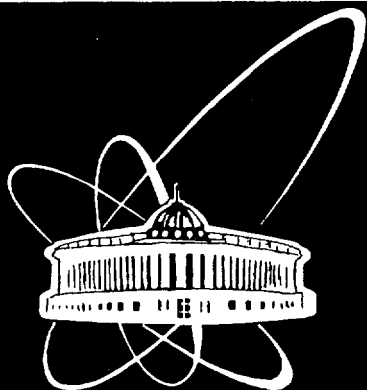




XJ9900053



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P7-98-159

В.К.Лукьянов, В.П.Пермяков, Ю.В.Чубсов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЙКОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ
УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ
В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛА ВУДСА—САКСОНА

Направлено в журнал «Известия РАН, серия физическая»

30 - 08 *L*

1998

**We regret that
some of the pages
in this report may
not be up to the
proper legibility
standards, even
though the best
possible copy was
used for scanning**

В работе [1] было показано, что ядро-ядерное рассеяние при энергиях от нескольких десятков до сотен МэВ на нуклон можно исследовать в рамках высокоэнергетического приближения (ВЭП) [2, 3], когда выполняются условия $kR \gg 1$, $E \gg |U|$. В ряде случаев для простого вида потенциалов взаимодействия с его помощью удается получить аналитические выражения для амплитуд рассеяния. Их использование весьма полезно для исследования физики ядерных взаимодействий, так как зависимости от параметров потенциалов прослеживаются в явном виде. В то же время до сих пор это не удавалось сделать для наиболее типичного в ядерной физике потенциала Вудса — Саксона:

$$U(r) = (V_0 + iW_0)f_N(r), \quad f_N(r) = \frac{1}{1 + \exp \frac{r-R}{a}}. \quad (1)$$

Данная работа посвящена решению этой задачи.

Приведем некоторые исходные выражения ВЭП. Согласно [4] амплитуда ВЭП рассеяния имеет вид

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}[t_{(+)}(q) - t_{(-)}(q)], \quad (2)$$

где $q = 2k \sin(\theta/2)$, θ - угол рассеяния. Выражения "ближней" $t_{(+)}$ и "дальней" $t_{(-)}$ -амплитуд представляются как

$$t_{(\pm)}(\gamma) = 2\pi \frac{\hbar v}{q} \gamma J^{(\pm)}(\gamma), \quad \gamma = -i \frac{V_0 + iW_0}{\hbar v}. \quad (3)$$

Здесь

$$J^{(\pm)} = \int_0^\infty r dr f_N(r) e^{g_{(\pm)}(r, \gamma)}, \quad (4)$$

$$g_{(\pm)}(r, \gamma) = \pm iqr + \gamma I(r), \quad (5)$$

$$I(b) = 2 \int_0^\infty f_N(\sqrt{b^2 + \lambda^2}) d\lambda, \quad b = r \cos \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

где b - прицельный параметр.

Видно, что из-за условия $kR \gg 1$ интеграл (4) сильно осциллирует, что представляет значительные трудности для его вычисления. Чтобы от них избавиться, приходится выходить на комплексную плоскость r или b , где можно выбрать такие контуры интегрирования, на которых эти осцилляции либо исчезают, либо значительно ослаблены. Так, в

работах [1, 5] было разработано так называемое двухполюсное приближение, когда контур интегрирования выбирался охватывающим, соответственно, для $t_{(+)}$ и $t_{(-)}$ - амплитуд первый и четвертый квадранты, а при их расчете учитывались вклады только двух вычетов в ближайших к действительной оси полюсах $r_1^\pm = R \pm i\pi a$ подынтегральной функции $f_N(r)$ (1). При этом эйкональный интеграл $I(b)$ вычислялся приближенно с использованием вместо ферми-распределения f_N сначала Θ -функции [1], а затем — трапециодальной [5]. Это накладывает ограничения на углы рассеяния, так как такие приближения реального потенциала при выходе на комплексную плоскость r оказываются не всегда приемлемыми в области основного вклада. Вместе с тем, в принципе, для случая реалистического потенциала Вудса — Саксона эйкональный интеграл (6) можно вычислить в явном виде [6]. Он выражается в виде бесконечной суммы

$$I(b) = 2R - 2\pi i a \sum_{p=1} \left(\frac{r_p^+}{\lambda_p^{(+)}} + \frac{r_p^-}{\lambda_p^{(-)}} \right), \quad (7)$$

