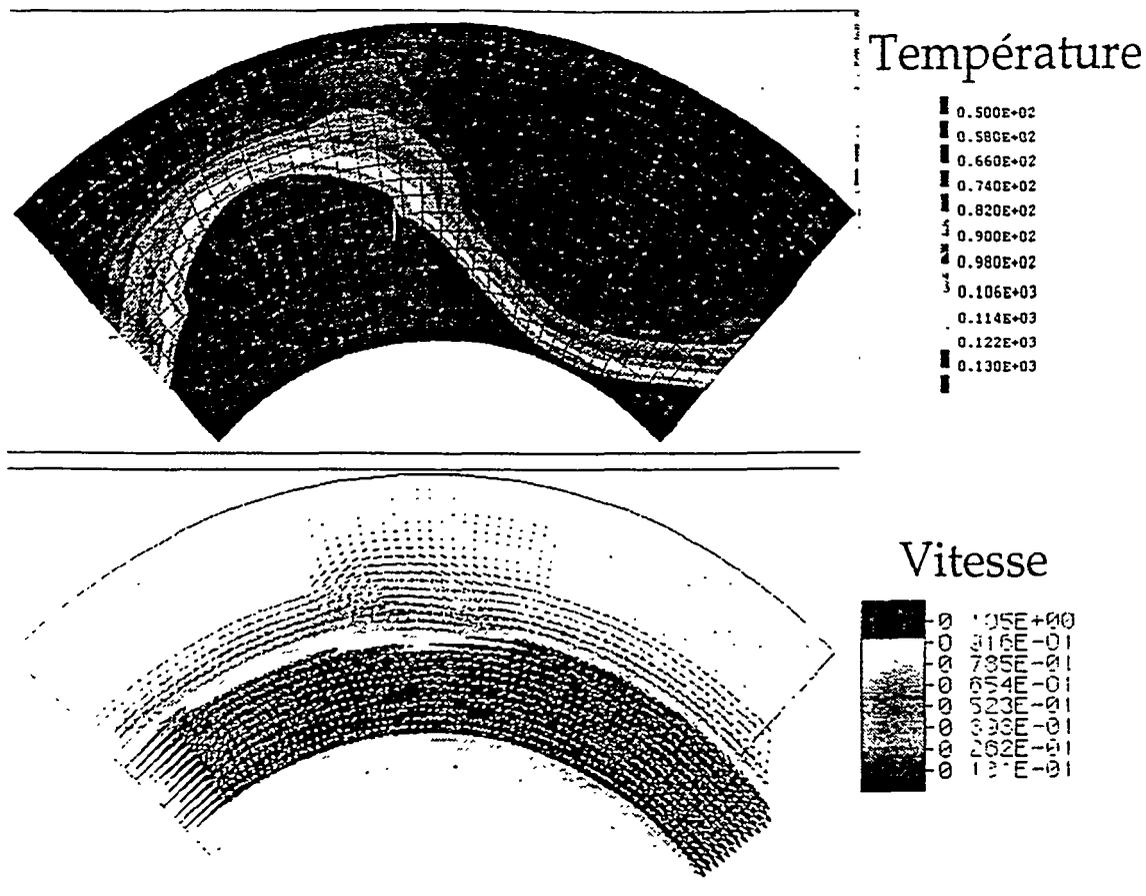
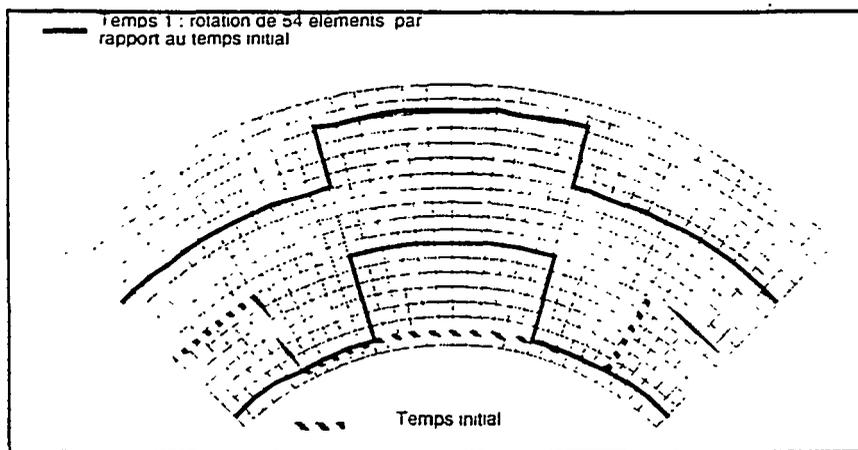


Figure IV.7. résultats pour une des positions du rotor.



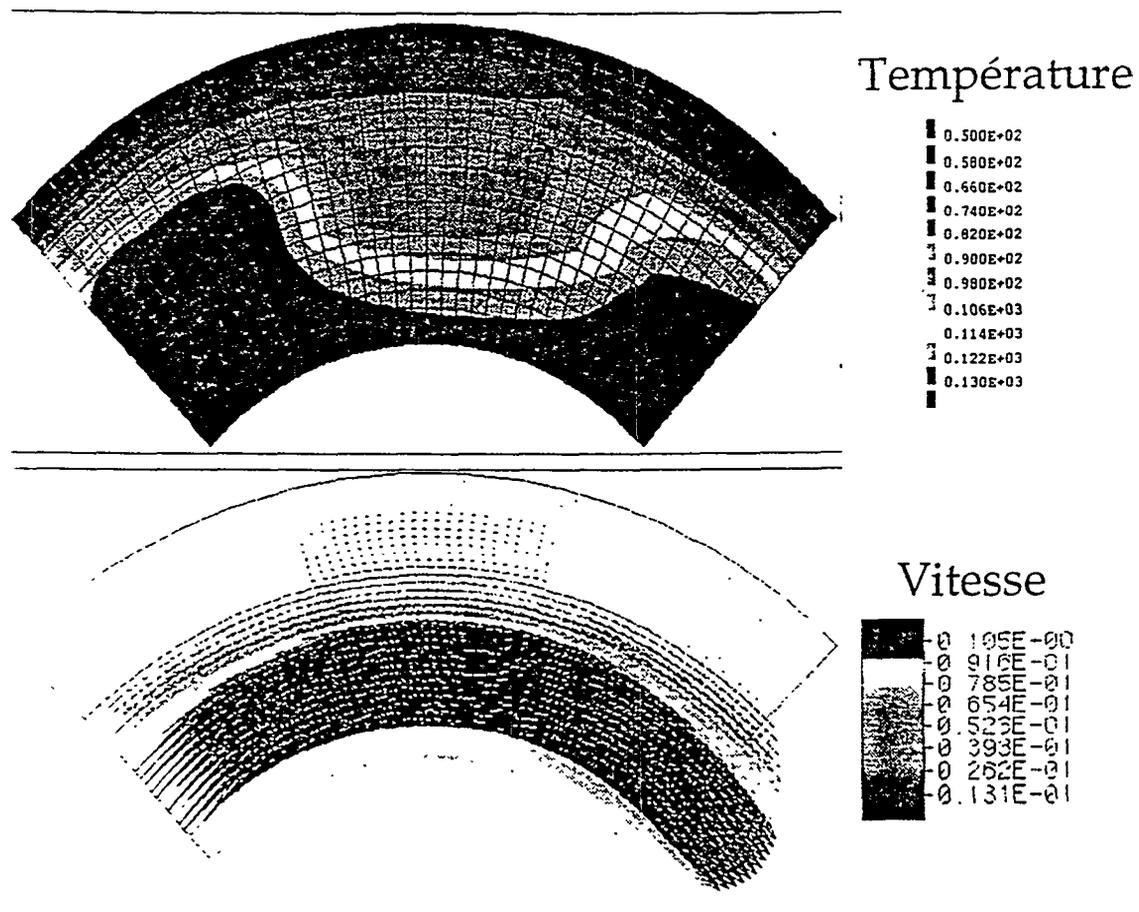


Figure IV.8. résultats pour une deuxième position du rotor.

V. Conclusion

Nous avons développé un modèle éléments finis des transferts radiatifs entre surfaces grises diffuses couplés aux transferts diffusifs. Les méthodes utilisées pour la discrétisation éléments finis et pour le calcul des facteurs de forme ont pour but d'adapter l'effort de calcul en fonction de la précision requise. Ces approches conduisent à un modèle éléments finis suffisamment rapide pour traiter les problèmes à surface mobile. Les géométries tridimensionnelles sont néanmoins limitées par le calcul des vis à vis et des ombres.

L'évolution de surfaces et de milieux différents sur un maillage fixe offre un large champ d'applications industrielles. Le problème du transfert de chaleur dans l'entrefer d'un moteur électrique a montré que cette approche est efficace.

Cette approche est bien adaptée pour traiter les problèmes tridimensionnels où le remaillage total est particulièrement coûteux en mémoire et en temps de calcul. L'évolution de fronts mobiles dans un maillage tridimensionnel constitue la prochaine étape de notre travail.

Références

- [1] G. Touzot, G Dhatt. Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis. Maloine, Editeur, Paris, 1981
- [2] Comini G., Del Giudice S. and Nomino C. Finite Element Analysis in Heat Transfer. Basic Formulation and Linear Problem. Taylor and Francis.1994
- [3] M. Lobo and A. F. Emery, Use of the Discrete Maximum Principle in Finite-Element Analysis of Combined Conduction and Radiation in Nonparticipating Media, Num. Heat Transfer : Part B, vol. 27.N°4,pp447, 1995
- [4] J.V. Daurelle, Modélisation du Couplage Rayonnement Conduction par la Méthode des Eléments Finis, Thèse de Doctorat, Univ. d'Aix-Marseille I, Février 1992
- [5] J.V. Daurelle, R. Occelli, R. Martin, Finite Element Modeling of Radiation Heat Transfer Coupled with Conduction in an Adaptive Method, Num. Heat Transfer, Part B, vol. 25, 1994.
- [6] J. N. Reddy, V. D. Murty, Finite Element Solution Of Integral Equations Arising In Radiative Heat Transfer and Laminar Boundary Layer Theory. Numerical Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corp, 1978, vol 1, pp 389-401
- [7] R. Siegel, J. R. Howell, Thermal Radiation Heat Transfer.D. Heiberg, C. Flint. E. William, Hemisphere Publishing Corporation. 1981. second Edition ISBN0-89116-506-1
- [8] A. F. Emery, O. Johanson. M. Lobo. A. Abrous A comparative Study of Methods for Computing the Diffuse Radiation Viewfactors for Complex Structures, Trans. of the ASME: Journal of Heat Transfer. 1991, MAY, vol 113, pp 413-422
- [9] J.V. Daurelle, Calcul de Facteurs de Forme et Modélisation par Eléments Finis de Transferts Radiatifs entre Surfaces Mobiles. Modélisation Numérique en Thermique. Ecole d'Eté GUT CET de Porquerolles, Juillet 94.
- [10] J. R. Howell A Catalog of Radiation Configuration Factors. Roger H. Klas. Whitlock Press, Mc Graw-Hill, USA, 1982.ISBN 0-07-030606
- [11] T. J. Chung, J. Y. Kim. Radiation View Factors by Finite Elements. Trans. of the ASME: Journal of Heat Transfer, 1982, November, vol 104, pp
- [12] A. B. Shapiro. Computer Implementation, Accuracy, and Timing of Radiation View Factor Algorithms. Trans. of the ASME: Journal of Heat Transfer ASME. 1985, AUGUST, vol 407, pp 730-732

SOCIETE FRANCAISE DES THERMICIENS

*JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

METHODE D'EVALUATION DES ECHANGES RADIATIFS POUR DES GEOMETRIES COMPORTANT DES OMBRES PORTEES

P. Lair, J. Dumoulin**, P. Millan**

** ONERA-CERT/DERMES*

2, Av. Edouard BELIN

BP 4025

31055 TOULOUSE Cedex

FRANCE

*** LETHEM / INSA-UPS*

Dpt Génie Civil et Urbanisme

Complexe Scientifique de Rangueil

31077 TOULOUSE Cedex

FRANCE

Résumé

Des études expérimentales portant sur la caractérisation aérothermique d'écoulements sont actuellement effectuées par le CERT/DERMES. La mesure s'appuie sur l'utilisation de la thermographie infrarouge qui nécessite une correction de la mesure des flux surfaciques. Cette correction s'appuie obligatoirement sur un bilan radiatif de l'enceinte dans laquelle l'écoulement s'effectue.

Une méthode numérique de calcul des facteurs de forme dans des configurations géométriques complexes a donc été développée. Cette méthode permet de traiter les cas de surfaces planes ou non et de prendre en compte les phénomènes d'ombres tels qu'ils existent à l'intérieur d'une veine d'essai expérimentale.

Deux méthodes de bilans radiatifs ont aussi été développées et elles sont comparées quant à leurs performances respectives. L'influence du calcul des facteurs de forme sur le bilan radiatif est aussi étudié et le problème de la sensibilité des méthodes vis à vis d'éventuelles erreurs de mesure est abordé.

1. Introduction :

Dans le cadre d'études expérimentales sur la caractérisation aérothermique de différents écoulements, le CERT/DERMES a développé différentes méthodologies de mesures basées sur l'utilisation de la thermographie infrarouge (ThIR). Ces méthodologies s'appuient sur un bilan énergétique global de la paroi faisant l'objet de la mesure. Malheureusement, le système infrarouge caractérise uniquement le flux radiatif global de la surface. Toutefois, une loi de correction radiométrique très simplifiée permet, dans un certain nombre d'expériences, de remonter à la valeur du flux radiatif direct en provenance de paroi donc de la température de celle-ci. Néanmoins, lors de mesures dans des veines expérimentales constituées de matériaux de nature différentes, ayant une géométrie plus ou moins complexe, il s'avère nécessaire de développer un bilan radiatif complet de la veine afin de remonter au flux direct émit. De nombreuses méthodes existent dans la littérature pour effectuer ce bilan radiatif (Gebhart, coefficient d'influence β , Monte-Carlo...) mais la plupart nécessite au préalable le calcul de grandeurs tels que les facteurs de forme.

L'objectif final de cette étude est d'effectuer un bilan énergétique complet dans une enceinte afin de corriger les mesures effectuées par ThIR. Afin de simplifier l'étude, l'hypothèse d'échanges radiatifs entre surfaces grises et diffuses sera faite.

Les bilans radiatifs globaux seront calculés par les méthodes de Gebhart et β . Ces méthodes seront comparées du point de vue de leurs performances.

Le calcul des facteurs de forme sera effectué par la méthode du contour. Cette méthode de calcul sera dans un premier temps appliquée à des cas test de complexité géométrique croissante afin de valider le calcul. Dans un second temps, elle sera mise en oeuvre à des cas test comportant une ombre et, enfin, le cas d'une veine expérimentale de type marche descendante sera traité.

L'influence de la précision du calcul des facteurs de forme sur le bilan radiatif pourra être évaluée.

2. Choix des méthodes de calcul utilisées :

Pour effectuer les bilans radiatifs au niveau de l'enceinte, un certain nombre d'hypothèses ont été émises :

- Surfaces isothermes
- Surfaces grises

- Surfaces diffuses
- Fluide séparant les surfaces rayonnantes supposé non participatif

Ces hypothèses permettent d'utiliser le concept de radiosité et les deux méthodes de bilan retenues sont :

- La méthode de Gebhart
- La méthode des coefficients d'influence β

En effet, elles conduisent numériquement toutes deux à des résolutions de systèmes $n^2 \times n^2$ pouvant être facilement ramenés à n résolutions de systèmes $n \times n$.

Toutefois, quelque soit l'une ou l'autre de ces méthodes de calcul, un calcul de facteurs de forme est nécessaire

2.1 Rappel sur les facteurs de forme :

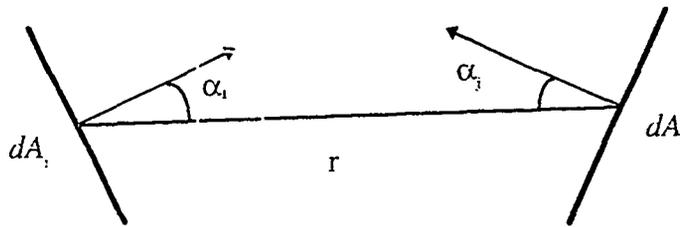


figure 1

L'intégration de la formule de BOUGUER, reliant le flux échangé entre deux surfaces à la luminance de la surface émettrice et aux caractéristiques géométriques des deux surfaces, permet de trouver l'expression générale du facteur de forme.

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_j}{r^2 \pi} dA_i dA_j$$

De cette formule, une relation de réciprocity peut être déduite : $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$, ainsi qu'une relation d'additivité :

$$F_{ii} = \sum_j F_{ij}$$

Dans le cas d'enceintes (munies de n surfaces) à l'équilibre thermodynamique, la conservation de l'énergie permet

$$\text{d'écrire : } \sum_{j=1}^{i=n} F_{ij} = 1.$$

2.2 Choix d'une méthode de calcul pour les facteurs de forme:

Il est possible d'évaluer analytiquement les facteurs de forme en partant de la définition ou en utilisant des abaques, mais cette méthode ne peut s'appliquer qu'aux cas très simples [3].

Malheureusement, ces méthodes ne s'appliquent pas le plus souvent à des cas réels rencontrés par l'expérimentateur. Dès lors, il devient nécessaire d'utiliser une méthode numérique; citons parmi celles-ci, la méthode de la sphère unitaire de NUSSELT, la méthode de MONTE-CARLO et enfin la méthode du contour de SPARROWS.

Dans le cadre de cette étude, la méthode statistique de MONTE-CARLO est abordée et la méthode du contour a été développée et étudiée. L'avantage indéniable de la méthode statistique est d'être très physique et donc d'être capable de traiter des cas complexes (surfaces non grises, non diffuses, non isothermes et ombrées). Son principal inconvénient est une précision liée à des temps de calcul élevés. Elle est de plus mal adaptée à la seule évaluation des facteurs de forme (cf 4.1)

La méthode du contour, quant à elle, présente une précision bien meilleure avec des temps de calcul bien plus faible.

Par conséquent, notre choix s'est porté sur la méthode du contour.

2.3 Choix d'une méthode pour effectuer le bilan radiatif :

Dans un premier temps, la méthode statistique de MONTE-CARLO a tout naturellement été envisagée pour ce calcul. Mais la faible précision obtenue pour des temps de calcul assez longs nous ont finalement orienté vers deux autres méthodes, toutes deux s'appuyant sur le concept de radiosité.

Une enceinte est un ensemble de surfaces qui forme un volume fermé. Ces surfaces seront opaques si elles sont matérielles ou fictives si elles représentent des ouvertures.

Pour la notion de radiosité, certaines hypothèses simplificatrices doivent être formulées: ainsi chaque surface est isotherme. Cette hypothèse est facilement réalisable si les surfaces sont redécoupées.

Dès lors, le concept de radiosité peut être employé ainsi qu'un large éventail de méthodes de calcul de bilan. Dans le cadre de cette étude, les méthodes de GEBHART et des coefficients d'influence β [1] ont été développées puis comparées quant à leurs performances. En effet, ces deux méthodes conduisent numériquement à des résolutions de systèmes n^2, n^2 pouvant être facilement ramenés à n résolutions de systèmes n, n .

3. Présentation de la méthode de calcul des facteurs de forme:

L'application du théorème de STOKES pour réduire une intégrale double sur une surface en une intégrale simple sur la frontière de cette surface est une méthode pratique pour l'évaluation des facteurs de forme. SPARROWS, [3], utilise ce théorème et, en partant de la définition théorique issue de l'intégration de la formule de BOUGUER, il se ramène à une expression pouvant être développée analytiquement dans certains cas.

Ainsi dans un repère cartésien, il vient en utilisant les notations de la figure 2 :

$$F_{y_j} = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i, A_j} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_j}{\pi r^2} dA_i dA_j = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{C_i} \oint_{C_j} (\ln r dx_i dx_j + \ln r dy_i dy_j + \ln r dz_i dz_j)$$

Le paramètre r représente donc la distance entre deux d -éléments des deux contours délimitant les surfaces. La disposition spatiale de ces surfaces et de l'origine du repère cartésien définiront donc directement l'expression de r .

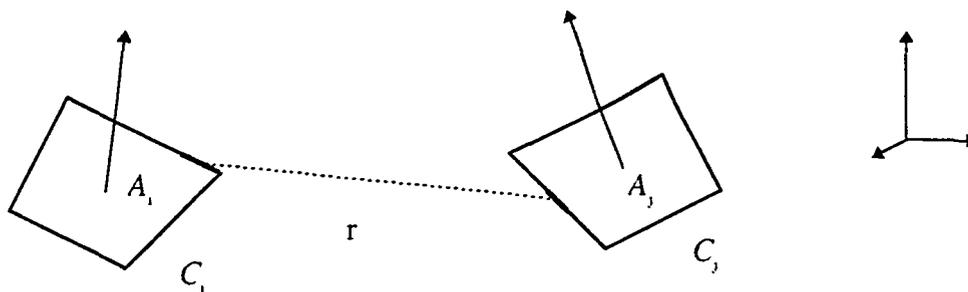


figure 2

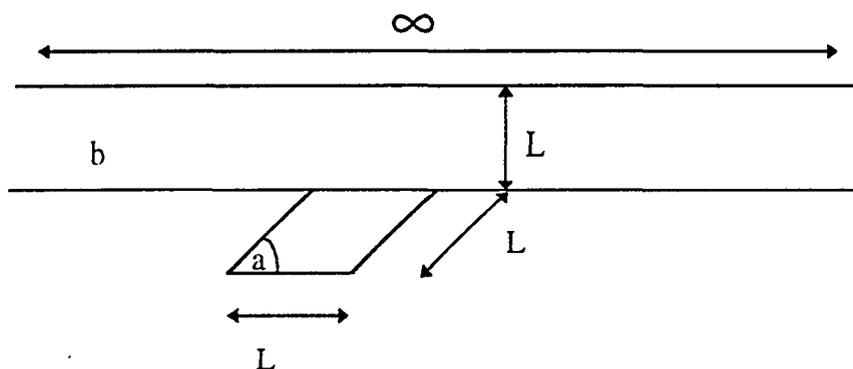
Dans des cas très simples, cette expression peut être calculé analytiquement. mais il faut néanmoins rapidement envisager une approche numérique. Le problème étant ici de calculer une intégrale multiple (double dans des cas sans ombre ou triple dans la plupart des cas ombrés).

Dans le cadre de cette étude, une simple méthode de Riemann a été utilisée. D'autres schémas ont été développés depuis pour le calcul des intégrales multiples : Simpson, Romberg et une méthode de Monte - carlo [6].

4. Validation de la méthode de calcul des facteurs de forme :

4.1 Cas de géométries simples :

Il est possible, dans certaines configurations géométriques simples, d'obtenir une expression analytique du facteur de forme. C'est le cas par exemple, des configurations présentées sur la figure 3 :



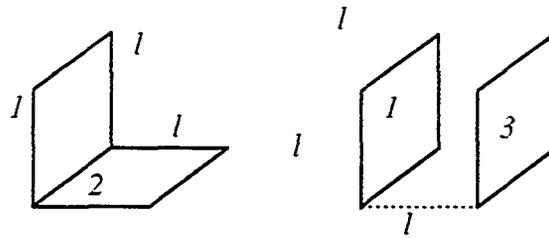


figure 3 : Configurations tests retenues.

En effet, dans ces cas particulier, il vient [3]:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}, F_{13} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{3}{4} \text{ et } F_{ab} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La figure 4 montre l'erreur relative entre les solution analytiques ci-dessus et l'évaluation numérique par la méthode du contour.

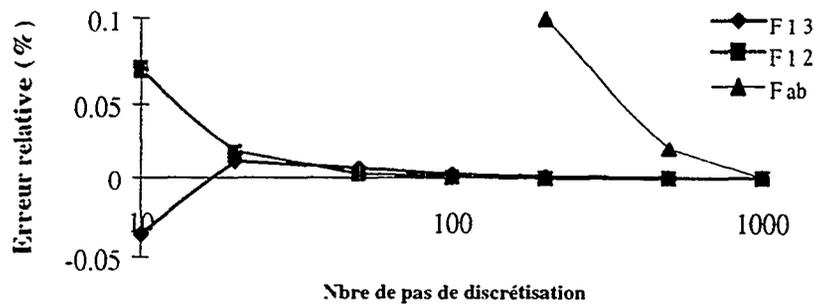


figure 4 : Erreur relative commise sur le calcul des facteurs de forme des différentes configurations tests.

Sur la configuration à fort rapport d'allongement, une comparaison entre un calcul par la méthode Monte-Carlo et la méthode du contour est effectuée. La convergence vers la solution exacte des deux méthodes en fonction du temps de calcul est reportée sur le figure 5. Ceci confirme l'analyse faite au paragraphe précédent sur le coût en temps de calcul de la méthode de Monte-Carlo pour obtenir une bonne précision.

Comparaison MONTE-CARLO / CONTOUR

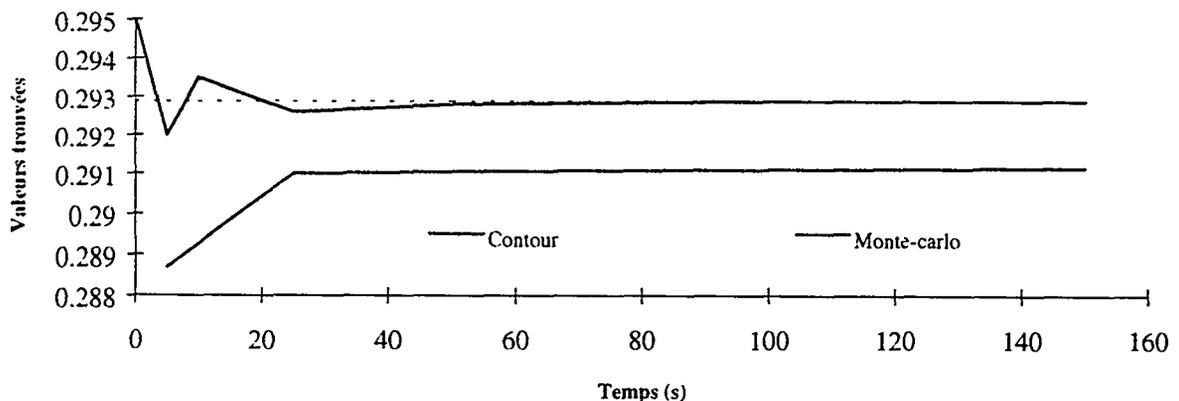


figure 5 : Comparaison des résultats obtenus pour la configuration 3 par les méthodes du contour et de MONTE-CARLO.

Cette analyse conduit à n'utiliser que la méthode du contour.

4.2 Cas de géométries plus complexe :

4.2.1 Cas de surfaces concaves :

La configuration retenue est un cylindre coiffé d'une demi-sphère (figure 6) :

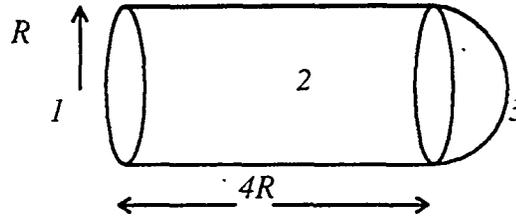


figure 6 : Configuration test dans le cas de surface non planes sans ombres.

Il y a trois parois donc 9 facteurs de forme. Ici encore les surfaces étant géométriquement simples (cercle, cylindre et demi-sphère), il existe dans la littérature des formulations analytiques qui vont permettre une validation.

Les solutions exactes sont pour $R=5$ [3]:

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= 0 & F_{21} &= F_{23} & F_{31} &= 1 - F_{33} - F_{32} \\
 F_{12} &= 1 - F_{13} & F_{22} &= 3 - \sqrt{5} & F_{32} &= 4F_{23} \\
 F_{13} &= \frac{1}{2}(18 - \sqrt{320}) & F_{23} &= \frac{1}{2}(1 - F_{22}) & F_{33} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Les résultats obtenus par calcul sont présentés sur la figure 7 :

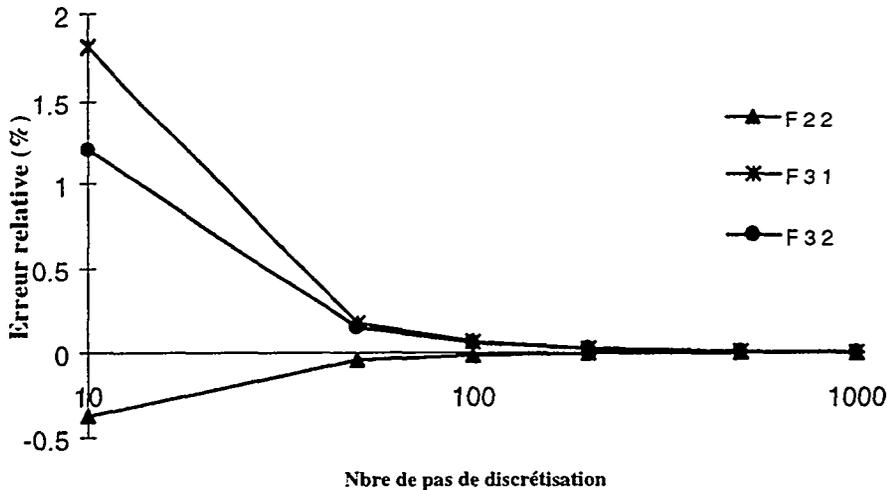


figure 7 : Erreur relative commise sur le calcul des facteurs de forme.

La convergence vers les valeurs exactes est une nouvelle fois rapide.

4.2.2 Cas de configurations complexes :

Considérons maintenant un cylindre et un rectangle en regard. Dans un but de simplification, la hauteur du cylindre est prise égale à la longueur du rectangle et le diamètre de ce cylindre à la largeur du rectangle (cf figure 8). Cette configuration est une configuration avec ombre car le cylindre va se faire de l'ombre à lui même. Il est possible, pour des raisons de symétries de partager le cylindre en deux, et de n'étudier que la moitié de la géométrie.

La relation d'additivité des facteurs de forme permet de calculer un facteur total par simple addition.

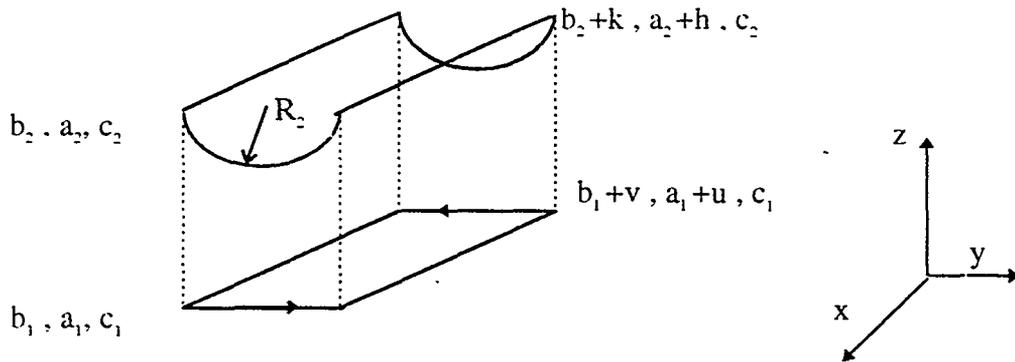
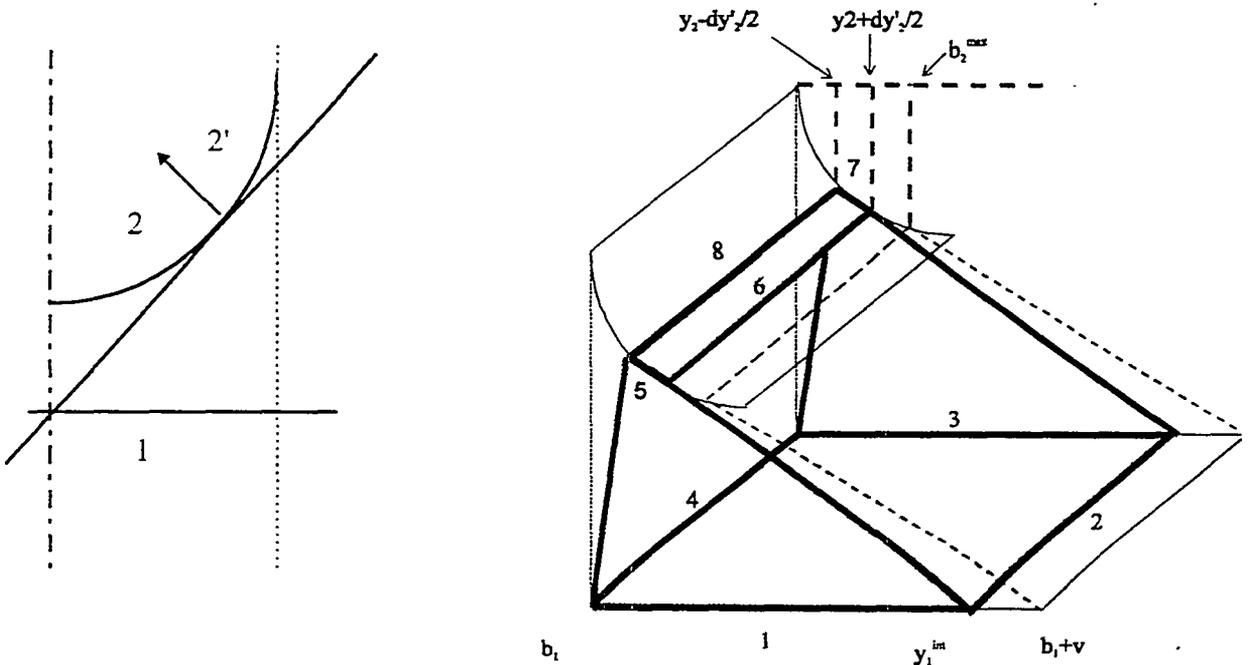


figure 8 : Configuration test comportant des surfaces non planes et ombrées.

Sur cette "demi-géométrie", une partie "sans ombre" et une partie "avec ombre" sont définies et traitées séparément. Pour cela, appuyons-nous sur des vues des figures 9 et 10 :



figures 9 et 10 : Vue en coupe et détail du mode de discrétisation.

En utilisant un découpage en surface élémentaire, le développement de la méthode du contour conduit pour le facteur de forme à :

$$F_{12'} = \frac{1}{2\pi A_1} \left\{ \int_{y_2=b_2}^{b_2^{\max}} \int_{y_1=b_1}^{y_1^{\text{im}}(y_2)} (\ln S_{17} - \ln S_{15} - \ln S_{37} + \ln S_{35}) dy_1 dy_2 \right. \\ \left. + \int_{y_2=b_2}^{b_2^{\max}} \left(\int_{x_1=a_1}^{a_1+u} \int_{x_2=a_2}^{a_2+h} (\ln S_{28} - \ln S_{26} + \ln S_{46} - \ln S_{48}) dx_1 dx_2 \right) dy_2 \right\}$$

$$\text{avec : } \ln S_{28} - \ln S_{26} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_2'} \ln f \right)_{y_2'=y_2}$$

$$\bullet f(x) = (x_2 - x_1)^2 + (y_1^{int}(y_2) - x)^2 + \left(c_1 - \left\{ c_2 - \sqrt{R_2^2 - \left(x - \left(b_2 + \frac{k}{2} \right) \right)^2} \right\} \right)^2$$

$$\bullet \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln f \right)_{x=y_2} = \frac{1}{f(y_2)} * \left[\frac{-2(y_1^{int}(y_2) - y_2) - 2 \left(y_2 - b_2 - \frac{k}{2} \right) \left(c_1 - c_2 + \sqrt{R_2^2 - \left(y_2 - b_2 - \frac{k}{2} \right)^2} \right)}{\sqrt{R_2^2 - \left(y_2 - b_2 - \frac{k}{2} \right)^2}} \right]$$

De même pour $\ln S_{46}$ et $\ln S_{48}$.

Dans certains cas le temps de calcul peut être amélioré lorsqu'il est possible de se ramener d'une intégrale triple à une intégrale double. (Dans certaines configurations géométriques, cela est quelquefois possible)

Dans les équations ci-dessus, les termes b_2^{max} et $y_1^{int}(y_2)$ sont introduits et doivent être explicités :

- b_2^{max} représente la limite du domaine qui est concerné par le phénomène d'ombrage.

Soit :

$$b_2^{max} = b_2 + R_2 - R_2 \sin \left(\text{Arc cos} \frac{R_2}{\sqrt{(R_2^2 + c_2^2)}} - \text{Arc cos} \frac{c_2}{\sqrt{(R_2^2 + c_2^2)}} \right)$$

- $y_1^{int}(y_2)$ permet de délimiter la zone de la surface émettrice qui voit la 'd-surface' réceptrice. Soit :

$$y_1^{int}(y_2) = b_2 + \frac{k}{2} + \frac{R_2^2 + (c_1 - c_2) * \sqrt{R_2^2 - \left(y_2 - \left(b_2 + \frac{k}{2} \right) \right)^2}}{y_2 - b_2 - \frac{k}{2}}$$

La validation n'est ici pas aisée car la littérature ne donne une indication que pour des géométries présentant un fort rapport d'allongement : le cylindre et le rectangle sont donc de longueur infinie. Les méthodes employées pour le calcul des intégrales étant des méthodes numériques, le problème de la finesse de discrétisation se pose.

La discrétisation imposée, quelque soit la méthode d'intégration employée, croît avec le rapport d'allongement. Dans ces conditions, il faut se fixer un rapport d'allongement bien précis pour ne pas aboutir à des temps de calcul inconsidérés. Pour cela, une longueur 200 fois plus grande que le rayon a été adoptée.

Pour valider ce choix, il est possible de "retourner" le demi-cylindre et de le "poser" sur le rectangle. Dès lors, le facteur de forme entre le rectangle et le demi-cylindre devrait être égal à l'unité

Etant donné que le calcul fait intervenir une intégrale triple, les temps vont être fortement dépendant du choix du nombre maximum d'itération. Ce nombre est lui-même dépendant du rapport d'allongement. La figure 11 montre les résultats obtenus pour différentes longueurs.

Avec la méthode d'intégration de Riemann, toutes convergent vers l'unité et il n'y a pas de trop gros écarts entre un nombre maximal d'itération égale à deux fois la longueur et un nombre d'itération égale à la longueur sur quatre (Néanmoins entre les deux il y a un facteur $8^3 (=512)$ en temps de calcul).

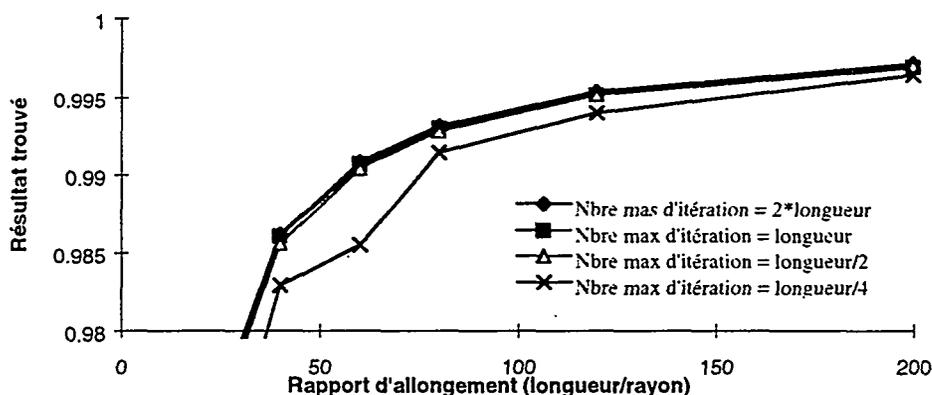


figure 11 : Choix du nombre d'itération en fonction du rapport d'allongement.

Le fait de valider une première partie du calcul en retournant notre cylindre, permet de valider la partie sans ombre du calcul. Valider la partie avec ombre est plus complexe.

Dans un premier temps l'influence qu'avait la hauteur à laquelle se trouve le cylindre par rapport au rectangle, par rapport au résultat final, qui est la somme de la partie sans ombre et de la partie avec ombre, a été regardée.

Les résultats de la figure 12 montrent que lorsque le rapport hauteur sur rayon est supérieur à 8, la partie avec ombre représente moins de 1% du facteur de forme total. Inversement, ce pourcentage croît de manière importante avec une hauteur qui diminue. Le cas limite est pour une hauteur égale au rayon, c'est à dire le cylindre en contact avec le rectangle et un facteur de forme avec ombre égale au facteur de forme totale (il n'y a pas de partie sans ombre).

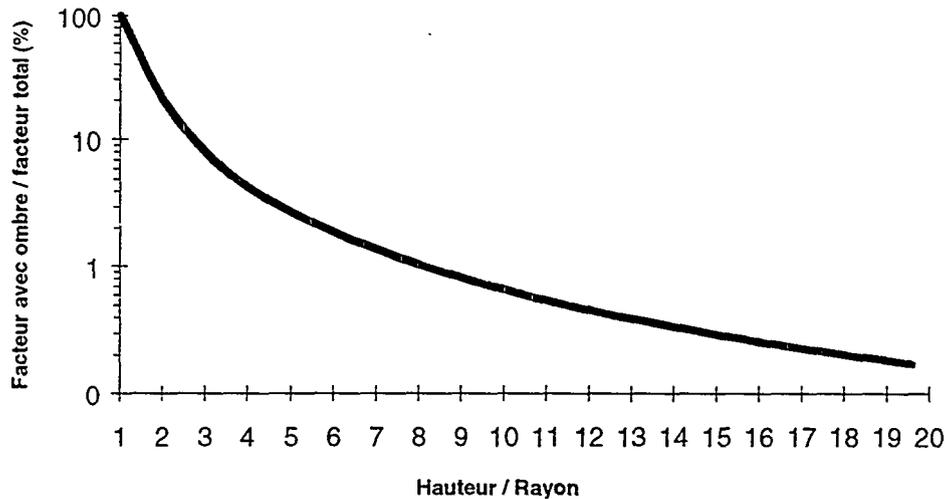
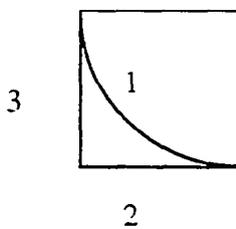


figure 12 : Proportion facteur avec ombre / facteur total.

Un autre moyen de validation peut être de considérer que le cylindre touche le rectangle. La configuration est alors reportée sur la figure 13 :



Pour un rapport d'allongement suffisant, il va donc être possible de considérer que nous sommes en présence d'une enceinte donc d'avoir : $F_{12} + F_{13} = 1$

Dans cette configuration particulière, il vient aussi : $F_{12} = F_{13} = 0.5$ et en utilisant la relation de réciprocité : $F_{21} = F_{31} = \pi/4$.

figure 13

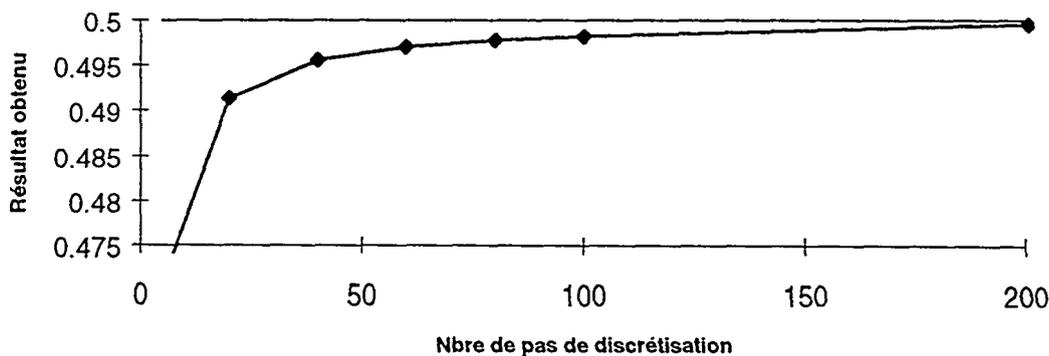


figure 14 : Convergence de la méthode en fonction du nombre d'itération.

Le rapport d'allongement étant égal à 4 fois le nombre maximum d'itération. Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 14.

5. Validation des méthodes de calcul des bilans radiatifs :

Pour cela, la géométrie retenue est celle d'un cube. Cette géométrie simple permet de mettre en évidence l'influence de la précision du calcul des facteurs de forme sur le résultat final obtenu après un bilan d'énergie. Cela s'inscrit dans l'objectif final de cette étude qui est de pouvoir corriger une carte de luminance obtenue par thermographie infrarouge en observant la paroi d'une enceinte. Ceci afin d'aboutir à une carte de températures de surface de cette paroi.

Contrairement aux facteurs de forme, il n'existe pas ici d'abaques ou de formules analytiques. Seule la conservation de l'énergie peut être envisagée comme critère de validation.

Quelque soient les températures des différentes parois et les propriétés thermo-optiques, la relation de conservation de l'énergie doit être vérifiée. Elle doit se traduire ici par la somme des flux échangés par les différentes parois égales à 0 (c'est l'équation en flux des radiosités).

Enfin, des flux calculés avec des températures quelconques doivent permettre de retrouver ces températures (c'est l'équation en température des radiosités).

De plus, comme pour les facteurs de forme, il existe des normes à l'intérieur des méthodes de Gebhart et des coefficients d'influence β [1]. L'influence de ces normes, application locale du principe de conservation de l'énergie, est aussi étudié.

Dans le cas du cube, les valeurs des facteurs de forme sont connues. L'objectif n'est pas ici de valider les méthodes de Gebhart et β , mais plutôt de présenter la méthodologie de validation qui sera appliquée dans le cas de la marche.