где $\lambda_p^{(\pm)} = \sqrt{(r_p^\pm)^2 - b^2}$, $r_p^\pm = R \pm i\pi a(2p - 1)$ с $p=1,2,3,\dots$. При этом каждый член суммы имеет свои особенности в точках $r_p^\pm$. Кроме того, расчет (7) должен проводиться при выполнении условия $\text{Im } \lambda_p^{(\pm)} \geq 0$. Все это сильно ограничивает возможности использования данного выражения в аналитических расчетах амплитуды рассеяния.

Однако в предыдущей работе [7] при вычислении быстро осциллирующего интеграла (4) методом перевала выяснилось, что, во-первых, точки основного вклада (перевала) лежат возле особенностей $b = r \cos(\theta/2) = r_1^{(\pm)} = R \pm i\pi a$ только первого слагаемого суммы (7), где остальные слагаемые ведут себя весьма плавно. И, во-вторых, по этой же причине в уравнении на точки перевала $g'_{(\pm)}(r_s) = 0$, вкладом производных от членов суммы (7) с $p > 1$ можно пренебрегать. Это последнее обстоятельство сильно упрощает уравнение и позволяет найти соответствующие точки перевала $r_s = r_s(\theta)$ в явном виде (см. также [8]). В качестве примера на рис.1 и 2 показано поведение реальных и мнимых частей интеграла $I(b)$ для $R = 7,05$ фм, $a = 0,5$ фм и $\theta = 15^\circ$ на комплексной плоскости r , где пунктиром изображено его поведение с учетом только первого члена суммы (7), а сплошной - точный численный расчет $I(b)$ по формуле (6). Эти кривые, по существу, просто сдвинуты друг относительно друга, и все характерные изменения (7)

определяются только одним слагаемым с $p = 1$.

Далее, обратимся к стандартному ответу, получаемому в методе перевала при расчете интеграла (4):

$$J^{(\pm)}(r_s) = -r_s f_N(r_s) e^{g^{(\pm)}(r_s)} \sqrt{-2\pi/g''_{(\pm)}(r_s)}. \quad (8)$$

Видно, что его абсолютная величина зависит в основном от фазы в экспоненте $\exp\{g_{(\pm)}(r_s)\}$, а значит от того, насколько точно удастся ее вычислить. Что же касается второй производной, то она с достаточной точностью определяется только первым слагаемым в сумме (7).

Таким образом, приходим к выводу, что при нахождении седловой точки r_s определяющую роль в эйкональном интеграле $I(b)$ для вудсаксоновского потенциала играет первое слагаемое с $p = 1$ в сумме (7). А остальные слагаемые с $p > 1$ важны, чтобы правильно рассчитать абсолютную величину амплитуды рассеяния. Из-за плавного поведения в области основного вклада на комплексной плоскости их можно попытаться смоделировать в более простой форме по сравнению с тем, как они представлены в (7). Ниже предлагается такого вида модельное выражение для эйконального интеграла (6), которое достаточно хорошо описывает поведение его реальной и мнимой частей в зависимости от комплексного b в области ближайших к реальной оси особенностей $b = R \pm i\pi a$

$$I(b) = 2R - 2\pi i a \left(\frac{r_1^+}{\lambda_1^{(+)}} + \frac{r_1^-}{\lambda_1^{(-)}} \right) + \Delta(b). \quad (9)$$

Здесь

$$\Delta(b) = \Delta_R(b) + i\Delta_I(b), \quad b = b_1 + ib_2. \quad (10)$$

$$\Delta_R = A_R(b_1 - B_R) + C_R b_2^2(b_1 - D_R), \quad (11)$$

$$\Delta_I = A_I \frac{b_2^4}{a_I + b_2^2} (b_1 - B_I)^2 - C_I (b_2 - D_I), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_R &= 1,032(a - 1,62), & B_R &= 2,517, \\ C_R &= -0,016(R - 3,656), & D_R &= 0,917R, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_I &= 0,94(0,628 - a)(R - 2,826), \\ a_I &= 10,64, & B_I &= 0,21(a + 3,783)(R + 0,071), \\ C_I &= 0,128(1,466 - a)(R + 3), & D_I &= 0,282. \end{aligned} \quad (14)$$

Это выражение для Δ обеспечивает достаточную точность в пределах изменения значений радиуса потенциала $R \sim 6 - 8$ фм и параметра диффузности $a \sim 0,6 - 0,8$ фм, что видно из рис.1 и 2, где звездочками дан приближенный расчет по формулам (9)-(14). Более общее представление о точности предложенной параметризации можно получить из рис.3 и 4, где показаны поверхности отклонений реальной и мнимой частей модельного выражения эйконального интеграла от точного

$$\delta = \Delta - 2\pi i a \sum_{p=2} \left(\frac{r_p^+}{\lambda_p^{(+)}} + \frac{r_p^-}{\lambda_p^{(-)}} \right) \quad (15)$$

в зависимости от изменения прицельного параметра b на комплексной плоскости. Видно, что в окрестности особой точки $b = R \pm i\pi a$ (здесь $R = 760$ фм, $a = 066$ фм) эти отклонения не выходят за пределы 10%.

Теперь проанализируем возможности предложенного модельного представления эйконального интеграла I в описании амплитуд и сечений рассеяния. В качестве тестовой задачи рассмотрим рассеяние двух ядер массы 17 и 90 при энергии $E=1435$ МэВ в поле потенциала Вудса — Саксона с геометрическими параметрами $R=7,05$ фм и $a=0,5$ фм, параметры V_0 и W_0 будут изменяться. На рис.5 показаны расчеты "ближней" $|J^{(+)}|$ и "дальней" $|J^{(-)}|$ - амплитуд: точные расчеты выполнены численным интегрированием — сплошные линии, пунктир — расчеты по формуле (8) методом перевала с использованием точного выражения (7) для эйконального интеграла, звездочками представлен расчет методом перевала, когда $I(b)$ представлен модельным выражением (9).

Здесь приведены три типичных случая : (а) рефракция (отсутствие поглощения, $V_0=-50$ МэВ, $W_0=0$), (б) оптическая модель ($V_0=-50$ МэВ, $W_0=-25$ МэВ) и (в) сильное поглощение ($V_0=-1$ МэВ, $W_0=-50$ МэВ). Обнаруживается следующая картина: в первых двух случаях наличие действительной части потенциала приводит к тому, что при сравнительно небольших углах θ "ближняя" амплитуда $J^{(+)}$ на один-два порядка превышает "дальнюю" $J^{(-)}$. При некотором угле $\theta = \theta_e$ эти амплитуды становятся равными друг другу, сам угол θ_e "точки пересечения" возрастает по мере роста поглощения W_0 и слабо зависит от V_0 . Так, в варианте (б) ("оптическая модель") амплитуда $J^{(+)}$ при $\theta_e \simeq 20^\circ$ на три порядка меньше своего значения при $\theta = 5^\circ$. И всюду здесь она примерно на порядок величины превышает $J^{(-)}$ и практически совпадает с тем, что дает для нее расчет с помощью модельного эйконального