Soit le cube suivant :

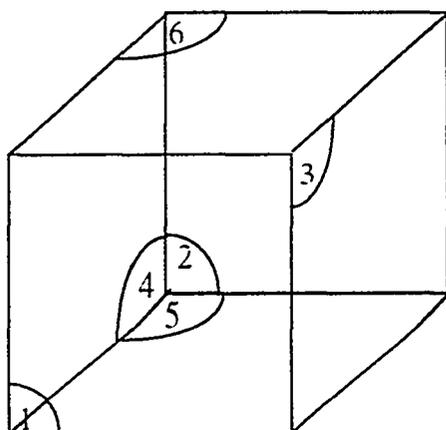


figure 15 : Configuration test du cube.

Dans la tableau suivant, les résultats des différents tests qui ont conduits dans le cas du cube sont présentés.

	$\frac{\sum flux}{\sum flux }$	$Max \frac{(T_{initial} - T_{calculée})}{T_{initial}}$
β normés	10^{-6}	0
β non normés	10^{-6}	0
G normés	10^{-6}	0
G non normés	10^{-6}	0

5.1.1 Sensibilité des températures par rapport aux valeurs de flux :

En pratique, les expériences effectuées sur la marche consistent à mesurer des flux pour en déduire des températures. Dans ces conditions il est intéressant de voir si une petite variation sur le flux (soumis à d'éventuelles erreurs de mesure), entraîne une variation sensible de la température.

INFLUENCE DE LA PRECISION DES FLUX SUR LE CALCUL DES TEMPERATURES

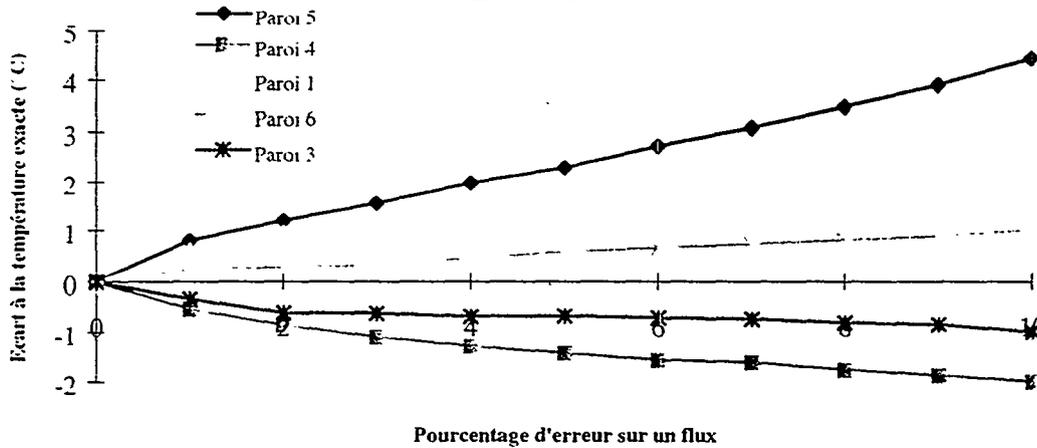


figure 16 : Influence de la précision des flux sur le calcul des températures.

La figure met en évidence la sensibilité des méthodes vis à vis du flux. En effet, la moindre erreur sur les flux aura une influence sur le calcul des températures.

6. Application à l'étude d'une veine expérimentale de type marche descendante :

6.1 Description géométrique de l'installation:

La veine réelle, dont la forme est représentée sur la figure 17, est constituée de 33 parois différentes.

Le calcul de 1089 facteurs différents doit donc être envisagé. Une minorité de ces facteurs sont nuls (toutes les parois sont planes et certaines ne se voient pas). D'autres présentent des configurations ombrées et sont plus ou moins complexes à évaluer. Par exemple le facteur entre la surface 1 et la surface 2 est difficilement calculable.

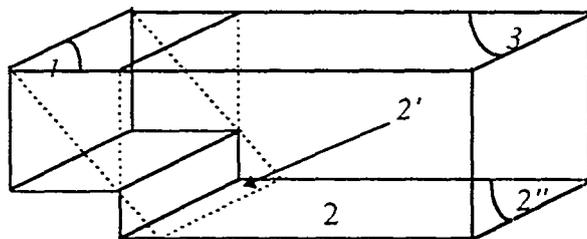


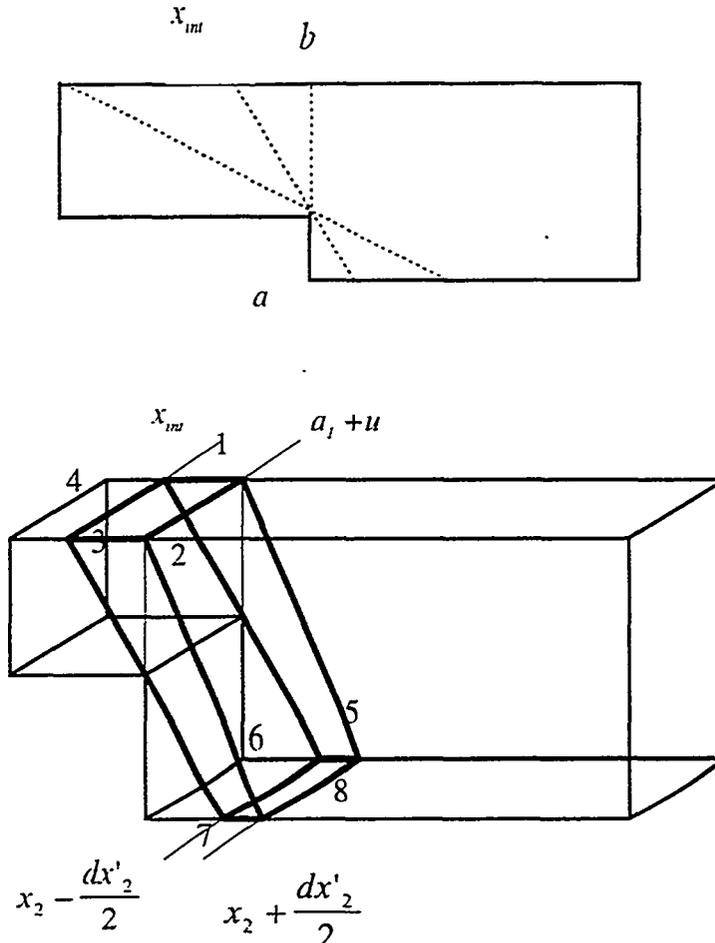
figure 17 : Description simplifiée de la veine d'essai.

6.2 Calcul des facteurs de forme :

La marche intervient en projetant une ombre. Le facteur de forme entre la face indexée 1 et celle indexée 2 doit donc prendre en compte cette ombre. Cette prise en compte va s'appuyer sur un découpage de la surface réceptrice 2, permettant ainsi de séparer les cas où l'ombre intervient des cas où elle n'intervient pas. Pour le reste, une bonne interprétation géométrique du phénomène est nécessaire ainsi qu'un raisonnement "inverse". En effet il ne faut pas se demander quelle partie de la face 1 voit la face 2, mais plutôt quelle partie de la face 2 est vue par la face 1. Cela permet d'utiliser la relation d'additivité des facteurs de forme en maillant la partie de la face 2 (2') qui est à l'ombre.

D'après la relation d'additivité des facteurs de forme, il vient: $F_{12} = F_{12'} + F_{12''}$

Pour calculer $F_{12''}$, il n'y a pas de problème car c'est une configuration sans ombre. En revanche pour calculer $F_{12'}$, la marche intercepte une partie du rayonnement émis par la surface 1 vers la surface 2 et il y a un effet d'ombre.



figures 18 et 19 : Vue en coupe et détail de la discrétisation.

En utilisant la relation d'additivité des facteurs de forme, la surface 2 peut être découpée en surfaces élémentaires. Chaque petit élément de 2 sera vu par une partie de 1.

Prenons pour côté de l'élément i : $x_2 - \frac{dx'_2}{2}$ et $x_2 + \frac{dx'_2}{2}$ avec dx'_2 un d -élément. Bien sûr x_{int} est égal à a_1 pour x_2 égal à x_{int0} .

L'expression du facteur de forme est, dans ce cas particulier, et en utilisant la méthode des contours :

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \oint_{c_1, c_2} \left[\ln S dx_1 dx_2 + \ln S' dy_1 dy_2 \right]$$

où les expressions de S et S' , polynômes représentant la distance entre deux segments, peuvent être déterminées avec l'aide de la figure 19.

Dans un cas ombré, le développement de la méthode conduit donc à une intégrale triple. Dans ce cas, il est possible de se ramener à une intégrale double, ce qui permet de réaliser une économie en temps de calcul.

Pour valider ce calcul, deux approches peuvent être envisagées. Quand les configurations ne présentent pas de problèmes d'ombres, il est bien sûr possible de valider en effectuant des comparaisons avec résultats trouvés dans des tables ou des abaques. D'autre part, comme la veine expérimentale est considérée comme une enceinte fermée (les extrémités sont des parois fictives), la conservation de l'énergie peut être utilisée comme critère de validation.

Les normes ainsi calculées montre que le calcul est très précis. En effet l'erreur cumulée sur la chaque norme oscille entre $3,5 \cdot 10^{-4}\%$ et $3 \cdot 10^{-6}\%$ ce qui donne une erreur moyenne sur chaque facteur variant entre $10^{-5}\%$ et $10^{-7}\%$. L'écart observé entre les erreurs cumulées est assez important (un facteur 100 !) mais peut être expliqué de la façon suivante :

- Le calcul de chaque facteur de forme est différent est fait intervenir des intégrales triples ou doubles. La précision est directement liée au mode de calcul : nombre maximal d'itération utilisée pour la détermination d'intégrales doubles ou triples. Si sur une norme, il y a beaucoup de facteurs de forme avec ombre, l'erreur commise est plus importante et s'ajoute.

- Du fait de leurs positions dans la veine, certaines faces ne voient pas toutes les autres. Dans ce cas, le facteur de forme est nul et l'erreur commise sur son évaluation l'est aussi. Une norme avec beaucoup de zéro sera donc a priori plus précise.

6.3 Calcul du bilan radiatif :

La relation de conservation de l'énergie doit être seule utilisée pour valider les calculs.

Comme dans le cas du cube donc, un choix d'émissivité (arbitraire) pour chaque parois, ainsi qu'un choix de température est effectué. Dans le calcul des facteurs de GEBHART, comme dans celui des coefficients d'influence β , des valeurs des facteurs de forme normalisés ont été utilisées. Le principe de la validation est le suivant : les valeurs d'émissivités et de températures de chaque faces permettent de calculer des flux, par chacune des méthodes. A partir de ces flux on doit remonter aux températures de départ. La conservation de l'énergie devant être respectée, la somme des flux doit être nulle.

Comme pour les facteurs de forme, il existe une expression de la conservation de l'énergie pour les facteurs de GEBHART et les coefficients β : elle se traduit ici aussi par une norme. L'importance de cette norme est aussi étudiée.

Les résultats de ces tests sont présentés dans le tableau suivant :

	$\frac{\sum flux}{\sum flux }$	$Max \frac{(T_{initial} - T_{calculée})}{T_{initial}}$
β normés	0.0044	0
β non normés	10^{-6}	0.00127
G normés	10^{-6}	0.07
G non normés	10^{-6}	0.07

L'influence de la précision du calcul des facteurs de forme sur le bilan radiatif a été observé et les résultats sont présentés sur la figure 20.

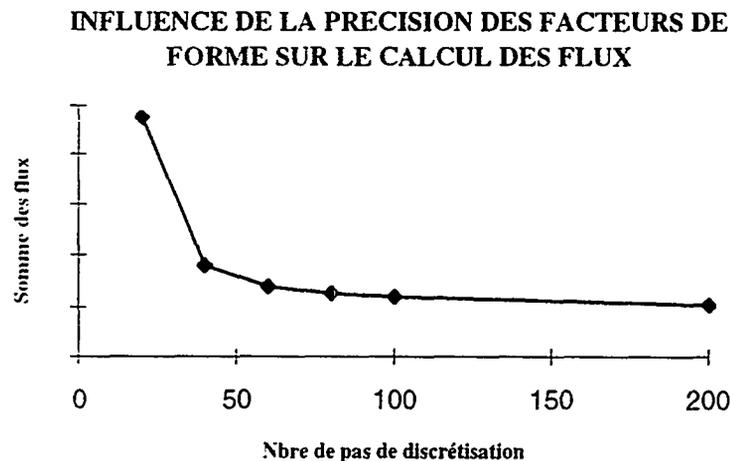


figure 20 : Influence de la précision des facteurs de forme sur le calcul des flux.

7. Comparaison de différentes méthodes d'intégrations :

Quatre méthodes différentes ont donc été testées. Parmi celles-ci, une méthode statistique a aussi été développée [8]. Cette méthode de Monte-Carlo présente l'avantage de permettre des calculs rapides quand l'ordre des intégrales est élevée. Dans les cas qui nous préoccupent ici, l'ordre est de 2 voir 3 pour des cas ombrés et cette méthode présente des temps de convergence plus élevés que les méthodes purement numériques que sont Riemann, Simpson ou Romberg.

Pour cette comparaison, il faut choisir une fonction qui se rapproche le plus de celles qui interviennent dans le calcul des facteurs de forme proprement dit. Notre choix s'est donc porté sur la fonction suivante :

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \ln \left(\frac{(x-y)^2 + 2}{(x-y)^2 + 1} \right) dx dy$$

qui représente le calcul du facteur de forme de la seconde configuration de la figure 3.

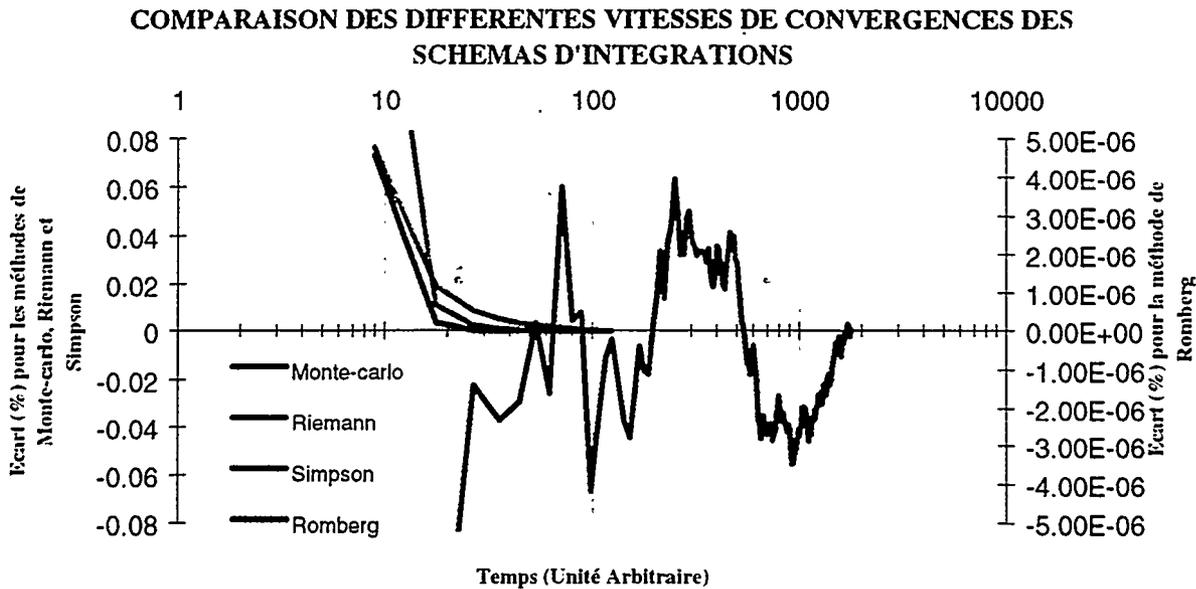


figure 21 : Performances des différents schéma d'intégration.

Il apparaît donc nettement sur ces courbes la convergence des différentes méthodes. Il est possible de distinguer trois groupes :

- La méthode statistique qui converge beaucoup plus lentement mais dont on sait que l'intérêt repose sur un ordre élevé de l'intégrale.
- Les méthodes de Simpson et Riemann. qui avec un avantage certain pour Simpson, se comportent toutefois de façon similaire.
- Enfin la méthode de Romberg qui présente une vitesse de convergence beaucoup plus rapide.

Lors de cette étude, c'est la méthode de Riemann qui a été utilisée mais il apparaît clairement ici qu'une amélioration très sensible peut être apportée en utilisant la méthode de Romberg par exemple.

8. Conclusion

L'objectif de cette étude était double : il s'agissait dans un premier temps de proposer une méthode permettant de calculer avec précision des facteurs de forme pour, dans un deuxième temps, effectuer un bilan radiatif.

La méthode des contours développée pour le calcul des facteurs de forme donne d'excellents résultats au niveau de la précision. L'objectif, à ce niveau-là est donc atteint. En revanche, pour certaines configurations, cette méthode manque de souplesse et présente des temps de calcul importants. En effet sorti des cas "triviaux" sans ombres, le traitement de ces configurations complexes ne peut être facilement automatisé de par la complexité des calculs. Par rapport à la méthode des contours, la méthode de MONTE-CARLO est moins précise et nécessite des tests géométriques qui peuvent, eux aussi, se montrer très compliqués pour ces mêmes configurations.

Une faible amélioration de la précision sur la calcul des facteurs de forme entraîne une forte augmentation du temps de calcul. Or ce gain, même infime, a des répercussions sur le bilan radiatif. L'obtention de bons résultats rend donc indispensable une évaluation très précise des facteurs de forme. Néanmoins, le schéma développé permet d'effectuer des calculs rapides si un maillage "grossier" est utilisé. Typiquement, l'évaluation des 1089 facteurs de la veine d'expérience peut être faite avec une précision moyenne de 0.1 % par facteur en un temps de 30 secondes (la machine utilisée était un PC à 66MHz).

Bibliographie

- [1] DE VRIENDT -La transmission de la chaleur (vol 2) Gaetan Morin éditeur

- [2] H.NIEDERREITER -*Random number generation and quasi-MONTE-CARLO methods* Society For Industrial And Applied Mathematics. 1992
- [3] R.SIEGEL J.HOWELL -*Thermal radiation heat transfert H.P.C second edition*
- [4] LIENHART -*A heat transfert textbook* Prenbice Hall second edition
- [5] SACADURA -*Initiation au transferts thermiques* Technique et documentation deuxième édition
- [6] EL JAI -*Cours d'analyse numérique* Université de Perpignan
- [7] LAIR -*Contribution à la caractérisation des échanges radiatifs dans des systèmes thermiques complexes*
Rapport D.E.A. ONERA-CERT/DERMES
- [8] J.P NOUGIER -*Méthodes de calcul numérique* 3^{me} édition MASSON

SOCIETE FRANCAISE DES THERMICIENS

JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)

SUR

LES CODES DE CALCUL DE RAYONNEMENT THERMIQUE

SIMULATION DU COMPORTEMENT THERMIQUE DES FOURS ELECTRIQUES INDUSTRIELS A RESISTANCES A L'AIDE DU CODE I-DEAS/TMG

par Christian PLARD - Karine BRANCHU et Bernadette LE CLOIREC

EDF-DER Les Renardières BP 1
F-77250 MORET-SUR-LOING

Résumé

Afin de répondre au besoin de modélisation ressenti par les constructeurs et les utilisateurs de fours électriques à résistances, EDF s'est engagé dans la recherche et la qualification d'un outil de simulation numérique des phénomènes thermiques. Le logiciel TMG a été sélectionné en raison des solutions retenues pour modéliser les transferts par rayonnement et le couplage avec la conduction thermique. Après un tour d'horizon des principales caractéristiques de ce code, deux exemples d'applications aux fours électriques sont présentés. Le premier montre comment il est possible de reproduire assez fidèlement le comportement d'un grand four industriel. Le second est une illustration des possibilités de la simulation numérique en matière d'optimisation de procédés conduits dans un four électrique.

1 - INTRODUCTION

EDF travaille dans le domaine des fours électriques industriels à résistances depuis de nombreuses années, en collaborant avec les constructeurs de fours et les utilisateurs appartenant à des secteurs industriels variés. Les principaux secteurs sont le traitement thermique des métaux, la cuisson des céramiques, la fonderie des métaux non-ferreux, l'agro-alimentaire et la chimie. Les efforts de recherche ont jusqu'à un passé récent principalement porté sur l'amélioration des éléments chauffants (tenue mécanique, durée de vie, haute température), des matériaux isolants (faible inertie) et de la régulation (auto-adaptative). Le souci actuel des constructeurs est de pouvoir garantir les performances de plus en plus fines exigées par leurs clients. Par exemple, tous les points d'une pièce auront-ils bien été portés à une température comprise dans une certaine plage, pendant un temps suffisant au cours d'un traitement thermique ? Par ailleurs, les utilisateurs cherchent à optimiser la conduite de leurs fours en fonction du type de charge traitée. Pour répondre à ces besoins, nous nous sommes orientés vers les outils de simulation numérique, qui nous semblent seuls pouvoir satisfaire les exigences d'un dimensionnement fin et permettre de réaliser des études d'optimisation.

2 - PRESENTATION DE TMG

TMG permet la modélisation de problèmes tridimensionnels faisant intervenir les transferts thermiques par conduction, rayonnement entre surfaces, ainsi que par convection (uniquement sous forme de coefficients d'échange). La technique de résolution est la méthode des volumes finis, ce qui revient en fait à créer un réseau de conductances entre les noeuds du modèle. Ces conductances dépendent des propriétés thermophysiques et de la géométrie des matériaux constituant l'objet étudié ainsi que du type d'échange imposé (conductif, radiatif, convectif). Il est possible de traiter des problèmes en régime permanent au même bien qu'en régime transitoire.

TMG présente deux originalités :

- tout d'abord, il s'agit d'un code en volumes finis associé à un maillage de type éléments finis (I-DEAS) ; il existe donc, au sein de TMG, une interface réalisant la conversion du maillage *éléments finis* en maillage *volumes finis* : sur chaque élément fini, TMG calcule l'intersection des médiatrices aux frontières pour trouver les centres des éléments ; la matière contenue dans la maille est concentrée en chacun de ces centres et le calcul de la température est réalisé à cet endroit conformément à la méthode des volumes finis ;
- la seconde originalité tient au calcul de rayonnement entre surfaces grises et diffusantes ; la méthode utilisée est celle de Gebhart ; elle nécessite, entre autres, le calcul des facteurs de forme entre surfaces ; TMG réalise ces calculs avec précision, même en présence de masques : lorsque aucun masquage n'est détecté entre les surfaces rayonnantes, les facteurs de forme sont calculés par la technique de l'intégrale de contour ; dans le cas contraire, c'est la méthode de la sphère de Nusselt qui est utilisée.

Nous avons validé TMG à l'aide de cas-tests poussant souvent le logiciel dans ses limites. Les résultats nous ont permis de conclure sur la fiabilité de ce code en matière de rayonnement entre surfaces grises.

Comme nous l'avons énoncé précédemment, TMG crée un réseau de noeuds thermiques reliés entre eux par des conductances de différents types : conductif, radiatif, convectif. On y ajoute les capacités relatives à chaque noeud dans le cas de régimes transitoires. Nous retrouvons toutes ces quantités dans l'équation de la chaleur discrétisée selon la méthode des volumes finis ; pour chaque noeud i , elle s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} (T_i - T_j) + C_i (\partial T / \partial t) = Q_i \quad (1)$$

Conductance conductive

Cette grandeur est en fait la conductance équivalente issue de la mise en série des deux conductances entre chaque noeud et la frontière commune (figure 1) :

$$1/G_{ij} = (\ell_i/\lambda_i A) + (\ell_j/\lambda_j A)$$

Conductance radiative

Elle dépend ici de la température : ces conductances seront donc évaluées, lors de la résolution, à la température de l'itération précédente :

$$G_{ij} = \sigma \varepsilon_i A_i F_{ij} (T_i^2 + T_j^2) (T_i + T_j)$$

F_{ij} , facteur de forme gris entre les noeuds i et j , est calculé selon la méthode de Gebhart.

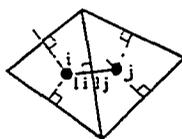


Figure 1 - Calcul des conductances conductives

Conductance convective

Son expression est très simple et ne nécessite pas de commentaire :

$$G_{ij} = hA_i$$

Le coefficient de convection peut être constant ou fourni au moyen de corrélations intégrées au code.

Capacitance

C'est la capacité thermique ($J.K^{-1}$) de toute la matière concentrée au nœud i :

$$C_i = \rho_i C_i V_i$$

Une fois ces grandeurs calculées, TMG résout le système d'équations (1) par la méthode de Jacobi ou de gradient conjugué en régime permanent et par une méthode semi-implicite en régime transitoire. Les conductances dépendant de la température (par l'intermédiaire de la conductivité ou bien du fait du rayonnement ou de la convection) sont réactualisées lors des itérations jusqu'à convergence des températures.

TMG, constituant le module thermique d'I-DEAS, est complètement intégré à celui-ci et bénéficie de son interface conviviale pour toutes les étapes (CAO, maillage, conditions limites et paramètres de calcul, post-traitement).

3 - SIMULATION D'UN FOUR INDUSTRIEL

3.1 - Description du four

Ce four électrique, construit par CECF FOFUMI, est en service à la SNECMA dans un atelier de traitement thermique. Il permet d'austénitiser des pièces entrant dans la fabrication des moteurs d'avions, dans la gamme 700 à 1250°C. Ses dimensions intérieures sont $2,5 \times 2,5 \times 1 \text{ m}^3$ et sa puissance installée est de 600 kW. Les murs, y compris la face interne de la porte et la sole sont équipés de résistances en Kanthal Super.

La régulation de la puissance injectée dans ces résistances est divisée en quatre zones, équipées chacune d'un régulateur PID.

Des mesures ont été réalisées lors d'une montée en température à partir d'un état homogène et stabilisé à température ambiante. Deux pièces toriques en inconel, habituellement traitées dans ce four, et deux pièces cylindriques en acier inox ont été, dans ce but, instrumentées avec des thermocouples gainés de type K de 1 mm de diamètre. Ceux-ci sont implantés dans des perçages à coeur ou dans des rainures, et maintenus par des feuillards soudés en surface. Ces pièces sont disposées sur un plateau support de charge. L'énergie consommée est également enregistrée pour chacune des zones de régulation.

3.2 - Maillage

Le four, de par sa symétrie, n'est maillé que sur une moitié. Le modèle I-DEAS est composé de 9907 éléments au total. On dénombre :

- 1850 éléments dans la porte et les parois verticales et la voûte,
- 301 éléments pour les résistances chauffantes,
- 1071 éléments en sole,
- 514 éléments pour le plateau,
- 1128 éléments pour la pièce en inconel,
- 240 éléments pour la pièce en acier inox.

Le complément correspond à des éléments d'interface entre matériaux, ainsi qu'à des éléments de surface utiles pour le rayonnement et la convection.

Les figures 2 et 3 donnent une idée du maillage du four, du plateau et des pièces.

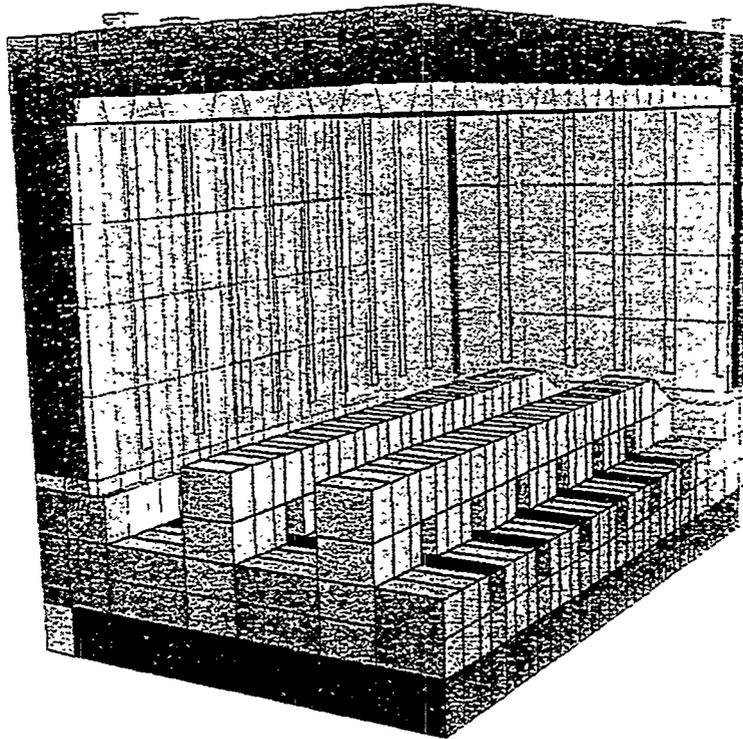


Figure 2 - Maillage du four industriel

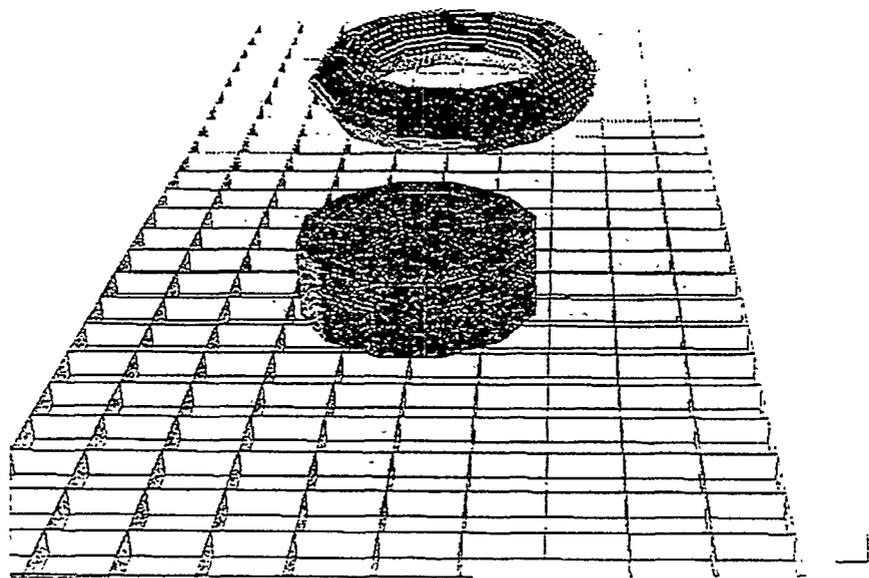


Figure 3 - Maillage du plateau et des pièces

3.3 - Simplifications

La taille de ce four est importante et il est constitué d'un grand nombre de matériaux différents. Dans le souci de limiter la taille du modèle, donc le nombre de maille, et par suite le temps de calcul, il a été nécessaire de mettre au point et de tester plusieurs simplifications basées sur une analyse physique.

3.3.1 - Mailles orthotropiques

Il s'agit de globaliser en une seule maille le comportement thermique de plusieurs matériaux juxtaposés. La conductivité équivalente dans une direction résulte d'un montage série-parallèle. Les conductivités obtenues sont différentes dans les trois directions de l'espace. Cette technique a été appliquée aux sorties froides (zone où la résistance traverse la paroi du four). Les flux sont conservés, mais les températures locales sont surestimées dans un rayon de 35 cm, d'une vingtaine de degrés au maximum. Ceci n'est pas gênant dans la mesure où l'intérêt se porte sur les températures des pièces traitées.

3.3.2 - Plan de symétrie

Limités par les capacités du logiciel (maximum de 1 million de facteurs de forme et 300 000 conductances), nous n'avons modélisé qu'une moitié de four. L'introduction d'un plan de symétrie adiabatique fausse les calculs de rayonnement. Nous avons essayé de quantifier cette erreur en étudiant analytiquement un cas simple, puis en simulant avec TMG un four simplifié. Il s'avère que la température des mailles proches du plan de symétrie est seule affectée. Il convient que la taille de celles-ci soit petite devant celles de ce plan. Le cas du four industriel est favorable car les pièces ne sont pas à cheval sur le plan de symétrie.

3.3.3 - Pertes thermiques par les attaches métalliques des parois fibreuses

Les parois du four sont en matériau fibreux et elles sont attachées à la carcasse métallique par l'intermédiaire de tiges en acier qui les traversent. Ces tiges de 8 mm de diamètre sont au nombre de 2 pour une surface de fibreux de 300 x 300 mm². Elles constituent des ponts thermiques non négligeables.

Les modéliser directement par des éléments aurait encore alourdi le modèle. Nous avons cependant pu en tenir compte dans les propriétés mêmes du fibreux que nous avons modifiées. Nous avons supposé un montage parallèle des conductivités de l'acier et du fibreux, compte tenu des surfaces qu'occupent chacun des matériaux. Pour la chaleur massique, il s'agit d'une moyenne pondérée des chaleurs spécifiques du fibreux et de l'acier.

3.3.4 - Liens entre maillages disjoints

Pour éviter un maillage continu trop fin dans tout le modèle nous avons, par endroit, lié thermiquement des maillages disjoints par des éléments de surface recouvrant ces mailles et permettant, par une fusion entre eux, un lien thermique (figure 4) entre toutes les mailles.

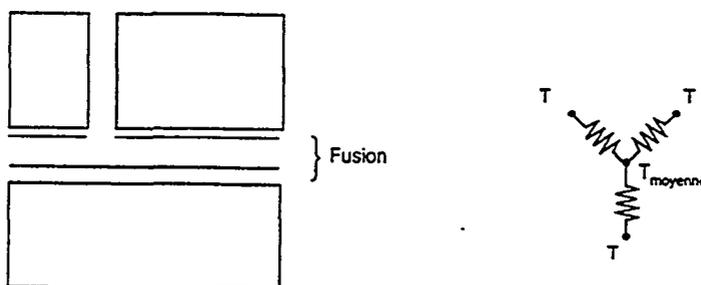


Figure 4 - Lien entre maillages disjoints

La perturbation du champ de température reste locale.

3.3.5 - Modélisation des résistances

Elles sont représentées par des éléments linéiques. Vis-à-vis du rayonnement, elles sont traitées comme un cylindre hexagonal à six facettes planes dont l'aire est égale à l'aire réelle.

Leur liaison avec des mailles volumiques se fait par l'intermédiaire d'une maille de surface sur laquelle on fusionne l'extrémité de la maille linéaire (figure 5). La chaleur est ainsi transférée d'une maille à l'autre.

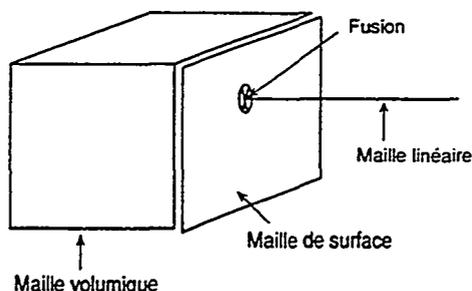


Figure 5 - Lien entre maille linéaire et maille volumique

3.4 - Résultats

Nous comparons ici les températures mesurées et celle issues de la simulation.

Les mesures montrent que la chauffe est parfaitement symétrique par rapport au plan médian du four.

Dans la pièce en inox, les écarts sont au maximum de 22°C, mais atteignent 30°C en fin de chauffe. La figure 6 montre l'évolution de la température à coeur.

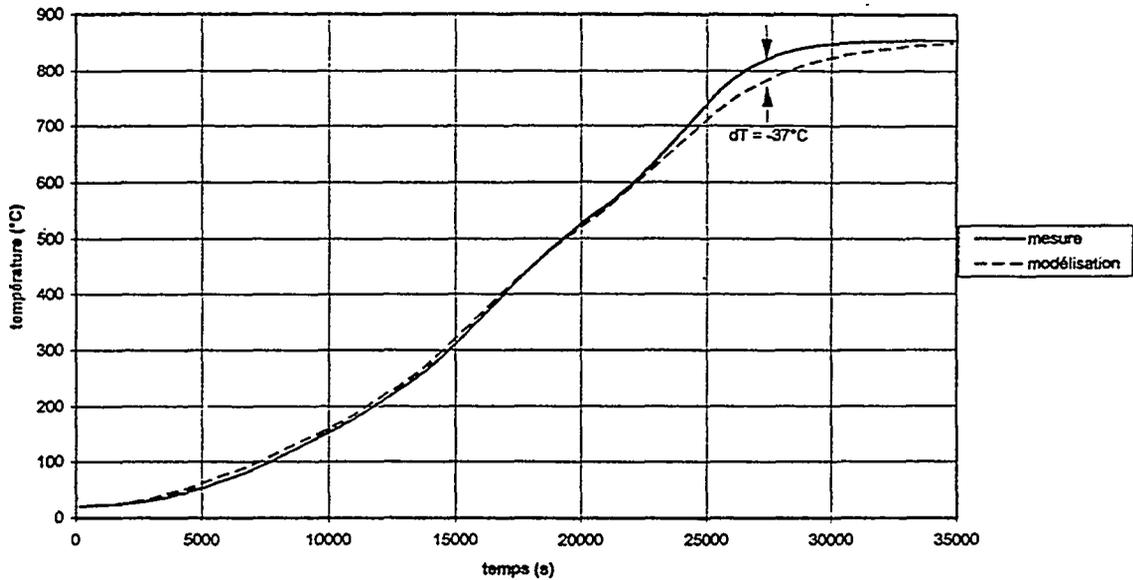


Figure 6 - Evolution de la température au coeur de la pièce en inox

Pour la pièce en inconel, les résultats sont bons pour la première partie du transitoire, mais ensuite la température simulée est supérieure à la température mesurée, contrairement à la pièce en inox (figure 7).

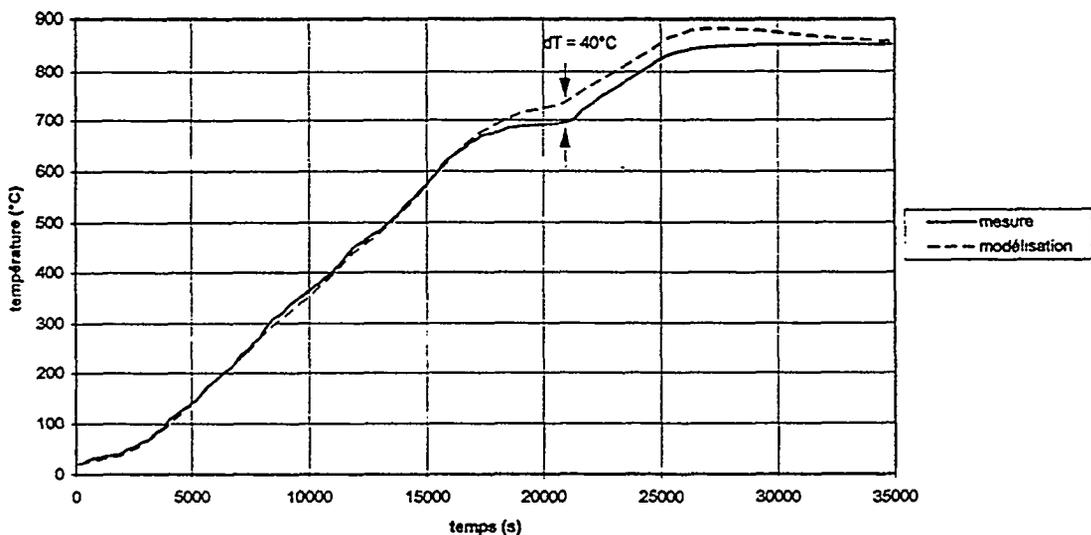


Figure 7 - Evolution de la température au coeur de la pièce en inconel

D'études précédentes, nous avons observé que les paramètres les plus influents sur les résultats de la simulation sont la puissance injectée, la conductivité des parois isolantes, et les chaleurs massiques des parois, des résistances et des pièces. C'est pourquoi nous avons fait mesurer ces propriétés physiques.

Nous mettons ici en évidence l'influence de l'émissivité des pièces en inox, dans cette configuration où la surface des pièces est faible par rapport à celle des parois.

Les pièces en inconel, déjà traitées plusieurs fois, ont une émissivité stable. Par contre les pièces en inox ont été enfournées brillantes et se sont oxydées en cours de chauffage. Leur émissivité a donc augmenté.

Les figures 8 et 9 montrent l'influence de l'émissivité de la pièce en inox (passage de 0,3 à 0,2) sur les températures des pièces en inox et en inconel. Il en résulte une diminution pour l'inox et une augmentation pour l'inconel.

Ceci explique les écarts obtenus en fin de chauffe dus à l'augmentation de l'émissivité des pièces en inox.

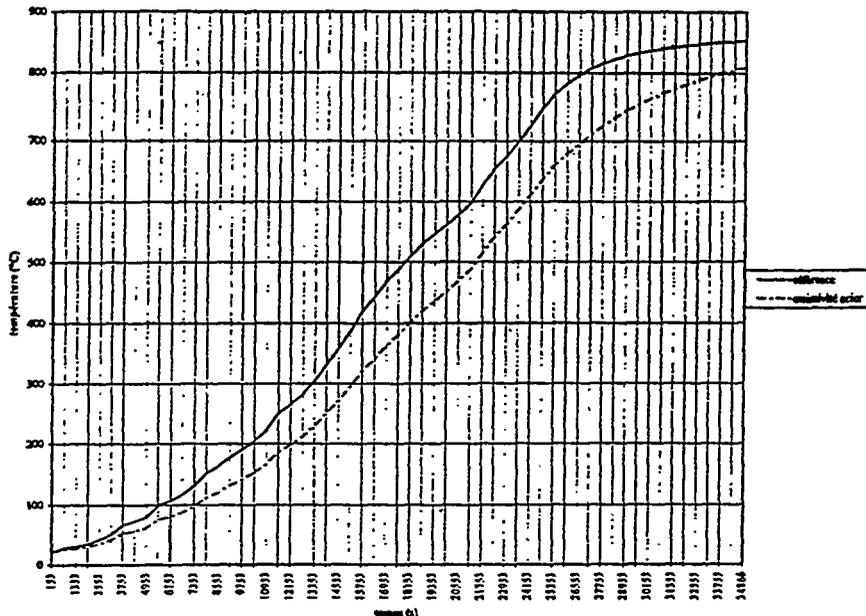


Figure 8 - Influence de l'émissivité de la pièce en inox sur sa température

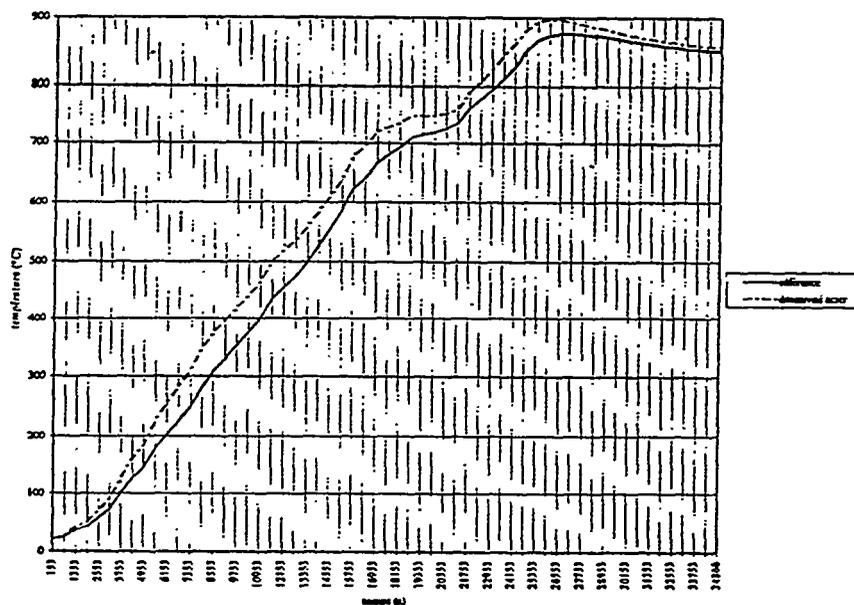


Figure 9 - Influence de l'émissivité de la pièce en inox par la température de la pièce en inconel

Compte tenu des simplifications effectuées, des erreurs de mesure en milieu industriel, des incertitudes sur les propriétés des matériaux, les résultats obtenus sont satisfaisants.

On notera que la convection naturelle dans l'enceinte, dont nous n'avons pas tenu compte, semble avoir une influence négligeable, car nous avons à faire à une montée en température assez lente.

4 - OPTIMISATION D'UN PROCÉDE INDUSTRIEL

Cette étude, menée en collaboration avec la société INNOVATIQUE spécialisée dans le traitement thermique, vise à élaborer une aide à la conduite des fours de traitement sous vide. Les cycles sont conduits jusqu'ici d'après un savoir-faire en fonction des charges introduites et de la nuance de l'acier traité. Mais rien n'indique que l'on soit à l'optimum, c'est-à-dire que le temps de traitement soit le plus court possible tout en respectant les diverses contraintes liées à la qualité requise.

4.1 - Construction du modèle

La figure 10 montre le maillage réalisé sur la partie chaude du four.

Ce casing est lui-même contenu dans une enceinte qui assure la tenue du vide et est elle-même refroidie à l'eau en paroi.

Un certain nombre de ponts thermiques existent entre la chambre chaude et l'extérieur de celle-ci :

- quatre piliers en acier soutiennent le support de charge et prennent appui sur la carcasse cylindrique refroidie par eau,
- trois amenées de courant en graphite traversent les enceintes et sont refroidies par eau,
- les barrettes de jonction entre les résistances sont maintenues par des attaches en molybdène isolées par des tuts en alumine reprises sur le casing en acier,
- le feutre graphite est également fixé au casing par des attaches en molybdène le traversant de part en part.

Tous ces dispositifs ne peuvent être modélisés en détail car cela conduirait à un modèle inexploitable. Afin d'économiser le maillage, on représente ceux-ci par des éléments poutres pour tenir compte de leur principale influence qui est une fuite thermique vers l'extérieur par conduction.

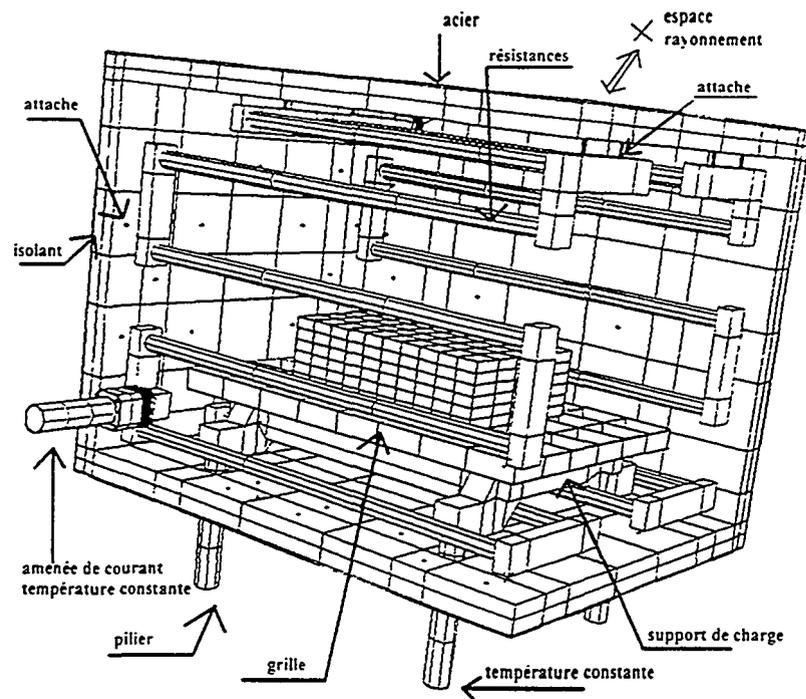


Figure 10 - Maillage d'un four de traitement thermique

4.2 - Validation expérimentale du modèle numérique

Plusieurs configurations de charges types ont été sélectionnées pour cette étude (figure 11). Nous présentons les résultats relatifs à la charge 2 et pour un acier de nuance XC48. Le modèle complet comprend 8000 éléments et 250 000 conducteurs. La figure 12 montre le faible écart entre modèle et expérience pour la température au cœur d'une des pièces. La puissance injectée dans les résistances est celle mesurée lors d'un cycle analogue à un cycle de production avec des montées à $10^{\circ}\text{C}/\text{mn}$ et deux paliers à 700°C et 870°C pour le thermocouple de régulation (ambiance proche des résistances).

La modélisation du changement de phase allotropique (fer α en fer γ) qui est endothermique s'est avérée indispensable, de même que la distinction entre une partie isotherme et l'autre à température variable, réalisée par le truchement d'un sous-programme utilisateur.

Le modèle numérique réalisé reproduit donc correctement le comportement du four réel. Ceci est confirmé par la concordance obtenue pour les autres types de charge au cours de divers cycles de chauffe.

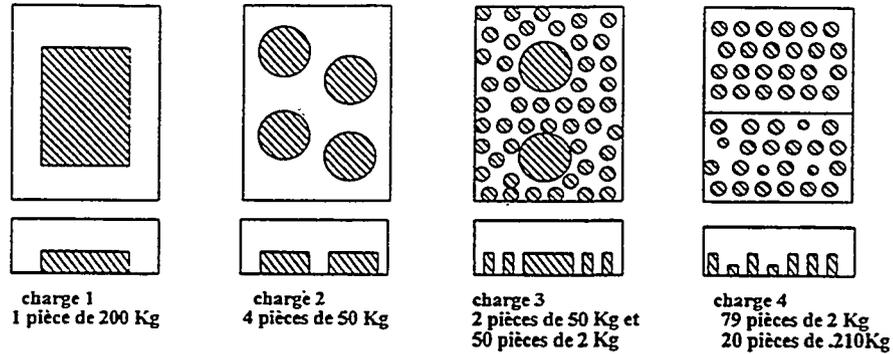


Figure 11 - Charges types

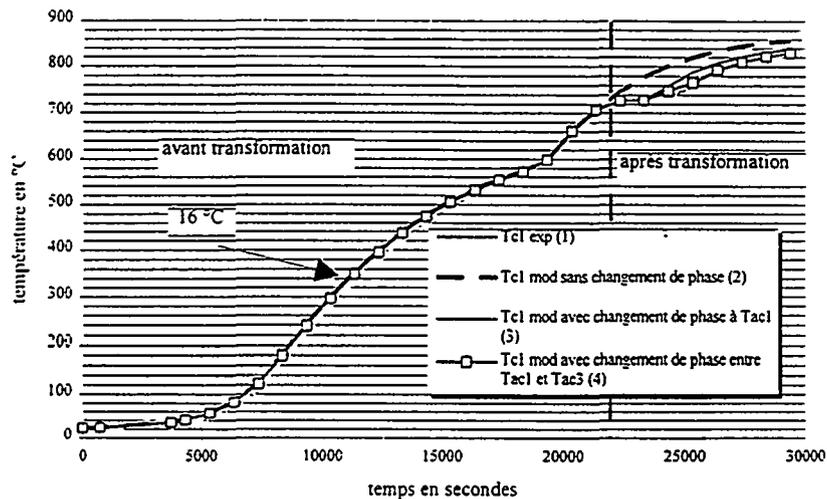


Figure 12 - Validation expérimentale sur la température à coeur de la charge

4.3 - Optimisation du chauffage

Pour nous permettre de piloter le modèle comme on conduirait le four réel, un algorithme de régulation PID lui a été adjoint. Il est ainsi possible de programmer la vitesse de montée en température, la durée et la température des paliers. Contrairement au four réel, c'est la température de résistance qui est ici régulée.

Pour rechercher le cycle optimal, un programme de régulation a été défini afin de faire monter les quatre pièces à la même température avec un ΔT (différence de température maximale entre le coeur et la peau) que l'on s'est fixé. Notre programme permet donc le contrôle de la température de la charge, de chacune des pièces et évite ainsi que les pièces dépassent le ΔT admissible. Pour cette charge, le ΔT admissible a été fixé à 50°C , ce qui correspond à la valeur constatée lors de la validation du modèle par des cycles réalisés en production. Ce paramètre demande à être affiné car il est évident que plus le ΔT admissible est important, plus la durée du cycle de chauffe est diminuée.

Le cycle obtenu amène la température des pièces de 20°C à 870°C en 3 h 30. Il fournit une évolution de la température de résistance, sur laquelle on calque une commande de régulation qui se décompose en montées et paliers. Ce nouveau cycle où l'on régule sur la résistance se réalise en 4 h et est directement utilisable.

Après différents essais sur le four réel, nous avons déterminé numériquement un nouveau cycle mieux adapté au système de régulation existant. Il dure 4 h 40 en simulation.

La validation de ce cycle par l'expérience a été fort concluante. Nous avons montré qu'il était possible de faire chauffer plus rapidement les pièces tout en ne dépassant pas le ΔT admissible. Le cycle de chauffe a été réalisé en 5 h au lieu de 8 h 30 pour un cycle classique de production, soit un gain de plus de 40 %.

Le tableau 1 et la figure 13 résument les résultats obtenus.

Cet exemple illustre les possibilités des techniques de simulation et d'optimisation des procédés industriels réels dans les fours à résistances.

TABLEAU 1 - CYCLES DE CHAUFFE

Cycles de chauffe		Durée
Cycle optimisé - régulation ΔT charge	(1)	3 h 30
Cycle optimisé - régulation résistance	(2)	4 h 00
Cycle optimisé appliqué au régulateur	(3)	4 h 40
Cycle optimisé réalisé sur four réel	(4)	5 h 00
Cycle de production 870°C/2 paliers palier de préchauffe à 700°C palier final à 870°C	(5)	8 h 30

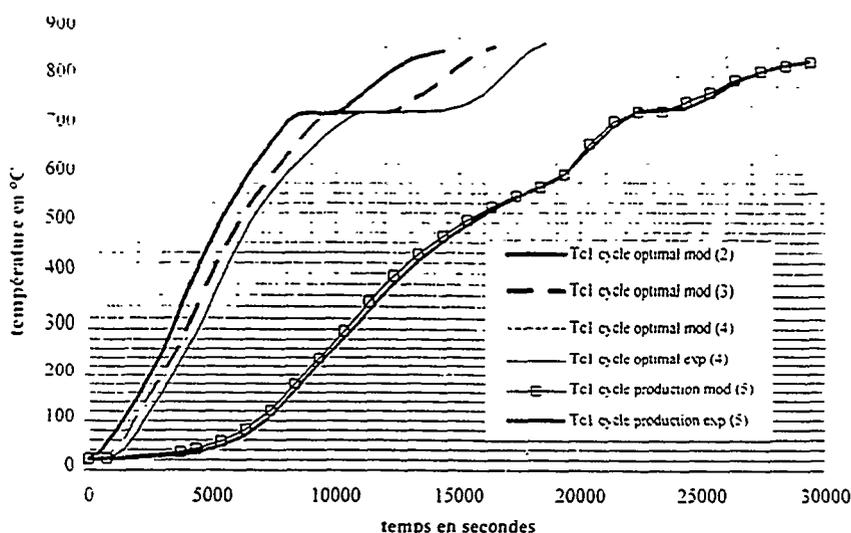


Figure 13 - Validation expérimentale du cycle optimisé

5 - CONCLUSION

Aborder la modélisation d'un appareil thermique industriel suppose une analyse physique préalable conduisant à la simplification des zones de moindre intérêt. Le maillage exhaustif étant impossible sous peine d'aboutir à des temps de calcul prohibitifs, le code utilisé doit permettre de rendre compte simplement de certains phénomènes (ponts thermiques, résistances de contact, globalisation de matériaux, etc...).

Il est indispensable de connaître avec précision les propriétés physiques les plus influentes et donc de les faire mesurer en fonction de la température par des laboratoires spécialisés. L'étude de sensibilité se réalise aisément à l'aide du modèle. Mais il faut garder à l'esprit que les matériaux constitutifs d'un four vieillissent et que leurs propriétés évoluent. L'émissivité est particulièrement délicate à actualiser.

Une confrontation avec l'expérience est donc toujours souhaitable et souvent indispensable. Les problèmes de mesure surgissent alors : puissance en présence d'une régulation et de courants déformés, température en milieu fortement rayonnant, contraintes du milieu industriel. Le modèle peut également aider à critiquer les mesures et à améliorer leur technique.

En conclusion, la modélisation des fours électriques industriels a un apport bénéfique dans trois domaines :

- la connaissance des phénomènes physiques et de leur couplage.
- le dimensionnement et la conception des appareils, par exemple combien de zones de régulation installer pour respecter l'homogénéité de chauffe désirée par le client.
- l'aide à la conduite des fours en optimisant les traitements effectués dans ces derniers.

SOCIETE FRANCAISE DES THERMICIENS

*JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

SUR

LES CODES DE CALCUL DE RAYONNEMENT THERMIQUE

DEVELOPPEMENT ET APPLICATION

DE LA METHODE DES ORDONNEES DISCRETES

EN COORDONNEES CURVILIGNES ORTHOGONALES

par Rodolphe VAILLON, Michel LALLEMAND et Denis LEMONNIER

Laboratoire d'Etudes Thermiques
Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique

BP 109, Site du Futuroscope
86960 FUTUROSCOPE Cedex

Résumé

La Méthode des Ordonnées Discrètes, de plus en plus répandue dans la communauté internationale du transfert radiatif, est essentiellement développée en coordonnées Cartésiennes, cylindriques (r,z) et (r,θ) et en coordonnées sphériques. Nous résumons ici notre approche de cette méthode en nous plaçant dans le cas général de coordonnées curvilignes orthogonales: écriture de l'Equation de Transfert Radiatif, traitement des termes de redistribution angulaire, procédure numérique.

Nous proposons quelques cas d'application en géométrie bidimensionnelle définie en coordonnées curvilignes le long d'une courbe, à l'équilibre radiatif. Une comparaison avec la Méthode des Ordonnées Discrètes associée à la méthode des volumes finis en maillage non structuré est effectuée.

1 Introduction

Depuis une dizaine d'années, la Méthode des Ordonnées Discrètes, élaborée à l'origine par les neutroniciens (Carlson et Lathrop [1], [2]), puis transposé dans le domaine radiatif par Fiveland [3], est de plus en plus utilisée pour décrire le champ des luminances directionnelles dans un milieu semi-transparent. Cependant, son développement est essentiellement réalisé en coordonnées Cartésiennes ([4], [5], [6], [7], [8], [9],...), en coordonnées sphériques et cylindriques (problèmes monodimensionnels: [10], [11]), en coordonnées cylindriques (r, z) ([3], [12], [13], [14]), et en coordonnées polaires (r, θ) ([15]).

Dans cette communication, nous résumons notre approche de la Méthode des Ordonnées Discrètes dans le cas très général de coordonnées curvilignes orthogonales (MOD-CCO). Nous reprenons les étapes essentielles de son développement en commentant les choix de procédure que nous avons été amenés à réaliser (choix de la quadrature, schéma de calcul du champ de luminances directionnelles). Une comparaison des résultats avec ceux de la Méthode des Ordonnées Discrètes associée à la méthode des volumes finis en maillage non structuré est effectuée.

2 Développement de la MOD-CCO

2.1 Objectifs

L'objectif des calculs du rayonnement dans un milieu semi-transparent est en général l'évaluation des sources d'énergie radiative¹ et/ou des flux radiatifs dans le milieu.

La source d'énergie radiative monochromatique s'écrit:

$$S_{\nu}^r = \text{div}(q_{\nu}^r) = \kappa_{\nu} \left[4\pi L_{\nu}^0 - \int_{4\pi} L_{\nu}(\vec{\Omega}) d\Omega \right] \quad (1)$$

où κ_{ν} est le coefficient d'absorption monochromatique, L_{ν}^0 est la fonction de Planck traduisant l'émission monochromatique du milieu et $L_{\nu}(\vec{\Omega})$ est la luminance monochromatique directionnelle.

Le flux monochromatique dans la direction \vec{n} a pour expression:

$$q_{\nu}^r(\vec{n}) = \int_{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} L_{\nu}(\vec{\Omega}) d\Omega \quad (2)$$

L'idée originelle de la Méthode des Ordonnées Discrètes est de remplacer les intégrales angulaires par des quadratures numériques:

$$\int_{4\pi} f(\vec{\Omega}) d\Omega = \sum_{n=1}^N w_n f(\vec{\Omega}_n) \quad (3)$$

où l'espace angulaire a été discrétisé en N directions distinctes $\vec{\Omega}_n$ auxquelles est associé à chacune un poids w_n . Plusieurs variantes de la MOD peuvent être utilisées selon le choix de la quadrature.

Le calcul des sources radiatives et des flux radiatifs nécessite de déterminer les champs de luminances dans le domaine spatial d'étude pour chacune des directions de la quadrature choisie. Il s'agit alors de résoudre l'Equation de Transfert Radiatif (ETR).

Pour notre part, l'extension de la MOD en coordonnées curvilignes orthogonales a nécessité une écriture générale de l'ETR dans de tels systèmes, avec notamment la détermination des termes de redistribution angulaires qui traduisent le changement d'orientation du repère en fonction du point d'étude. Nous utilisons ensuite une formulation en volumes finis. Nous commenterons le choix de quadrature et le choix de la procédure numérique de calcul des champs de luminances (centre et faces des mailles) que nous avons dû effectuer.

¹En dehors du problème de l'équilibre radiatif, c'est par cette source d'énergie radiative que s'établit le couplage avec les autres modes de transfert d'énergie. Cette source est introduite dans l'équation de conservation de l'énergie (ou de l'enthalpie).

2.2 Développement de l'ETR en coordonnées curvilignes orthogonales

2.2.1 L'Equation de Transfert Radiatif en formulation conservative

L'équation de transport des photons, encore appelée plus communément Equation de Transfert Radiatif (ETR) traduit la variation de la luminance monochromatique directionnelle (dans la direction $\vec{\Omega}$) définie en un point de l'espace s . Elle s'écrit, sous sa forme conservative, pour un milieu semi-transparent gris émettant-absorbant non diffusant [16]:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L_\nu(s, \vec{\Omega}) + \kappa_\nu L_\nu(s, \vec{\Omega}) = \kappa_\nu L_\nu^0[T(s), \vec{\Omega}] \quad (4)$$

où $L_\nu(s, \vec{\Omega})$ est la luminance monochromatique dans la direction $\vec{\Omega}$ définie au point s , $L_\nu^0[T(s), \vec{\Omega}]$ est la fonction de Planck définie à la température du point s , $\vec{\nabla}$ est l'opérateur *grad* (gradient) et κ_ν est le coefficient d'absorption monochromatique.

2.2.2 Ecriture en coordonnées curvilignes orthogonales

Nous définissons tout d'abord une origine du repère spatial, puis le type de coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3 (distance sur une droite, abscisse curviligne, angle) déterminant la position d'un point P de l'espace (voir figure 1).

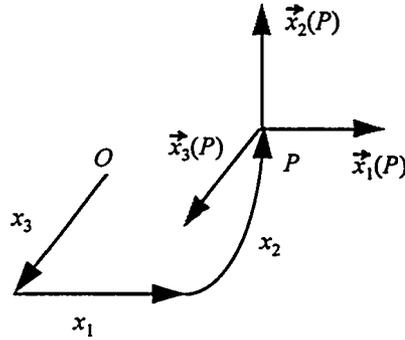


Figure 1: Système de coordonnées spatial et repère local.

Un repère local est construit en ce point P , de vecteurs de base:

$$\vec{x}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial x_i} \quad (5)$$

où les h_i sont les coefficients de la métrique.

La direction d'étude $\vec{\Omega}$ est définie dans le repère local par deux angles: φ l'angle polaire et ψ l'angle azimutal.

Dans l'exemple de la figure 2, l'axe polaire est défini par le vecteur \vec{x}_2 . Les cosinus directeurs correspondants s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \mu &= \sin \varphi \sin \psi \\ \eta &= \cos \varphi \\ \xi &= \sin \varphi \cos \psi \end{aligned} \quad (6)$$

Dans ces conditions, l'opérateur $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L$ qui apparaît dans l'écriture de la forme conservative de l'ETR (équation 4) se développe suivant:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\mu \frac{\partial h_2 h_3 L}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial h_1 h_3 L}{\partial x_2} + \xi \frac{\partial h_1 h_2 L}{\partial x_3} \right] \quad (7)$$

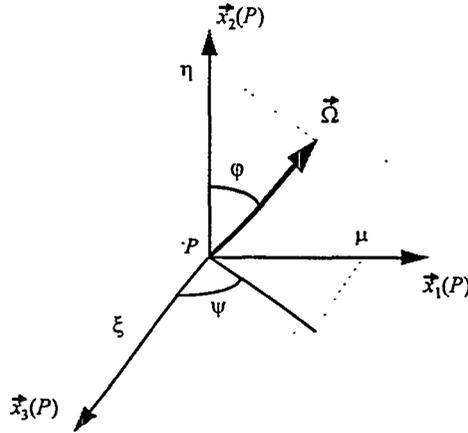


Figure 2: Repère local directionnel: définition de l'angle polaire, de l'angle azimutal et des cosinus directeurs.

En considérant une direction fixe dans le repère spatial, la luminance est une fonction des coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3 , mais également des angles définissant la direction dans le repère local φ et ψ . Or, ces angles varient en fonction de la position du point d'étude. Par conséquent, chaque dérivée $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de l'équation 7 peut être décomposée suivant:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i^P} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (8)$$

où:

$$\frac{\partial}{\partial x_i^P} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\varphi, \psi} \quad (9)$$

Par suite, nous obtenons une expression générale de la variation de la luminance sur un trajet élémentaire dans un système de coordonnées curvilignes orthogonal:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} \right) L = \left(\vec{\nabla}^P \cdot \vec{\Omega} \right) L + \vec{\nabla} \varphi \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} L}{\partial \varphi} + \vec{\nabla} \psi \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} L}{\partial \psi} \quad (10)$$

Les deux derniers termes du membre de droite sont appelés **termes de redistribution angulaire**.

L'écriture développée peut être consultée dans les références [17], [18].

2.2.3 Applications

Nous appliquons (cf Annexe) la procédure exposée précédemment en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , en coordonnées curvilignes le long d'une courbe $((s, n, z)$ et (s, n, θ)). Nous renvoyons le lecteur aux références [17], [18] pour tout détail utile.

2.3 Approximation de l'Equation de Transfert Radiatif par la Méthode des Volumes Finis

2.3.1 Intégration de l'ETR sur un volume et sur un angle solide élémentaires: formulation générale

L'Equation de Transfert Radiatif est intégrée sur le volume élémentaire $\delta V = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$ et sur l'angle solide élémentaire $\delta \Omega = \sin \varphi d\varphi d\psi$:

$$\int_{\delta V} \int_{\delta \Omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} \right) L d\Omega dV = \int_{\delta V} \int_{\delta \Omega} \kappa (L^0 - L) d\Omega dV \quad (11)$$

La procédure numérique caractéristique de la Méthode des Ordonnées Discrètes consiste alors à remplacer les intégrales sur l'angle polaire φ et sur l'angle azimutal ψ par des quadratures numériques. Soit, pour toute fonction f de φ et pour toute fonction g de ψ :

$$\int_{\delta\varphi_n} f(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \omega_n f(\varphi_n) \quad (12)$$

$$\int_{\delta\psi_m} g(\psi) d\psi = w_m g(\psi_m) \quad (13)$$

où ω_n et w_m sont les poids des quadratures.

Par conséquent, l'intégrale sur l'angle solide élémentaire $\delta\Omega$ d'une fonction F de φ et de ψ devient ([19], [20]):

$$\int_{\delta\Omega_{n,m}} F(\varphi, \psi) \sin \varphi d\varphi d\psi = \omega_n w_m F(\varphi_n, \psi_m) \quad (14)$$

2.3.2 Applications

En coordonnées cylindriques Nous reprenons la configuration en coordonnées cylindriques où l'axe polaire directionnel est porté par le vecteur radial. Le volume élémentaire de contrôle s'écrit $r dr d\theta dz$. L'intégration des variations spatiales de la luminance s'obtient aisément:

$$\int_{\delta V} \int_{\delta\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L d\Omega dV = \omega_n w_m (\mu_n \delta_i(rL) \delta_j\theta \delta_k z + \eta_{nm} \delta_j L \delta_i r \delta_k z + \xi_{nm} r \delta_k L \delta_i r \delta_j\theta) \quad (15)$$

où nous avons adopté la convention d'écriture compacte $\delta_l a = a_{l+1/2} - a_{l-1/2}$ pour toute grandeur a , et les indices i, j, k, n et m font respectivement référence à des variations suivant x_1, x_2, x_3, φ et ψ . Quand les indices sont omis, il s'agit implicitement de la valeur au centre de la maille (i, j, k) pour la direction (n, m) .

Les termes de redistribution angulaire s'intègrent suivant:

$$\int_{\delta V} \int_{\delta\Omega} \left(\vec{\nabla} \varphi \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} L}{\partial \varphi} + \vec{\nabla} \psi \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} L}{\partial \psi} \right) d\Omega dV = - \left[\frac{w_m \sin^2 \psi_m \delta_n (\sin^2 \varphi L) + \omega_n \cos \varphi_n \delta_m (\sin \psi \cos \psi L)}{\omega_n} \right] \delta_i r \delta_j \theta \delta_k z \quad (16)$$

Enfin:

$$\int_{\delta V} \int_{\delta\Omega} \kappa (L^0 - L) d\Omega dV = \omega_n w_m [\kappa (L^0 - L)] r \delta_i r \delta_j \theta \delta_k z \quad (17)$$

D'où la forme intégrée de l'ETR en coordonnées cylindriques (axe polaire radial):

$$\begin{aligned} & \mu_n \frac{\delta_i(rL)}{\delta_i r} + \eta_{nm} \frac{\delta_j L}{\delta_j \theta} + \xi_{nm} r \frac{\delta_k L}{\delta_k z} \\ & - \sin^2 \psi_m \frac{\delta_n (\sin^2 \varphi L)}{\omega_n} - \cos \varphi_n \frac{\delta_m (\sin \psi \cos \psi L)}{w_m} \\ & = r \kappa (L^0 - L) \end{aligned} \quad (18)$$

En coordonnées curvilignes (s, n, z) Nous renvoyons le lecteur à la référence [17].

En coordonnées curvilignes (s, n, θ) De la même manière, la forme intégrée de l'ETR est développée dans la référence [18].

2.4 Inconvénient lié à l'utilisation de la formulation conservative de l'ETR: insertion de degrés de liberté

Nous avons discrétisé l'Equation de Transfert Radiatif par une intégration de la formulation conservative sur un volume et un angle solide de contrôle. Cependant, une telle procédure conduit communément à une écriture qui ne vérifie pas l'annulation de $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L$ lorsque L est imposé constant [19].

2.4.1 Illustration en coordonnées cylindriques

Nous proposons une illustration en coordonnées cylindriques avec l'axe polaire dans la direction radiale. Dans l'ETR discrétisée 18, nous imposons $L = \text{constante}$ dans le membre de gauche (correspondant à $I = \int_{\delta V} \int_{\delta \Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L d\Omega dV$). Nous obtenons:

$$I = \mu_n - \sin^2 \psi_m \frac{\delta_n (\sin^2 \varphi)}{\omega_n} - \cos \varphi_n \frac{\delta_m (\sin \psi \cos \psi)}{w_m} \quad (19)$$

soit une expression qui n'est pas nécessairement nulle.

La correction à apporter s'effectue au niveau des termes de redistribution angulaire ([1],[5],[19]): des degrés de liberté sont introduits en remplaçant $\sin^2 \varphi$ par A et $\sin \psi \cos \psi$ par B . Des conditions sur A et B vont permettre d'assurer l'annulation de I :

$$I = \mu_n - \sin^2 \psi_m \frac{\delta_n A}{\omega_n} - \cos \varphi_n \frac{\delta_m B}{w_m} = 0 \quad (20)$$

Ces conditions sont:

$$\delta_m B = B_{m+1/2} - B_{m-1/2} = 0 \quad (21)$$

$$\delta_n A = \frac{1}{\sin^2 \psi_m} \omega_n \mu_n = \frac{1}{\sin^2 \psi_m} \omega_n \cos \varphi_n \quad (22)$$

La condition sur B peut s'écrire:

$$B_{m+1/2} = B_{m-1/2} = w_m \sin \psi_m \cos \psi_m \quad (23)$$

Si nous voulons déterminer les valeur de A à partir de la relation de récurrence 22, il est nécessaire de connaître la valeur de A pour $n = 1/2$. Or $\varphi_{1/2} = 0$ et A remplace $\sin^2 \varphi$. Nous prendrons donc:

$$A_{1/2} = \sin^2 \varphi_{1/2} = 0 \quad (24)$$

Toutes les valeurs utiles de A peuvent être calculées:

$$A_{n+1/2} = \frac{1}{\sin^2 \psi_m} A'_{n+1/2} \quad \text{avec} \quad A'_{n+1/2} = \sum_{k=1}^n \omega_k \cos \varphi_k \quad (25)$$

L'Equation de Transfert Radiatif intégrée et vérifiant l'annulation de $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L$ lorsque L est constant s'écrit alors:

$$\mu_n \frac{\delta_i (\tau L)}{\delta_i r} + \eta_{nm} \frac{\delta_j L}{\delta_j \theta} + \xi_{nm} r \frac{\delta_k L}{\delta_k z} - \frac{\delta_n (A' L)}{\omega_n} - \sin \psi_m \cos \psi_m \delta_m L = r \kappa (L^0 - L) \quad (26)$$

2.4.2 Application en coordonnées curvilignes (s, n, z)

En reprenant la même procédure (voir référence [17]) nous trouvons directement:

$$\begin{aligned} & \mu_{nm} \frac{\delta_i L}{\delta_i s} + \eta_n \frac{\delta_j [(1 + \Gamma n) L]}{\delta_j n} + \xi_{nm} (1 + \Gamma n) \frac{\delta_k L}{\delta_k z} \\ & - \Gamma \sin^2 \psi_m \frac{\delta_n (A' L)}{\omega_n} + \Gamma \cos \varphi_n \sin \psi_m \cos \psi_m \delta_m L \\ & = (1 + \Gamma n) \kappa (L^0 - L) \end{aligned} \quad (27)$$

avec

$$A'_{n+1/2} = \sum_{k=1}^n \omega_k \cos \varphi_k$$

2.5.2 Maillage du domaine

Le maillage du domaine est structuré: respectivement I, J, K intervalles de longueur adaptable sur les segments de définition du domaine $x_1 \in [x_{1_{\min}}, x_{1_{\max}}]$, $x_2 \in [x_{2_{\min}}, x_{2_{\max}}]$, $x_3 \in [x_{3_{\min}}, x_{3_{\max}}]$. Nous donnons un exemple de maillage (s, n) (voir figure 4) dans le cas d'un milieu confiné entre deux hyperboles.

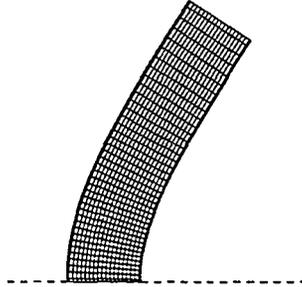


Figure 4: Exemple de maillage.

2.5.3 Calcul des champs de luminances directionnelles

La détermination des luminances directionnelles associées à chaque maille est possible grâce à l'approximation de l'ETR. Cette équation fait cependant apparaître des termes de luminances aux surfaces des mailles. Certaines sont connues (conditions aux limites), d'autres constituent les inconnues supplémentaires. Il est par conséquent nécessaire d'ajouter des relations. Pour notre part, nous utilisons des schémas d'interpolation classiques [2]. Les méthodes plus sophistiquées d'El Wakil [24], de Thurgood (HEART, [6]) et de Le Dez [25] semblent, dans un premier temps, peu évidentes à étendre au type de géométrie considéré (surfaces à rayon de courbure variable).

Nous renvoyons le lecteur aux références [17] et [18] pour tout détail sur la procédure de calcul des champs de luminances.

3 Applications

3.1 Validation

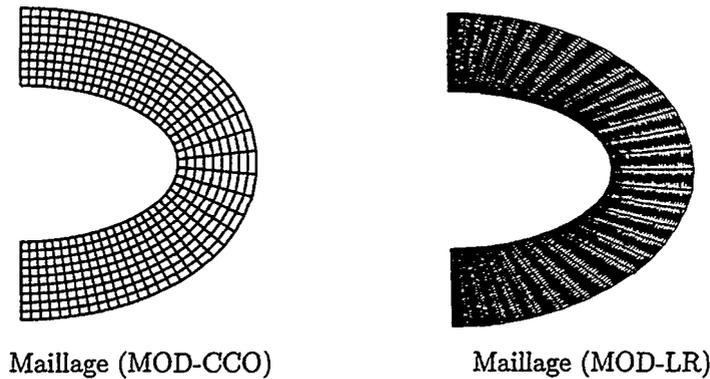
L'extension de la Méthode des Ordonnées Discrètes a été validée avec succès en géométrie (s, n) dans le cas de l'équilibre radiatif entre deux cylindres infinis par comparaison à des résultats en Monte-Carlo (réf [17]) et de la même manière en géométrie (s, n, θ) axisymétrique dans le cas de l'équilibre radiatif entre deux sphères concentriques par comparaison à des résultats exacts (réf [18]).

3.2 Comparaison avec la Méthode des Ordonnées Discrètes associée à la méthode des volumes finis en maillage non structuré.

La MOD-CCO et la Méthode des Ordonnées Discrètes associée à la méthode des volumes finis en maillage non structuré ([25], [26]) ont le seul point commun qu'elles utilisent une quadrature numérique pour calculer les sources et les flux radiatifs. Le tableau qui suit permet de distinguer les deux méthodes:

	MOD-CCO	MOD-LR
Coordonnées	Curvilignes Orthogonales	Cartésiennes
Approximation	Volumes Finis	Volumes Finis
Maillage	Structuré	Non Structuré
Calcul des luminances	Interpolations	Lancer de Rayons

Ces deux méthodes sont mises en œuvre en géométrie bidimensionnelle: il s'agit d'un milieu absorbant-émettant mais non diffusant compris en deux demi-ellipses (les petit axe et grand axe sont respectivement de $1m$ et $2m$ pour l'ellipse intérieure et de $2m$ et $3m$ pour l'ellipse extérieure). Les surfaces sont noires à température imposée ($1000K$ pour l'ellipse interne, $500K$ pour l'ellipse externe et les deux autres surfaces limites).



3.2.1 A l'équilibre radiatif

Nous comparons les profils de température sur l'axe de symétrie dans le cas de l'équilibre radiatif, pour trois valeurs de l'épaisseur optique $\tau = \kappa d$ où d est l'épaisseur du cylindre.

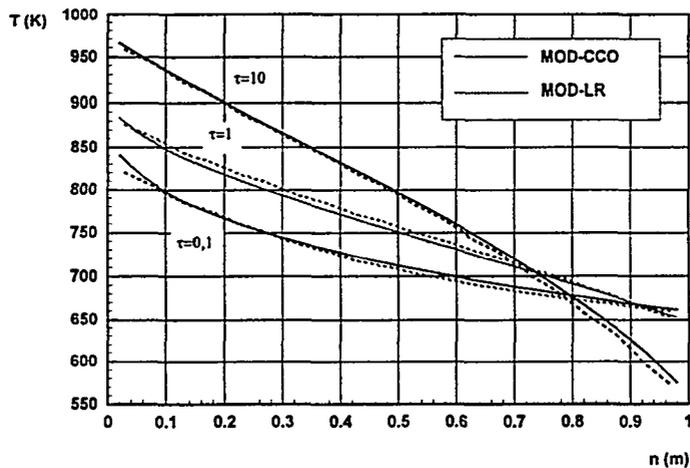


Figure 5: Profil de température sur l'axe de symétrie en fonction de l'épaisseur optique.

Les résultats obtenus en rayonnement pur sont en bon accord (de zéro à quelques pourcents d'écart).

3.2.2 En couplage rayonnement-conduction

Pour la même configuration, le même type de comparaison est effectué [26] en couplage rayonnement-conduction pour différentes valeurs du nombre de Planck² (0,001; 1 et 10) et du coefficient d'absorption. La résolution de l'équation de conservation de l'énergie est formulée en Volumes Finis pour le couplage avec la MOD-CCO et en Eléments Finis pour le couplage avec la MOD-LR.

²Le nombre de Planck est défini par $N_p = \frac{\lambda \kappa}{4\sigma T_{max}^3}$ où λ est la conductivité thermique, κ le coefficient d'absorption.

3.3 Illustration en géométrie (s, n, θ) axisymétrique

Pour un hyperboloïde construit à partir de la rotation d'une couche comprise entre deux hyperboles (voir l'exemple de maillage de la figure 4), nous montrons le champ de température obtenu à l'équilibre radiatif dans le cas où l'épaisseur optique suivant la normale est de 0,1. D'autres résultats de calcul à l'équilibre radiatif dans des géométries axisymétriques sont disponibles dans la référence [18].

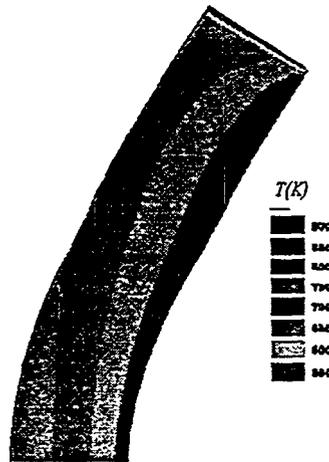


Figure 6: Champ de températures à l'équilibre radiatif pour une épaisseur optique $\tau = 0,1$.

3.4 Domaines d'application de la MOD-CCO

La Méthode des Ordonnées Discrètes développée en Coordonnées Curvilignes Orthogonales permet d'étudier le rayonnement dans des géométries complexes bi- et tri-dimensionnelles s'appuyant sur une courbe gauche quelconque. Ses applications apparaissent multiples: dans le domaine du verre (fours, bouteilles,...), pour l'étude des couches de choc réactives en écoulement hypersonique, dans le domaine de l'astrophysique (étoiles à forme ellipsoïdales). De plus, cette méthode peut aisément traiter les milieux non gris par couplage avec une méthode spectrale formulée en coefficient d'absorption (WSGG, méthode c-k, WSGG basée sur la distribution des coefficients d'absorption (Denison et Webb [27])).

4 Conclusions, perspectives

Nous avons résumé notre approche de la Méthode des Ordonnées Discrètes en Coordonnées Curvilignes Orthogonales. Celle-ci, après validation dans des cas référencés disponibles, a pu être confrontée, avec succès, dans la configuration particulière d'un milieu compris entre deux ellipses, à la Méthode des Ordonnées Discrètes associée à la méthode des volumes finis en maillage non structuré. Jusqu'alors appliquée en géométrie bidimensionnelle (s, n) et (s, n, θ) axisymétrique, l'extension 3D de la MOD-CCO (la formulation est d'ores et déjà réalisée) constitue notre prochain objectif.

REFERENCES

- [1] Carlson B.G., "Solution of the transport equation by S_n approximations", *Los Alamos Scientific Laboratory Report*, LA-1599, 1953.
- [2] Carlson B. G. et Lathrop K.D., "Transport theory. The method of discrete ordinates", *Computing Methods in Reactor Physics*, Gordon and Breach, 1968.
- [3] Fiveland W. A., "A Discrete Ordinates Method for predicting Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Enclosures", *ASME Paper*, 82-HT-20, 1982.
- [4] Fiveland W. A., "Discrete Ordinates Method for Radiative Heat Transfer in Isotropically and Anisotropically Scattering Media", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, pp 809-812, Août 1987.
- [5] Lewis E. E. et Miller W. F., *Computational Methods of Neutron Transport*, John Willey & Sons Inc., 1984.
- [6] Thurgood C. P., *A Critical Evaluation of the Discrete Ordinates Method using HEART and T_N Quadrature*, Thesis, Department of Chemical Engineering Queen's University at Kingston, 1992.
- [7] Fiveland W. A., "Discrete Ordinates Solutions of the Radiation Transport Equation for Rectangular Enclosures", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, pp 699-706, 1984.
- [8] Fiveland W. A., "Three Dimensional Radiative Heat Transfer Solutions by the Discrete Ordinates Method", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 2, N. 4, pp 309-316, 1988.
- [9] Truelove J.S., "Three Dimensional Radiation in Absorbing-Emitting-Scattering Media using the Discrete Ordinates Approximation", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 42, N. 3, pp 187-189, 1989.
- [10] Tsai J. R., Özisik M. N. & Santarelli F., "Radiation in Spherical Symmetry with Anisotropic Scattering and Variable Properties", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 39, N. 1, pp 27-31, 1988.
- [11] Tsai J. R. & Özisik M. N., "Radiation in Cylindrical Symmetry with Anisotropic Scattering and Variable Properties", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, N. 12, pp 2651-2658, 1990.
- [12] Jamalludin A. & Smith P. J., "Predicting Radiative Transfer in Axisymmetric Cylindrical Enclosures using the Discrete Ordinates Method", *Combustion Science and Technology*, Vol. 62, pp 173-186, 1988.
- [13] Jendoubi S., Lee H. S. & Kim T. K., "Discrete Ordinates Solutions for Radiatively Participating Media in a Cylindrical Enclosure", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 7, N. 2, pp 213-219, 1993.
- [14] Bouguerra E. H., "Etude des Transferts Couplés Conduction-Convection-Rayonnement dans les Milieux Semi-transparents par la Méthode des Ordonnées Discrètes", *Thèse de 3^{ème} Cycle*, Laboratoire d'Etudes Thermiques, ENSMA, Université de Poitiers, 1993.
- [15] Yücel A. & Williams L., "Azimuthally Dependent Radiative Transfer in Cylindrical Geometry", *Fundamental & Applied of Radiative Heat Transfer*, ASME HTD 72, pp 29-37, 1987.
- [16] Chandrasekhar S., *Radiative Transfer*, Dover Publications Inc., New York, 1960.
- [17] Vaillon R., Lallemand M. et Lemonnier D., "Radiative Heat Transfer in Orthogonal Curvilinear Coordinates using the Discrete Ordinates Method", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, accepté, reçu le 29 Mars 1995.
- [18] Vaillon R., Lallemand M. et Lemonnier D., "Radiative Equilibrium in Axisymmetric semi-transparent gray shells using the Discrete Ordinates Method", *International Symposium on Radiative Heat Transfer*, Kusadasi, Turquie, à paraître dans *Physica*, 1995.

- [19] Jones P. D., Bayazitoglu Y., "Coordinates Systems for the Radiative Transfer Equation in Curvilinear Media", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 48, N. 4, pp 427-440, 1992.
- [20] Abu-Shumays I. K., "Compatible Product Angular Quadrature for Neutron Transport in x-y Geometry", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 64, pp 299-316, 1977.
- [21] Chai J. C., Lee H. S. et Patankar S. V., "Finite Volume Method for Radiation Heat Transfer", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 8, N. 3, pp 419-425, 1994.
- [22] Raythby G. D. et Chui E. H., "A Finite-Volume Method for Predicting a radiant Heat Transfer in Enclosures with Participating Media", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 112, N. 2, pp 415-423, 1990.
- [23] Fiveland W. A. et Jessee J. P., "Finite Element Formulation of the Discrete Ordinates Method for Multidimensional Geometries", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 8, N. 3, pp 426-433, 1994.
- [24] El Wakil N., "Etude de transferts de chaleur par conduction, convection et rayonnement couplés dans les milieux semi-transparents fluides ou poreux. Elaboration de modèles de simulation en géométrie bidimensionnelle", *Thèse de 3^{ème} Cycle*, INSA Lyon, 1991.
- [25] Le Dez V. et Charette A., "Application of the Discrete Ordinates Method to Bidimensional Grey Medium of Complex Shape in Radiative Equilibrium", *EUROTHERM 36, Advanced Concepts and Techniques in Thermal Modelling*, LET ENSMA, Sept. 1994.
- [26] Le Dez V., Sakami M., Charette A. et Lallemand M., "Méthode des Ordonnées Discrètes associée à la Méthode des Volumes Finis en Maillage Non Structuré", *Journée d'Etudes, Société Française des Thermiciens*, Paris, 6 Déc. 1995.
- [27] Denison M. K. et Webb B. W., "A Spectral Line-based Weighted-Sum-of-Gray-Gases Model for Arbitrary RTE Solvers", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 115, pp 1004-1012, 1993.

Annexe

Pour les différents systèmes de coordonnées étudiés, $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L$ se développe suivant:

$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}) L$	
(r, θ, z)	
$\frac{1}{r}$	$\begin{aligned} & \cos \varphi \frac{\partial r L}{\partial r} + \sin \varphi \sin \psi \frac{\partial L}{\partial \theta} + \sin \varphi \cos \psi r \frac{\partial L}{\partial z} \\ & - \sin^2 \psi \frac{\partial \sin \varphi L}{\partial \varphi} - \cos \varphi \cos \psi \frac{\partial \cos \psi L}{\partial \psi} \end{aligned}$
(s, n, z)	
$\frac{1}{1 + \Gamma n}$	$\begin{aligned} & \sin \varphi \sin \psi \frac{\partial L}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial (1 + \Gamma n) L}{\partial n} + \xi (1 + \Gamma n) \frac{\partial L}{\partial z} \\ & - \Gamma \sin \psi \frac{\partial \cos \varphi L}{\partial \varphi} - \Gamma \cos \varphi \cos \psi \frac{\partial \cos \psi L}{\partial \psi} \end{aligned}$
(s, n, θ)	
$\frac{1}{(r_a + n\sigma)(1 + \Gamma n)}$	
$\begin{aligned} & \sin \varphi \sin \psi \frac{\partial [(r_a + n\sigma) L]}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial [(r_a + n\sigma)(1 + \Gamma n) L]}{\partial n} + \sin \varphi \cos \psi (1 + \Gamma n) \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ & - [(r_a + n\sigma) \Gamma \sin^2 \psi + (1 + \Gamma n) \sin \alpha \cos^2 \psi] \frac{\partial \sin \varphi L}{\partial \varphi} \\ & - (r_a + n\sigma) \Gamma \cos \varphi \cos \psi \frac{\partial \sin \psi L}{\partial \psi} \\ & + (1 + \Gamma n) (\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \sin \psi) \frac{\partial \cos \psi L}{\partial \psi} \end{aligned}$	

Γ est la courbure locale, r_a est le rayon de la surface intérieure et $\sigma = \sin \alpha$ où α est l'angle entre l'axe de symétrie et la direction normale \vec{n} (cf figures 7 et 8)

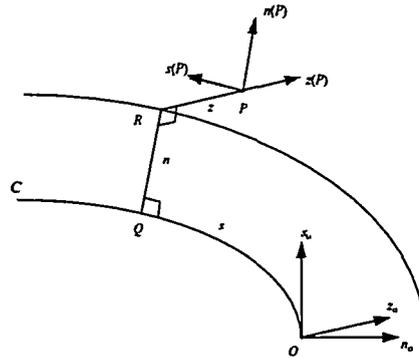


Figure 7: Système de coordonnées spatial (s, n, z) et repère directionnel local.

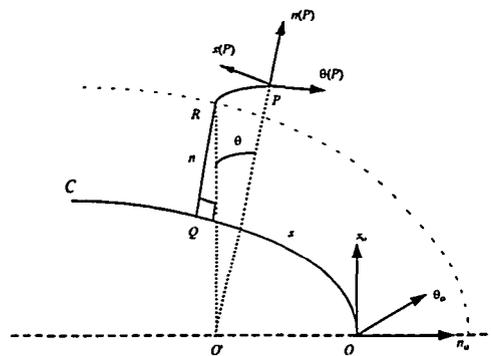


Figure 8: Système de coordonnées spatial (s, n, θ) et repère directionnel local.

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DES THERMICIENS

*JOURNÉE D'ÉTUDES DU 14 FÉVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

MÉTHODE DES ORDONNÉES DISCRÈTES ASSOCIÉE À LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN MAILLAGE NON STRUCTURÉ

par V. LE DEZ, M. SAKAMI (*), A. CHARETTE (*) et M. LALLEMAND

Laboratoire d'Études Thermiques (U.R.A. C.N.R.S 1403), E.N.S.M.A, Site du Futuroscope,
86960, Futuroscope Cédex

(*) Groupe de Recherche en Ingénierie des Procédés et Systèmes, Département des Sciences
Appliquées. Université du Québec à Chicoutimi, Chicoutimi, G7H 2B1, Québec, Canada

Résumé

Dans cette communication, nous proposons la description d'une méthode efficace dans la détermination du champ radiatif dans un milieu semi-transparent gris, soit à l'équilibre radiatif soit en situation de couplage rayonnement-conduction, contenu dans une cavité polygônale bi-dimensionnelle dont les surfaces frontières réfléchissent le rayonnement de façon purement diffuse. La technique utilise simultanément les méthodes des volumes finis en maillage triangulaire non-structuré, des ordonnées discrètes et du lancer des rayons. Les principaux développements mathématiques, ainsi que des résultats comparatifs avec la méthode des ordonnées discrètes en coordonnées curvilignes orthogonales y sont insérés.

1. Introduction

Depuis de nombreuses années, l'attention des thermiciens a été attirée par la résolution de problèmes dans lesquels interviennent des phénomènes radiatifs complexes généralement couplés avec d'autres modes de transfert thermique dans les milieux semi-transparents (mst); de telles situations apparaissent dans divers procédés industriels, tels l'élaboration des produits verriers, ou bien encore dans les fours et chaudières de combustion. La difficulté du problème est souvent telle, que la plupart des études s'y rapportant se sont limitées au cas de milieux gris dans des géométries beaucoup plus simples, carrées, rectangulaires ou cylindriques, que celles existant dans la réalité industrielle. L'intérêt des solutions exactes étant surtout de recaler les différents modèles, les travaux précédents se sont surtout attachés à résoudre les problèmes radiatifs à l'aide de méthodes approchées. Crosbie et Schrenker [1] ont obtenu à l'aide d'un calcul rigoureux le champ des luminances directionnelles dans une cavité carrée enfermant un milieu gris à l'équilibre radiatif. En raison de sa relative simplicité conceptuelle et de sa bonne efficacité, la méthode des ordonnées discrètes a reçu un accueil favorable, et de nombreux travaux ont été réalisés dans cette optique en géométrie tridimensionnelle cartésienne [2] et cylindrique [3]. Une extension de cette méthode a été menée à bien par Thurgood [4] qui a utilisé un schéma relativement précis (Heart scheme) associé à un type particulier de quadrature T_n qu'il a lui-même développée: cette technique produit des résultats dans l'ensemble satisfaisants, mais malgré tout sujets à de possibles oscillations inhérentes aux différents schémas d'interpolation. Peu d'études en revanche ont été abordées dans des géométries moins académiques: citons cependant celle de Vaillon et al. [5] en coordonnées curvilignes orthogonales: quant à Rousse et Baliga [6], ils se sont attachés depuis quelques années à résoudre le problème en géométrie complexe à l'aide d'une formulation en volumes de contrôle. Notre approche est de proposer une technique qui puisse être appliquée dans une géométrie quelconque bidimensionnelle et dont l'extension soit possible sans trop de difficultés aux géométries tridimensionnelles quelconques, les géométries utilisées étant maillées à l'aide de triangles non structurés (dans le cas bidimensionnel) ou de tétraèdres non structurés (dans le cas tridimensionnel). La méthode proposée produit de bons résultats, lorsqu'on la compare aux résultats de Crosbie et Schrenker [1] en géométrie cartésienne bidimensionnelle [7], [8]. Elle est construite de telle sorte qu'elle évite l'apparition de luminances négatives et tout type d'oscillations sur les champs de luminances. Nous présentons des résultats de champs de température dans un mst à l'équilibre radiatif en géométrie complexe, ainsi que des résultats en couplage rayonnement-conduction pour un mst compris entre deux demi-ellipses, ces derniers étant comparés avec ceux de Vaillon et al. [9].

2. Équations de base et modèle géométrique

Le modèle géométrique est une cavité polygonale bi-dimensionnelle dont les surfaces frontières réfléchissent le rayonnement de façon purement diffuse, soumises à des conditions de

température imposée. L'enceinte contient un mst gris absorbant, émettant et éventuellement diffusant, qui est soit à l'équilibre radiatif, soit en condition de couplage conduction-rayonnement. La cavité est maillée à l'aide de cellules triangulaires quelconques, dans lesquelles les quantités physiques, telles la température, sont supposées être constantes.

À l'équilibre radiatif, le champ des températures obéit à l'équation:

$$T(s) = \left[\frac{\left(\int_{\Omega=4\pi} I(s, \Omega) d\Omega \right)}{4\sigma} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1)$$

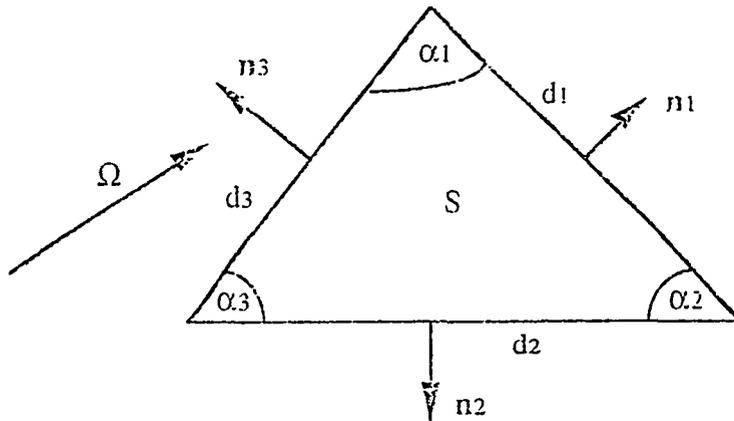
tandis qu'en couplage conduction-rayonnement en régime stationnaire, celui-ci est gouverné par l'équation:

$$\begin{aligned} k_c \nabla^2 T &= \text{div } q_r \\ \text{div } q_r &= \kappa \left[4\sigma T^4(s) - \int_{\Omega=4\pi} I(s, \Omega) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (2)$$

où k_c est la conductivité thermique du mst, κ le coefficient d'absorption du mst, σ la constante de Planck-Boltzmann, $\text{div } q_r$ la divergence du flux radiatif local, et où la luminance locale $I(s, \Omega)$ est obtenue en résolvant l'équation de transfert radiatif (ETR):

$$\frac{1}{\beta} \nabla [I(s, \Omega) \Omega] + I(s, \Omega) = (1 - \omega) I^0(s) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \Phi(\Omega', \Omega) I(s, \Omega') d\Omega' \quad (3)$$

avec β le coefficient d'extinction du mst, ω l'albedo et Φ la fonction de phase de diffusion.



En intégrant l'ETR sur une cellule élémentaire telle que représentée ci-dessus et indiquée par i, on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \iint_{S_i} \nabla [I(s, \Omega) \Omega] d\Sigma_i + \iint_{S_i} I(s, \Omega) d\Sigma_i &= (1 - \omega) \iint_{S_i} I^0(s) d\Sigma_i \\ + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \Phi(\Omega', \Omega) \int_{S_i} I(s, \Omega') d\Omega' d\Sigma_i \end{aligned} \quad (4)$$

En appliquant le théorème de Stokes sur le premier terme du membre de gauche de l'équation:

$$\iint_{S_i} \nabla [I(s, \Omega) \Omega] d\Sigma_i = \int_{\Gamma_i} I(s, \Omega) \Omega \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5)$$

où Γ est le contour de la cellule, et \mathbf{n} la normale extérieure locale au contour. Dans une cellule triangulaire, le contour étant constitué de trois segments de droite, les produits scalaires entre la direction de propagation Ω et la normale extérieure sont constants sur chaque segment d , soit:

$$\int_{\Gamma_i} I(s, \Omega) \Omega \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \sum_{k=1}^3 \Omega \cdot \mathbf{n}_k^i \int_{d_k^i} I(s, \Omega) d\Gamma_k^i \quad (6)$$

L'équation intégrée s'écrit alors finalement:

$$\frac{1}{\beta S^i} \sum_{k=1}^3 (\Omega \cdot \mathbf{n}_k^i) d_k^i I_k^i(\Omega) + I^i(\Omega) = (1 - \omega) I_i^0 + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \Phi(\Omega', \Omega) I^i(\Omega') d\Omega' \quad (7)$$

où $I^i(\Omega)$ et $I_k^i(\Omega)$ sont des grandeurs moyennes définies par:

$$I^i(\Omega) = \frac{1}{S^i} \int_{S^i} I(s, \Omega) d\Sigma_i \quad I_k^i(\Omega) = \frac{1}{d_k^i} \int_{d_k^i} I(s, \Omega) d\Gamma_k^i \quad (8)$$

Le terme intégral apparaissant dans l'éq. (7) est approché par une somme discrète (c'est le principe de base de la méthode des ordonnées discrètes), ce qui conduit au système linéaire suivant, dans le cas d'un milieu diffusant:

$$\forall m \in \{1, \dots, L\} \quad I_m^i - \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m'=1}^L w_{m'} \Phi_{m'm} I_{m'}^i = (1 - \omega) I_i^0 - \frac{1}{\beta S^i} \sum_{k=1}^3 \varphi_k^i d_k^i I_{km}^i \quad (9)$$

où on a posé $\varphi_{km}^i = \Omega_m \cdot \mathbf{n}_k^i$; $\{\Omega_{m'}, w_{m'}\}$ définit une quadrature de L directions discrètes $\Omega_{m'}$ auxquelles sont associés les poids $w_{m'}$.

Lorsque le champ des luminances directionnelles est obtenu, la divergence du flux radiatif dans la cellule i s'exprime alors, en utilisant la quadrature:

$$\text{div } q_r^i = \kappa \left(4 \sigma T_i^4 - \sum_{m=1}^L w_m I_m^i \right) \quad (10)$$

Les éqs. (1) [respectivement (2)] et (9) sont nécessaires à l'obtention du champ radiatif dans le milieu, mais insuffisantes, puisqu'il y a plus d'inconnues que d'équations: il faut donc fermer le système linéaire (9). La solution que nous proposons, compte tenu de la difficulté de faire des interpolations simples dans des mailles triangulaires quelconques, est une extension du schéma de Thurgood [4]: dans notre cas, un faisceau de rayons parallèles (en nombre infini) à une direction particulière Ω couvrant l'ensemble de la cellule est utilisé, et la technique s'apparente de fait à une méthode du lancer de faisceaux, produisant des résultats partiellement analytiques.

Sur un trajet borné parallèle à Ω , la solution de l'ETR s'exprime par:

$$I(s_f, \Omega) = I(s_i, \Omega) e^{-\beta t} + \beta \int_{s=s_i}^{s_f} \left[(1 - \omega) I_b(s) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=\pi} \Phi(\Omega, \Omega') I(s, \Omega') d\Omega' \right] e^{-\beta(s_f-s)} ds \quad (11)$$

où s_i est l'abscisse curviligne au début du trajet, s_f la position finale du trajet, et $t = s_f - s_i$.

Si on admet que $I(s, \Omega')$ est uniforme dans la maille, de valeur $I^j(\Omega')$, alors en choisissant une direction Ω de la quadrature, l'éq. (11) s'écrit:

$$\forall m \in \{1, \dots, L\} \quad I_m^f = I_m^i e^{-\beta t} + J_m^i (1 - e^{-\beta t}) \quad (12)$$

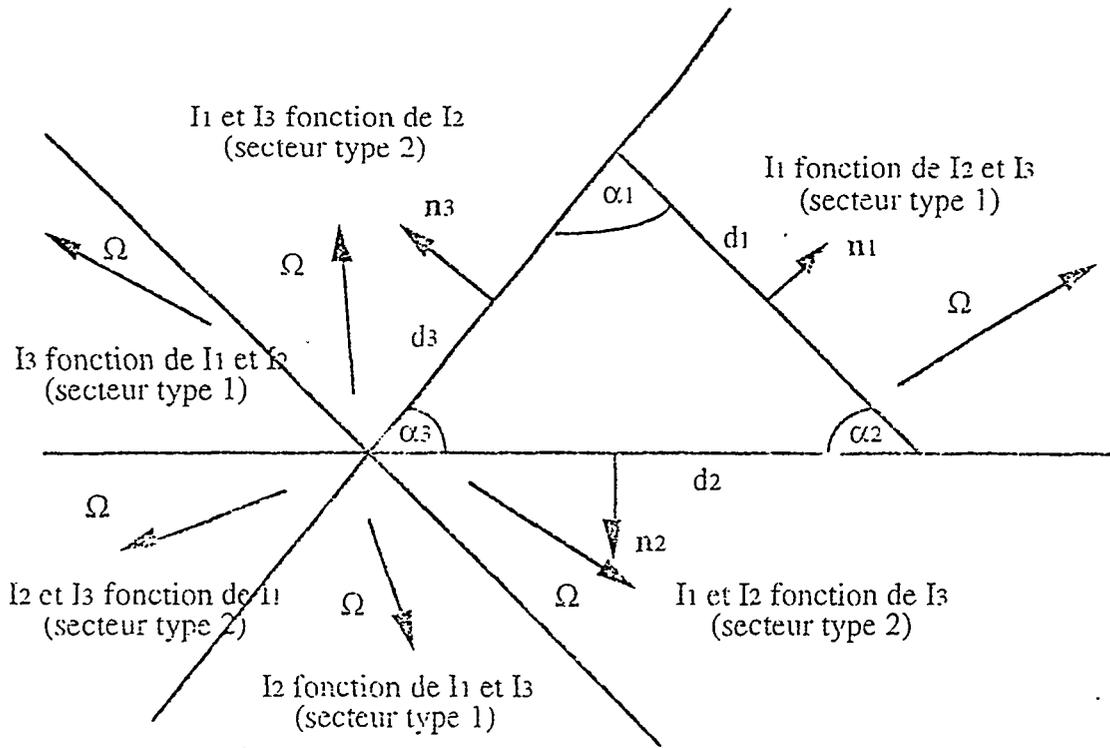
où:

$$J_m^i = (1 - \omega) I_j^0 + \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m'=1}^L w_{m'} \Phi_{mim'} I_{m'}^i \quad (13)$$

J_m^i jouant le rôle d'une fonction de bilan globale généralisée.

Il est possible de définir dans une maille triangulaire deux principaux types de secteurs angulaires de propagation du rayonnement: dans le premier type, qui regroupe trois secteurs angulaires équivalents à une permutation circulaire des indices des côtés de la cellule près, deux luminances de départ issues de deux côtés de la cellule sont nécessaires à l'obtention de la luminance sur le troisième côté, alors que dans le second type de secteurs, regroupant également trois secteurs angulaires équivalents, la connaissance d'une seule luminance sur un côté suffit à déterminer les deux autres sur les deux autres côtés. La figure ci-dessous illustre les différents

secteurs angulaires apparaissant dans une maille triangulaire pour des directions Ω de propagation correspondantes.



Par exemple, pour le premier type de secteurs angulaires, on a pour la luminance résultante sur le côté 1 de la cellule, puisqu'on balaye complètement la cellule par un faisceau de rayons parallèles à Ω en nombre infini:

$$\begin{aligned}
 I_{1m}^i &= \frac{1}{d_1^i} \int_{t_1=0}^{d_1^i} I_{1m}^i(t_1) dt_1 = \frac{d_1^i - d}{d_1^i d_3^i} \int_{t_3=0}^{d_3^i} \{I_{3m}^i e^{-\beta x(t_3)} + J_m^i [1 - e^{-\beta x(t_3)}]\} dt_3 \\
 &+ \frac{d}{d_1^i d_2^i} \int_{t_2=0}^{d_2^i} \{I_{2m}^i e^{-\beta x(t_2)} + J_m^i [1 - e^{-\beta x(t_2)}]\} dt_2
 \end{aligned} \tag{14}$$

où on a posé:

$$\beta x(t_2) = \frac{\tau t_2}{d_2^i} \quad \beta x(t_3) = \frac{\tau t_3}{d_3^i} \quad d = d_2^i \frac{\sin \gamma_{2m}^i}{\sin \gamma_{1m}^i} \tag{15}$$

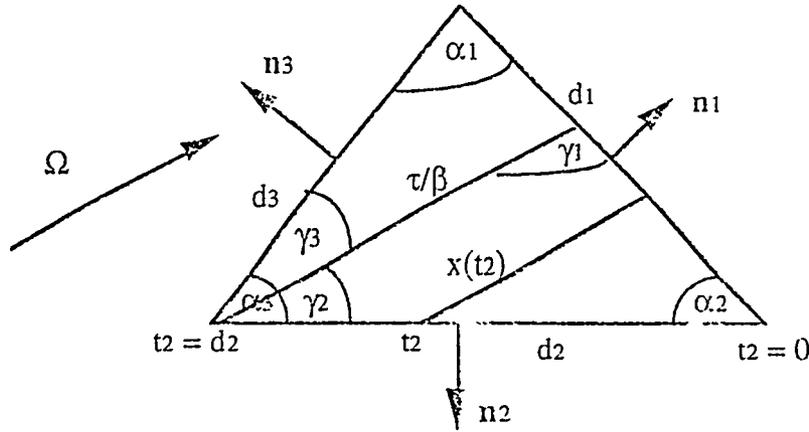
L'intégration de l'éq. (14) conduit à:

$$I_{1m}^i = \frac{\sin \alpha_1^i \sin \gamma_{2m}^i}{\sin \alpha_3^i \sin \gamma_{1m}^i} e^{-\tau} I_{2m}^i + \frac{\sin \alpha_2^i \sin \gamma_{3m}^i}{\sin \alpha_3^i \sin \gamma_{1m}^i} e^{-\tau} I_{3m}^i + (1 - e^{-\tau}) J_m^i \tag{16}$$

où γ_{jm}^i est l'angle entre la direction de propagation Ω_m et le côté d_j^i de la cellule et où:

$$e^{-\tau} = \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \text{ avec } \tau = \beta d_2^i \frac{\sin \alpha_2^i}{\sin \gamma_{1m}^i} = \beta d_3^i \frac{\sin \alpha_1^i}{\sin \gamma_{1m}^i} \quad (17)$$

T ayant un rôle analogue à celui d'une épaisseur optique moyenne cellulaire directionnelle.



Pour les secteurs angulaires du second type, en procédant de la même manière, on obtient:

$$I_{1m}^i = I_{3m}^i = e^{-\tau} I_{2m}^i + (1 - e^{-\tau}) J_m^i \quad (18)$$

où cette fois:

$$e^{-\tau} = \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \text{ avec } \tau = \beta d_1^i \frac{\sin \alpha_2^i}{\sin \gamma_{2m}^i} = \beta d_3^i \frac{\sin \alpha_3^i}{\sin \gamma_{2m}^i} \quad (19)$$

Lorsque les trois luminances sur les trois côtés de la cellule sont connues, la luminance centrale dans la maille est obtenue simplement à partir de l'éq. (9).

Ces expressions peuvent être étendues sans trop de difficulté aux mailles pentaédriques droites, et plus délicatement aux mailles tétraédriques; par exemple, dans des cellules pentaédriques droites, il est nécessaire de considérer quatre types de secteurs angulaires de propagation regroupant douze secteurs équivalents par groupes, par demi-hémisphère.

Le calcul des luminances sur les côtés des cellules est initialisé à partir de la connaissance des luminances sur les surfaces physiques de la cavité en considérant que celles-ci sont noires; par la suite, le processus est itéré pour tenir compte des conditions de réflexion diffuse sur les frontières. Sur chaque surface physique de la cavité, ces conditions s'écrivent:

$$I_{\text{quittant } S}(\Omega) = \varepsilon I_S^0 + \frac{\rho}{\pi} \int_{n_S \cdot \Omega' > 0} n_S \cdot \Omega' I_{\text{incident } S}(\Omega') d\Omega' \quad \text{pour } n_S \cdot \Omega < 0 \quad (20)$$

où de façon discrète en utilisant la quadrature:

$$I_{\text{quittant } S}(\Omega_m) = \varepsilon I_S^0 + \frac{\rho}{\pi} \sum_{n, S, \Omega_m > 0} w_m \cdot n_S \cdot \Omega_m \cdot I_{\text{incident } S}(\Omega_m) \quad n_S \cdot \Omega_m < 0 \quad (21)$$

Toutes les équations précédentes permettent de calculer de manière itérative le champ des luminances directionnelles dans la cavité; lorsque ce champ est obtenu, la divergence du flux radiatif est aisément calculée grâce à l'éq. (10), et peut être introduite dans l'équation de l'énergie (1), (2).

L'algorithme de calcul est schématiquement représenté dans le cas d'un milieu non diffusant; il est à noter que le schéma a été élaboré pour pouvoir être totalement indépendant du mailleur utilisé.

Lorsque le milieu est en situation de couplage conducteur avec le rayonnement, la partie conductive est traitée à l'aide d'un logiciel d'éléments finis (dans ce cas PATRAN), les sources radiatives volumiques pouvant être facilement insérées dans le code; de plus, la procédure de calcul de ces sources est compatible avec le logiciel proprement dit.

4. Résultats

Nous présentons un champ de température dans un mst à l'équilibre radiatif confiné dans une cavité de géométrie complexe dont le maillage est non-structuré, composé de cellules triangulaires. Les surfaces de la cavité sont noires, telles que la température de la surface circulaire est égale à 1000 K, les autres étant égales à 500 K. Le coefficient d'absorption dans le milieu est pris égal à 0.25 m^{-1} . La quadrature utilisée est une quadrature T_6 (soit 144 directions en bidimensionnel). Compte tenu de la symétrie de la géométrie et des conditions aux limites, le champ des températures est symétrique dans la cavité, ce qui est parfaitement conforme avec les résultats obtenus dans la référence [10] dans une enceinte polygônale. Les discontinuités de températures aux surfaces, bien marquées au niveau des parois froides sont un phénomène courant à l'équilibre radiatif. L'aspect non lisse du champ des températures est dû à la faible valeur du coefficient d'absorption dans le milieu.

Nous comparons également des résultats avec ceux de [9]: les deux méthodes ont été mises en oeuvre pour un mst gris absorbant émettant-absorbant compris entre deux demi-ellipses dont les surfaces frontières sont noires et à températures imposées, la température de la surface interne étant égale à 500 K et celle de la surface externe égale à 1000 K, en situation de couplage avec le mode conducteur; la quadrature utilisée pour notre méthode est une quadrature T_6 . Les résultats, dans chacun des cas présentés pour différents nombres de Planck et épaisseurs optiques, sont très comparables: les relativement faibles différences observées proviennent essentiellement du maillage, et de la méthode de résolution du problème radiatif. Vaillon et al. [9] ont traité la partie conductive en volumes finis, alors que dans notre cas ce phénomène de transfert a été abordé par la méthode des éléments finis.

Il apparaît au vu de ces résultats que la méthode proposée est efficace dans le traitement de géométries complexes, un de ses intérêts majeurs étant que la procédure de calcul développée est totalement indépendante de la géométrie étudiée, et qu'elle est parfaitement compatible avec un logiciel d'éléments finis permettant de résoudre la partie conductive du couplage.

5. Conclusion

La méthode proposée est bien adaptée, efficace et précise pour traiter les problèmes de rayonnement dans un mist contenu dans une enceinte de géométrie complexe dont les surfaces sont à température imposée et réfléchissent le rayonnement de façon purement diffuse, tant à l'équilibre radiatif qu'en couplage avec la convection. On a montré qu'elle fournissait des résultats exempts d'oscillations et de luminances négatives, très comparables à ceux obtenus par d'autres méthodes. En outre la méthode se généralise sans difficulté majeure au cas de mailles pentagones, ce qui ouvre des perspectives intéressantes pour traiter les mailles tétraédriques, et donc toute géométrie tridimensionnelle.

REFERENCES

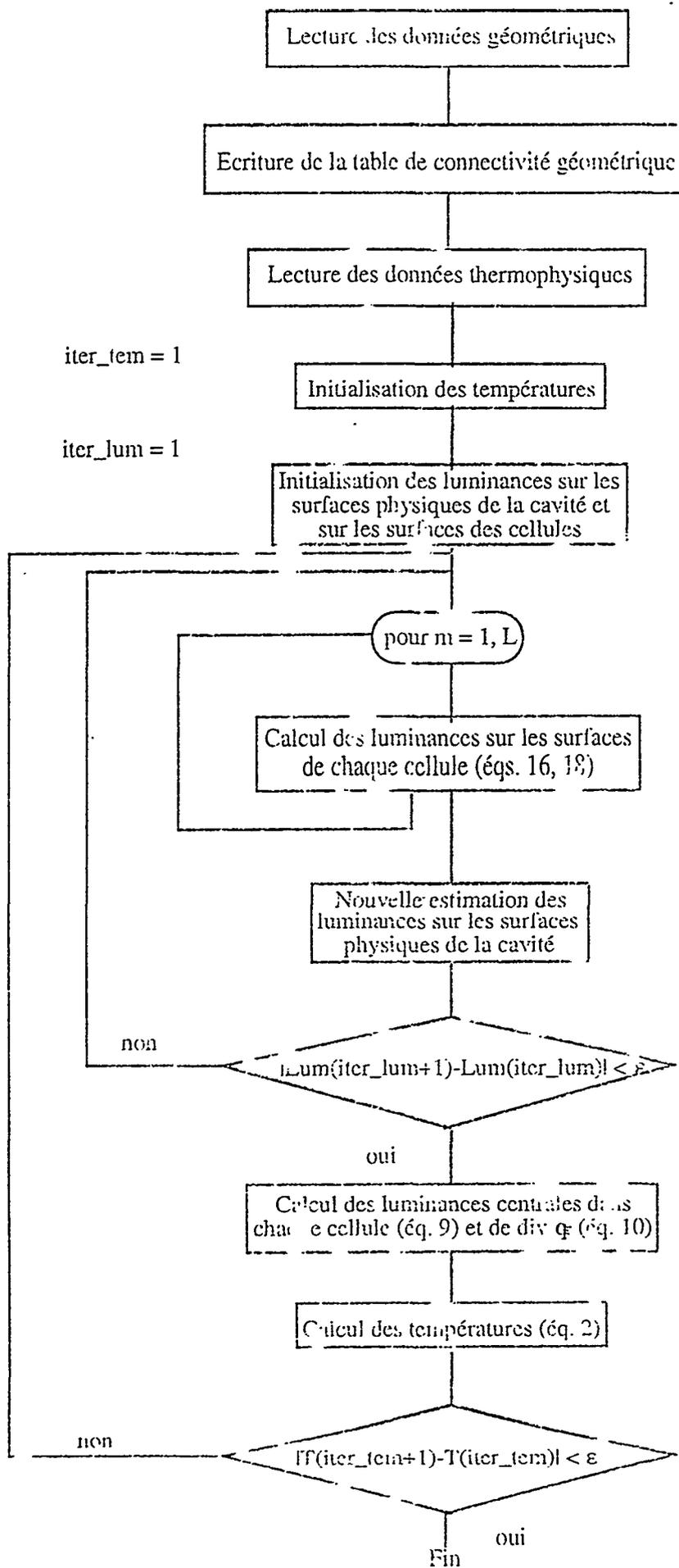
- [1] CROSBIE (A. L.) and SCHRENKER (R. G.). - *Radiative Transfer in a Two-Dimensional Rectangular Medium Exposed to Diffuse Reflection*. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 21, No. 4, pp. 339-372.
- [2] EL WAKIL (N.) and SACADURA (J. F.). - *Prediction of Combined Radiation and Natural Convection in a Rectangular Enclosure Filled with a Porous Medium Using Discrete Ordinates Method*. Heat Transfer in Semi-Transparent Media, Seminar 21 Proceedings. Éditions Européennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 145-154.
- [3] BOUGUERRA (E. H.) and LEMONNIER (D.). - *Prediction of Coupled Convective-Radiative Heat Transfer in Cylindrical and Annular Enclosures by S_n Methods*. Heat Transfer in Semi-Transparent Media, Seminar 21 Proceedings. Éditions Européennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 165-173.
- [4] THURGOOD (C. P.). - *A Critical Evaluation of the Discrete Ordinates Method Using HEART and T_n Quadrature*. PhD Thesis, Queen's University, Kingston, May 1992.
- [5] VAILLON (R.), LALLEMAND (M.) and LEMONNIER (D.). - *Radiative Heat Transfer in Orthogonal Curvilinear Coordinates Using the Discrete Ordinates Method*. À paraître dans J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.
- [6] ROUSSE (D. R.) and BALIGA (B. R.). - *Formulation of a Control-Volume Finite Element Method for Radiative Heat Transfer in Participating Media*. Proceedings of the Seventh International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems, Stanford, U.S.A., July 3-12, Vol. 2, Part. I, pp 786-796, 1991.

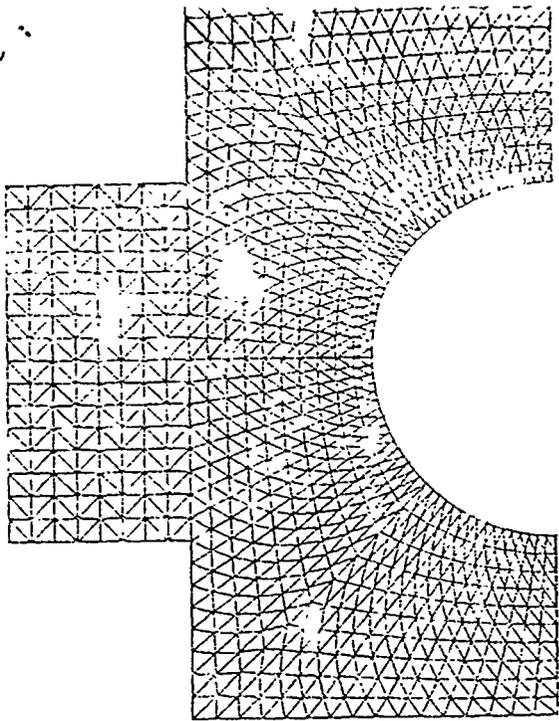
[7] LE DEZ (V.) and CHARETTE (A.). - *Radiative Heat Transfer in a Semi-Transparent Medium Enclosed in a Two-Dimensional Cavity of Complex Shape Using the Discrete Ordinates Method*. The Canadian Combustion Institute, pp. 251-257. Kingston, May 1994.

[8] SAKAMI (M.), CHARETTE (A.) et LE DEZ (V.). - *Application de la Méthode des Ordonnées Discrètes au Transfert Radiatif dans un Milieu Bidimensionnel Gris à Géométrie Complexe*. À paraître dans Revue Générale de Thermique.

[9] VAILLON (R.), LALLEMAND (M.) et LEMONNIER (D.). - *Développement et application de la méthode des ordonnées discrètes en coordonnées curvilignes orthogonales*. Journée S.F.T., Décembre 1995.

[10] LE DEZ (V.) and CHARETTE (A.). - *Application of the Discrete Ordinates Method to a Bidimensional Gray Medium of Complex Shape in Radiative Equilibrium*. Eurotherm Seminar 36, pp R1-R9. Poitiers, Septembre 1994.





Maillage utilisé dans la cavité

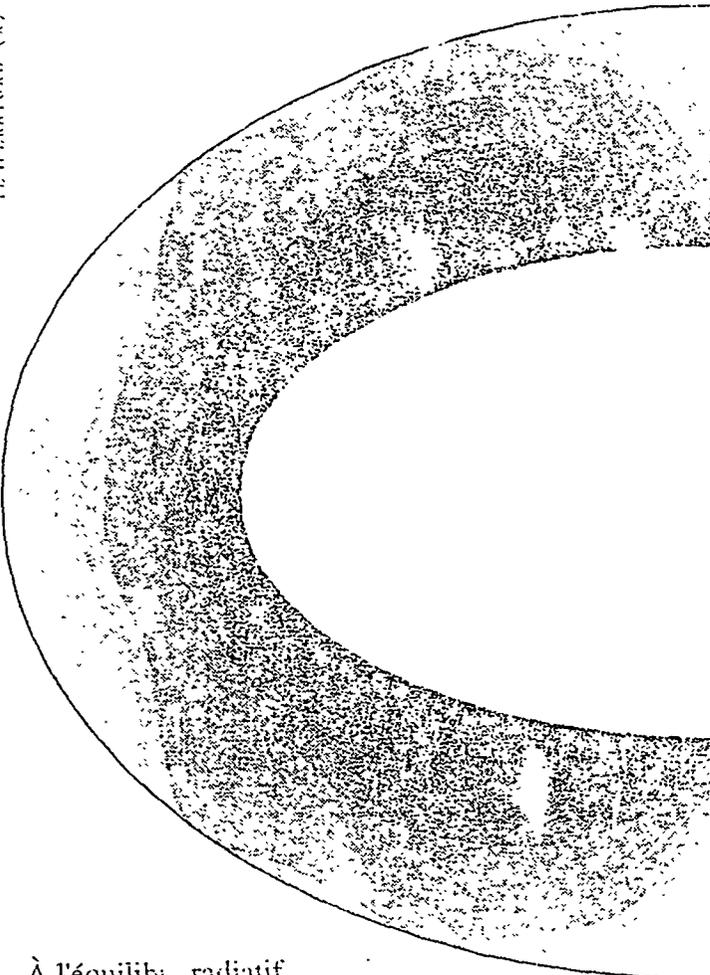
Champ des températures dans la cavité



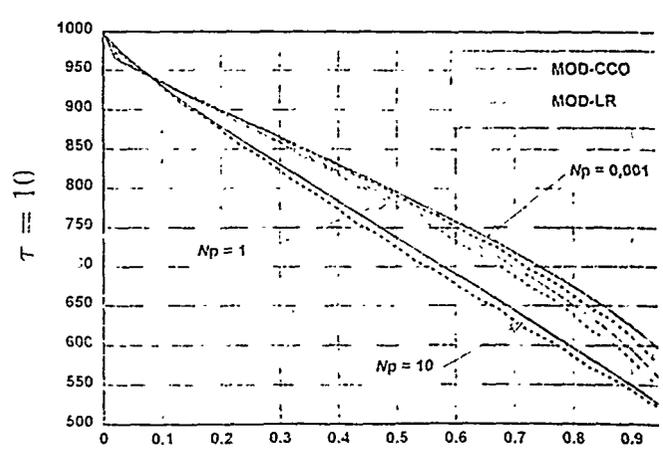
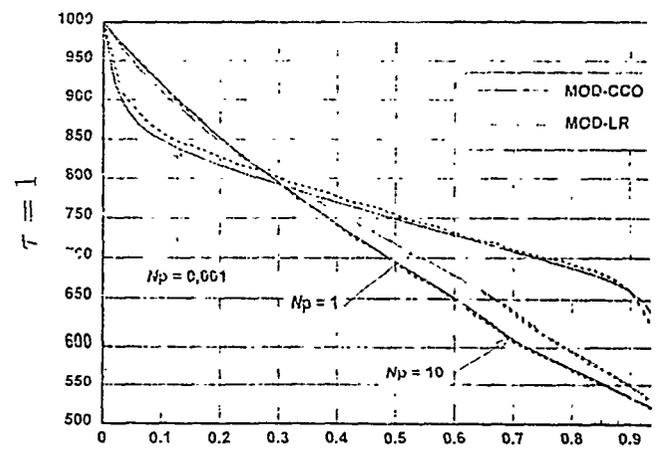
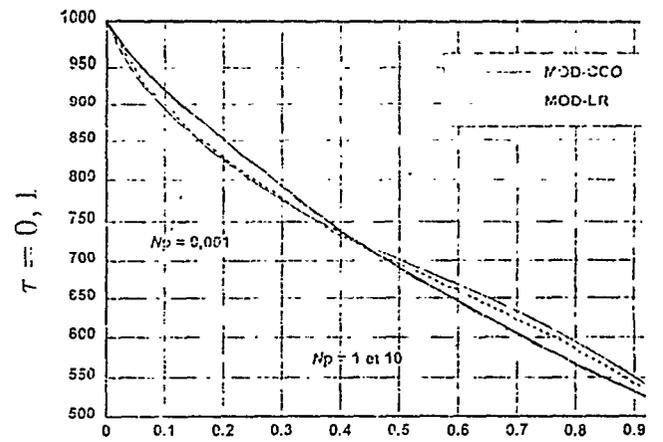
831
817
802
787
772
757
744
729
714
700
685
671
656
642
627
612



TEMPERATURE (K)



À l'équilibre radiatif



SOCIETE FRANCAISE DES THERMIENS

*JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

sur

Les codes de calcul de rayonnement thermique

COUPLAGE D'UN MODELE RADIATIF TRIDIMENSIONNEL AUX ORDONNEES DISCRETES AU LOGICIEL DE MECANIQUE DES FLUIDES PHOENICS.

Jérôme MULLER

IRSID, Groupe USINOR-SACILOR
Département Thermique, Electromagnétisme, Mécanique des Fluides
Voie Romaine, BP320, 57214 Maizières-les-Metz

RESUME. - Le rayonnement thermique est le mode principal de transfert de la chaleur dans de nombreuses installations sidérurgiques (fours de réchauffage, de recuit, ...). Dans les logiciels de simulation de thermique-mécanique des fluides, il est donc important aujourd'hui de disposer de modèles radiatifs performants et adaptés à des problèmes industriels multidimensionnels. Ce travail présente le modèle radiatif aux ordonnées discrètes développé à l'IRSID et couplé au logiciel de thermique-mécanique des fluides PHOENICS. Nous présentons en particulier trois approches pour la modélisation des propriétés radiatives des gaz (H_2O-CO_2). Un modèle "somme pondérée de gaz gris" donne des résultats satisfaisant dans de nombreux cas de validation monodimensionnels.

INTRODUCTION

Dans la sidérurgie, de nombreux procédés intervenant dans la chaîne de fabrication de l'acier sont le siège de transferts d'énergie par rayonnement, convection et conduction (fours de réchauffage, fours de recuits, ...). Depuis quelques années, plusieurs études ont été entreprises afin de mieux comprendre l'ensemble des phénomènes physiques interagissant dans ce type d'enceintes et d'accéder ainsi à une meilleure maîtrise des outils de production.

Le développement d'outils mathématiques de simulation est une des voies choisie par l'IRSID. Ces simulateurs utilisés dès la conception ou lors de modifications sur des installations existantes nous aident à faire les choix techniques pour atteindre une meilleure maîtrise thermique des procédés.

Aux températures usuelles dans les fours sidérurgiques, les transferts radiatifs prennent une place prépondérante qui justifie une attention particulière. Le développement d'un modèle tridimensionnel aux Ordonnées Discrètes, utilisable dans le cas d'un gaz non gris, hétérogène et anisotherme (fumées de combustion), a été notre premier axe de travail.

Le deuxième axe de travail a consisté à coupler le modèle radiatif au logiciel de thermique-mécanique des fluides PHOENICS (Parabolic Hyperbolic Or Elliptic Numerical Integration Code Series) couramment utilisé dans les laboratoires de recherche industriels et universitaires. En intégrant également le problème de la conduction dans une charge, nous avons finalement abouti à un simulateur dédié à l'étude de fours à flammes et dénommé "SIFOU3D".

1 - MODELISATION DU TRANSFERT RADIATIF EN MILIEU GAZEUX

1.1 - Spécificités du problème et choix de la méthode

Les systèmes thermiques que nous étudions et les simulations entreprises présentent certaines particularités qu'il est nécessaire de bien intégrer lors du choix du modèle radiatif. Les plus importantes sont :

- la complexité géométrique des systèmes qui nécessite une modélisation tridimensionnelle,
- le problème de la dépendance spectrale des fumées issues de la combustion ($\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}, \dots$),
- l'existence de phénomènes de diffusion dans le cas où il existe des suies (combustion réductrice),
- la facilité de couplage du modèle radiatif au logiciel global de résolution des transferts thermiques couplés (la formulation est de type "volumes finis" dans le cas de PHOENICS).

Une des méthodes permettant de traiter le problème radiatif est la méthode des Ordonnées Discrètes (MOD). W.A. FIVELAND [2] a montré que son application dans le cas d'un problème tridimensionnel ne présentait aucune complexité particulière lorsque le milieu semi-transparent était gris. De plus, la formulation des équations permet de réaliser facilement un couplage avec les autres modes de transfert de la chaleur. La discrétisation spatiale de l'équation de transfert radiatif peut en effet être réalisée sur le même maillage que celui utilisé pour la résolution de l'équation de l'énergie dans le milieu.

Les travaux récents de T.K. KIM, J.A. MENART et H.S. LEE [3] [4] et J.F. SACADURA et A. BORGES DE MIRANDA [5] montrent les possibilités de prise en compte fine de la dépendance spectrale du rayonnement des gaz dans la méthode aux Ordonnées Discrètes. Ces travaux sont cependant encore difficilement utilisables dans un contexte industriel, les méthodes n'étant appliquées pour l'instant qu'à des géométries monodimensionnelles et à des milieux non-diffusants. C'est pourquoi nous avons choisi

d'intégrer, dans le modèle radiatif que nous avons développé, une approche simplifiée pour la prise en compte de la dépendance spectrale du rayonnement des gaz, qui permet de traiter des problèmes tridimensionnels en tenant compte de la diffusion.

1.2 - Principe de la méthode des Ordonnées Discrètes

Cette méthode a été présentée dans de nombreux travaux tels que ceux de W.A. FIVELAND [2] [6] et J.S. TRUELOVE [7]. Nous ne présenterons donc dans ce qui suit que son principe.

La MOD consiste à discrétiser directionnellement et spatialement l'équation du transfert radiatif (ETR), en tout point du milieu gazeux et aux limites opaques. L'ETR s'écrit, en utilisant les cosinus directeurs μ , ξ , η de la direction de propagation du rayonnement :

$$\mu \frac{\partial L_V}{\partial x} + \xi \frac{\partial L_V}{\partial y} + \eta \frac{\partial L_V}{\partial z} = -(\kappa_V + s_V) \cdot L_V + \kappa_V \cdot L_V^0(T) + \frac{s_V}{4\pi} \cdot \int_{4\pi} p_V \cdot L'_V \cdot d\Omega' \quad (1)$$

L'équation aux limites opaques s'écrit en faisant l'hypothèse de parois d'émission et de réflexion diffuse :

$$L_V = \epsilon_V \cdot L_V^0(T) + \frac{\rho_V}{\pi} \cdot \int_{2\pi} L'_V \cdot |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}'| \cdot d\Omega' \quad (2)$$

La discrétisation directionnelle des équations s'effectue suivant un nombre fini de directions de propagation du rayonnement dans l'espace. Le terme intégral relatif aux gains par diffusion est alors remplacé par une somme quadratique sur les directions choisies. Les quadratures utilisées sont celles de B.G. CARLSON et K.D. LATHROP [8] d'ordres S4 (24 directions de propagation), S6 (48 directions) et S8 (96 directions). Ces différentes quadratures vérifient l'ensemble des critères sur les moments d'ordre 0, 1 et 2 et sur le calcul des flux nets aux limites opaques.

Plusieurs approches ont été utilisées pour la discrétisation spatiale permettant l'intégration des termes différentiels de l'ETR. La méthode la plus courante consiste à décomposer le domaine en volumes de contrôle et à intégrer l'ETR sur chaque volume. La relation obtenue relie pour chaque maille les luminances au centre des faces à celles au centre de la maille. Afin de diminuer le nombre d'inconnues, il est nécessaire d'introduire des relations de fermeture ou lois de variations de la luminance dans chaque maille. Une autre approche utilisée notamment par N. EL WAKIL [9], consiste à décomposer le domaine en volumes de contrôle et à utiliser l'ETR intégrée sur le trajet parcouru pour chaque direction de propagation. L'avantage de cette seconde méthode est de limiter considérablement les "effets de rayon" engendrés par les relations de fermeture et par la discrétisation directionnelle des équations [10].

Dans notre cas, nous avons choisi d'étendre aux cas tridimensionnels la méthode des "poids variables" développée par K.D. LATHROP [11] dans le cas de géométries bidimensionnelles. Cette méthode consiste à définir une variation linéaire de la luminance dans le volume de contrôle. On conserve ainsi la forme variationnelle des équations. Les valeurs moyennes des luminances sur les faces de la maille sont pondérées en fonction des dimensions de celle-ci, des propriétés radiatives du milieu et de la direction de propagation considérée.

La méthode a été confrontée [12], dans le cas d'un problème radiatif tridimensionnel, à d'autres approches courantes (le "schéma diamant" par exemple). Le système choisi est un four théorique parallélépipédique étudié par M.P. MENGÜÇ et R. VISKANTA [13] qui contient un milieu semi-transparent hétérogène et diffusant. Le milieu est en équilibre radiatif et le terme source radiatif local est imposé. Les figures 2 et 3 correspondent respectivement aux profils de flux nets calculés sur une des parois de l'enceinte avec un "schéma diamant" ($f_x = f_y = f_z = 1/2$) et avec le schéma aux poids variables. On voit immédiatement sur ces figures

les améliorations apportées par l'utilisation du schéma aux poids variables par rapport au schéma bilinéaire qui induit des oscillations d'amplitudes faibles (quelques % par rapport à une valeur moyenne du flux).

quadrature S6

schema diamant

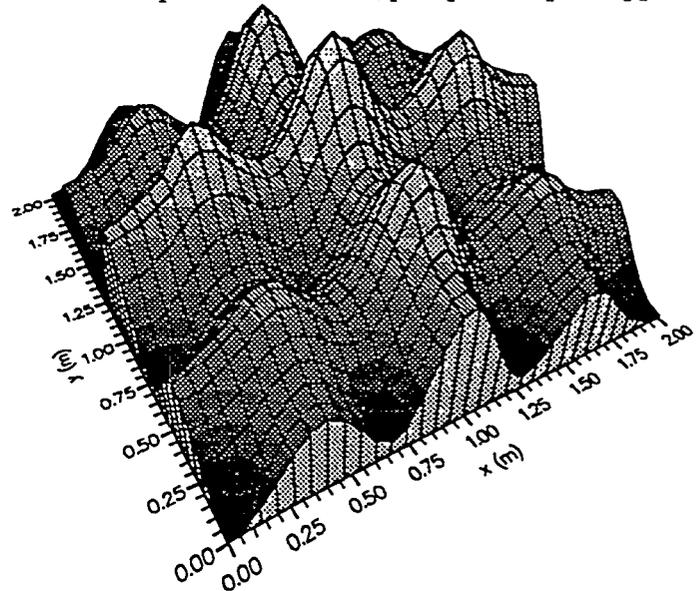
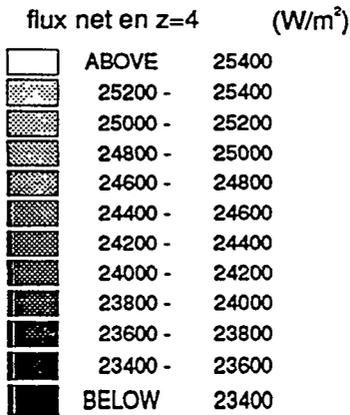


Fig.2. - Profil du flux net radiatif avec le schéma diamant

quadrature S6

schema aux poids variables

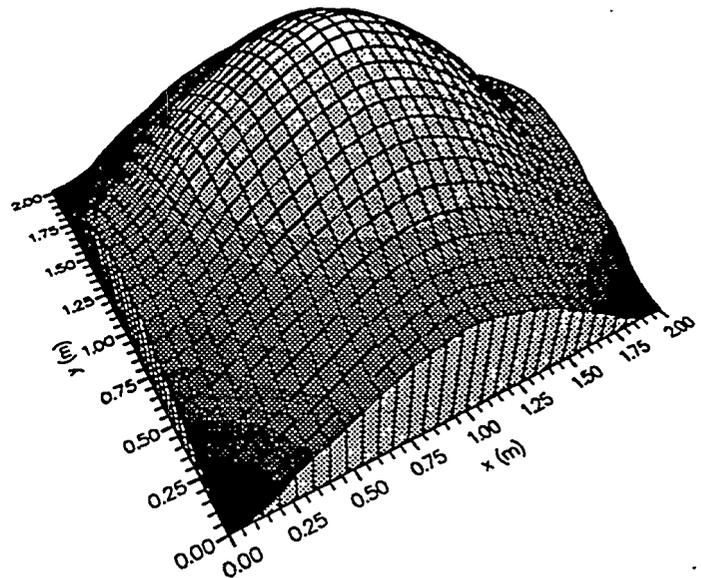
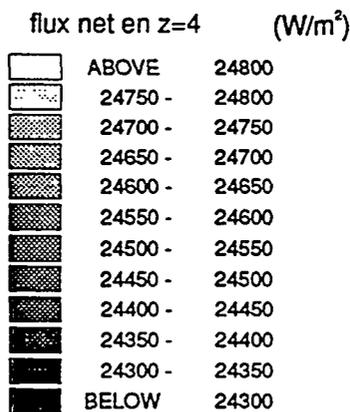


Fig.3. - Profil du flux net radiatif avec le schéma aux poids variable

La procédure de calcul du champ de luminance dans le milieu gazeux est classique et a déjà été présentée dans de nombreux travaux. Pour une direction donnée de propagation du rayonnement et à partir de la connaissance de la luminance sur trois faces du volume de contrôle, on calcule la luminance au centre de la maille et les luminances sur les trois faces restantes. On passe ensuite à l'élément adjacent et le calcul précédent est répété. Le maillage est ainsi balayé pour l'ensemble des directions de propagation, le sens de balayage dépendant de la position de la direction dans l'espace. Le calcul est itératif puisque les équations aux limites opaques et le terme qui représente les gains par diffusion sont fonction du champ de luminance.

Finalement, les termes sources radiatifs dans le milieu gazeux sont calculés à partir de la divergence du flux :

$$S_{r,v} = -4 \cdot \pi \cdot \kappa_v \cdot L_v^0(T) + \int_{4\pi} \kappa_v \cdot L_v \cdot d\Omega \quad (3)$$

Les flux nets aux limites opaques sont obtenus par la relation :

$$\varphi_{r,v} = \int_{4\pi} L_v \cdot |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}| \cdot d\Omega \quad (4)$$

Ces deux équations sont discrétisées directionnellement et spatialement de la même manière que l'ETR.

1.3 - Approches simplifiées pour les propriétés spectrales des gaz de combustion

Lors de la combustion dans un four, les gaz radiativement actifs sont essentiellement la vapeur d'eau H₂O et le dioxyde de carbone CO₂. Les propriétés d'émission et d'absorption de ces gaz présentent une structure très fine caractérisée par de nombreuses raies d'absorption. D'un point de vue théorique, seul un calcul "raie par raie" permet de prendre correctement en compte cette dépendance spectrale fine du rayonnement des gaz. Les spectres d'émission des gaz étant composés en moyenne de plusieurs centaines de milliers de raies, il est nécessaire de faire appel à des méthodes simplifiées dans le cas de problèmes industriels.

1.3.1 Modèle du gaz gris

L'hypothèse la plus simple suppose que les propriétés radiatives des fumées sont indépendantes de la longueur d'onde du rayonnement : c'est l'hypothèse du gaz gris (GGM). Dans ce cas, toute dépendance spectrale disparaît dans les équations et la luminance de Planck est calculée sur tout le spectre. De nombreuses références fournissent les données nécessaires à l'évaluation de l'émissivité. Dans notre cas nous utilisons les données proposées par T.F. SMITH et Z.F. SHEN [14] pour des mélanges H₂O-CO₂ ; l'émissivité globale d'un mélange à température donnée est calculée à partir d'un modèle "somme pondérée de gaz gris" (WSGGM). Un coefficient moyen d'absorption, qui ne présente plus guère de signification physique, est alors obtenue à partir de la loi de BEER. L'ETR s'écrit alors :

$$\mu \frac{\partial L}{\partial x} + \xi \frac{\partial L}{\partial y} + \eta \frac{\partial L}{\partial z} = -(\kappa + s) \cdot L + \kappa \cdot \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} + \frac{s}{4\pi} \cdot \int_{4\pi} p \cdot L' \cdot d\Omega' \quad (5)$$

1.3.2 Modèle "somme pondérée de gaz gris"

Ce type de modèle est généralement utilisé pour déterminer l'émissivité totale d'un gaz à partir de la connaissance de sa température et de son épaisseur optique [15]. L'émissivité totale est obtenue par la relation :

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^I a_i(T) \cdot (1 - e^{-\kappa_i l}) \quad (6)$$

où les κ_i sont les pseudo-coefficients d'absorption des gaz fictifs, l le trajet optique et $a_i(T)$ les coefficients de pondération associés à chaque gaz. La somme des coefficients de pondération est égale à 1. Un des gaz est transparent afin de tenir compte des fenêtres de transparence dans le spectre d'émission ; dans ce cas $\kappa_0=0$. Cette approche n'est valable, en toute rigueur, que dans le cas d'un milieu homogène et isotherme. Une interprétation physique de l'équation 6 [16] consiste à considérer les coefficients a_i comme étant des fractions de l'énergie totale

émission par le corps noir pour la région spectrale dont le pseudo coefficient d'absorption est κ_i . Dans ce cas, l'ETR peut être résolue pour chaque gaz fictif i et s'écrit :

$$\mu \frac{\partial L_i}{\partial x} + \xi \frac{\partial L_i}{\partial y} + \eta \frac{\partial L_i}{\partial z} = -(\kappa_i + s_i) \cdot L_i + a_i(T) \cdot \kappa_i \cdot \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} + \frac{s_i}{4\pi} \cdot \int_{4\pi} p_i \cdot L_i' \cdot d\Omega' \quad (7)$$

Les valeurs totales de la luminance sont obtenues en sommant les valeurs de chaque gaz fictif i . Dans la pratique on représente le gaz réel par 3 gaz gris et 1 gaz transparent [14]. La résolution par la méthode des ordonnées discrètes telle que nous l'avons présentée précédemment est donc entreprise pour chaque gaz fictif.

1.3.3 Approche faisant appel à un modèle statistique à bandes étroites

Une approche plus physique consiste à décomposer le domaine spectral total en intervalles $\Delta\nu$ en considérant des grandeurs physiques moyennes sur chaque intervalle. L'ETR intégrée sur $\Delta\nu$ s'écrit :

$$\mu \frac{\partial \overline{L_\nu}}{\partial x} + \xi \frac{\partial \overline{L_\nu}}{\partial y} + \eta \frac{\partial \overline{L_\nu}}{\partial z} = -(\kappa_\nu + s_\nu) \cdot \overline{L_\nu} + \kappa_\nu \cdot \overline{L_\nu^0(T)} + \frac{s_\nu}{4\pi} \cdot \int_{4\pi} p_\nu \cdot L_\nu' \cdot d\Omega' \quad (8)$$

où la valeur moyenne d'une grandeur est définie par :

$$\overline{G_\nu} = \frac{1}{\Delta\nu} \cdot \int_{\Delta\nu} G_\nu \cdot d\nu \quad (9)$$

Une contrainte sur l'intervalle $\Delta\nu$ est imposée par le phénomène de corrélations à basse résolution entre la luminance du corps noir et le coefficient d'absorption. La décorrélation de ces grandeurs n'est valable que pour des intervalles spectraux suffisamment petits pour que la luminance du corps noir puisse être considérée comme constante. L'ordre de grandeur se situe entre 25 cm^{-1} et 200 cm^{-1} [17]. La valeur moyenne $\overline{L_\nu^0(T)}$ est alors prise au centre de l'intervalle $\Delta\nu$. Dans tous les cas, les bornes des intervalles spectraux ne sont pas fonction de la température.

A cause de la structure très fine des spectres d'absorption des gaz, il n'est en toute rigueur pas possible de décorréliser les autres termes de l'ETR. Cependant, il est difficile de tenir compte de ces corrélations à haute résolution : la procédure de calcul du champ de luminance de proche en proche ne serait alors plus possible que "raie par raie" c'est-à-dire pour des intervalles spectraux de l'ordre de 0.01 cm^{-1} . J.A. MENART, H.S. LEE et T.K. KIM [4] ont montré que le calcul rigoureux pour un intervalle $\Delta\nu$ (appelé "calcul corrélé") est encore plus complexe avec des parois réfléchissantes. Une autre approche a été proposée par J.F. SACADURÁ et A. BORGES DE MIRANDA [5]. Elle permet de prendre en compte les corrélations dans le milieu gazeux par l'intermédiaire de la transmittivité et ce jusqu'à un certain niveau. Ces méthodes ont pour le moment été appliquées à des géométries monodimensionnelles très simples et sans tenir compte des phénomènes de diffusion.

Afin de conserver la formulation simple de la MOD en géométrie tridimensionnelle nous ne prenons pas en compte ces corrélations à haute résolution et considérons l'ETR sous la forme :

$$\mu \frac{\partial \overline{L_\nu}}{\partial x} + \xi \frac{\partial \overline{L_\nu}}{\partial y} + \eta \frac{\partial \overline{L_\nu}}{\partial z} = -(\kappa_\nu + s_\nu) \cdot \overline{L_\nu} + \kappa_\nu \cdot \overline{L_\nu^0(T)} + \frac{s_\nu}{4\pi} \cdot \int_{4\pi} \overline{p_\nu} \cdot \overline{L_\nu'} \cdot d\Omega' \quad (10)$$

La MOD est alors applicable directement pour chaque intervalle $\Delta\nu$.

Si la définition d'un coefficient d'absorption moyen sur chaque intervalle spectral ne présente plus guère de signification physique, elle reste cependant très pratique pour l'utilisation de la MOD. La méthode que nous utilisons pour son évaluation s'appuie sur le modèle statistique à bandes étroites à la loi inverse exponentielle. Dans ce modèle, la transmittivité moyenne d'un gaz sur un trajet homogène et isotherme s'exprime par la relation [17] :

$$\overline{\tau_{\nu}(s',s)} = \exp \left(- \frac{\overline{\beta_{\nu}}}{\pi} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2 \cdot \pi \cdot \overline{k_{\nu}} \cdot x_i \cdot P \cdot (s-s')}{\overline{\beta_{\nu}}}} - 1 \right] \right) \quad (11)$$

Dans cette relation x_i est la fraction molaire du gaz i , P la pression du milieu et $(s'-s)$ le trajet. Le coefficient $\overline{\beta_{\nu}} = 2\pi \cdot \overline{\gamma_{\nu}} / \overline{\delta_{\nu}}$ caractérise le chevauchement entre les raies ($\overline{\gamma_{\nu}}$ est la demi-largeur moyenne des raies à mi-hauteur et $\overline{\delta_{\nu}}$ est l'espacement moyen entre deux raies) ; le coefficient $\overline{k_{\nu}}$ représente le rapport entre l'intensité moyenne des raies et l'espacement moyen.

Nous avons montré [12] que la valeur locale du coefficient moyen d'absorption pouvait être obtenue à partir de la transmittivité par la relation :

$$\overline{\kappa_{\nu}(s',s)} = \lim_{s' \rightarrow s} \left[- \frac{\partial \overline{\tau_{\nu}(s',s)}}{\partial s} \right] = \overline{\kappa_{\nu}(s)} \cdot x_i \cdot P \quad (12)$$

On conserve ainsi le concept des volumes finis utilisé dans la MOD, et on définit un coefficient moyen par maille. Pour un mélange de gaz (fumées de combustion par exemple), le coefficient d'absorption moyen global sera obtenu en sommant les coefficients d'absorption moyens relatifs à chaque constituant. Les paramètres $\overline{k_{\nu}}$ sont fonction de la température et tabulés pour H_2O et CO_2 [18] [19]. Cette méthode présente l'avantage d'être de formulation très simple et applicable facilement à un milieu multidimensionnel, anisotherme et hétérogène. La résolution s'effectue pour chaque bande spectrale de la même manière que pour un milieu gris.

1.4 Résultats obtenus dans des cas simples monodimensionnels

Afin de tester les trois méthodes, nous les avons confrontées à des solutions de références et ce pour quatre problèmes simples tirés de la littérature. Les quatre problèmes sont monodimensionnels (rayonnement entre deux plaques) avec des milieux gazeux non-diffusants et sont caractérisés par : (1) un milieu isotherme et homogène et des parois noires, (2) un milieu isotherme et homogène avec une paroi réfléchissante, (3) un milieu isotherme et homogène avec parois réfléchissantes et émettrices, (4) un milieu anisotherme et homogène avec parois réfléchissantes et émettrices. Les solutions de référence sont tirés des travaux de T.K. KIM, J.A. MENART et H.S. LEE [3] [4] et M.K. DENISON et B.W. WEBB [16].

Pour le modèle du gaz gris (GGM), on calcule dans tous les cas une émissivité moyenne du milieu gazeux. Le coefficient d'absorption est alors extrait grâce à la loi de BEER. L'épaisseur optique du milieu vaut $1.8 \cdot L$ (L est la distance entre les parois opaques). Pour le modèle somme pondérée de gaz gris (WSGGM) les valeurs des coefficients κ_i ne sont que fonction de la composition du milieu. En revanche les $a_i(T)$ sont calculés localement à partir des relations fournies par T.F. SMITH et Z.F. SHEN [14] pour des mélanges gazeux

simples. On considère un modèle à 3 gaz gris et 1 gaz transparent. Les coefficients d'absorption issues du modèle statistique à bandes étroites (NBSM) sont calculés pour des intervalles spectraux de 100 cm^{-1} entre 150 cm^{-1} et 4200 cm^{-1} . Ces données sont tirées des travaux de A. SOUFIANI [17].

Le modèle radiatif développé est, comme nous l'avons déjà précisé, destiné à l'étude de systèmes industriels tridimensionnels. Les cas simples présentés dans cette note sont traités avec le modèle sous sa forme générale ; des conditions de symétrie permettent de ramener les problèmes étudiés à des cas monodimensionnels. La discrétisation spatiale utilise 20 mailles. La discrétisation directionnelle est de type S6 (48 directions de propagation dans l'espace).

cas 1 : milieu isotherme et homogène avec parois noires

On étudie le rayonnement entre deux plaques infinies séparées par 1 mètre de vapeur d'eau pure à la pression d'une atmosphère. Les parois sont noires et ont une température de 0 K. La température du gaz entre les parois est uniforme et vaut 1000 K. Les trois approches sont confrontées à un calcul corrélé utilisant un modèle statistique à bandes étroites proposé par T.K. KIM, J.A. MENART et H.S. LEE [3]. La figure 4 montre le profil du terme source radiatif (divergence du flux) entre les deux parois.

Les résultats obtenus montrent le bon comportement du WSGGM et du NBSM par rapport au calcul corrélé. En revanche le GGM ne permet pas de reproduire le gradient important qui existe lorsqu'on se rapproche des parois. Le profil est plat sur toute l'épaisseur de gaz. Ceci est dû au fait que l'on utilise une valeur unique moyenne pour décrire l'absorption du gaz et que l'on ne tient pas compte par exemple des zones du spectre où l'absorption est très importante. Le GGM tend à moyenniser le profil réel. Les flux nets radiatifs en parois sont présentés dans le tableau 1. Les trois approches fournissent des résultats proches de la solution exacte, l'erreur maximale étant de l'ordre de 6 %.

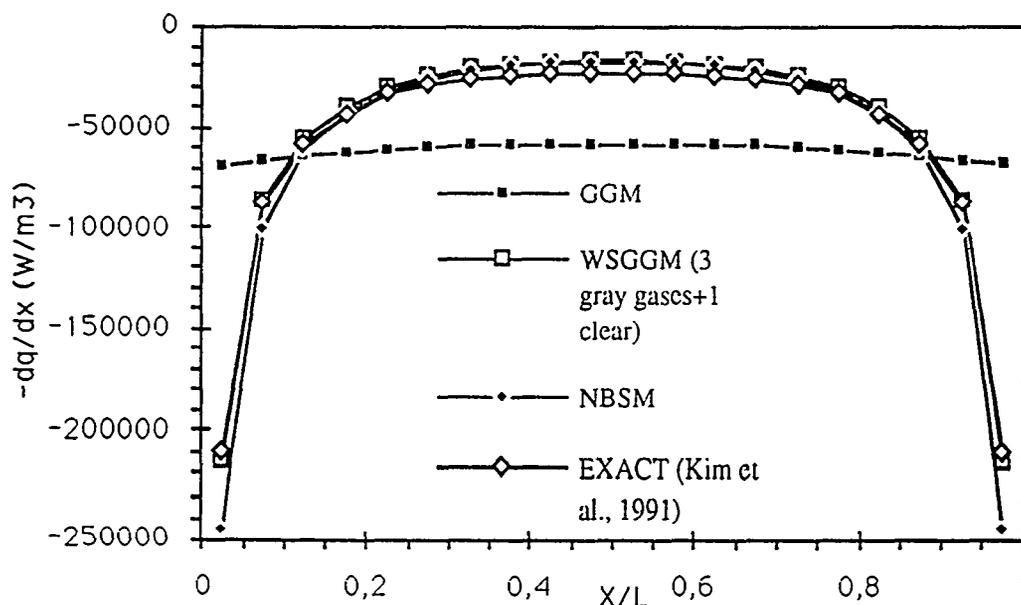


Fig. 4. - Sources radiatives pour un milieu composé d' H_2O pure à 1000 K. $L=1\text{m}$

TABLEAU 1				
Flux radiatifs nets aux parois (kW.m^{-2}) pour les quatre cas traités				
	Référence	GGM	WSGGM	NBSM
cas 1 : $T=1000 \text{ K}$; $\epsilon_{p1}=\epsilon_{p2}=1$	28.2 réf. [3]	28.5	26.6	29.4
cas 2 : $T=1000 \text{ K}$; $\epsilon_{p1}=0.1$; $\epsilon_{p2}=1$	paroi 1: - 2.38 paroi 2: 28.07 réf. [4]	- 2.48 37.3	- 2.33 26.6	- 2.66 29.4
cas 3 : $T=1500 \text{ K}$; $\epsilon_{p1}=\epsilon_{p2}=0.6$	64.1 (mur à 600K) réf. [16]	74.5	72.1	49
cas 4 : $T=\text{parabolique}$; $\epsilon_{p1}=\epsilon_{p2}=0.9$	15.12 réf. [4]	18.2	14.5	16.3

cas 2 : milieu isotherme et homogène avec paroi réfléchissante

On étudie cette fois le rayonnement entre deux plaques infinies séparées par 0.5 m de vapeur d'eau pure à la pression d'une atmosphère dont une est réfléchissante. Les parois ont une température de 0 K. En $x=0$ la paroi a une réflectivité de 0.9 et en $x=0.5$ elle est noire. La température du gaz entre les parois est uniforme et vaut 1000 K. Les calculs sont confrontés à ceux de J.A. MENART, H.S. LEE et T.K. KIM [4]. La figure 5 montre le profil du terme source radiatif entre les parois.

Dans ce cas on peut faire les mêmes remarques que pour le cas 1. Les meilleurs résultats sont obtenus avec le WSGGM. Pour le NBSM l'erreur maximale sur les termes source est de 25 %. Le GGM donne à nouveau un profil moyen. Pour les flux nets sur les deux surfaces (tableau 1) les erreurs sont de quelques % pour le WSGGM et le NBSM ; pour le GGM l'erreur commise sur le flux net au niveau de la paroi noire atteint 30%.

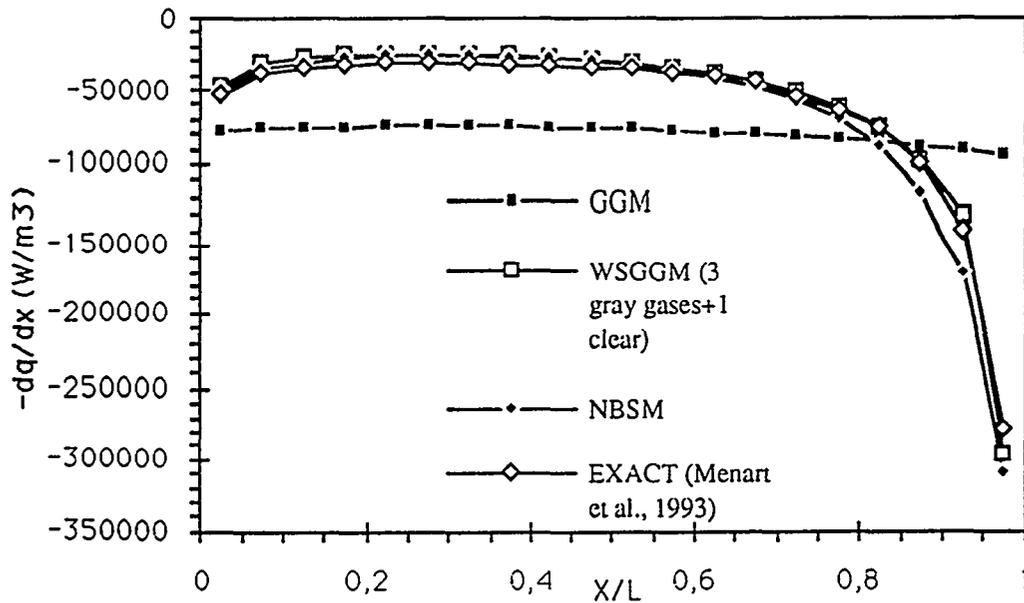


Fig. 5. - Sources radiatives pour un milieu composé d' H_2O pure à 1000 K. $L=0.5\text{m}$
une paroi réfléchissante $\epsilon=0.1$, une paroi noire

cas 3 : milieu isotherme et homogène avec parois réfléchissantes et émettrices

Ce cas proposé par M.K. DENISON et B.W. WEBB [16] s'apparente plus à un cas pratique puisque les températures des parois ne sont plus nulles mais valent respectivement 1200 K (en $x=0$) et 600 K (en $x=1$). Le milieu d'un mètre d'épaisseur est ici constitué d'un mélange H_2O-N_2 avec une concentration en H_2O de 10%. La température du gaz entre les parois est uniforme et vaut 1500 K. Les deux parois sont émettrices et réfléchissantes ($\epsilon=0.6$). Les calculs sont confrontés à un calcul raie par raie [16]. Les résultats sont présentés sur la *figure 6*.

On peut dans ce cas faire les mêmes remarques à propos du GGM que dans les deux cas précédent. Pour le WSGGM et le NBSM qui fournissent des courbes similaires on observe un décalage avec la solution exacte de M.K. DENISON et B.W. WEBB [16]. Le profil des courbes est cependant le même. Un décalage similaire existe sur les flux nets comme on peut le voir dans le *tableau 1*. Nous n'avons pas réussi pour le moment à expliquer ce décalage.

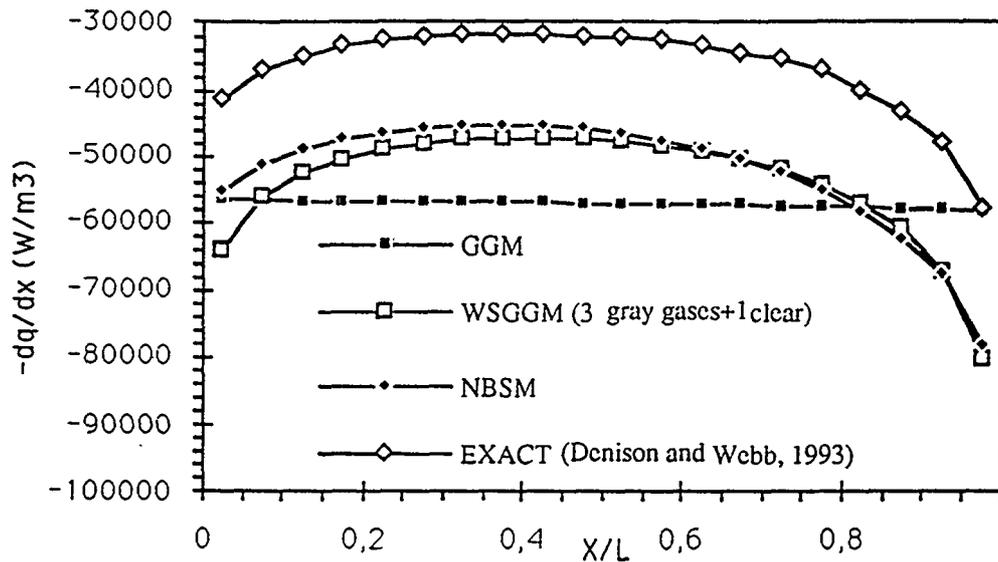


Fig. 6. - Sources radiatives pour un milieu composé d' H_2O-N_2 (10% d' H_2O) à 1500 K. $L=1$ m

$$\epsilon_{x/L=0} = \epsilon_{x/L=1} = 0.6 ; T_{x/L=0} = 1200 \text{ K} ; T_{x/L=1} = 600 \text{ K}$$

cas 4 : milieu anisotherme et homogène avec parois réfléchissantes et émettrices

Dans ce dernier cas, le profil de température dans le milieu gazeux est parabolique [4]. Les parois distantes de 0.5 m sont séparées par de la vapeur d'eau pure à 1 atm. Leur émissivité est de 0.9 et leur température de 400 K. Les calculs réalisés à partir du GGM et du NBSM utilisent une valeur moyenne pour la détermination des propriétés radiatives du milieu. Les résultats sont présentés sur la *figure 7*. Le WSGGM et le NBSM donnent des résultats globalement correct même s'ils donnent des profils en "W" tels que ceux que l'on peut obtenir pour un milieu gazeux hétérogène (pression partielle d' H_2O variable entre les parois) [16]. L'erreur maximale sur le terme source est de 30%. Le GGM fournit des résultats corrects hormis dans les zones proches des parois.

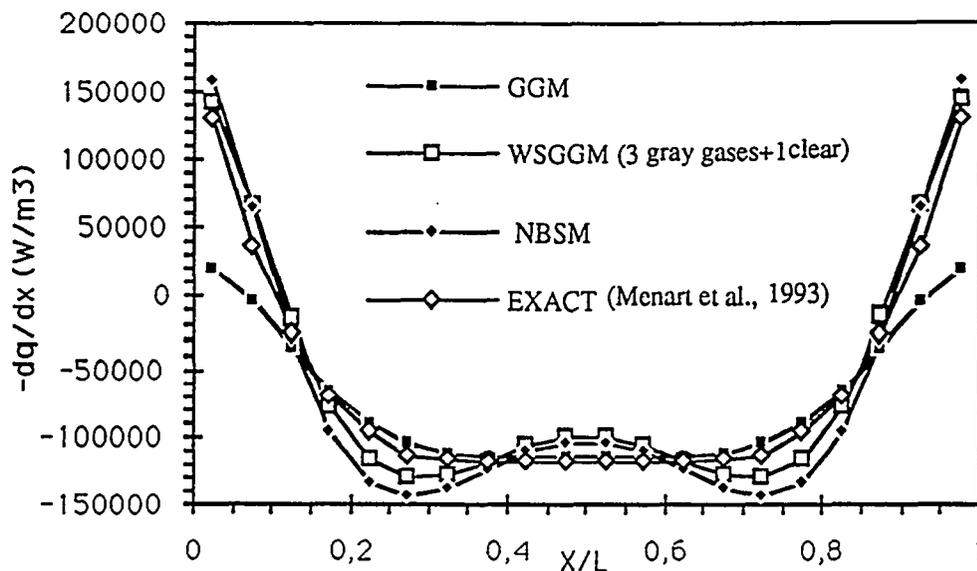


Fig. 7. - Sources radiatives pour un profil parabolique de température. H_2O pure. $L=0.5$ m
 $\epsilon_{x/L=0} = \epsilon_{x/L=0.5} = 0.9$; $T_{x/L=0} = T_{x/L=0.5} = 400$ K

Des trois modèles présentés, le WSGGM nous paraît être le mieux adapté dans le cas de problèmes industriels multidimensionnels. Le compromis entre temps de calcul et qualité des résultats est le meilleur. Dans ce modèle, on réalise le calcul radiatif dans le milieu pour les trois gaz gris et pour le gaz transparent. Le temps de calcul par rapport au GGM est donc sensiblement multiplié par 4. A titre d'exemple, pour le cas 3 avec parois réfléchissantes, le temps de calcul est de 0.75 secondes CPU sur une station IBM550 alors qu'il est de plusieurs minutes dans le cas d'un calcul corrélé réalisé sur CRAY-2 [5].

Le NBSM qui fait appel à une décomposition du spectre en 32 bandes est beaucoup plus lourd à utiliser. De plus, pour des applications industrielles ($T > 1500$ K) nous ne disposons pas de suffisamment de données (coefficients k_i) pour les gaz radiativement actifs.

Le GGM est l'approche qui ne tient pas compte de la dépendance spectrale des propriétés radiatives des gaz. Ce modèle moyenne en fait tous les phénomènes d'absorption et d'émission qui existent dans le milieu gazeux. En revanche il permet dans la plupart des cas d'estimer correctement les flux nets aux parois. Il est également très simple à appliquer.

Il est bien évident que pour étudier les installations industrielles qui nous intéressent la description de la géométrie ne se fait pas avec 20 mailles mais plutôt avec 200000 mailles en 3D. On conçoit aisément que dans ce cas l'utilisation des approches corrélées n'est pas possible si l'on veut conserver des temps de calcul raisonnables. Il faut également garder à l'esprit que dans la plupart des cas, en particulier pour les fours de réchauffage sidérurgiques, le rayonnement est couplé aux autres modes de transfert de la chaleur et aux écoulements turbulents des fumées ce qui complique encore fortement la procédure de calcul. Nous avons d'ailleurs pu montrer [12] que pour ce type de problèmes, les modèles GGM et NBSM donnaient des résultats très voisins quand tous les phénomènes étaient couplés.

2. COUPLAGE DU MODELE AUX ORDONNEES DISCRETES AU LOGICIEL DE THERMIQUE-MECANIQUE DES FLUIDES PHOENICS

Le logiciel PHOENICS dispose en standard d'un modèle de rayonnement à 6 flux. Ce modèle simple prend en effet très mal en compte la dépendance directionnelle du rayonnement ; celui-ci ne se propage en effet que suivant les axes de coordonnées du système. Nous avons montré [1] que le modèle à 6 flux n'était pas du tout adapté aux problèmes de

rayonnement que nous traitons. Le principal avantage du modèle à 6 flux réside en fait dans la compatibilité des équations avec le solveur standard de PHOENICS [12]. Pour améliorer la qualité de nos simulations nous avons donc couplé à PHOENICS le modèle de rayonnement aux ordonnées discrètes.

Dans le modèle aux ordonnées discrètes, la procédure de résolution par balayage sur l'ensemble des directions de propagation du rayonnement est particulière. Le modèle radiatif est donc intégré dans un module de calcul séparé qui échange des informations avec le solveur de PHOENICS. En effet, dans le cas d'un calcul couplé, les données à échanger sont le champ de température dans le gaz et aux limites opaques et les termes sources radiatifs et les flux nets.

Cette nouvelle configuration du logiciel PHOENICS nous permet d'aborder de nombreux problèmes industriels de transferts couplés dans leur globalité. Ce simulateur dédié à l'étude des enceintes de réchauffage à flammes et baptisé "SIFOU3D" a déjà été appliqué avec succès lors de modifications technologiques sur des fours de réchauffage industriels. Le rayonnement, mode principal de transfert de l'énergie dans beaucoup d'applications, est traité avec le même niveau de complexité que les écoulements ou la turbulence et n'est plus placé au second plan. Une validation globale du logiciel sur un four d'essais a été réalisée et a montré les qualités du simulateur pour l'évaluation des profils thermiques des produits réchauffés.

3. CONCLUSION

Les travaux relatifs à la modélisation d'enceintes de réchauffage industrielles ont pour but de disposer d'outils d'aide à la réflexion lors de la mise en place de nouvelles installations ou de modifications sur des installations existantes. Il est donc nécessaire de trouver à notre niveau, un juste compromis entre des approches théoriques actuellement sans applications industrielles et des approches trop empiriques.

En ce qui concerne les transferts radiatifs en milieu gazeux, les approches corrélées sont très complexes à mettre en œuvre dans des géométries multidimensionnelles. Des méthodes de calcul décorréliées ont donc dû être envisagées pour traiter les problèmes multidimensionnels avec transferts couplés. Une formulation de type "somme pondérée de gaz gris" ou "gaz gris" permet d'accéder à un niveau suffisant de précision dans de nombreux cas. Dans cette optique, l'approche proposée récemment par M. K. DENISON et B.W. WEBB [16] et qui consiste à décrire finement le spectre d'émission d'un mélange gazeux à partir de quelques valeurs discrètes du coefficient d'absorption semble être parfaitement adaptée à des calculs industriels.

Le modèle radiatif aux ordonnées discrètes a été intégré au logiciel de thermique-mécanique des fluides PHOENICS afin de pallier les déficiences du modèle standard à "6 flux" qui ne fournit pas de résultats satisfaisants dans les cas que nous traitons. Sa principale limitation est qu'il n'est applicable dans sa configuration actuelle qu'à des maillages cartésiens. R VAILLON et al. [20] ont montré récemment que la méthode des ordonnées discrètes était également utilisable dans le cas de maillages curvilignes.

Des simulations de fours industriels sidérurgiques qui intègrent la plupart des phénomènes physiques (écoulements turbulents anisothermes de fumées, rayonnement, conduction dans les produits se déplaçant dans l'enceinte) sont réalisées avec SIFOU3D. Elles nous permettent d'étudier plus particulièrement l'impact d'actionneurs thermiques (brûleurs) sur l'homogénéité thermique des produits réchauffés.

NOMENCLATURE

$a :$	coefficients de pondération dans le modèle "somme pondérée de gaz gris"	
$d\Omega :$	élément d'angle solide	sr^{-1}
$f :$	coefficient de pondération pour la méthode des poids variables	
$\overline{k}_\nu :$	rapport entre l'intensité moyenne des raies et l'espacement moyen	$m^{-1}.atm^{-1}$
$l :$	trajet optique	m
$L_\nu :$	luminance monochromatique (au point s suivant la direction Ω)	$W.m^{-2}.sr^{-1}.m$
$L^\circ_\nu(T) :$	luminance monochromatique du corps noir	$W.m^{-2}.sr^{-1}.m$
$P :$	pression du milieu gazeux	atm
$p_\nu :$	fonction de phase de diffusion monochromatique	
$s_\nu :$	coefficient de diffusion monochromatique	m^{-1}
$S_r :$	source radiative	$W.m^{-3}.m$
$T :$	température	K
$x_i :$	fraction molaire du gaz i	
$x, y, z :$	coordonnées du point considéré dans l'espace	m

Symboles

$\nu :$	"nombre d'ondes"	m^{-1}
$\mu, \xi, \eta :$	cosinus directeurs relatifs à la direction Ω	
$\omega_m :$	poids associé à la direction m lors de la discrétisation directionnelle	
$\kappa_\nu :$	coefficient d'absorption monochromatique	m^{-1}
$\varepsilon :$	émissivité	
$\rho :$	réflectivité	
$\sigma :$	constante de Stefan-Boltzman	
$\Phi_{r,\nu} :$	flux net radiatif monochromatique	$W.m^{-2}.m$
$\tau_\nu (s', s) :$	transmittivité monochromatique entre les points s et s'	
$\overline{\beta}_\nu :$	caractérise le chevauchement entre les raies	
$\overline{\gamma}_\nu :$	demi-largeur moyenne des raies à mi-hauteur	m^{-1}
$\overline{\delta}_\nu :$	espacement moyen entre deux raies	m^{-1}

Indices supérieurs et inférieurs

$i :$	indice caractérisant le numéro de bande spectrale ou de gaz ($i=1, I$)
$m :$	indice angulaire de direction discrète ($m=1, Nm$)
$' :$	caractérise les directions incidentes au point considéré

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GEVERS (C.), MULLER (J.), GARDIN (P.). - *Evaluation du modèle de rayonnement de PHOENICS et comparaison avec le modèle aux ordonnées discrètes développé à l'IRSID.* note interne, THEMEF RI 92.063, 1992
- [2] FIVELAND (W.A.) - *Three-dimensional radiative heat transfer solutions by discrete-ordinates method.* 24th Nat. Heat Transfer Conf. and Exhibition (ASME), HTD Vol. 72, pp. 9-18, 1987
- [3] KIM (T.K.), MENART (J.A.), LEE (H.S.) - *Nongray radiative gas analysis using the S-N discrete ordinates method.* Transactions of the ASME, Vol. 113, pp. 946-952, 1991
- [4] MENART (J.A.), LEE (H.S.), KIM (T.K.) - *Discrete-ordinates solutions of nongray radiative transfer with diffusely reflecting walls.* Transactions of the ASME, Vol. 115, pp. 184-193, 1993
- [5] SACADURA (J.F.), BORGES de MIRANDA (A.) - *Radiative transfer modelling : a survey of current capabilities for non-grey participating media.* Proceedings of the Eurotherm Seminar N°37, Saluggia, October 5-7, pp. 13-33, 1994
- [6] FIVELAND(W.A.) - *Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures.* J. of Heat Transfer, Vol. 106, pp. 699-706, 1984
- [7] TRUELOVE (J.S.) - *Discrete-ordinates solutions of the radiation transport equation.* J. of Heat Transfer, Vol. 109, pp. 1048-1051, 1987
- [8] CARLSON (B.G.), LATHROP (K.D.) - *Transport theory - The method of discrete-ordinates.* Computing Methods in Reactor Physics, Greenspan, Keber and Okrent Editions, Gordon and Breach, N.Y., 1968
- [9] EL WAKIL (N.) - *Etude de transferts de chaleur par conduction, convection et rayonnement couplés dans des milieux semi-transparentes fluides ou poreux.* Thèse de Doctorat, INSA Lyon, 1991
- [10] LATHROP (K.D.) - *Ray effects in discrete-ordinates equations.* Nuclear Science and Engineering, N° 32, pp.357-369, 1968
- [11] LATHROP (K.D.) - *Spatial differencing of the transport equation : positivity vs-accuracy.* J. of Computational Physics, N° 4, pp. 475-498, 1969
- [12] MULLER (J.) - *Contribution à l'étude des transferts thermiques couplés dans des enceintes contenant des gaz de combustion. Application aux fours de réchauffage sidérurgiques.* Thèse de Doctorat, Université de Reims, 1994
- [13] MENGÜÇ (M.P.), VISKANTA (R.) - *Radiative transfer in three-dimensional rectangular enclosures containing inhomogeneous, anisotropically scattering media.* J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 33, N° 6, pp. 533-549, 1985
- [14] SMITH (T.F.), SHEN (Z.F.) - *Evaluation of coefficients for the weighted sum of gray gases model.* ASME Publication, N° 81-HT-55, 1981
- [15] HOTTEL (H.C.), SAROFIM (A.F.) - *Radiative transfer.* Mc Graw-Hill Book Company, 1967
- [16] DENISON (M.K.), WEBB (B.W.) - *A spectral line-based weighted-sum-of-gray-gases model for arbitrary RTE solvers.* Transactions of the ASME, Vol. 115, pp. 1004-1012, 1993
- [17] SOUFIANI (A.) - *Etudes théoriques et expérimentales des transferts couplés par convection laminaire ou turbulente et rayonnement dans un milieu gazeux à température élevée.* Thèse de Doctorat, Université de Paris Orsay, 1987
- [18] HARTMANN (J.M.), LEVI DI LEON (R.), TAINE (J.) - *Line-by-line and narrow-band statistical model calculations for H₂O.* J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 32, N° 2, pp. 119-127, 1984
- [19] SOUFIANI (A.), HARTMANN (J.M.), TAINE (J.) - *Validity of band-model calculations for CO₂ and H₂O applied to radiative properties and conductive-radiative transfer.* J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 33, N° 3, pp. 243-257, 1985
- [20] VAILLON (R.), LALLEMAND (M.), LEMONIER (D.) - *Radiative-conductive heat transfer in curvilinear coordinates by the discrete ordinates method.* Eurotherm Seminar n°36, 1994, Poitiers.

SOCIETE FRANCAISE DES THERMiciens

*JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

SUR

LES CODES DE CALCUL DE RAYONNEMENT THERMIQUE

A comparison between weighted sum of gray gases and spectral CK radiation models for heat transfer calculations in furnaces

F. EL AMMOURI, R. PLESSIER, M. TILL, B. MARIE and E. DJAVDAN

Air Liquide

Centre de Recherche Claude Delorme

Les-Loges-en-Josas

78350 Jouy-en-Josas

France

Abstract

Coupled reactive fluid dynamics and radiation calculations are performed in air and oxy-fuel furnaces using two gas radiative property models. The first one is the weighted sum of gray gases model (WSGG) and the second one is the correlated-k (CK) method which is a spectral model based on the cumulative distribution function of the absorption coefficient inside a narrow band. The WSGG model, generally used in industrial configurations, is less time consuming than the CK model. However it is found that it overpredicts radiative fluxes by about 12 % in industrial furnaces.

1- Introduction

Gas radiation represents an important mode of heat transfer in many industrial systems such as combustion chambers and furnaces. Its importance increases with temperature especially in oxy-fuel systems where maximum temperatures are greater than 2000 K. Consequently, an accurate calculation of radiative fluxes is essential to improve the efficiency of such systems, to predict the wall temperature or to simulate pollutant formation. In many engineering applications, it is necessary to account for the fine spectral structure of gas radiative properties. In spite of their accuracy, line-by-line calculations are not used because of their computational costs. Some approximate models have been proposed. Statistical narrow-band (SNB) models have been used to compute radiative intensities along line of sight in different flame configurations by Faeth et al. [1-4], or to study radiative transfer in planar [5-8] or in axisymmetrical geometries [9, 10]. But the SNB approaches present some disadvantages: (i) the radiative transfer equation must be used in terms of transmissivities. This fact limits the choice of the method of resolution of the radiative transfer equation; (ii) the Curtis-Godson approximation [11] used for nonisothermal and nonhomogeneous gas mixtures, is not easy to use for the required large number of transfer directions (a few hundreds typically); practically other approximations such as the correlation function approximation of Zhang et al. [9] and Soufiani and Taine [10] are required; (iii) a radiative transfer calculation based on transmissivities is not suitable for the treatment of gas-scattering particle mixtures. Similarly, the spectral correlation phenomena which appear in the reflected flux at a wall are not easy accounted for.

Another spectrally correlated approximate model, which does not present the previous disadvantages, is the cumulated k distribution function approach, called CK. It has been studied for atmospheric applications by Goody and Yung [12] and typically for combustion applications by Rivière et al. [13-14]. This method appears to be generally convenient for heat transfer purposes, except in the case of hot gas radiation transmitted through a long cold path of the same cold gas [13] which is not encountered in furnaces.

But the radiation models that are mostly used for industrial configurations are based on the weighted sum of gray gases (WSGG) or even simple gray gas concepts [15-18]. The WSGG model has been first introduced by Hottel and Sarofim [15] in association with the zonal method. Modest [19] has shown that with the WSGG model and N gray gases the radiative transfer problem reduces to N radiative transfer equations if the absorption spectrum can be considered as spatially invariant. He compared WSGG against spectral calculations for a hypothetical medium with an absorption coefficient uniform throughout the entire medium. Denison and Webb [20,

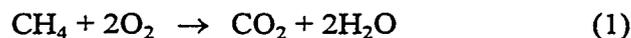
21] have developed more elaborate versions of the WSGG model, based on the absorption-line blackbody distribution function and tested it against line-by-line approach for water vapor in planar media. Song [22] has compared WSGG with wide-band results for planar geometries and Soufiani and Djavdan [23] have compared WSGG and SNB results in the case of planar and axisymmetric combustion systems.

In the present paper, we made **coupled** reactive turbulent fluid dynamics and radiation calculations in air and oxy-fuel furnaces using two gas radiative property models: the WSGG model with Taylor and Foster parameters [24] and the CK spectral model with Rivière et al. parameters [14]. Section 2 is related to a brief description of the radiative, turbulence and combustion models used to perform calculations. Comparisons between the results of the WSGG and CK models are discussed in section 3.

2- Analysis

The turbulent reactive flow within the furnaces is simulated by solving the governing conservation equations in their steady-state time averaged form (see for instance Carvalho and Nogueira [17]).

Turbulence modeling is carried out by the classical (k, ϵ) model of Jones et al. [25]. Since our attention is focused on the prediction of radiative transfers, elementary turbulent combustion model is used in order to provide realistic molar fraction fields in burnt gases. The combustion is described by the mixing rate controlling model proposed by Magnussen and Hjertagger [26]. The only reaction considered here for oxy-methane combustion is :



However, the specific heats of the combustion products take into account the presence, at equilibrium of species such as CO, H₂, OH... The computational code ATHENA, developed in Air Liquide, is used for the resolution of the governing equations. The numerical treatment of these equations is based on a classical finite-volume SIMPLE resolution method [27].

The radiative transfer equation is solved by using the discrete transfer radiation model described by Lockwood and Shah [18]. Two gas radiative property models are compared. The first one is the WSGG model and the second the CK model.

In the CK model, the spectrum inside a band of width $\Delta\nu$ is replaced by the reciprocal function $k(g)$ of the cumulative distribution function $g(k)$ of the absorption

coefficient K_v . For instance, the transmissivity of a uniform column averaged over Δv is given by

$$\overline{\tau}_v^{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v} \exp(-K_v l) dv = \int_0^1 \exp(-k(g) l) dg \quad (2)$$

Unlike K_v , the function $k(g)$ has no fine structure and the last spectral integration can be carried out using a few points Gauss quadrature (7 points in this study). If the spectral absorption coefficient is a scaling function of the wave number [12], the intensity averaged over Δv is for nonuniform media :

$$\overline{I}_v^{\Delta v} = \sum_{n=1}^7 \omega_n I_{vn}(s) \quad (3)$$

where the coefficients ω_n are the quadrature weights and I_{vn} the intensity at the quadrature point n which may be computed from the radiative transfer equation :

$$\frac{\partial I_{vn}}{\partial s} = k_{vn}(s) (I_v^0(s) - I_{vn}(s)) \quad (4)$$

It is then sufficient to store the values k_{vn} for the seven quadrature points and for each band (the index n in I_{vn} and k_{vn} refers to the spectral band of width Δv), as functions of the thermodynamic conditions. In practice, instead of k_{vn} , the coefficients used are :

$$k_{vn}^* = k_{vn} \frac{T Q(T)}{x p} \quad (5)$$

where $Q(T)$ is the partition function of the considered molecule at temperature T , x is the molar fraction and p the total pressure. k_{vn}^* has smoother variations with temperature than k_{vn} and simple linear interpolations can be carried out. A detailed description of the CK parameters used in this study is given in Ref. [14]

The WSGG is the most commonly used in engineering applications because its simple implementation and small CPU times. We consider here for comparison the classical form of WSGG with 3 gray gases characterized by constant "absorption coefficients" and temperature dependent weights plus 1 clear gas. In the case of spatially constant radiative properties, the radiative transfer problem reduces to the resolution of four transfer equations [19] :

$$\frac{d I_k}{ds} = \kappa_k x p (a_k(s) I^0(s) - I_k(s)) \quad (6)$$

$$I = \sum_{k=1}^{k=4} I_k \quad (7)$$

where κ_k and $a_k(s)$ are the constant absorption coefficient and temperature dependent weight of the k^{th} gray gas ($\kappa_4=0$, $a_4 = 1 - \sum_{k=1}^{k=3} a_k$), and $I^0(s)$ the total local equilibrium intensity, i.e. $\sigma T(s)^4/\pi$. I_k may be considered as the spectral part of the total intensity I in the regions of the spectrum where the absorption coefficient is close to $x p \kappa_k$. $a_k(T)$ is the fraction of the total intensity of equilibrium radiation, at the temperature of the emitting element, corresponding to the same spectral regions. With the same degree of approximation, the boundary condition for the gray gas k at a diffuse wall may be written

$$I_{kw} = \varepsilon_w a_k(T_w) I^0(T_w) + \frac{(1 - \varepsilon_w)}{\pi} \int_{2\pi} I_{k,inc} \cos\theta d\Omega \quad (8)$$

where ε_w , T_w and I_{kw} are respectively the wall emissivity, temperature and isotropic leaving intensity and $I_{k,inc}$ is the incident intensity in a direction characterized by θ . The model parameters κ_k and $a_k(T)$ are generally obtained by adjusting total emissivities $\varepsilon_g(T)$ to fit the expression :

$$\varepsilon_g(T) = \sum_{k=1}^{k=3} a_k(T) (1 - \exp(-\kappa_k x p l)) \quad (9)$$

for different xpl conditions. The main limitations of the WSGG model are the following: (i) it is assumed when using Eq. (6) that absorption is accounted for with the weighting coefficient a_k taken at the temperature of the emitting medium. (ii) Radiative properties of walls and eventual particles are necessarily gray. (iii) The model leads to an overcorrelation between emission at high temperature (in the band wings) and absorption when the absorbing regions are optically thick. (iiii) The extension of the model to the case of mixtures with overlapping bands is not obvious, especially in the case of varying molar fractions. In this study the WSGG parameters are from Taylor and Foster [24]

3- Results and discussion

Coupled radiation and reactive fluid dynamics calculations are performed in a 6x1x1m parallelepiped furnace with a 0.1x0.1m inlet and 0.4x0.4m outlet. The glass surface temperature is constant and equal to 1673 K while all other walls have a constant global heat transfer coefficient equal to $2 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ with an ambient temperature of 300 K. Walls are diffuse and gray with emissivities equal to 0.5. A nonuniform 12x24x33 grid is used in the x , y (furnace height) and z (furnace axis) coordinate directions respectively and for the half furnace due to yOz plane of symmetry. Calculations are carried out in air and oxy-fuel furnaces using two gas radiative property models : WSGG and CK models. . The inlet gas temperature and turbulence intensity are equal to 300 K and 0.03 respectively. The inlet flow characteristics in the cases of premixed combustion with oxygen and air are summarized in table 1. m and P_{inlet} are the inlet mass flow rate and power respectively. Y_{O_2} and Y_{CH_4} are the inlet mass fractions of O_2 and CH_4 respectively. It should be noticed that the CK model calculation takes 70 times more CPU than the WSGG model calculation.

	m (kg/s)	P_{inlet} (MW)	Y_{O_2}	Y_{CH_4}
with O_2	0.104	2	0.8	0.2
with air	0.968	5.13	0.22	0.055

Table 1 : Inlet flow characteristics.

Figure 1 shows comparisons between the results of calculations with oxy-combustion using WSGG and CK radiative models. Figure 1a shows gas temperature along the furnace axis. WSGG model underestimates gas temperature by about 100 K for axial distance z greater than 1m which corresponds to the flame length. The crown temperature T_{crown} and the glass surface flux ϕ_{glass} are displayed in Figs. 1b and 1c respectively, versus axial distance in the furnace symmetry plane. When WSGG model is used, T_{crown} and ϕ_{glass} are overpredicted by about 40K and 10% respectively for $z < 3.2\text{m}$, and underpredicted in the rest of the furnace. This is due to the formulation of the WSGG model. Gas absorption weighting factors are taken at the emitting body temperature (gas). Consequently, since the gas temperature is higher than the wall temperatures and since the total gas emissivity decreases quickly as temperature increases, gas absorption is underpredicted by the WSGG model resulting in an overprediction of T_{crown} and ϕ_{glass} . For this reason, gas radiative dissipation is overestimated. Then gas temperature decreases quickly with z and explains the underestimation of T_{crown} and ϕ_{glass} for $z > 3.2\text{m}$.

The same phenomena are observed in the case of air combustion (Fig. 2). But as combustion gases radiate less than in oxy-combustion case, the overestimations of T_{crown} and ϕ_{glass} by about 25K and 15% respectively, when WSGG model is used, occur in the whole furnace.

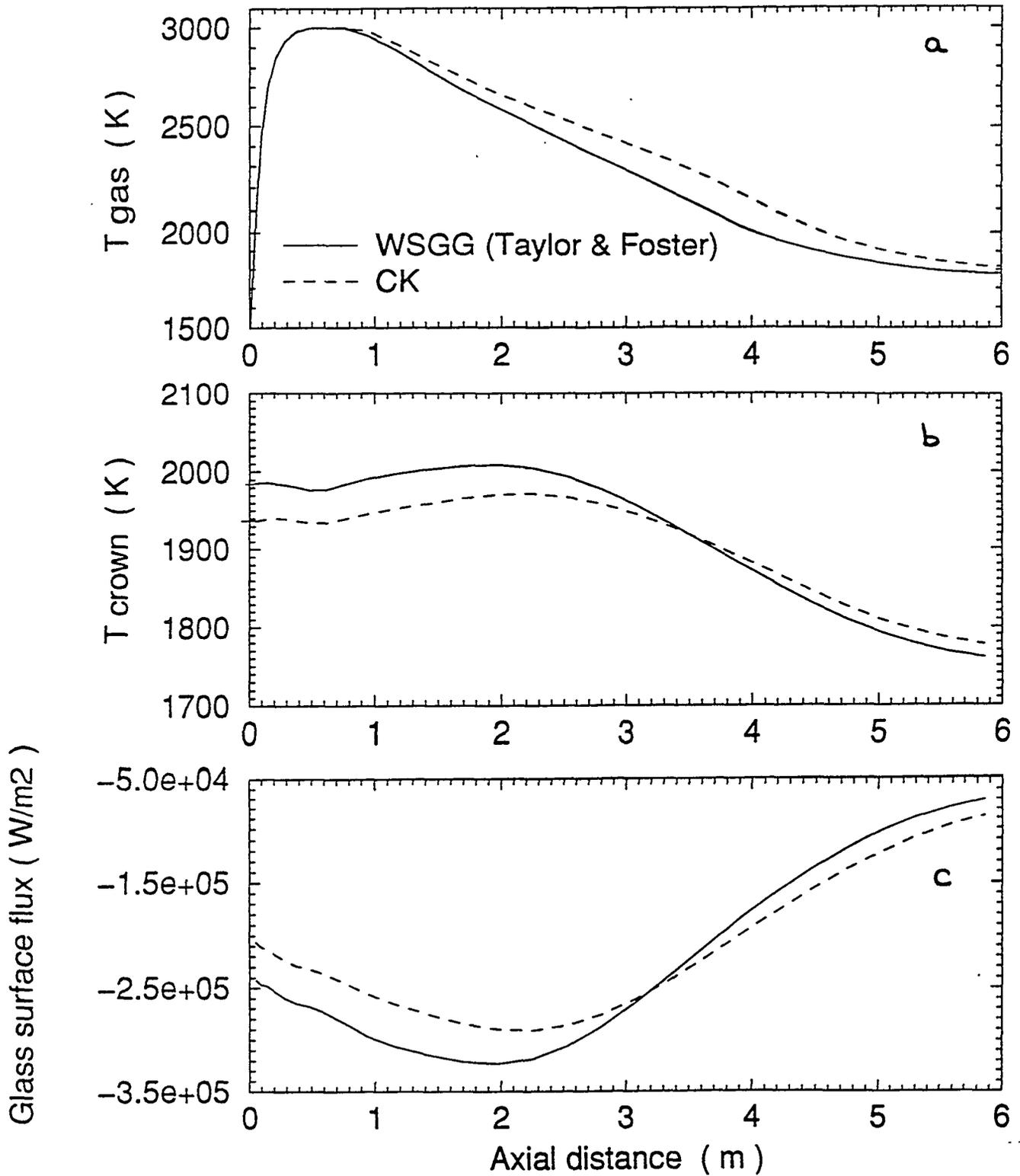


Figure 1 : Results in the case of oxy-combustion.

a- Gas temperature along the furnace axis z .

b- Crown temperature versus z in the furnace symmetry plane.

c- Glass surface flux versus z in the furnace symmetry plane.

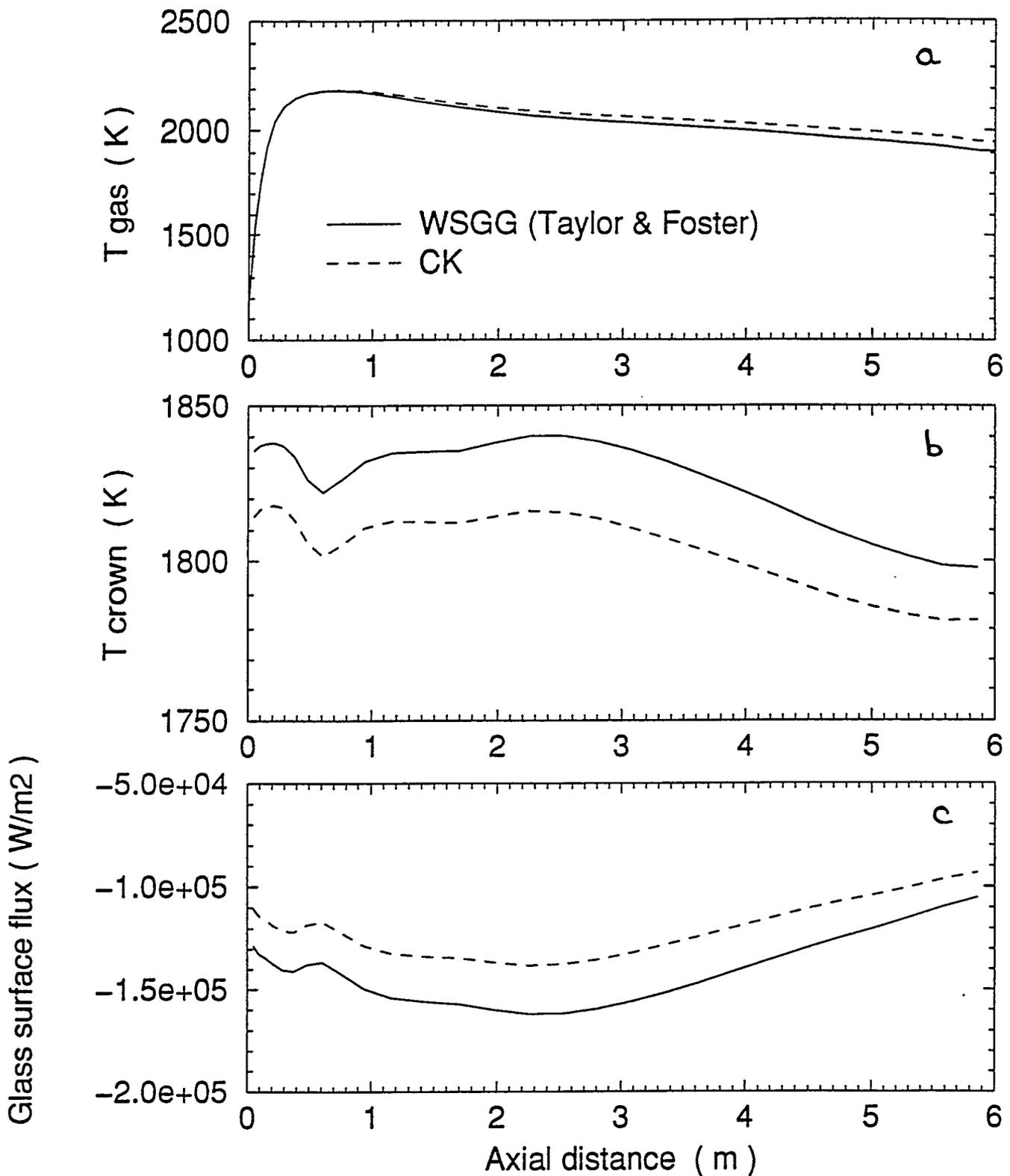


Figure 2 : Results in the case of air combustion.

a- Gas temperature along the furnace axis z .

b- Crown temperature versus z in the furnace symmetry plane.

c- Glass surface flux versus z in the furnace symmetry plane.

4- Conclusions

To our knowledge, it is the first time that coupled reactive fluid dynamics and radiation calculations are carried out in 3D air and oxy-fuel furnaces using CK spectral radiation model and WSGG model with Taylor and Foster parameters. It is shown that the WSGG model overpredicts wall radiative flux and crown temperature. In fact, the usual implementation of the WSGG model leads to an inaccurate prediction of gas total absorptivities since the weighting factors are always taken at the temperature of the emitting body. Absorption by cold gases of radiation emitted by hot gases is generally underestimated. This may lead to important errors. On the other hand, the main limitation for the use of the CK model or another spectral radiation model in real industrial furnaces is its high CPU time. Consequently, further investigations are still needed to derive an improved version of the WSGG model in order to reach the object of accurate radiation calculations with reasonable CPU time.

Acknowledgment

Dr Anouar Soufiani is gratefully acknowledged for his constant and valuable assistance.

References

1. Sivathanu, Y. R., Kounalakis, M. E. and Faeth, G. M., *Twenty Third Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, 1990, p. 1543.
2. Jeng, S. M., Lai, M. C. and Faeth, G. M., *Combust. Sci. Technol.* 40:41-43 (1984).
3. Faeth, G. M., Jeng, S. M., Gore, J. P., in *Heat Transfer in Fire and Combustion Systems* (C. K. Law et al., Ed.), ASME, New York, 1985, Vol. 45, p. 137.
4. Kounalakis, M. E., Sivathanu, Y. R., and Faeth, G. M., *J. Heat Transf.* 113:437-445 (1991).
5. Soufiani, A., Hartmann, J. M., and Taine, J., *J. Quant. Spectrosc. Radiat Transf.* 33:243-257 (1985).
6. Soufiani, A. and Taine, J., *Int. J. Heat Mass Transf.* 30:437-447 (1987).
7. Kim, T. K., Menart, J. A. and Lee, H. S., *J. Heat Transf.* 113:946 (1991).
8. Menart, J. A., Lee, H. S. and Kim, T. K., *J. Heat Transf.* 115:184 (1993).
9. Zhang, L., Soufiani, A. and Taine, J., *Int. J. Heat Mass Transf.* 31:2261-2272 (1988).
10. Soufiani, A. and Taine, J., *The Sixth International Symposium on Transport Phenomena in Thermal Engineering*, Seoul, Korea, 1993, p. 181.
11. Young, S. J., *J. Quant. Spectrosc. Radiat Transf.* 18:1-28 (1977).
12. Goody, R. M. and Yung, Y. L., *Atmospheric Radiation*, Oxford Univ. Press, New York (1989).
13. Rivière, P., Soufiani, A. and Taine J., *J. Quant. Spectrosc. Radiat Transf.*, 48:187-203 (1992).
14. Rivière, P., Scutaru, D., Soufiani, A. and Taine J., *Proc. of the 10th Int. Heat Transfer Conf.*, Brighton, U. K., 1994, Vol 2, pp. 129-134.
15. Hottel, H. C. and Sarofim, A. F., *Radiative Transfer*, Mc Graw-Hill, New York, 1967.
16. Johnson, T. R. and Beer, J. M. and Faeth, G. M., *Fourteenth Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, 1973, p. 639.
17. Carvalho, M. G. and Nogueira, M., in *Heat Transfer in radiating and combusting Systems* (Carvalho et al., Eds.), Springer-Verlag, 1991, p. 374.
18. Lockwood, F. C. and Shah, N. G., *Eighteenth Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, 1980, p. 1405.
19. Modest, M. F., *J. Heat Transf.* 113:650-656 (1991).
20. Denison, M. K. and Webb, B. W. *J. Quant. Spectrosc. Radiat Transf.*, 50:499-510 (1993).
21. Denison, M. K. and Webb, B. W. *J. Heat Transf.*, 115:1004-1012 (1993).
22. Song, T. H. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 36:3975-3982 (1993).

23. Soufiani, A. and Djavdan, E., *Comb. and Flame.* 97:240-250 (1994).
24. Taylor, P. B. and Foster, P. J. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 17:1591-1605 (1974).
25. Jones, W. P., Launder, B. E., Dekeyser, I. *Int. J. Heat Mass Transf.* 15:301-314 (1972).
26. Magnussen, B., F. and Hjertager, B. H., *Sixteenth Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, 1976, p. 719.
27. Patankar, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1980.

SOCIETE FRANCAISE DES THERMIENS

JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)

TRANSFERTS RADIATIFS DANS LES FOYERS DE TURBOREACTEURS DEUX APPLICATIONS, TROIS NIVEAUX DE MODELISATION

Jean-Luc SCHULTZ* , Jean TAINÉ** , Michel DESAULTY*

* Snecma, Centre de Villaroche, 77550 Moissy-Cramayel

** EM2C - ECP 92295 Chatenay-Malabry

Résumé: Plusieurs applications liées au dimensionnement des foyers de turboréacteurs font appel d'une façon essentielle à la modélisation des transferts radiatifs. Deux applications très distinctes sont présentées dans cet article. Il s'agit d'une part de la modélisation de la thermique du foyer principal et d'autre part de la modélisation de la Signature Infrarouge d'un foyer de post-combustion d'un moteur militaire. Pour la première application deux types de modélisation du rayonnement thermique sont présentées; l'une globale, reposant sur des considérations empiriques, et utilisée dans les méthodes rapides de prédimensionnement, l'autre reposant sur un concept de gaz gris et combinée à une technique de type tracé de rayons, permet d'obtenir localement une valeur du flux radiatif. Pour la deuxième application relative à la SIR, une modélisation spécifique du flux radiatif est utilisée également dans le cadre d'une méthode de lancer de rayons. Chaque modèle constitue un niveau d'approximation successif du transfert radiatif, adapté aux spécificités des écoulements et à la performance recherchée.

Cet article illustre également la coopération très étroite entre Snecma et le laboratoire EM2C à l'ECP dans le domaine de la modélisation du rayonnement.

1- Introduction

Le développement et l'optimisation des turboréacteurs modernes relève de plus en plus d'un difficile compromis entre plusieurs spécifications. Parmi celles-ci on trouve pour les moteurs militaires, la discrétion, le rapport poussée/poids, la consommation spécifique et la durée de vie. Pour les moteurs civils on retrouve naturellement la consommation spécifique et la durée de vie mais également la pollution, liée à une réglementation de plus en plus sévère. A ces spécifications se rajoutent évidemment les contraintes essentielles de sécurité et de coût.

En ce qui concerne les foyers du moteur (chambre principale ou de post-combustion), la prise en compte d'une façon optimale de l'ensemble de ces contraintes dans le dimensionnement du foyer, a conduit les industriels à proposer des solutions technologiques nouvelles, souvent éloignées de leur expérience précédente. Pour cette raison, des outils spécifiques de dimensionnement ont été développés, faisant appel dans tous les cas à la simulation numérique.

Toutefois, les phénomènes physiques mis en jeu dans le moteur, et le foyer en particulier, sont très nombreux et en toute rigueur interagissent entre eux. Le traitement simultané et universel de l'ensemble de ces phénomènes, est aujourd'hui encore hors de portée des ordinateurs dont nous

disposons. Ceci a conduit les ingénieurs et les chercheurs à proposer des hypothèses simplificatrices et des modèles adaptés d'une façon spécifique à la prévision d'une performance donnée.

Pour la simulation des différentes performances du foyer, il est clair que la prise en compte des Transferts Radiatifs est souvent importante et quelquefois primordiale. Sa modélisation est dans tous les cas complexe et nécessite à chaque fois des approximations judicieuses et spécifiques pour pouvoir être utilisée de façon systématique sur des configurations industrielles.

Nous proposons dans cet article de présenter deux cas très différents pour lesquels la prise en compte du transfert radiatif est primordial pour la restitution de performances du moteur. Trois niveaux d'approximation du transfert radiatif seront également présentés illustrant cette démarche de modélisation spécifique orientée vers la restitution d'une performance particulière.

Les deux cas sont, d'une part, la modélisation de la thermique des parois du foyer qui est l'élément essentiel influençant sa durée de vie et d'autre part la modélisation de la Signature Infra-Rouge dont la réduction est, pour les avions militaires nouveaux, une des premières spécifications dont il faut tenir compte dans la conception de son moteur.

2- Prédiction de la thermique du foyer

Les objectifs de durée de vie d'un moteur civil ou militaire sont fixés en terme de nombre d'heures de fonctionnement ou de nombre de cycles. Ces objectifs sont ensuite déclinés pour chaque éléments. Il est clair que la réalisation de ces objectifs nécessite une très bonne maîtrise du comportement thermique et mécanique des pièces du moteur les plus sollicitées et en particulier du foyer.

2.1 Le foyer de combustion

L'étendu du domaine de vol d'un avion fait que les conditions thermodynamiques d'entrée varient sur une plage très étendue. De plus, l'évolution du cycle des moteurs conduit à des température et des pressions nominales dans le foyer de plus en plus élevées. Pour les foyers principaux des turboréacteurs modernes, la température d'entrée peut varier en fonction des conditions de vol, entre 300K et 900K, la pression entre 0,3 bar jusqu'à plus de 40 bars.

D'une façon générale, le foyer fonctionne globalement en excès d'air de telle sorte que la température en sortie de foyer soit compatible avec la tenue thermique de la turbine. L'état de l'art aujourd'hui pour cette température d'entrée turbine, est de près de 2000K.

Cependant, pour concilier cette contrainte avec les performances de stabilité et de rendement, le foyer est en général constitué de deux zones (fig. 1). La zone primaire, limitée par le fond de chambre et les trous primaires assure principalement les performances de stabilité. Pour cela, le rapport air/carburant y est en général stoechiométrique, ce qui peut conduire à des températures de l'ordre de 2600K à plein régime. La zone de dilution en aval permet d'améliorer le rendement de combustion et limite les hétérogénéités de température en sortie de foyer.

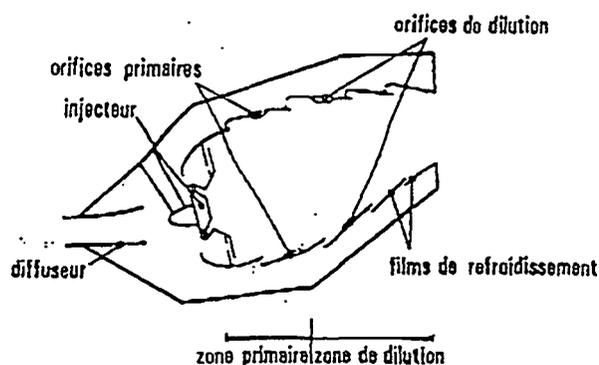


figure 1: géométrique du foyer principal

L'ensemble de ces contraintes conduit à un arrangement aérodynamique et thermique tridimensionnel complexe. La figure 2 représente

une coupe du champ de température dans un foyer principal de type "deux têtes" montrant en particulier l'inhomogénéité des champs, marqués par des gradients de température importants.



figure 2: Champ de température dans l'axe des injecteurs d'un foyer à deux têtes

2.2 Refroidissement et thermique de paroi

Cet environnement thermique lié à la combustion va conduire à des flux thermiques particulièrement importants sur les parois du tube à flamme et en général incompatibles avec la tenue thermique des matériaux qui le composent. C'est pourquoi différents dispositifs de refroidissement doivent être mis en place, avec comme objectif de maintenir dans tous les cas la température de paroi à des niveaux acceptables, et pour contrainte principale de minimiser la part d'air utilisée. Pour cela, on cherche à augmenter l'efficacité de l'air de refroidissement par des technologies nouvelles, telles que la multiperforation, ou l'utilisation de revêtements constituant une barrière thermique.

Dès le stade du dimensionnement, une série d'études détaillées du comportement mécanique, dynamique et thermique est réalisée pour l'ensemble du foyer ou plus en détail pour certaines parties. Ces premières approches globales, permettent en particulier de valider ou de remettre en cause les choix d'architecture de foyer, de préciser le dimensionnement des différents éléments et d'évaluer leur impact sur la mécanique.

Ces travaux s'inscrivent dans une boucle itérative d'optimisation qui est constituée, en particulier, de plusieurs centaines, voire milliers, de simulations stationnaires ou transitoires du champ de température dans les parties solides. Un exemple d'une simulation globale du champ de température des parois du foyer M88 est présentée figure 3.

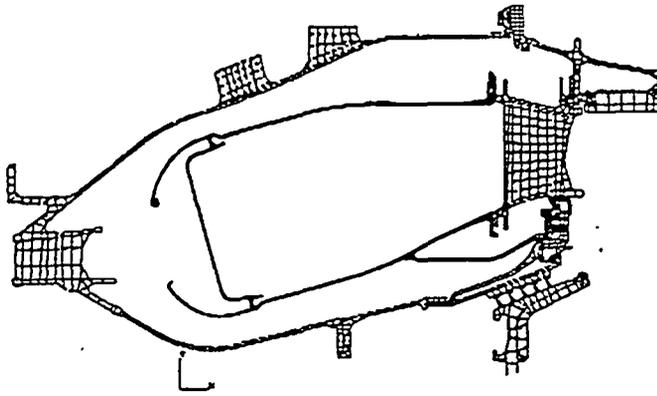


figure 3: foyer M88; calcul du champ de température dans les parois du foyer

Le point clé de ces simulations se trouve évidemment dans la détermination des transferts thermiques pariétaux, en terme de coefficient d'échange conducto-convectif et de transfert radiatif.

En ce qui concerne les coefficients d'échange, un certain nombre d'outils numériques ont été mis au point, allant de la corrélation ajustée sur des essais élémentaires, jusqu'au calcul tridimensionnel^{1,2,3} permettant d'obtenir, dans la plus part des cas courants (à l'exception des trous de multiperforation) des résultats tout à fait fiables et précis. Ceci est dû au fait que les phénomènes physiques liés à ce type de transfert sont principalement concentrés près de la paroi et ne dépendent en première approximation que de la température et du niveau de turbulence. La simulation numérique mais également expérimentale est ainsi relativement aisée et a été largement étudiée.

Il n'en est pas de même pour les transferts radiatifs, pour lesquels le flux produit dépend de l'ensemble du champ de température et également du niveau de concentration des espèces produites. Ainsi, outre la difficulté liée à l'aspect géométrique, s'ajoute la difficulté relative à la détermination de l'ensemble du champ thermique, mais également chimique.

2.2 Modèle monodimensionnel du rayonnement thermique

Dans cette première approche du rayonnement thermique un modèle simple et global est développé. En effet, au stade du prédimensionnement une des caractéristiques des codes utilisés est le temps calcul qui doit être très court afin de pouvoir s'inscrire facilement dans un cycle itératif d'optimisation. Ainsi, par exemple, le champ détaillé de l'aérothermochimie à l'intérieur du foyer n'est pas, pour des raisons de temps calcul,

utilisable à ce stade, et pour ce qui est du rayonnement thermique une modélisation géométrique très simplifiée du foyer doit être envisagée.

En effet, on suppose que chaque élément de paroi de température T_p ne voit au travers de la flamme que des éléments de paroi de même température et formant enceinte. Le gaz est supposé homogène à la température moyenne T_g .

Le flux de chaleur radiatif net peut alors s'exprimer par:

$$Q_r = \epsilon_{pt} \sigma (\epsilon_g T_g^4 - \alpha_g T_p^4)$$

avec

$$\epsilon_{pt} = \epsilon_p / (1 - (1 - \alpha_g)(1 - \epsilon_p))$$

ou

σ est la constante de Stephan-Boltzmann

ϵ_g l'émissivité du gaz à la température T_g

α_g l'absorptivité du gaz à la température T_p

ϵ_p l'émissivité hémisphérique totale de la paroi à la température T_p

L'absorptivité totale des gaz est donnée par la relation empirique suivante⁴:

$$\alpha_g / \epsilon_g = (T_g / T_p)^{1.5}$$

Il s'agit maintenant d'évaluer ϵ_g , qui dépend essentiellement de la longueur optique du milieu, supposé constitué principalement de produits de combustion tel que H_2O et CO_2 . ϵ_g dépend alors, d'une part, de la pression et de la composition des gaz qui peut être estimée d'après la seule connaissance de sa richesse et de sa température, et d'autre part d'une longueur équivalente de transmission l_t .

Cette longueur l_t est obtenue par l'expression simple⁶ $l_t = 3.4 \text{ Volume/Surface}$, ce qui correspond pour les foyers modernes à environ $0.6 D_h$.

Globalement et pour les gaz de combustion d'hydrocarbures, l'expression suivante⁵ est utilisée:

$$\epsilon_g = 1 - \exp(-0.29P(r+1_t)^{0.5} / T_g^{1.5})$$

avec P pression des gaz en Pa et r richesse des gaz exprimé en rapport massique fuel/air

L'expression suivante a été établie et validée dans le cas de flammes au rayonnement essentiellement non lumineuses produit par les gaz de combustion. Par contre, le rayonnement "lumineux" dépend principalement du nombre et de la tailles des particules de carbone et de suies présentes dans les gaz. Pour tenir compte de cela un facteur empirique de luminosité a été introduit⁴ et conduisant à l'expression suivante:

$$\epsilon_p = 1 - \exp(-0.29PL(r^*i_p)^{0.5}/T_g^{1.5})$$

Ce facteur de luminance L qui dépend du carburant utilisé, varie globalement entre 2 et 1, en fonction de la zone considérée. En particulier sa valeur diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la zone primaire et que les suies qui s'y forment s'oxydent.

La dernière difficulté consiste maintenant à estimer d'une manière semi-globale la température des gaz qui évidemment n'est pas homogène. Une méthode monodimensionnelle basée sur un assemblage de volumes élémentaires et une chimie complète du kérosène est utilisée à cette fin.

L'expression du flux radiatif ainsi que l'ensemble des formules qui permettent d'estimer les diverses autres formes de transfert thermique dans les foyers est intégrée dans nos différents codes de calcul thermiques.

2.3 Un cas d'application

Il est évident que ce type de codes avec l'ensemble des formules empiriques qu'ils contiennent doivent être régulièrement validés et le cas échéant recalibrés par comparaison aux mesures réalisées sur des configurations simples mais représentatives des technologies développées.

Un exemple de résultats d'une telle validation est représenté sur la figure 4. On y compare les températures moyennes calculées et mesurées sur une méridienne de la paroi d'un foyer tubulaire entièrement multiperforé. Trois paires de courbes sont présentées correspondant à trois cas de fonctionnement différents et des pressions de 1, 13 et 40 bars.

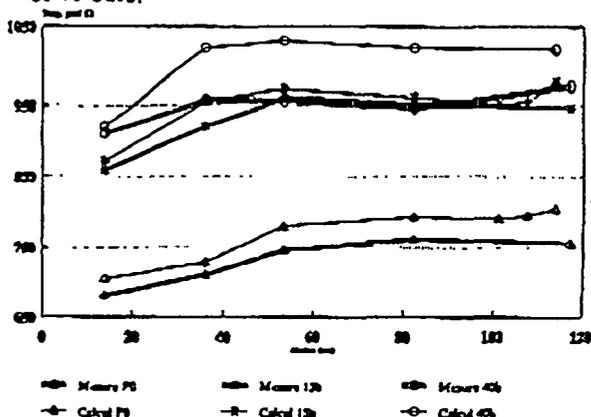


figure 4: température de paroi d'un foyer tubulaire. Comparaison calcul/mesures

D'une façon générale, l'accord est satisfaisant et l'écart ne dépasse pas en moyenne 30°. La correspondance est meilleure pour les pressions intermédiaires et se dégrade pour les pressions élevées ou faibles. Ceci peut s'expliquer en partie par le fait qu'aux pressions élevées, la loi de

rayonnement de Recvès sort de son domaine de validité, en particulier à cause de la modélisation rudimentaire des suies. Pour les pressions faibles, il s'avère que les transferts radiatifs deviennent négligeables devant les autres transferts principalement à cause de la diminution d'émissivité des gaz. La température de paroi est alors exclusivement pilotée par les échanges conducto-convectifs.

2.3 Influence des suies

Pour illustrer l'influence importante du niveau de suies sur le flux radiatif, on a représenté sur la figure 5, l'évolution du flux radiatif produit par une colonne de 10 cm de gaz de combustion à 1650K et richesse stoechiométrique, en fonction de la pression et de la fraction volumique de suies. Le calcul a été réalisé avec une modélisation de type gaz gris à 367 bandes.

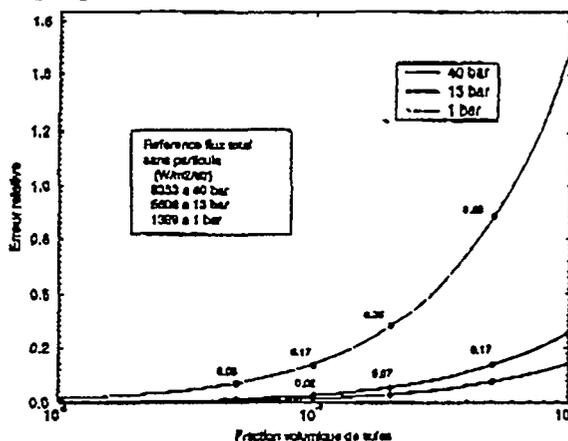


figure 5: Evolution du flux radiatif en fonction de la pression et du niveau de suies.

On remarque que pour des niveaux de fraction volumique de suies de l'ordre de 10^{-7} à 10^{-6} , représentatives du niveau mesuré^{7,8} dans ou en sortie d'un foyer de turboréacteur, la part due aux suies sur le rayonnement total, pour des pressions faible ou intermédiaires, est très importante, voire prépondérante et pour des pressions élevées elle reste non négligeable, de l'ordre de 20 à 25%.

On montre ainsi que c'est dans le domaine des pressions moyennes 10-20bars qu'il faut porter une attention particulière à la modélisation des suies. En effet, à basse pression, le niveau global du flux radiatif est faible et ne rentre que peu dans le bilan thermique et à haute pression, si le flux thermique est important, la part due aux suies est réduite.

2.4 Modélisation multidimensionnelle

La méthode de simulation du rayonnement thermique qui vient d'être décrite, si elle a l'avantage important d'être rapide, a l'énorme désavantage d'être globale, et de ne pas pouvoir prendre en compte d'une façon détaillée,

tridimensionnelle la géométrie du foyer et la configuration complexe de l'écoulement comme on peut le voir sur la figure 3 par exemple.

Pour illustrer l'influence des ces effets tridimensionnels on a représenté sur la figure 6, l'évolution des températures (représentées en terme d'échauffement) mesurées le long d'un foyer tubulaire. Les températures ont été mesurées de façon simultanées à différentes abscisses et sur trois lignes méridiennes différentes. On remarque nettement que sur les trois lignes de thermocouples les températures mesurées aux mêmes abscisses sont différentes de près de 50°. La température calculée à l'aide d'une méthode globale ne peut que représenter une moyenne de ces valeurs mesurées.

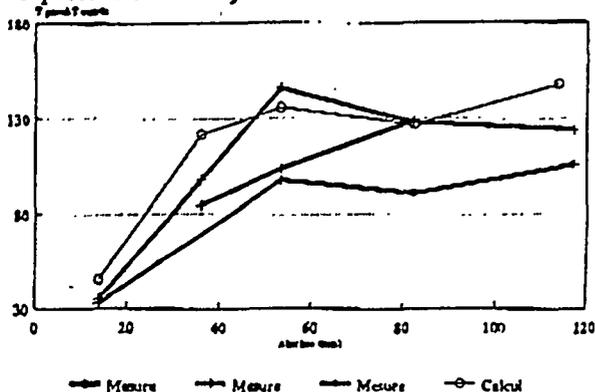


figure 6: Echauffement de la paroi d'un foyer tubulaire. Mesures le long de plusieurs méridiennes et comparaison au calcul.

Pour une simulation plus précise et tridimensionnelle des températures, il est nécessaire de tenir compte d'une façon plus détaillée de l'aérothermique du foyer, aussi bien pour la représentation des transferts conducto-convectifs que pour les transferts radiatifs. En ce qui concerne les premiers, l'utilisation courante des codes aérothermiques (pour Snecma, il s'agit essentiellement des codes DIAMANT et NATUR) permet d'accéder relativement facilement, à la validation des modèles physiques près, aux coefficients d'échange et aux températures de gaz. Par contre pour la prise en compte plus détaillée du flux radiatif, une méthode numérique nouvelle doit être mise en place.

Dans notre cas, une méthode de type N flux a été choisie qui consiste, pour le système tridimensionnel schématisé sur la figure 7, à calculer en tout point P parmi les NP points de discrétisation de la paroi (en moyenne plusieurs milliers), le flux radiatif pariétal. Cela revient à calculer en P la distribution des luminances L_v pour un ensemble de directions ND (en pratique quelques centaines) couvrant les 2π stéradians du demi espace défini par le point P et sa normale. Les

flux incidents et partant peuvent alors être calculés et réactualisés itérativement jusqu'à convergence.

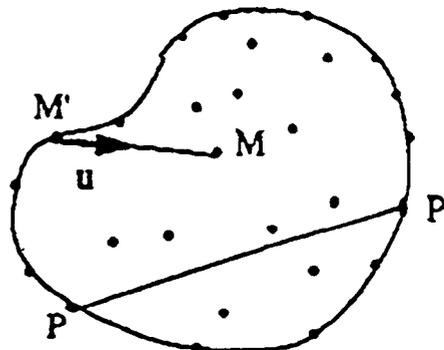


figure 7: Méthode de lancer de rayons. Schématisation d'un système 3D

Le développement de ces méthodes est réalisé dans le cadre de l'opération A3C. Dans un premier temps une méthode de type "interpolation" a été développée et mise en oeuvre⁹. Sur le plan pratique, la principale difficulté de la méthode est de nécessiter un maillage tridimensionnel cartésien sur lequel le calcul des luminances directionnelles est effectué de proche en proche. Pour contourner cette difficulté, une technique de tracés de rayon (à l'instar de celle utilisée pour le calcul de la SIR, cf partie 3) est en cours de développement en coopération entre Snecma et EM2C, dans le cadre d'A3C. La méthode originale ne nécessite pas de maillage d'espace ce qui la rend totalement générale et applicable sur la base de tout type de calculs aérothermiques. Un exemple de maillage pariétal et du flux radiatif calculé est présenté sur la figure 8, pour le cas d'un foyer de turboréacteur.

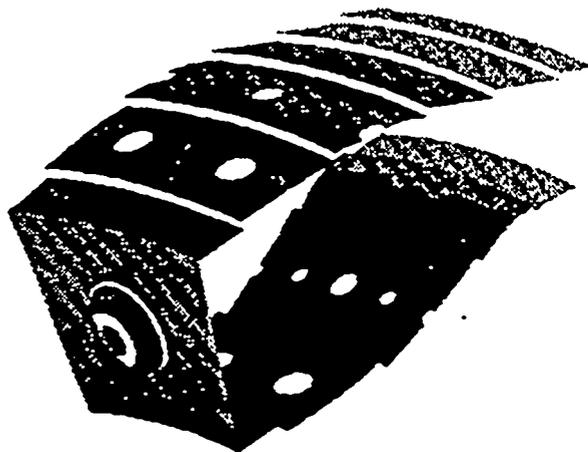


figure 8: Exemple de calcul de flux radiatif sur les parois internes d'un foyer de turboréacteur.

Pour cette méthode, le calcul du transfert radiatif se fait systématiquement le long d'un rayon séparant deux parois. Sur chacun de ces rayons une distribution de la température et de la composition est obtenue, par interpolation dans un champ tridimensionnel calculé au préalable. Il s'agit maintenant de calculer au mieux cette luminance dans les conditions représentatives des foyers de turboréacteurs.

2.5 Modèle adapté de rayonnement des gaz.

L'objectif est d'obtenir le modèle radiatif le plus précis possible, tout en conservant des temps de calcul raisonnables. Pour cela la démarche consiste à prendre en compte précisément les spécificités thermodynamiques des foyers aéronautiques et en particulier le fait que, dans les cas où le flux radiatif est significatif, la pression est relativement élevée (au moins supérieure à 10 bars).

Dans ces cas, si l'on considère un spectre de gaz, l'importance relative du fond continu par rapport aux structures voisines des centres des raies croît et les phénomènes de corrélations spectrales s'atténuent. Il est alors légitime d'envisager l'utilisation d'un coefficient moyen d'absorption sur un intervalle spectral donné.

Un tel modèle a été développé par le laboratoire EM2C dans le cadre A3C¹⁰. Ainsi, un premier modèle a été mis au point, reposant sur un découpage spectral en 367 bandes de largeur 25 cm-1. Pour un gaz donné, l'émissivité d'une colonne homogène, isotherme, de longueur l s'écrit, dans les hypothèses de ce modèle:

$$\varepsilon_g(l) = \sum_{i=1}^{367} \Delta v_i L_{v_i}^0(T) [1 - \exp(-x_g \bar{k}_g(i)pl)]$$

Dans notre cas les gaz considérés sont CO₂ et H₂O qui sont les éléments majoritaires des produits de combustion dans les foyers de turboréacteurs et également CO qui est le principal élément minoritaire.

L'utilisation d'un tel modèle à la place d'un Modèle Spectral à Bande Étroite, dont il est issu pour le principe, constitue une amélioration notable en temps calcul principalement parce que sa formulation permet de s'affranchir de l'approximation de Curtis-Godson particulièrement lourde dans le cas d'un MSBE.

Pour gagner encore du temps calcul, une technique consistant à regrouper un certain nombre de bandes spectrales de 25 cm-1, en affectant à cette nouvelle bande un coefficient d'absorption moyen, a été mise au point. Sur la base de compromis entre le temps calcul et la précision, cette méthode a conduit à un second modèle à 26 bandes spectrales seulement.

Le domaine de validité de ces deux modèles a été cerné sur plusieurs cas représentatifs. Il a été considéré en particulier une colonne anisotherme constituée de deux segments, l'un à 2000K de 0.24m et, l'autre à 1000K de 0.12m. Les deux segments sont à la même pression et constitués du même mélange H₂O/N₂ à 10% en fraction molaire de H₂O.

pression	modèle		
	K26	K367	MSBE
1	7.6	7.5	6.1
5	24.1	23.3	21.6
10	32.7	31.8	31.5
20	40.1	39.5	40
40	48.5	47.9	48.2

tableau 1: flux émis par une colonne de H₂O. Comparaison modèles gaz gris/modèle statistique

Sur le tableau 1, on compare par exemple le flux radiatif total émis par la colonne, calculé avec les deux modèles simples et comparé aux résultats obtenus en utilisant un modèle de référence de type MSBE à 376 bandes. Globalement l'accord est satisfaisant et pour des pressions supérieures à 10 bars l'écart ne dépasse pas 5% et au-delà de 20 bars le modèle à 26 bandes est comparable au modèle étalon. Le même type de comparaison a été réalisé pour un mélange à 10% de CO₂ et là encore dans tous les cas l'écart par rapport à un MSBE est inférieur à 4% au-delà de 5 bars (tableau. 2).

pression	modèle		
	K26	K367	MSBE
1	5.7	5.7	6.0
5	10.0	10.2	10.2
10	11.9	11.9	12.0
20	12.9	12.7	12.8
40	14.1	13.4	13.5

tableau 2: flux émis par une colonne de CO₂. Comparaison modèles gaz gris/modèle statistique

Les résultats en matière de temps CPU sont résumés sur le tableau 3 où l'on peut s'apercevoir du gain significatifs des modèles à transmission moyenne par rapport à un modèle MSBE standard. Étant donné la précision raisonnable obtenue, c'est le modèle à 26 bandes qui pour cette application a été choisi.

temps calcul	modèle		
	K26	K367	MSBE
	1	15	425

tableau 3: temps calcul par modèles

Ce modèle, dans son principe, s'apparente aux modèles à N gaz gris. Il a toutefois l'avantage de conserver une information spectrale, contrairement aux modèles à gaz gris classiques. Cet avantage est déterminant pour le traitement de parois recouvertes d'une protection thermique de type céramique, semi transparentes dans certaines bandes de l'infrarouge.

2.6 Retour à la modélisation géométrique

Cette modélisation du transfert radiatif le long d'une colonne de gaz doit s'intégrer dans un code global de calcul des flux radiatifs pariétaux, comme il l'a été vu au paragraphe 2.4. Cette intégration est en cours à Snecma et a conduit, dans le cadre de l'opération A3C à la mise au point du code ERIC. Pour estimer le temps calcul total on peut considérer qu'il est globalement proportionnel au nombre de rayons calculés, à savoir: $NP \times ND \times NT$ où NT représente le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'équilibre. Pour se fixer les idées, les valeurs typiques de ces grandeurs sont: 5000 pour NP, 100 pour ND et 8 à 10 pour NT en fonction des émissivités globales des parois et du gaz. Ainsi, on peut estimer à 5 millions le nombre de rayon lancés en moyenne par calculs. Pour chacun des ces rayons l'effort de calcul se décompose grossièrement en deux parties, d'une part une partie géométrique de projection des NI points internes (typiquement 50000) sur les différents rayons ce qui permet d'obtenir par rayons l'évolution de la température et des espèces et puis une partie physique qui est le calcul radiatif proprement dit.

Cette partie de recherche et d'interpolation géométrique est non négligeable devant la partie physique. Le tableau 4 ci dessous, donne des estimations de temps calcul pour la partie géométrique (lancer de rayons) et pour la partie physique (liée au calcul radiatif), et la place mémoire globale (en Mmots) nécessaire dans le cas des trois modèles.

modèle	temps calcul		mémoire en Mmots
	géométrie	radiatif	
K ₂₆	19	1	4
K ₃₆₇	140	15	60
MSBE	140	425	60

tableau 4: Effort numérique pour chaque modèle. temps adimensionnels correspondant à des unités d'environ 300s CRAY-YMP, mémoire en Mmots

Il s'avère que pour rester dans des temps calcul raisonnables seul le modèle K₂₆ est viable. Dans ces conditions la partie physique due au calcul radiatif est très faible et ne représente qu'environ 5% du temps calcul. Le modèle radiatif à utiliser s'impose obligatoirement, et l'application

industrielle de la méthode se résume à un problème géométrique et algorithmique.

Ainsi, pour le calcul des flux radiatifs tridimensionnels dans les foyers, c'est cette partie géométrique qui est le coeur du problème et qui doit être considérée prioritairement et obligatoirement optimisée.

3- Prédiction de la SIR

Une autre application pour laquelle le calcul radiatif est un des éléments essentiels, est le calcul de la Signature InfraRouge des avions. La discrétion étant aujourd'hui une des caractéristiques importante des avions militaires modernes, l'optimisation de la SIR fait partie intégrante des éléments de dimensionnement des moteurs et des foyers en particulier.

Pour cette raison un outil spécifique de calcul infrarouge: le code OSIRIS¹⁶, a été développé à Snecma, et utilisé pour l'optimisation de la signature des turboréacteurs militaires.

L'intérêt de ce type de calcul est illustré par la figure 9 représentant une image IR calculé d'un arrière corps d'avion militaire. L'ensemble du processus de calcul est décomposé en trois étapes successives.

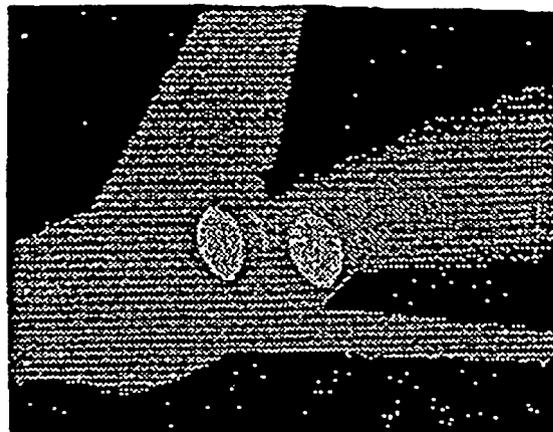


figure 9: prédiction de la SIR de l'arrière corps d'un bimoteur

Dans un premier temps une technique de lancer de rayons est mise en oeuvre en utilisant une méthode rapide basée sur une discrétisation en arbre octal. Une batterie de rayons est ainsi obtenue depuis l'observateur jusqu'à l'objet cible, en tenant compte des éventuelles réflexions spéculaires ou diffuses. Typiquement une batterie de 100x100 jusqu'à 500x500 rayons peut ainsi être produite.

Dans un second temps, les conditions aux limites du calcul radiatif sont fixées. D'abord les paramètres liés aux parties solides, en particulier la température de paroi, ensuite les paramètres liés au parcours des rayons dans les gaz chauds. Pour cela

une technique d'interpolation des rayons dans un maillage 3D structuré cartésien est utilisée, fournissant à l'issue, le long de chaque rayon l'évolution des différentes grandeurs (principalement température et composition). Ces valeurs sur le maillage structuré sont obtenues au préalable par projection des résultats issus d'un ou plusieurs calculs aérothermiques 3D réalisés au préalable, principalement avec les codes DIAMANT¹⁴ et NATUR¹⁵. Un exemple du champ de température dans un foyer de rechauffe est donné figure 10.



figure 10: Champ de température dans un foyer de rechauffe calculé par le code DIAMANT.

La dernière étape concerne le calcul radiatif lui-même, le long de chaque rayon définis précédemment. L'ensemble des luminances émises sur le plan d'observation constitue en final une image, qui peut éventuellement être traitée de la même manière qu'une image mesurée.

Dans son principe la méthode de calcul radiatif, pour cette application, est similaire à la méthode utilisée pour l'application dans les foyers. Toutefois le nombre de rayons lancés dans ce cas, est considérablement réduit ce qui autorise éventuellement l'utilisation de modèles radiatifs plus précis mais également plus consommateurs en temps.

En effet, l'environnement dans lequel le transfert radiatif est calculé dans cette configuration, est très différent de celui rencontré dans les foyers. L'élément essentiel est la faible pression (en général moins de 3 bars) et des profils de température caractérisés par des valeurs élevées sur une courte distance suivi d'une propagation atmosphérique à très longue distance (plusieurs centaines de mètres à plusieurs kilomètres).

Dans ces conditions, il est clair que les phénomènes de corrélations spectrales sont prépondérants. En particulier les raies d'émission/absorption des gaz chauds et du parcours atmosphérique froid sont évidemment fortement corrélées.

Pour tenir compte de cette spécificité, le modèle CKFG a été développé par le laboratoire EM2C^{11,12} et est implanté dans le code OSIRIS. Il est dérivé du modèle CK et prend en compte un certain nombre de gaz fictifs. D'une façon générale, 5 gaz sont considérés et 367 bandes de largeur 25cm-1, sur lesquelles une transmittivité moyenne est calculée.

La figure 11 extraite de la ref 13 permet de se rendre compte des performances du modèle sur une configuration représentative d'un calcul de SIR, idéalisée par un court trajet à haute température, suivi par un parcours atmosphérique de plusieurs centaines de m. Sur ce cas le modèle CKFG est le seul à pouvoir se comparer au calcul Raies par Raies de référence, tandis que, en particulier, le MSBE traitant les inhomogénéités par une technique de type Curtis-Godson sous-estime l'intensité émise dans une bande de plus de 50%.

Par rapport au modèle Raies par Raies, le gain de temps d'une modélisation CKFG est considérable et avoisine 50. Par contre, il nécessite à même résolution environ 35 fois plus de temps calcul qu'un MSBE.

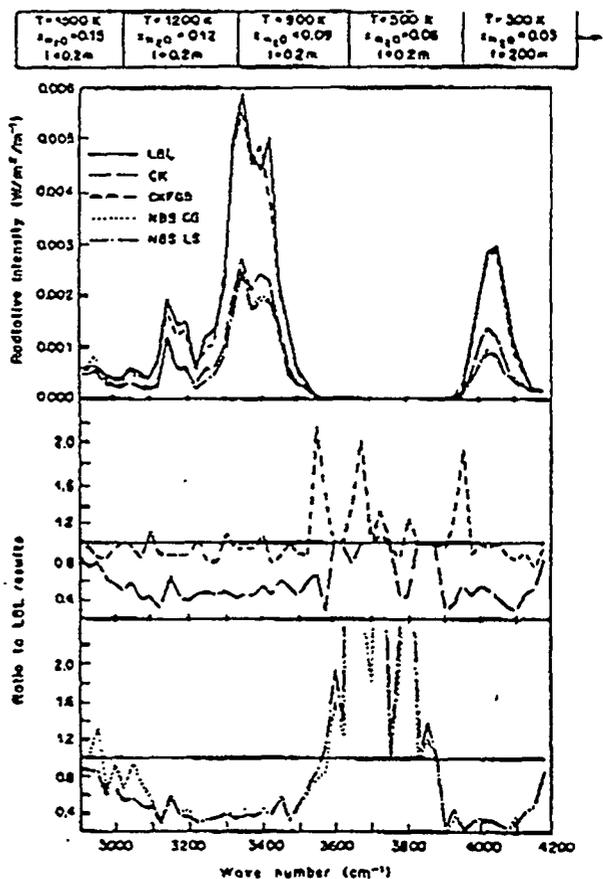


figure 11: spectres de luminance issu d'une colonne de gaz, après un parcours atmosphérique long. Comparaison de différentes modélisations

Dans ces conditions, et contrairement au calcul radiatif thermique, c'est donc la partie radiative qui reste prépondérante et qui doit en priorité être considérée et optimisée. C'est ce qui est en cours de réalisation aujourd'hui chez Snecma, en particulier grâce à la parallélisation, pour laquelle ce type de méthodes de lancer de rayon est particulièrement efficace.

4- Conclusions

Trois types de modélisation du transfert radiatif ont été présentés. Elles constituent chacune un niveau d'approximation successif et croissant, adapté spécifiquement à une application particulière et à la restitution d'une performance donnée. Ces exemples montrent que pour le développement d'une modélisation destinée aux applications industrielles, et en particulier un modèle radiatif, il faut considérer d'une part l'aspect physique conduisant à un niveau de modélisation nécessaire, mais également l'aspect numérique limitant la modélisation au seul niveau suffisant. C'est de l'équilibre de ces deux aspects que doit résulter le modèle le mieux adapté à une situation donnée. Les modèles présentés sont aujourd'hui intégrés dans différents codes de calcul utilisés chez Snecma, et en particulier les codes de prédimensionnement thermiques et les codes ERIC de calcul du rayonnement thermique et OSIRIS pour le calcul de la signature infrarouge.

Remerciements

Les auteurs expriment tous leurs sincères remerciements à MM. Ph. Picot, A. Raphanel, O. Mahias, Cl. Dejeu et F. Leglaye du Département Combustion de Snecma pour leur aimable contribution à la rédaction de cet article.

5- References

- 1 Bayle-Labouré G., Dimensionnement aérothermo mécanique des chambres de combustion de turboréacteurs, R.F.M n°4, 1989
- 2 Desaulty M., Meunier S., Heat transfers predictions in aircraft engines combustors and reheats. 17th Eurotherm, Cascais, 1990
- 3 Schultz JL., Mahias O., Meunier S. Modélisation des transferts thermiques dans les foyers de turboréacteurs. R.S.S n°5, 1994
- 4 Lefebvre AH., Herbert MV., Heat Transfer processes in Gas Turbine Combustion Chambers, Proc. Inst. Mech. Eng vol 174-12, 1960
- 5 Reeves D., Flame radiation in an industrial Gas Turbine Combustion Chambers, Nat Gas Turbine Estab. NGTE Memo. M285, 1956
- 6 Lefebvre AH. Gas Turbine Combustion, Taylor-Francis Ed. 1983
- 7 Ajrouche H., Mesures optiques d'imbrulés - Application aux émissions des moteurs diesel et des réacteurs, Thèse, Univ. de Rouen, 1995
- 8 Quing-Ping Zheng, Soot production in a tubular gas turbine combustor, Ph.D report, Cranfield Univ. 1994
- 9 Hartmann JM., Taine J. Transferts radiatifs dans des gaz chauds et des particules appliqués à des foyers d'aviation. Rapport A3C, Dec. 1991
- 10 Pierrot L. Modèle de rayonnement des gaz dans les foyers aéronautiques. rapport A3C, Nov. 1995
- 11 Levi Di Léon, Taine J. A fictive gas method for accurate computation of low resolution IR gas transmittivities: application to the $4.3 \mu\text{m}$ CO₂ band, Revue Phys. Appl. vol 21, 1986
- 12 Rivière Ph., Scutaru D., Soufiani A., Taine J., A new CK data basis, suitable for 300 to 2500K, for spectrally correlated radiative transfer in CO₂-H₂O-CO transparent gas mixtures, Xth Int. heat trans. conf., Brighton, 1994
- 13 Rivière Ph, Modélisation des propriétés radiatives de la vapeur d'eau à haute température. Application à la SIR., Thèse, ECP, 1994
- 14 Dejeu Cl., Schultz JL., Meunier S., Calculs aérothermochimiques dans les foyers de rechauffe, AGARD conf. Fiuggi, 1993
- 15 Souchet M., Schultz JL., Modélisation des jets d'arrière corps de turboréacteurs, SFT, 1995
- 16 Beulé F., Desaulty M., Leglaye F., An advanced numerical simulation method for modern military aeroengines and aircraft infrared signature calculation. ISABE Conf., Melbourne, 1995

SOCIETE FRANCAISE DES THERMICIENS

*JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

Application d'un modèle de transfert radiatif à des écoulements réactifs industriels complexes: chambres de combustion, arcs électriques.

N. Méchitoua, S. Dalsecco, C. Delalondre, O. Simonin

**EDF/Laboratoire National d'Hydraulique
6 Quai Watier 78400 Chatou**

I - Introduction

La Direction des Etudes et Recherches d'EDF a engagé depuis plusieurs années un programme de Recherches sur les écoulements turbulents réactifs. Les objectifs principaux de ce programme concernent la réduction des émissions polluantes des centrales thermiques existantes, l'étude de nouveaux moyens de production (Lits fluidisés) et la promotion des applications de l'électricité dans l'industrie.

Une part importante de ce programme est consacrée au développement et à la validation de logiciels tridimensionnels et à la modélisation des phénomènes physiques.

On présente dans cet article quelques applications industrielles pour lesquelles les transferts radiatifs jouent un rôle important ainsi que les modèles de rayonnement utilisés.

II - Modélisation des transferts radiatifs

La modélisation numérique du rayonnement thermique dans les milieux semi-transparents est complexe, tant sur le plan des méthodes numériques que sur le plan de la modélisation physique. Le volet numérique concerne tout particulièrement l'intégration de l'équation des transferts radiatifs alors que le volet physique concerne principalement la caractérisation des propriétés thermo-radiatives des gaz.

II.1 - Intégration de l'équation des transferts radiatifs (ETR)

La luminance $L(\vec{x}, \vec{S}, \lambda)$, grandeur fondamentale du transfert radiatif, est fonction de nombreux paramètres. En effet, elle dépend à la fois du point \vec{x} de l'espace où on veut déterminer le taux d'échauffement ou le flux radiatif, de la direction de propagation \vec{S} et de la longueur d'onde λ du rayonnement. D'un point de vue numérique, il s'agit donc de résoudre, pour une bande de longueur d'onde donnée, l'équation des transferts radiatifs au meilleur compromis

précision/coût. Parmi les différentes approches répertoriées dans la littérature (méthode de moments ou flux, méthode de Monte Carlo, ..), les approches directionnelles semblent, à l'heure actuelle, les mieux appropriées pour la modélisation numérique du rayonnement dans les chaudières ou les fours.

On calcule $L(\vec{x}, \vec{S}_i)$ pour un nombre fini de directions \vec{S}_i du rayonnement, en intégrant l'équation des transferts radiatifs (écrite ici sous sa forme réduite) le long de chacune des directions \vec{S}_i .

$$\text{div}[L(\vec{x}, \vec{S}_i) \vec{S}_i] = -K(\vec{x}) L(\vec{x}, \vec{S}_i) + E(\vec{x}) \quad (1)$$

K et E représentent respectivement le coefficient d'absorption du milieu fluide exprimé en m^{-1} et un terme source synthétisant les apports d'énergie par émission et diffusion.

La connaissance de la luminance permet ensuite, pour une bande de longueur d'onde donnée, le calcul du dépôt d'énergie dans le fluide (S_r) et sur les parois entourant le fluide (q_r).

$$S_r(\vec{x}) = - \int_0^{4\pi} \text{div}[L(\vec{x}, \vec{S}_i) \vec{S}_i] d\Omega = K(\vec{x}) \sum_i L(\vec{x}, \vec{S}_i) \delta\Omega_i - 4\pi E(\vec{x}) \quad (2)$$

$$q_r(\vec{x}) = \vec{n}\Gamma \cdot \int_0^{4\pi} L(\vec{x}, \vec{S}_i) \vec{S}_i d\Omega = \vec{n}\Gamma \cdot \left(\sum_i L(\vec{x}, \vec{S}_i) \vec{S}_i \delta\Omega_i \right)$$

où $\vec{n}\Gamma$ représente la surface d'une facette de bord.

L'algorithme de résolution de l'ETR repose sur une technologie classique, amplement éprouvée dans les logiciels de mécanique des fluides /ref.1/. La manière la plus physique de traiter le terme de transport est de privilégier l'information venant de l'amont en décentrant la dérivée suivant la direction de propagation \vec{S}_i du rayonnement. On dispose, à l'heure actuelle, de deux schémas de décentrement qu'on utilise de façon complémentaire.

Le premier, d'ordre un en espace, consiste à décentrer le terme de transport suivant le schéma suivant (voir figure ci-après) :

$$\frac{L(\vec{x}_A, \vec{S}_i) - L(\vec{x}_M, \vec{S}_i)}{MA} + K(\vec{x}_A) L(\vec{x}_A, \vec{S}_i) \approx E(\vec{x}_A)$$

Soit ,

$$L(\vec{x}_A, \vec{S}_i) \approx \frac{L(\vec{x}_M, \vec{S}_i) + MA E(\vec{x}_A)}{1 + K(\vec{x}_A)MA} \quad (3)$$

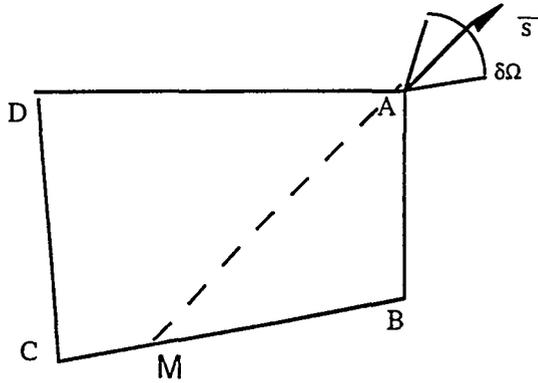


figure a : Méthode de décentrement amont d'ordre un en espace.
Traversée du rayon lumineux.

$L(\vec{x}_M, \vec{S}_i)$ est interpolé de façon bilinéaire en fonction des luminances suivant la direction \vec{S}_i aux points B et C qui auront été déjà déterminées suivant la même relation de récurrence (3). Les calculs géométriques sont simples à effectuer et parfaitement vectorisables sur les supercalculateurs. La relation de récurrence (3) n'est pas vectorisable à cause des dépendances arrières mais comprend peu d'opérations. Par ailleurs, toutes les cellules sont traitées de la même façon.

Néanmoins, le schéma peut présenter une diffusion numérique non négligeable lorsque le point amont M est trop éloigné des noeuds du maillage et/ou lorsque le milieu est peu diffusant ou émissif (milieux transparents avec $K=0$ par exemple).

Le schéma centré suivant la direction de propagation \vec{S}_i du rayonnement constitue une alternative intéressante et de mise en oeuvre aisée pour minimiser la diffusion numérique. Afin de conserver la stabilité du schéma, un limiteur de flux est nécessaire. Le schéma centré, d'ordre deux en espace, est privilégié si les variations de la luminance dans la plage spatiale considérée sont monotones (voir figure ci-après) :

$$\text{si } \left(\frac{L(\vec{x}_A, \vec{S}_i) - L(\vec{x}_M, \vec{S}_i)}{AM} \right) \left(\frac{L(\vec{x}_{M'}, \vec{S}_i) - L(\vec{x}_A, \vec{S}_i)}{AM'} \right) > 0, \quad (4)$$

$$\text{alors, dérivée centrée : } \vec{S}_i \cdot \vec{\nabla} L_A = \frac{L(\vec{x}_{M'}, \vec{S}_i) - L(\vec{x}_M, \vec{S}_i)}{MM'}$$

$$\text{sinon, dérivée décentrée : } \vec{S}_i \cdot \vec{\nabla} L_A = \frac{L(\vec{x}_A, \vec{S}_i) - L(\vec{x}_M, \vec{S}_i)}{AM}$$

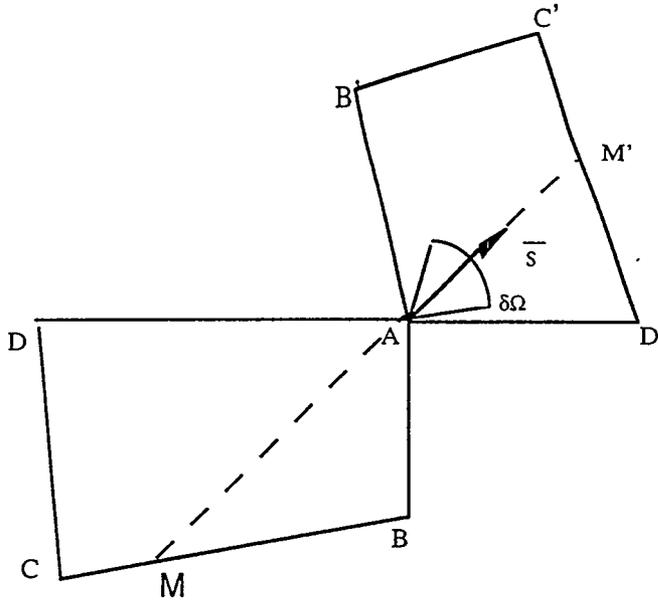


figure b: Méthode de décentrement amont d'ordre 2 en espace.
Traversée du rayon lumineux.

Seule l'inversion du système décentré amont, qui est à diagonale dominante (d'autant plus que le coefficient d'absorption est grand) est envisageable à un coût modéré avec la relation de récurrence (3) ou une méthode itérative du type gradient conjugué ou Gauss Seidel.

La discrétisation décentrée peut servir de solution intermédiaire à la discrétisation centrée/décentrée car le "test de pente" présenté ci-dessus permet de rapprocher les deux discrétisations, via une approche en incrément :

$$\frac{\delta L(\vec{x}_A, \vec{S}_i) - \delta L(\vec{x}_M, \vec{S}_i)}{MA} + K(\vec{x}_A) \delta L(\vec{x}_A, \vec{S}_i) \approx E(\vec{x}_A) - \vec{S}_i \cdot \vec{\nabla} L_A - K(\vec{x}_A) L(\vec{x}_A, \vec{S}_i)$$

$\vec{S}_i \cdot \vec{\nabla} L_A$ étant déterminé par la relation (4).

L'algorithme se présente finalement comme suit :

$$k=k+1$$

Calcul du bilan à l'itération (k), en faisant appel à la relation (4) :

$$b^{(k)}(\vec{x}_A, \vec{S}_i) \approx E(\vec{x}_A) - \vec{S}_i \cdot \vec{\nabla} L_A^{(k)} - K(\vec{x}_A) L^{(k)}(\vec{x}_A, \vec{S}_i)$$

Calcul de l'incrément de luminance suivant la relation de récurrence (3) :

$$\delta L^{(k)}(\vec{x}_A, \vec{S}_i) \approx \frac{\delta L^{(k)}(\vec{x}_M, \vec{S}_i) + MA b^{(k)}(\vec{x}_A, \vec{S}_i)}{1 + K(\vec{x}_A) MA} \quad (5)$$

Réactualisation des luminances :

$$L^{(k+1)}(\vec{x}_A, \vec{S}_i) = L^{(k)}(\vec{x}_A, \vec{S}_i) + \delta L^{(k)}(\vec{x}_A, \vec{S}_i)$$

Le processus itératif est poursuivi jusqu'à ce que le bilan $b^{(k)}$ atteigne le résidu prescrit par l'utilisateur. En pratique, on ne pousse pas la convergence jusqu'au bout et on effectue 3 à 4 itérations externes qui nous permettent d'obtenir une solution de qualité.

II.2 - propriétés thermoradiatives des gaz

Le coefficient d'absorption K dépend de la composition du gaz en espèces chimiques "rayonnantes" (dioxyde de carbone, vapeur d'eau,...), de la présence de particules (suies,...), de la température et de la pression.

La première approche, très rustique, consiste à déterminer un coefficient d'absorption intégré sur tout le spectre du rayonnement thermique, en faisant l'hypothèse du gaz gris. Pour une gamme de température comprise entre 300 et 2000 K, on peut estimer le coefficient d'absorption local d'un domaine gazeux homogène et isotherme en fonction des fractions volumiques de CO_2 , H_2O et suies, de la température, de la pression totale et d'une longueur caractéristique du domaine de calcul à l'aide des régressions établies par Modak /ref.2/.

S'il y a présence de particules dans le fluide, on surimpose au coefficient d'absorption du milieu gazeux un coefficient d'absorption des particules qui est une fonction du taux de présence de ces dernières et de leur diamètre moyen.

La deuxième approche, plus précise, permet de mieux prendre en compte l'aspect spectral du rayonnement /ref.3/. Les modèles ck et $ckfg$, validés à partir des modèles statistiques à bande étroite, s'adaptent bien à l'algorithme présenté au paragraphe précédent. Le nombre de bandes de fréquence est sensiblement plus faible que celui utilisé par les modèles statistiques. Néanmoins, dans le cas des plasmas à très haute température, 200 bandes de fréquences sont nécessaires pour prendre en compte la réabsorption des raies à haute température. Cette approche est en cours de tests sur une configuration d'arc électrique de grande puissance de four de sidérurgie.

III - Exemples d'applications

D'un point de vue industriel, les transferts thermiques par rayonnement sont fortement couplés avec d'autres phénomènes physiques, comme par exemple les transferts thermiques par convection et conduction, la combustion en phase gazeuse et solide, l'effet Joule généré par des dispositifs de chauffe électrique,..

Tous ces phénomènes physiques sont modélisés dans le code de mécanique des fluides ESTET /ref.4,5/. Ce dernier résout en trois dimensions d'espace les équations de Navier Stokes incompressibles et faiblement compressibles et de transport des divers constituants par une méthode de volumes finis sur un maillage structuré. Des solveurs itératifs performants ainsi qu'un couplage relativement fort entre les différentes équations permettent de conduire des calculs à un coût CPU acceptable pour des maillages pouvant aller jusqu'à deux millions de cellules.

III.1 - Modélisation des transferts thermiques dans les fours et chaudières

Le charbon pulvérisé est fréquemment utilisé comme combustible dans les chaudières des centrales thermiques classiques. Le fonctionnement d'une chaudière industrielle est le plus souvent piloté en faisant appel à des connaissances empiriques. Cependant, ces connaissances sont insuffisantes lorsqu'il s'agit par exemple d'étudier l'influence de paramètres tel que le type de charbon, sa granulométrie, la position et l'orientation des brûleurs ou bien différentes géométries de chaudières. La simulation numérique de la combustion du charbon pulvérisé est alors un bon moyen d'effectuer à moindre coût une étude paramétrique permettant d'obtenir des renseignements complémentaires, comme par exemple le rendement de la combustion, les flux de chaleur reçus par les parois ou encore la formation des polluants /ref.6/.

Compte tenu de l'importance du rayonnement dans le bilan énergétique, la discrétisation spatiale de l'ETR correspond à celle du fluide (maillage relativement fin). Par contre, le milieu fluide étant relativement absorbant vis à vis du rayonnement (présence importante de produits de combustion, de particules,..), une discrétisation angulaire "moyenne" d'une trentaine de directions de propagation du rayonnement est suffisante. Les propriétés thermo-radiatives des gaz ont été calculées à partir des régressions de Modak.

Le premier cas présenté correspond à une validation d'une configuration bidimensionnelle /ref.7/. Des jets verticaux de méthane se mélangent dans le brûleur en haut de la chambre avec de l'air en forte rotation. Ce mélange permet d'obtenir une flamme boule. Les transferts thermiques par rayonnement dans le four de très grande dimension par rapport au brûleur (0.6 m de diamètre et 3 m de hauteur) sont nettement prépondérants. 95 % du flux net reçu par les parois réfractaires tapissant le four est d'origine radiative. Les zones de recirculation du fluide recevant peu d'énergie par convection, se refroidissent par rayonnement au profit des parois réfractaires. La figure 1 montre la capacité du modèle numérique à reproduire le niveau et le gradient de température ainsi que le flux incident radiatif le long des parois du four.

Le deuxième cas correspond à une configuration industrielle. Il s'agit de la chaudière à brûleurs tangentiels du Havre d'une puissance de 600 mégawatts. Les dimensions de la chambre sont assez impressionnantes (50 m de hauteur, 17 m de largeur et profondeur, brûleurs de l'ordre du m). La figure 2 montre les champs de vitesse et de température fluide à deux hauteurs, ainsi que le flux net radiatif déposé sur les parois de la chaudière. Les écoulements obtenus sont complexes, fortement conditionnés par le débit et l'orientation des jets d'air et de charbon situés aux quatre coins de la chambre. La flamme a la forme d'un vortex. Ce dernier, de petite dimension et de grande intensité en bas de la chambre, s'élargit au fur et à mesure qu'on s'approche des échangeurs situés en haut de la chambre. Le flux net radiatif déposé sur les parois épouse la structure tourbillonnaire de la flamme principale. Ici aussi, les transferts radiatifs sont le mode dominant de transferts de chaleur aux tubes écrans noyés dans les réfractaires de la chambre ainsi que dans la partie encombrée en haut de la chaudière (non pris en compte dans les modélisations).

II.2 - Modélisation d'un arc électrique /ref.8/

Ces modélisation concernent des arcs électriques de four de sidérurgie de grande puissance. La distance entre l'électrode graphite et le bain de ferrailles est de l'ordre de 0.2 à 0.4 m. Le courant est de l'ordre de 10 000 à 40 000 Ampères.

Il apparaît qu'une modélisation de type dissipation globale est insuffisante et que la réabsorption du rayonnement par les zones plus froides peut jouer un rôle important. La figure 3 montre une comparaison entre une modélisation de type dissipation globale et une modélisation où on prend en compte la réabsorption du rayonnement avec le modèle présenté au paragraphe II. La zone chaude de l'arc a tendance à s'étendre mais le niveau de température reste encore trop élevé dans l'arc. Ces comparaisons, tout en restant qualitatives, semblent montrer d'une part l'importance du terme de rayonnement dans les simulations d'arcs industriels, d'autre part l'intérêt que peut présenter une modélisation plus fine des transferts radiatifs, qui tiennent compte correctement des phénomènes d'absorption. Il apparaît également nécessaire de mieux représenter la nature spectrale du rayonnement. En effet, plus la température du gaz est élevée, plus le transfert par rayonnement s'effectue à travers des raies, et plus on s'éloigne de l'hypothèse du gaz gris.

C'est donc dans cette direction, et en collaboration avec l'Ecole Centrale de Paris (Perrin, Rivière, Soufiani) et le Centre de Physique Atomique de Toulouse (Gleizes), que nous allons porter nos efforts. L'ECP a en effet élaboré un modèle de rayonnement par bandes spectrales adapté au cas des plasmas d'air, les données spectroscopiques et thermophysiques ayant été fournies par le CPAT. Ce modèle est actuellement en cours de tests. On espère ainsi obtenir des résultats plus réalistes pour les simulations dans l'air. Il restera ensuite à modéliser le

rayonnement à haute température en présence d'oxydes de carbone afin d'évaluer le rendement de l'arc dans ce cas.

IV - Conclusion

Un modèle de rayonnement ainsi que de deux types d'application industrielles complexes ont été présentés.

Le modèle de rayonnement utilisé repose sur une méthode directionnelle pour le traitement numérique de l'équation des transferts radiatifs et une approche à plusieurs gaz gris pour la prise en compte des propriétés thermo-radiatives des gaz.

La méthode du décentrement amont suivant la direction de propagation du rayonnement se prête bien à une utilisation couplée avec des logiciels de mécanique des fluides. L'intégration numérique de l'ETR est relativement rapide et requiert peu de place mémoire (sauf dans le cas où on tient compte d'un terme de diffusion anisotrope en direction de propagation du rayonnement). On peut, en outre, augmenter le nombre de directions sans difficulté et/ou affiner l'intégration numérique avec une méthode d'ordre plus élevé pour obtenir la précision requise.

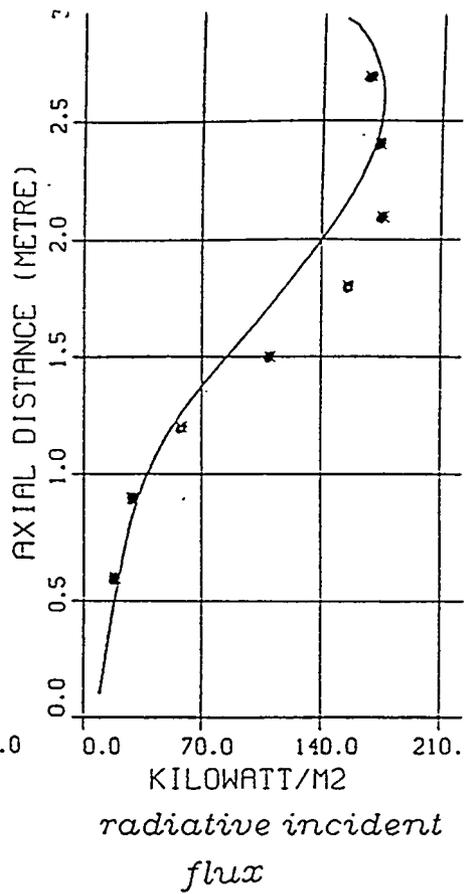
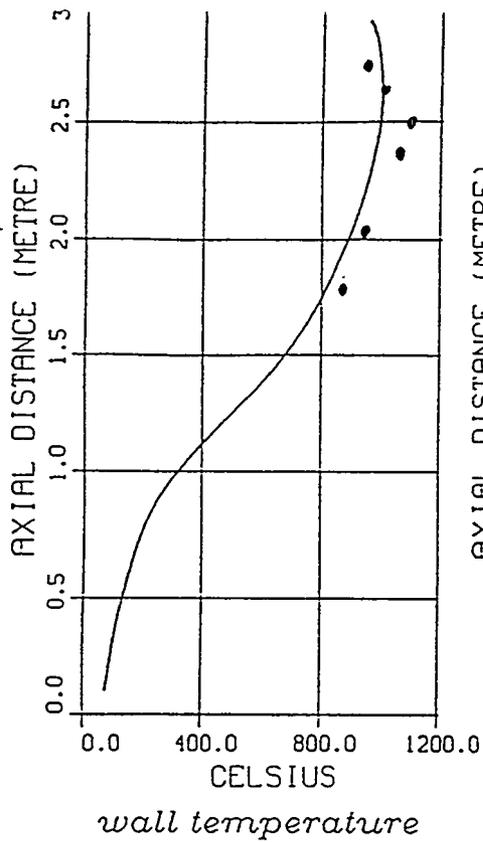
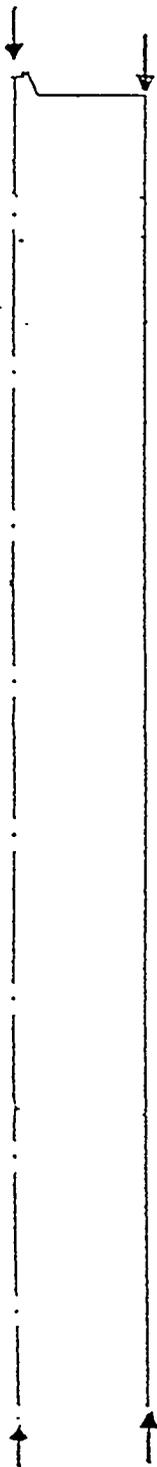
Les propriétés thermo-radiatives sont calculées par des méthodes à plusieurs gaz gris. La première approche, très rustique, consiste à déterminer un coefficient d'absorption intégré sur tout le spectre du rayonnement thermique à l'aide des régressions établies par Modak. La deuxième approche, plus précise, permet de mieux prendre en compte l'aspect spectral du rayonnement. Les modèles ck et $ckfg$, validés à partir des modèles statistiques à bande étroite (MSBE), s'adaptent bien à l'ETR faisant intervenir un coefficient d'absorption et nécessitent un découpage en fréquence nettement moins dense que les MSBE.

Les applications industrielles présentées montrent la capacité du modèle numérique à reproduire les principales caractéristiques des phénomènes physiques modélisés avec un temps de calcul tout à fait acceptable pour conduire des études paramétriques.

Dans le cas des arcs industriels de grande puissance, il reste à affiner les modèles ck et $ckfg$ (modèle ou données thermophysiques) afin de finaliser les calculs et évaluer le rendement effectif de l'arc en situation industrielle.

V - Références

- /1/ - N. MECHITOUA (1988) : Modélisation numérique du rayonnement dans les milieux semi-transparents. *Rapport EDF HE44/87.15*
- /2/ - A.T. MODAK (1978) : Radiation from Products of Combustion. *Fire Research, 1, pp.339-361*
- /3/ - C. DELALONDRE, N. MECHITOUA (1995) : Four à Arc électrique, Collaboration IRSID/EDF. Bilan des travaux réalisés par le CPAT et l'ECP dans le cadre de la modélisation des transferts radiatifs. *Compte rendu de réunion EDF CR44/95.001.*
- /4/ - J.D. MATTEI, O. SIMONIN (1992) : Logiciel ESTET. Manuel théorique de la version 3.1. Tome 1 : modélisations physiques. *Rapport EDF HE44:92.38*
- /5/ - N. MECHITOUA, J.D. MATTEI, D. GARRETON, B. CHAUMETON (1994) : Three Dimensional Flow and Combustion Modelling of a Laboratory Gas Turbine Combustor. *International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. Lisbon, August 8-11, 1994.*
- /6/ - S. DALSECCO, N. MECHITOUA, O. SIMONIN (1995) : Three Dimensional Modelling of Coal Combustion and NO_x Formation in a 250 MW Coal Fired Furnace. *Third International Conference On Combustion Technologies for a Clean Environment, Lisbon, August 3-6 July, 1995.*
- /7/ - N. MECHITOUA, P.L. VIOLLET (1990) : Modelling of Advective and Radiative Heat Transfer in Turbulent Flows : Application to Furnace Computations. *8th International Conference on Heat and Mass Transfer, Jerusalem, August 19-24, 1990.*
- /8/ - C. DELALONDRE, O. SIMONIN (1995) : Bilan des travaux effectués dans le cadre des modélisations des arcs électriques des fours de sidérurgie. *Rapport EDF HE44/93.026B*



Axial profiles of wall temperature and radiative incident flux.

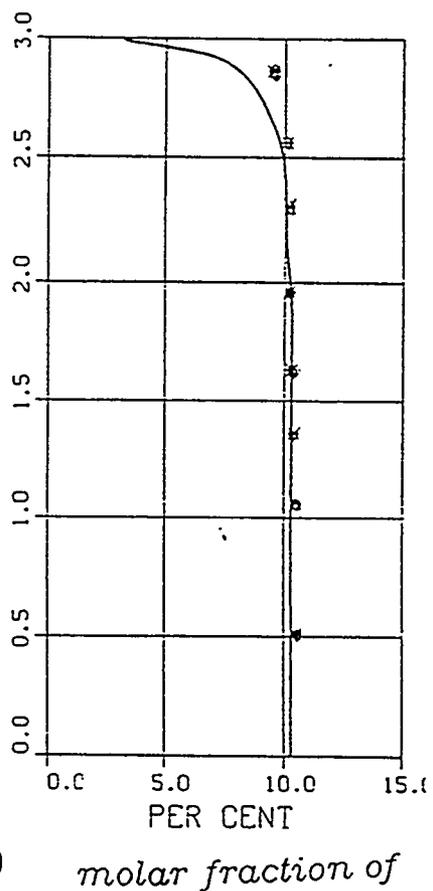
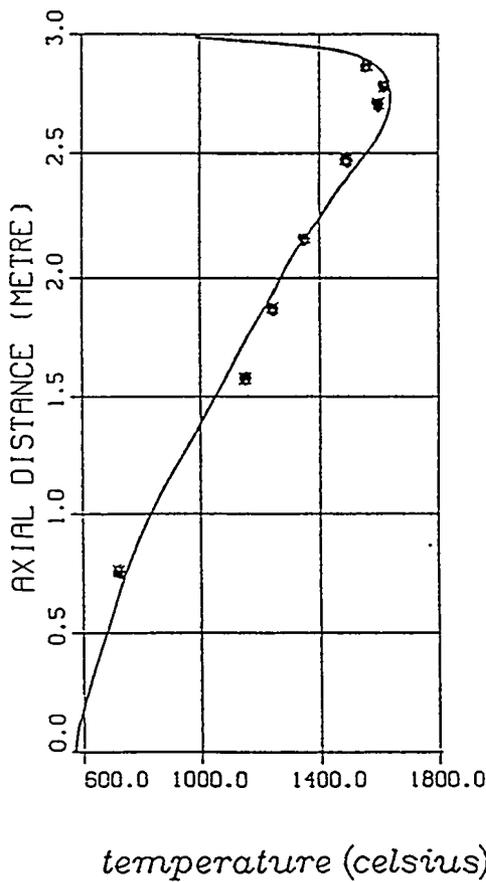


Figure 1 :
Simulation numérique d'un four alimenté au méthane
(expérience Imperial College, Lockwood et al)

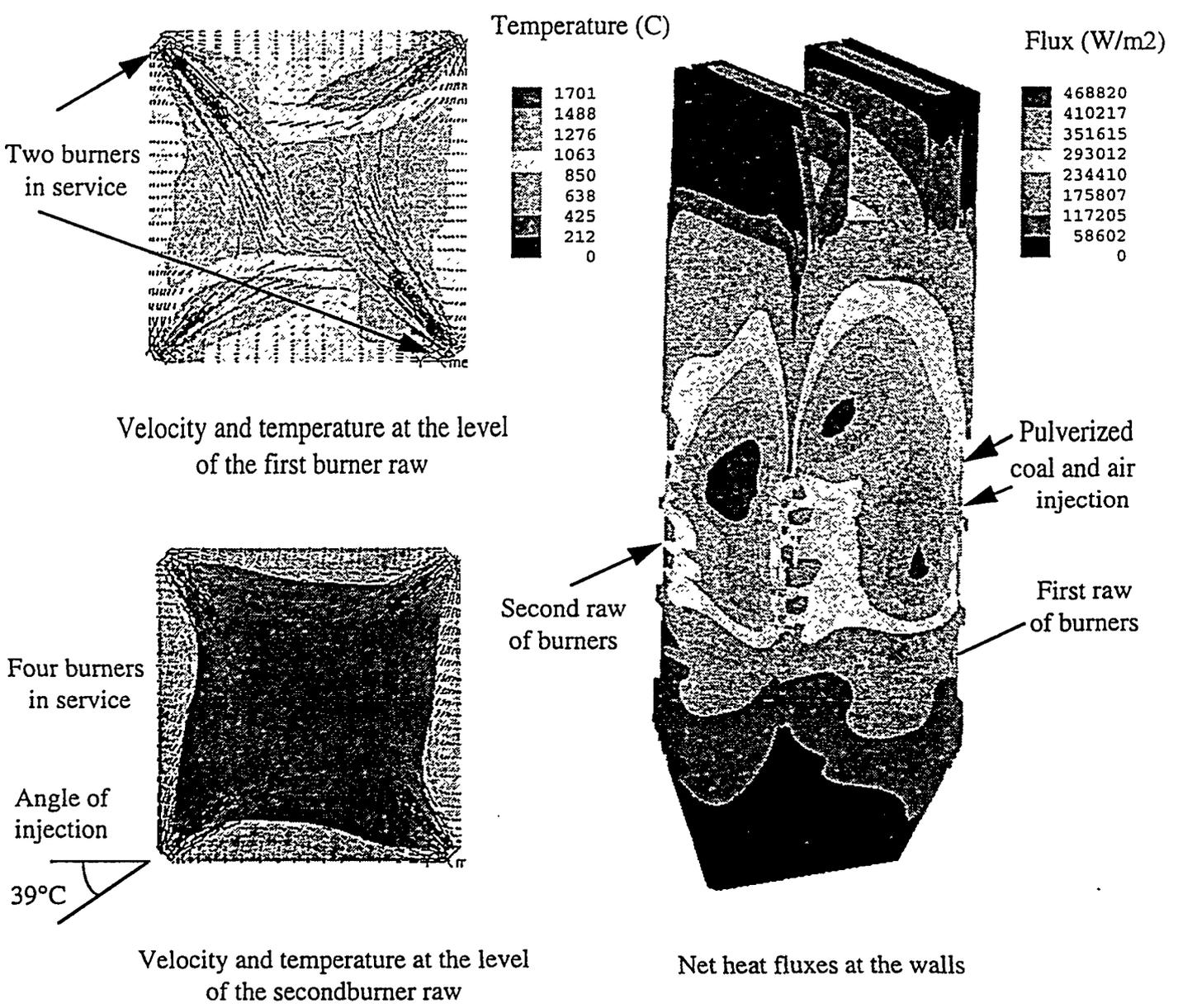
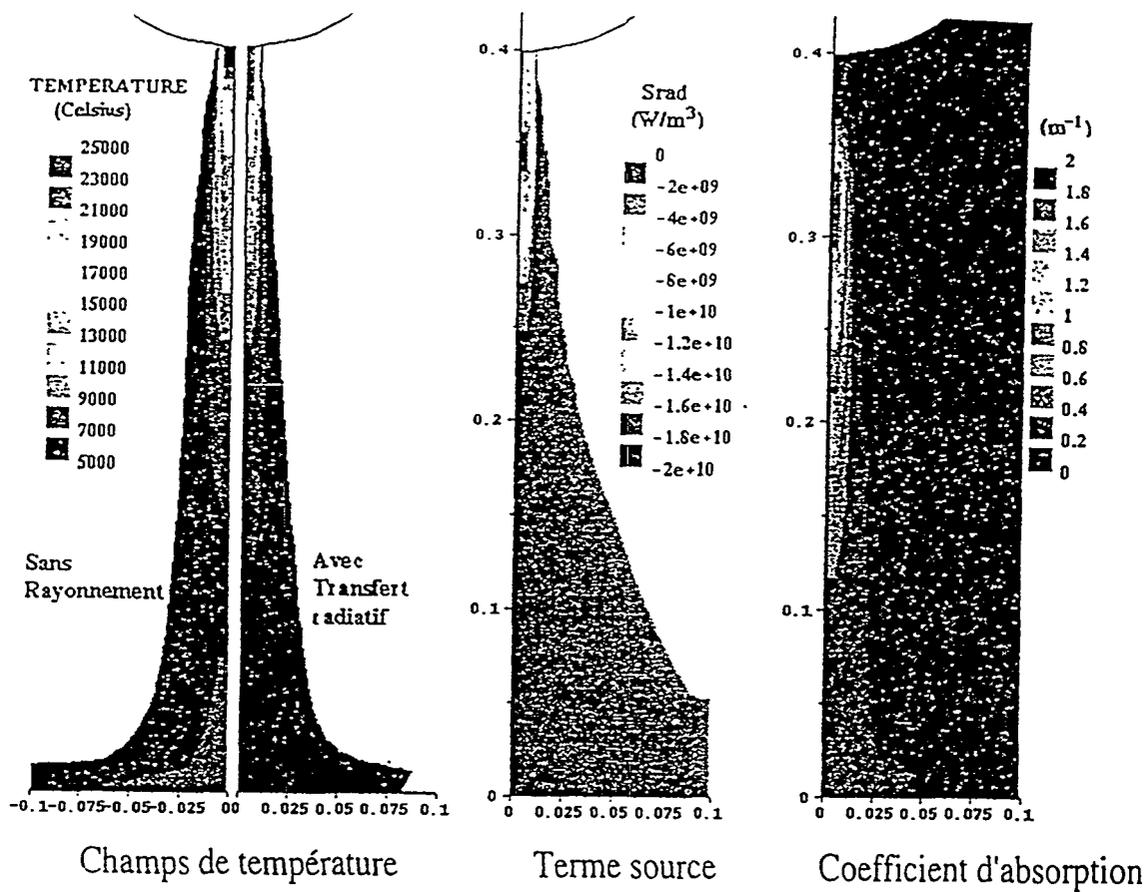
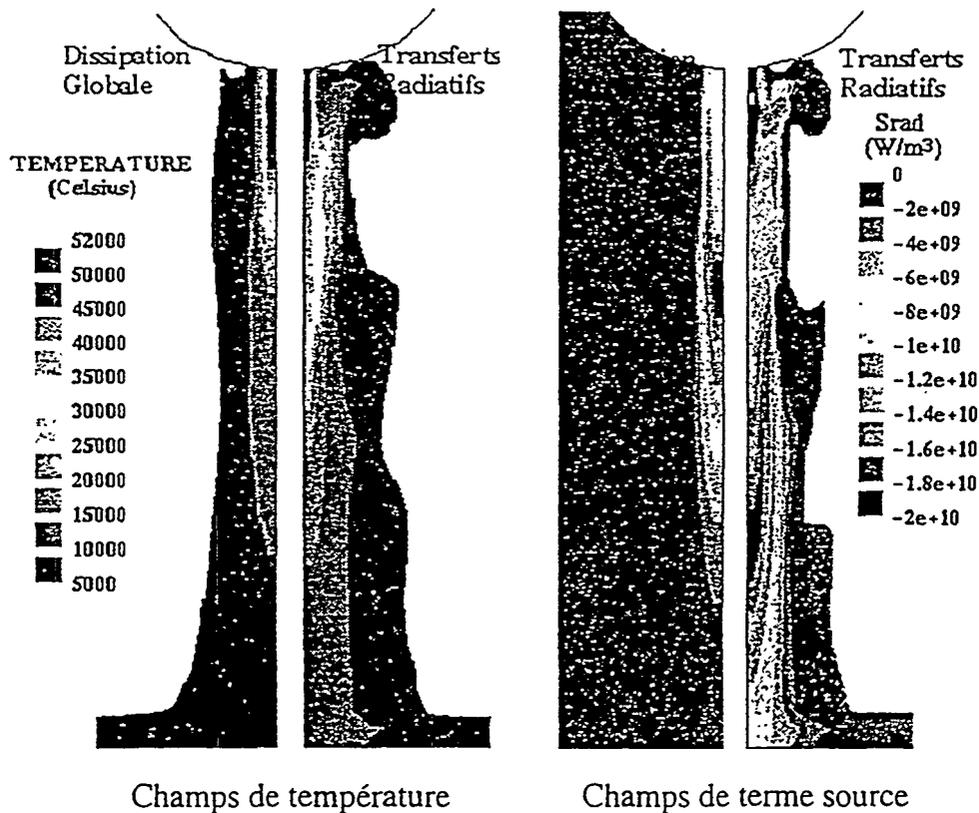


Figure 2 :
Simulation numérique de la chaudière à bruleurs tangentiels de 600 MW du Havre



Test de modélisation du transfert radiatif dans le CO2



Tests effectués dans l'air + 10% fer

Figure 3 :
Simulation numérique d'un arc électrique de grande puissance
Comparaisons de deux modèles de rayonnement

SOCIETE FRANCAISE DES THERMIENS

*JOURNEE D'ETUDES DU 14 FEVRIER 1996
(reportée du 6 décembre 1995)*

SUR

LES CODES DE CALCUL DE RAYONNEMENT THERMIQUE

MODELISATION DES TRANSFERTS RADIATIFS DANS DES GAZ NON GRIS **PAR LA METHODE DES ORDONNEES DISCRETES ASSOCIEE** **A UN MODELE STATISTIQUE A BANDES ETROITES**

Par A.B. De Miranda, A. Delmas et J.F. Sacadura

CETHIL, INSA de Lyon

Bâtiment404

69621 Villeurbanne Cedex (France)

Résumé

Une formulation basée sur l'utilisation de la méthode des ordonnées discrètes appliquée à la forme intégrale de l'équation de transfert radiatif est proposée pour les gaz non gris. Les corrélations entre transmittances sont négligées et aucune réflexion explicite de paroi n'est considérée. La configuration étudiée consiste en une couche plane d'un mélange non isotherme vapeur d'eau - azote. Les parois de la cavité sont grises à réflexion et émission diffuses. Un modèle statistique à bandes étroites est utilisé pour représenter les propriétés radiatives du gaz. La distribution, au sein de la cavité, du terme source radiatif, est calculée pour deux profils de température et une concentration uniforme en vapeur d'eau. Les résultats obtenus grâce à cette approche simplifiée sont en bon accord avec ceux fournis par la littérature pour les mêmes distributions de température et concentration. Cette étude préliminaire paraît indiquer que l'algorithme basé sur l'intégration de l'ETR le long du parcours de la luminance est moins sensible aux effets de la « décorrélation » que les formulations basées sur la forme différentielle de l'ETR. Aussi une étude plus systématique de l'influence de la non prise en compte des corrélations sur l'approche intégrale est abordée ici.

1 INTRODUCTION

L'interaction rayonnement thermique - convection naturelle ou forcée est présente de façon très fréquente, dans les applications industrielles de types fours, chambre de combustion, réacteur nucléaire, etc....

Les difficultés rencontrées en modélisation de transfert radiatif en atmosphère gazeuse, proviennent pour une part de la forte dépendance spectrale que présentent les propriétés radiatives et les luminances lorsque l'on est en présence de tels milieux. Des procédures de simples prises de moyennes, qui consistent par exemple à considérer le gaz comme un milieu gris ou gris par bande, conduisent la plupart du temps à des résultats trop imprécis. Par ailleurs, des approches de type raie par raie qui requièrent d'énormes temps de calcul, bien qu'étant considérées comme les plus précises (Taine, 1983; Hartman et al., 1984), peuvent en revanche s'avérer impropres à certaines applications industrielles.

Les modèles à bandes (étroites ou larges) ont été développés afin de réduire les calculs lourds qu'engendrent les méthodes raie par raie. Elles consistent à moyenniser les propriétés radiatives sur des bandes plus ou moins larges allant de 25 cm^{-1} à 100 cm^{-1} pour les modèles à bandes étroites (Hartman et al., 1984; Soufiani et al., 1985 et 1987), et jusqu'à 1000 cm^{-1} pour les modèles à larges bandes (Edwards, 1976; Buckius, 1982; Edwards et al, 1964).

Indépendamment du modèle de bandes utilisé, les corrélations transmittivités-luminances doivent être respectées lors de l'opération de prise de moyenne de l'ETR sur un intervalle spectrale donné.

D'autre part, si les parois du domaine étudié sont réfléchissantes, en toute rigueur, des réflexions en nombre plus ou moins important, doivent être explicitement prises en compte. Une difficulté d'un autre ordre peut se présenter lorsque le gaz considéré n'est pas homogène et/ou non isotherme: de nombreux travaux font appel à l'approximation de Curtis-Godson (Godson, 1953) pour pallier ce problème.

Les premières approches combinant une méthode aux ordonnées discrètes SN à un modèle à bandes étroites, se trouvent dans les travaux de Kim et al. (1991a et 1991b) en géométrie unidimensionnelle. Cette technique a été reprise et développée par Menart et al. (1993a). Il faut noter que ces méthodes nécessitent des ordinateurs de type CRAY YMP avec des temps importants de calcul.

L'objet principal du travail rapporté ici, est de développer un modèle de transfert radiatif capable de traiter des problèmes industriels concrets avec une bonne précision, tout en restant peu coûteux en termes de temps de calcul.

Nous présentons une formulation intégrale de l'ETR, analogue à celle développée par El Wakil et Sacadura dans leur modèle SN pour milieux gris (El Wakil et al., 1992; El Wakil, 1991) et étendue ici aux milieux non gris. Les corrélations entre transmittances ne sont pas prises en compte. Cette méthode SN associée à un modèle statistique à bandes étroites a permis de développer un code de calcul tournant sur station de travail. Afin de tester la précision de cette approche intégrale, des calculs ont été effectués dans les mêmes configurations que celles étudiées par Lee et al., dans une couche unidimensionnelle de vapeur d'eau, avec les mêmes distributions de température.

Dans un second temps, une étude plus systématique des effets de la non prise en compte des corrélations spectrales sur l'approche intégrale, en relation avec le profil de température dans le gaz, est abordée.

2 FORMULATION DU PROBLEME

L'équation de transfert radiatif moyennée sur un intervalle spectral donné, sous sa forme différentielle, est la suivante :

$$\frac{\partial \overline{L_v(s, \Omega)}}{\partial s} + \overline{\kappa_v(s) L_v(s, \Omega)} = \overline{\kappa_v(s) L_{bv}(s)} \quad (1)$$

Les termes figurant sous la même barre ne doivent pas être moyennés séparément lorsque les corrélations sont respectées.

Intégrer (1) le long d'un parcours de luminance, de s_w à la paroi à s , dans une direction Ω avec une condition à la limite formelle conduit à la forme suivante de l'ETR :

$$\overline{L_v(s, \Omega)} = \overline{L_{wv}(s_w, \Omega) \tau_v(s_w \rightarrow s)} + \int_{s_w}^s \frac{\partial \overline{\tau_v(s' \rightarrow s)}}{\partial s'} \overline{L_{bv}(s')} ds' \quad (2)$$

Dans les équation (1) et (2) le terme d'émission $\overline{L_{bv}(s)}$ peut être moyenné séparément car ses variations spectrales sont assez progressives.

La luminance au niveau de la paroi opaque grise diffuse est la suivante :

$$\overline{L_{wv}(s_w, \Omega)} = \epsilon_w \overline{L_{bwv}(s_w)} + \frac{\rho_w}{\pi} \int_{\hat{n} \cdot \Omega' < 0} |\hat{n} \cdot \Omega'| \overline{L_{wv}(s_w, \Omega')} d\Omega' \quad \text{for } \hat{n} \cdot \Omega' > 0 \quad (3)$$

$\overline{L_{bwv}(s_w)}$ représente la luminance parvenant à la paroi et \hat{n} désigne la normale extérieure.

La forme discrétisée de l'équation (2) permet d'exprimer la luminance sur la face i du volume de contrôle de la façon suivante :

$$\overline{L_{v,n,i}} = \overline{L_{wv,n,i}} \overline{\tau_{v,1 \rightarrow i}} + \sum_{k=1}^{i-1} \left[\overline{L_{bv,n,k+\frac{1}{2}}} \left(\overline{\tau_{v,k-1 \rightarrow i}} - \overline{\tau_{v,k \rightarrow i}} \right) \right] \quad (4)$$

Les indices v , n , i représentent les dépendances respectivement spectrale, directionnelle et spatiale; n variant de 1 à N et i variant de 1 à M ($i=1$ correspondant à la paroi).

En utilisant les expressions suivantes que nous appellerons non corrélées, $\overline{\tau_{v,1 \rightarrow i}} = \prod_{k=1}^{i-1} \overline{\tau_{v,k \rightarrow k+1}}$

et $\overline{L_{wv,n,i}} \overline{\tau_{v,1 \rightarrow i+1}} = \overline{L_{wv,n,i}} \overline{\tau_{v,1 \rightarrow i}} \overline{\tau_{v,i \rightarrow i+1}}$, on peut alors exprimer la luminance grâce à l'expression récursive suivante :

$$\overline{L_{v,n,i+1}} = \overline{L_{v,n,i}} \overline{\tau_{v,i \rightarrow i+1}} + \overline{L_{bv,i+\frac{1}{2}}} \left(1 - \overline{\tau_{v,i \rightarrow i+1}} \right). \quad (5)$$

Nous ferons par la suite référence à cette luminance comme étant « non corrélée ».

Un des intérêts de cette technique réside dans l'utilisation de transmittances entre volumes de contrôle adjacents; aussi il n'est plus utile de faire appel à des approximations de type Curtis-Godson pour prendre en compte les inhomogénéités du milieu.

Les transmittivités moyennes sont calculées pour chaque volume de contrôle à partir d'un modèle statistique à bandes étroites exponentiel tronqué (Malkmus, 1967; Young, 1977);

La transmittivité pour une fraction molaire f de l'espèce absorbante au travers d'un milieu isotherme et homogène de longueur ($s' \rightarrow s$) sous une pression absolue p est :

$$\overline{\tau_v(s' \rightarrow s)} = \exp \left[-\frac{\overline{\beta}_v}{\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{2\pi u \overline{k}_v}{\overline{\beta}_v}} - 1 \right) \right] \quad (6)$$

où $u = fp$ ($s' \rightarrow s$) et $\overline{\beta}_v = 2\pi \frac{\overline{\gamma}_v}{\overline{\delta}_v}$. Les paramètres spectraux \overline{k}_v et $\overline{\delta}_v$ pour H_2O sont ceux

obtenus par Soufiani et al. (1985) and Hartmann et al. (1984), à partir de calculs raie par raie

Le paramètre $\overline{\gamma}_v$ qui caractérise la demi largeur de raie moyenne, est calculé pour le cas particulier traité ici de vapeur d'eau pure, à partir de l'expression générale fournie par (Zhang et al., 1988).

$$\gamma_{v,H_2O} = 0.066 \frac{P}{P_s} \left\{ 7.0 f_{H_2O} \frac{T_s}{T} + 12(f_{H_2O} + f_{N_2}) \sqrt{\frac{T_s}{T}} \right\} \quad (7)$$

avec $f_{H_2O} = 1$, $f_{N_2} = 0$

Les moyennes de tous les paramètres cités précédemment sont calculées sur des intervalles spectraux de largeur 25 cm^{-1} , la plage spectrale s'étendant de 150 à 5675 cm^{-1} .

T_s et P_s sont respectivement la température et la pression standard (296 K , 1 atm). Pour les résultats présentés ici la pression P est égale à P_s .

3 RESULTATS ET DISCUSSION

3.1 Distribution du terme source radiatif

La distribution au sein de l'enceinte du terme source volumique ($-dq/dx$) est calculée pour deux types de profils de température présentés Figure 1.

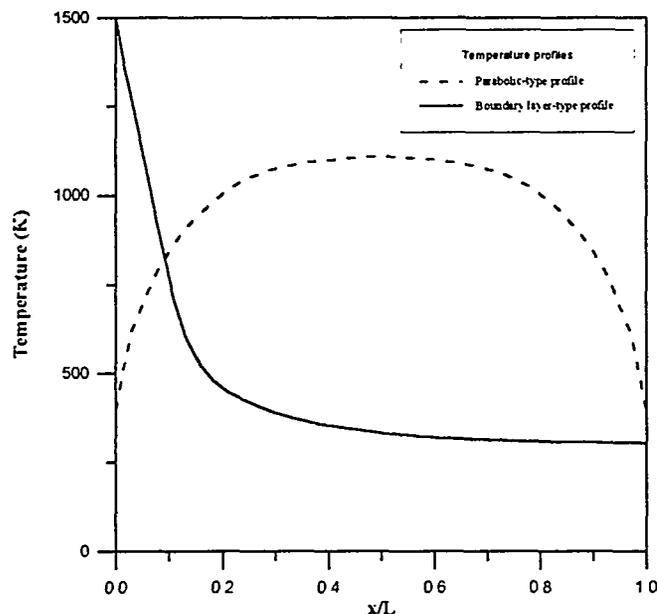


Figure 1: Profils de température dans la couche de gaz

Le premier profil parabolique est analogue à celui employé par Zhang et al. (1988). Le second correspond à une distribution de température pour un régime de couche limite lors d'un transfert combiné convection-rayonnement; il provient de résultats présentés par Kim dans sa thèse de doctorat (Kim, T.K., 1990).

Les réflectivités des parois sont $\rho_1=0.9$, et $\rho_2=0.1$, et la largeur de la cavité est $L=0.5$ m. Tous ces paramètres, températures réflectivités et dimension de la cavité ont été choisis afin de se ramener à des configurations identiques à celles traitées par Menart, Lee et Kim (1993), ceci pour valider notre approche.

Les calculs avec le modèle à bande étroite, sur un spectre s'étendant de 150 cm^{-1} à 5675 cm^{-1} , sont menés dans les trois régions présentant une forte absorption. Ces intervalles spectraux sont les suivants : $\nu=150 \text{ cm}^{-1}$ à 2325 cm^{-1} , 2900 cm^{-1} à 4275 cm^{-1} , et 4900 cm^{-1} à 5675 cm^{-1} . La discrétisation angulaire utilise une quadrature de Gauss à 20 directions (S-20). La couche gazeuse est divisée en 20 sous couches (soit 20 volumes de contrôle).

Sur la Figure 2 sont présentées les distributions de source radiative obtenues avec l'approche intégrale. Ces résultats sont comparés à la solution obtenue par Menart et al. (1990) avec la formulation que ces auteurs ont appelée « first degree closure » dans laquelle, les corrélations sont prises en compte ainsi qu'un certain nombre de réflexions explicites aux parois. Fig. 2a correspond au profil de température parabolique.

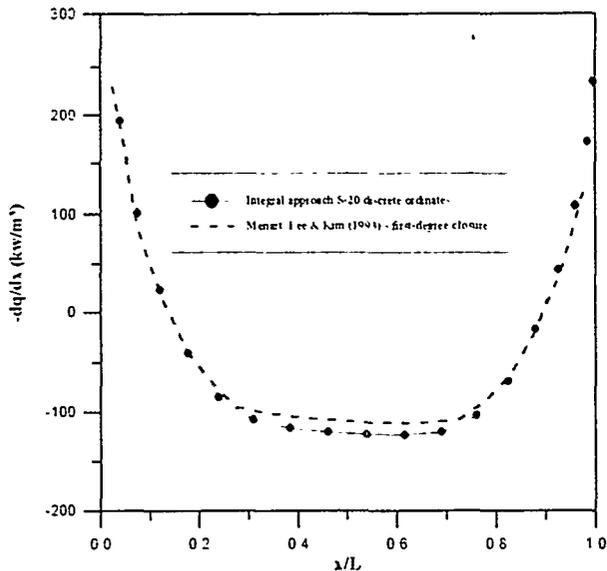


Fig. 2a: $-dq/dx$ profil de température parabolique

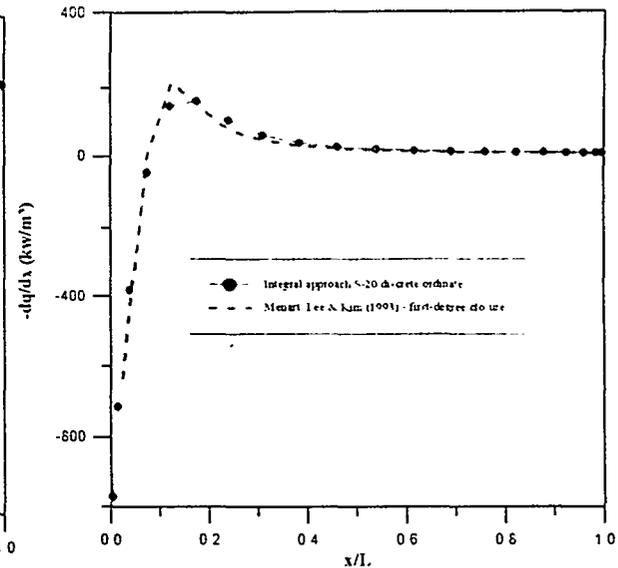


Fig 2b : $-dq/dx$ profil de température couche limite

Pour ce cas test, l'écart des solutions obtenues par les deux approches est négligeable au niveau de la paroi fortement réfléchissante ($x/L=0$). C'est au centre de la cavité que l'approche intégrale présente l'erreur la plus importante en sous estimant ($-dq/dx$) d'environ 11%. En se rapprochant de la seconde extrémité de la cavité peu réfléchissante ($x/L=1$) cet écart diminue pour n'être plus que de 5% à la paroi même.

Notre approche rend compte aussi correctement que la « first degree closure » du changement de comportement du gaz. Les couches centrales chaudes émettent fortement tandis que les couches froides proches des parois sont très absorbantes.

Des calculs similaires sont présentés Fig2-b pour le profil de température de type couche limite. Ici les couches chaudes de gaz contenues à l'intérieur de la couche limite thermique à proximité de la paroi réfléchissante, sont fortement émettrices. A l'extérieur de cette zone ($x/L>0.2$), le terme source radiatif décroît lentement jusqu'à s'annuler au niveau de la paroi en $x/L=1$, en suivant les variations de température au sein de la cavité. Pour cette configuration les solutions obtenues par les deux approches sont parfaitement identiques au niveau des parois. Il faut préciser également que l'écart maximal de 30% qui est observé à l'extrémité de la couche limite, peut être considérablement réduit en affinant le maillage; ainsi avec une grille de 45 points, l'écart est réduit à 14% (résultats que l'on ne présente pas ici).

Ces calculs menés sur station Apollo HP 425 ne prennent que 150 s pour 30 points (300 s pour 45 points). Le critère de convergence pour le calcul des luminances est de 0.1%.

Ces calculs préliminaires semblent indiquer que l'algorithme basé sur l'intégration le long du parcours de luminance de l'ETR est moins sensible aux effets de la « décorrélation » que les formulations basées sur la forme différentielle de l'ETR.

L'étape suivante que nous rapportons ici consiste à quantifier l'impact de la non prise en compte des corrélations suivant le gradient de température auquel est soumis le gaz.

3.2 Evaluation des erreurs sur la luminance

La luminance est calculée le long d'un parcours partant d'une paroi noire ($x/L=0$, $\rho_1=0$), traversant une couche de vapeur d'eau, subissant une réflexion spéculaire en $x/L=1$ ($\rho_2=0$), et regagnant la paroi noire. Les deux profils de température considérés sont identiques aux précédents. Les luminances sont calculées à partir, soit de l'équation (4) pour une solution corrélée, soit de l'équation (5) pour une solution non-corrélée. Pour la luminance corrélée, l'aspect non-isotherme est traité par l'approximation de Curtis-Godson. La cavité d'épaisseur 1 m est divisée en 6 sous couches (ou volumes de contrôle).

La Figure 3 représente la bande d'absorption de H_2O centrée sur 3700 cm^{-1} ; elle illustre le comportement de ce gaz pour des températures comprises entre les deux températures extrêmes $T=1500\text{ K}$ et $T=300\text{ K}$.

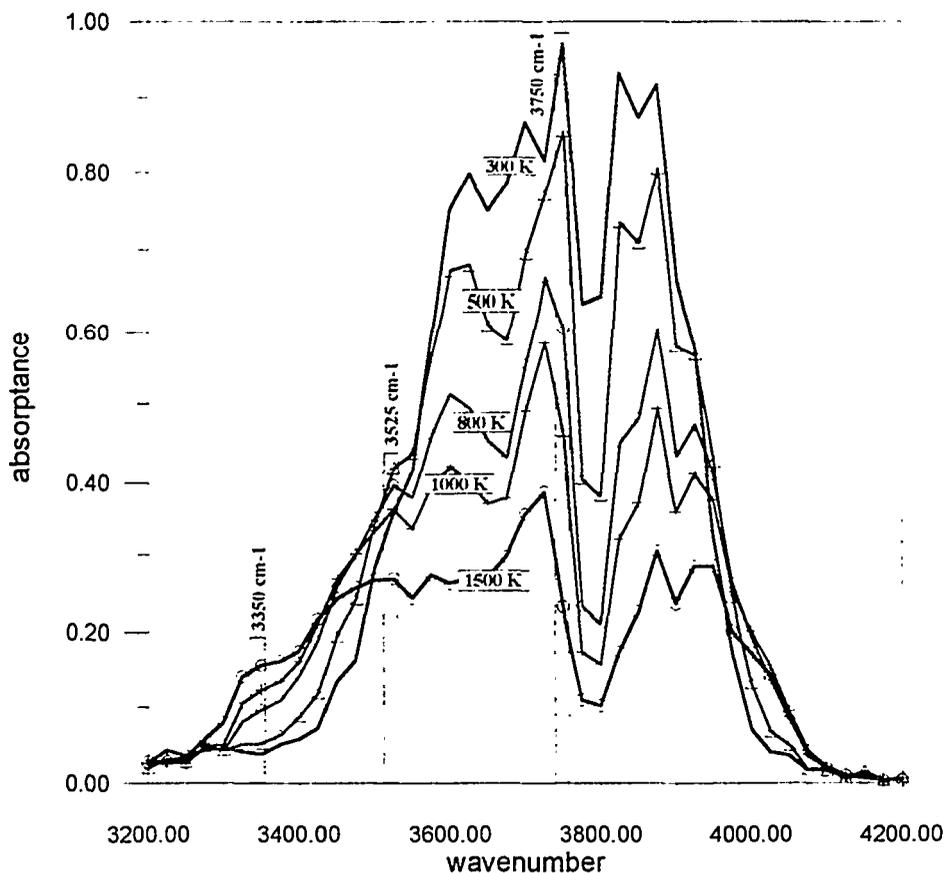


Fig 3: Bande d'absorption de la vapeur d'eau pour différentes températures

Trois intervalles spectraux de même largeur ($\Delta\nu=25 \text{ cm}^{-1}$) et localisés respectivement à 3750 cm^{-1} , 3525 cm^{-1} , et 3350 cm^{-1} sont sélectionnés pour le calcul des luminances corrélée et non corrélée. Ces luminances, intégrées sur chacun de ces trois intervalles et sur la totalité de la gamme spectrale considérée, soit $150\text{-}5675 \text{ cm}^{-1}$, sont présentées Figure 4 et Figures 5(a et b).

En comparant les transmittivités τ obtenues par les méthodes corrélées et décorrélées, il apparaît que l'impact des corrélations sur τ est d'autant plus important que τ est faible.

Profil couche limite

Figure 4 sont présentées les luminances intégrées pour le profil de température de type couche limite. Pour la bande étroite centrée sur 3750 cm^{-1} , l'absorption du gaz froid, qui occupe la majeure partie de la cavité, est importante ce qui rend la couche de gaz optiquement épaisse. Ainsi l'énergie radiative émise par la couche de gaz chaud proche de la paroi est bloquée et comme le gaz froid du reste de la cavité émet peu, la luminance décroît rapidement jusqu'à zéro. Aussi, bien que l'écart entre les solutions corrélée et décorrélée puisse atteindre localement 17%, leur contribution n'est pas importante au niveau de l'intensité intégrée sur tout le spectre considéré.

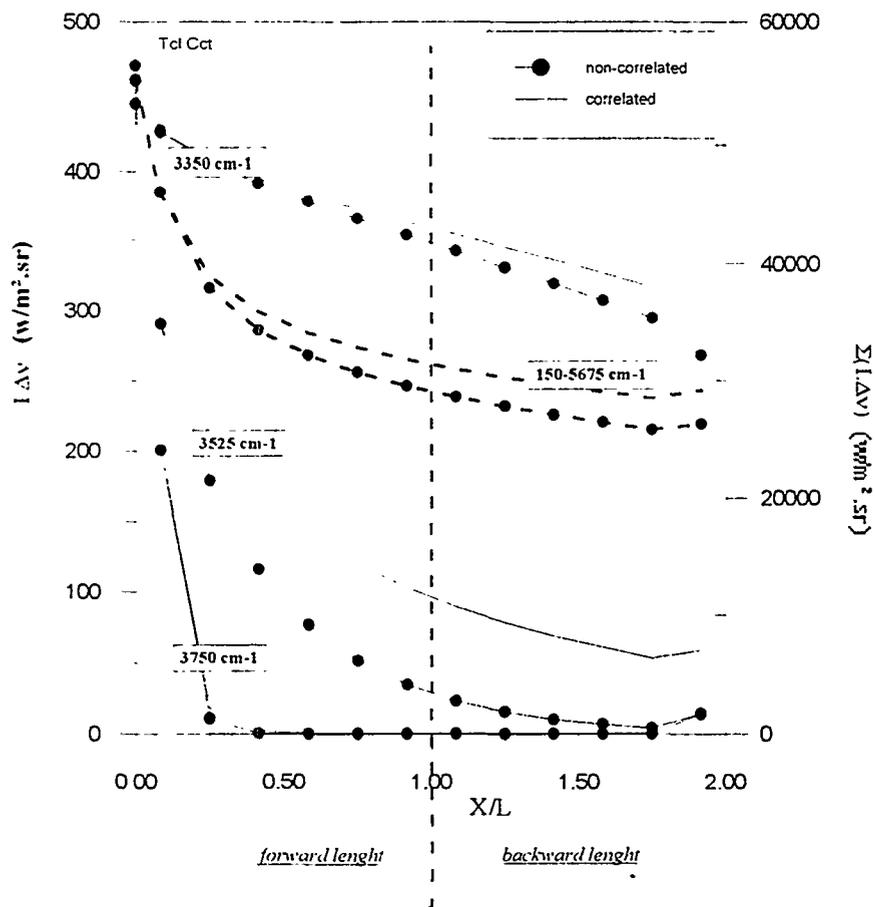


Fig. 4: Luminances corrélées et décorrélées intégrées sur 3 bandes étroites centrées sur $(3750, 3525, 3350) \text{ cm}^{-1}$.

Pour la bande étroite centrée sur 3350 cm^{-1} , les transmittivités sont élevées dans la majeure partie de la couche de gaz. Aussi comme indiqué précédemment les corrélations ont ici moins d'impact et l'écart maximum entre les deux solutions est voisin de 8%.

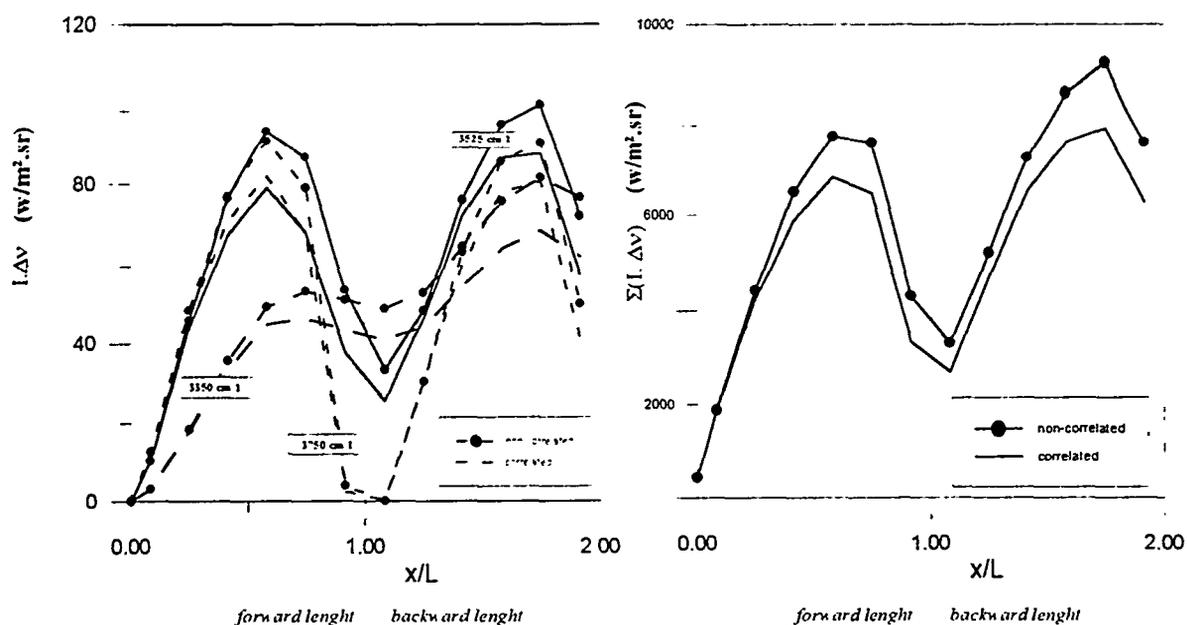
Dans la dernière bande étroite centrée sur 3525 cm^{-1} , les valeurs des transmittivités, aussi bien dans la couche chaude que dans les zones plus froides sont intermédiaires. Les écarts entre les deux solutions sont plus importants que dans les deux bandes précédentes. Ici, une fraction importante du rayonnement provenant des couches chaudes à l'intérieure de la couche limite est transmise par les couches froides du reste de la cavité.

Cependant, lorsque l'on considère la luminance intégrée sur la gamme spectrale $150\text{--}5675\text{ cm}^{-1}$, l'écart entre les solutions corrélée et non corrélée reste inférieur à 10%.

Profil type parabolique

Figures 5 a sont présentées les luminances intégrées sur les trois intervalles spectraux précédents, de largeur 25 cm^{-1} , pour le profil de température de type parabolique.

Pour analyser l'évolution de la luminance on doit se reporter à la Fig. 3 pour la variation des transmittivités des différentes couches de gaz en présence ici. Notons que les couches froides sont maintenant proches des parois à 300 K alors que les couches les plus chaudes atteignant 1500 K sont au centre.



Figures 5 a : Luminances corrélées et décorrelées intégrées sur des 3 bandes étroites de largeur 25 cm^{-1}

Figures 5 b : Luminances corrélées et décorrelées intégrées de $150\text{ à }5675\text{ cm}^{-1}$

On peut remarquer que pour un profil de ce type où la température du fluide est plus élevée que celle des parois, la solution non corrélée surestime systématiquement la luminance à l'inverse du phénomène observé pour le profil de température précédent.

Dans la bande centrée sur 3750 cm^{-1} , les transmittances augmentent avec la température, allant de 0.1 proche des parois à 0.8 au centre de la cavité. L'émission de chaque sous couche de gaz augmentant avec T, le terme de renforcement sera d'autant plus important que l'on s'écarte des parois. Globalement la luminance présente des fluctuations suivant le profil parabolique de température. Les écarts entre les deux solutions sont voisins de 10 %.

Pour la bande centrée sur 3525 cm^{-1} , les transmittances augmentent également avec la température. Leurs valeurs sont élevées (>0.65) ce qui se traduit par une bonne transmission dans la totalité de la cavité. La encore, l'évolution de la luminance suit le profil parabolique de température. Les écarts entre les deux solutions restent inférieurs à 16%.

Pour la bande centrée sur 3350 cm^{-1} , la variation des transmittances avec T est inverse à celle observée dans les deux bandes précédentes: τ diminue lorsque T augmente mais reste cependant très élevée (>0.85). La transmission est meilleure dans les zones proches des parois. Ceci explique la croissante globale de la luminance et des fluctuations moins marquées. Par contre on peut remarquer que les valeurs de la luminance sont inférieures aux précédentes. Les écarts observés entre les deux solutions dans cette bande sont voisin de 16%.

Figure 5 b on présente les luminances intégrées sur la toute l'étendue de la gamme spectrale de 150 à 5675 cm^{-1} . Globalement la luminance est renforcée, présentant des fluctuations qui suivent le profil de température parabolique. L'écart maximum entre les deux solutions est de 16 %.

Il apparaît donc que pour ce profil de température très différent du précédent, là encore, notre approche fournit des résultats très acceptables.

4 CONCLUSIONS

L'objectif de ce travail était de développer un modèle de transfert radiatif en milieu gazeux non gris. L'algorithme utilisé doit conduire à une précision très correcte tout en n'engendrant pas des temps de calcul trop importants, dans le but d'être intégré à un code industriel.

Une approche intégrale non corrélée couplant une méthode SN aux ordonnées discrètes à un modèle statistique à bandes étroites est présentée. Des tests préliminaires ont consisté à comparer le terme source radiatif obtenu par notre méthode à celui obtenu par un modèle de la littérature prenant en compte les corrélations spectrales et très coûteux en temps de calcul. Ces tests de validation indiquent que, bien que négligeant les corrélations spectrales, notre modèle fournit des résultats de qualité dont la précision est toute à fait compatible avec une application industrielle.

Du fait que dans cette modélisation, seules les transmittivités entre volumes de contrôles adjacents sont considérées, les non homogénéités de concentration ou de température sont implicitement prise en compte, ce qui réduit considérablement les temps de calcul.

Cet algorithme ouvre la possibilité, d'une part de modéliser les transferts radiatifs dans des gaz pour des géométries plus complexes, d'autre part de traiter des phénomènes de couplage avec d'autres modes de transfert.

Il faut préciser que ce travail doit être complété par une étude en cours sur l'influence de la concentration du gaz sur la non prise en compte des corrélations, l'influence de la température ayant seule été présentée ici.

Remerciements

Les auteurs remercient M. Anouar SOUFIANI (EM2C-CNRS / Ecole Centrale de Paris) pour l'aide apportée au travers des données sur les propriétés radiatives des gaz qu'il leur a communiquées

REFERENCES

BUCKIUS, R.O., 1982, « The Effect of Molecular Gas Absorption on Radiative Heat Transfer with Scattering », *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 580-586.

EDWARDS, D.K., 1976, « Molecular Gas Band Radiation », *Advances in Heat Transfer*, Vol. 12, Academic Press., New York, pp. 115-193

EDWARDS, D.K., and MENARD, W.A., 1964, « Comparison of Models for Correlation of Total Absorption », *Applied Optics*, Vol. 3, pp. 621-625.

EL WAKIL, N., 1991, « Etude de Transferts de Chaleur par Conduction, Convection et Rayonnement Couplés dans des Milieux Semi-Transparents Fluides ou Poreux. Elaboration de Modèles de Simulation en Géométrie Bidimensionnelle ». Thèse de Doctorat, INSA de Lyon.

EL WAKIL, N. and SACADURA, J.F., 1992, « Some Improvements of the Discrete Ordinates Method for the Solution of the Radiative Transport Equation in Multidimensional Anisotropically Scattering Media », *Developments in Radiative Heat Transfer*, S.T. Thynell, M.F. Modest, L.C. Burmeister, eds., ASME HTD, Vol. 203, pp. 119-128.

GODSON, W.L., 1953, « The Evaluation of Infrared Radiation Fluxes due to Atmospheric Water Vapor », *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, Vol. 79, pp. 367-379.

HARTMANN, J. M., LEVI, D., LEON, R. and TAINE, J., 1984, « Line-by-line and Narrow-Band Statistical Model Calculations for H₂O », *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 32, pp. 119-127.

KIM, T.K., 1990, « Radiation and Combined Mode Heat Transfer Analyses in Absorbing, Emitting en Mie-Anisotropically Scattering Media using the S-N Discrete Ordinates Method, Ph. D. dissertation, University of Minnesota, Minneapolis, MN.

KIM, T.K., MENART, J.A., LEE, H.S., 1991a, « Nongray Radiative Gas Analyses Using the S-N Discrete Ordinates Method », *Journal of Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 946-952.

MENART, J.A., LEE, H.S., MENART, J.A., LEE, H.S., 1991b, « S-N Discrete Ordinates Solutions of Nongray Radiative Transfer with Diffusely Reflecting Walls », *Fundamentals of Radiation Heat Transfer*, W.A. Fiveland, A.L. Crosbie, A.M. Smith, T.F.S. Smith, eds., ASME HTD, Vol. 160, pp. 79-87.

MALKMUS, W., 1967, « Random Lorentz Band Model with Exponential-Tailed S-1 Line-Intensity Distribution Function », *Journal of the Optical Society of America*, Vol.57, N°3, pp 323-329.

MENART, J.A., LEE, H.S., KIM, T.K., 1993, « Discrete Ordinates Solutions of Nongray Radiative Transfer with Diffusely Reflecting Walls », *Journal of Heat Transfer*, Vol. 115, pp. 184-193.

SOUFIANI, A., and TAINE, J., 1987, « Application of Statistical Narrow-Band Model to Coupled Radiation and Convection at High Temperature », *International Journal of Heat Transfer*, Vol. 30, N°3, pp. 437-447.

TAINE, J., 1983, « A Line-by-Line Calculation of Low-Resolution Radiative Properties of CO₂-CO-Transparent Nonisothermal Gas Mixtures Up to 3000K », *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 90, pp. 371-379.

YOUNG, S.J., 1977, « Nonisothermal Band Model Theory », *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 18, pp. 1-28.

ZHANG, L., SOUFIANI, A., and TAINE, J., 1988, « Spectral Correlated and Noncorrelated Radiative Transfer in Finite Axisymmetric System Containing an Absorbing and Emitting Real Gas-Particle Mixture », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 2261-2272.