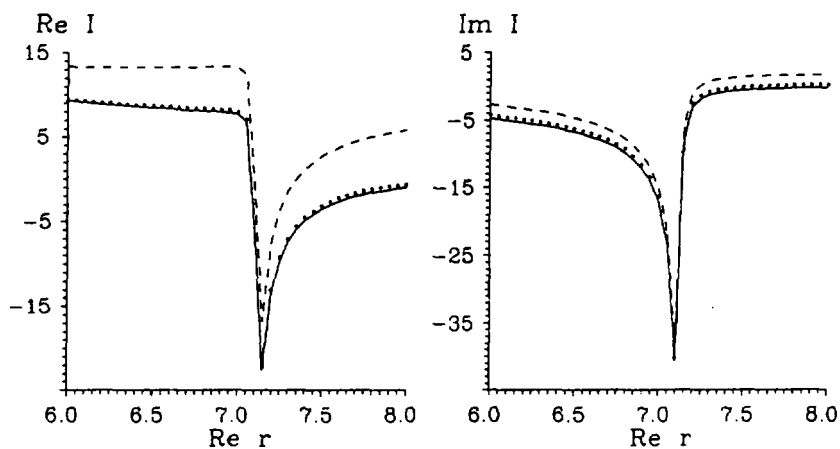


Рис.1. Поведение Re и Im частей эйконального интеграла $I(b)$ в зависимости от $Re\ r$ при $\theta = 15^\circ$, $R = 7,05$ фм, $a = 0,5$ фм. $Im\ r = \pi a$. Сплошные линии - точный численный расчет по формуле (6), пунктир - расчет с учетом только первого члена $p = 1$ в сумме (7), звездочки - модельная аппроксимация (9)

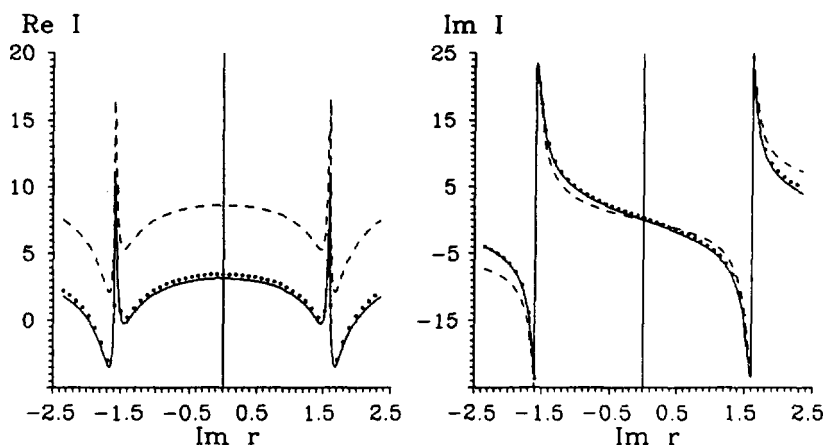


Рис.2. То же, что и на рис.1, но в зависимости от $Im\ r$ при $Re\ r = R$

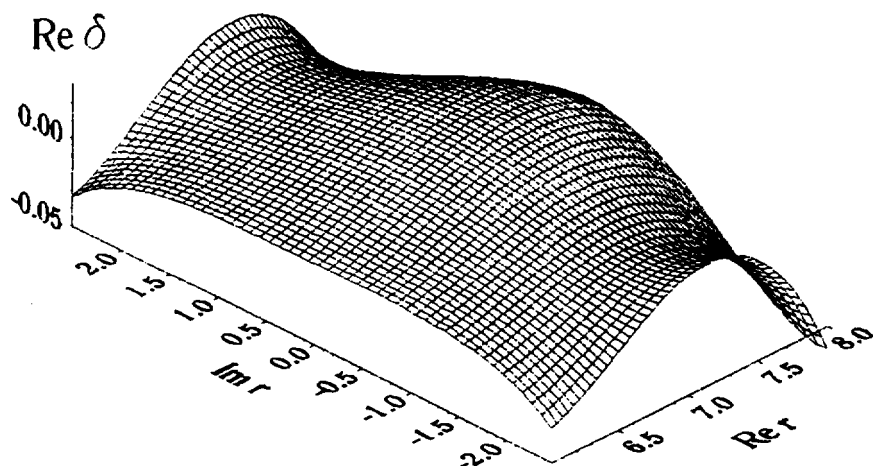


Рис.3 Поверхность отклонения (15) реальной $Re \delta$ части модельного выражения эйконального интеграла (9) от точного (7) в зависимости от изменения прицельного параметра b на комплексной плоскости при $R = 7,0$ фм, $a = 0,6$ фм

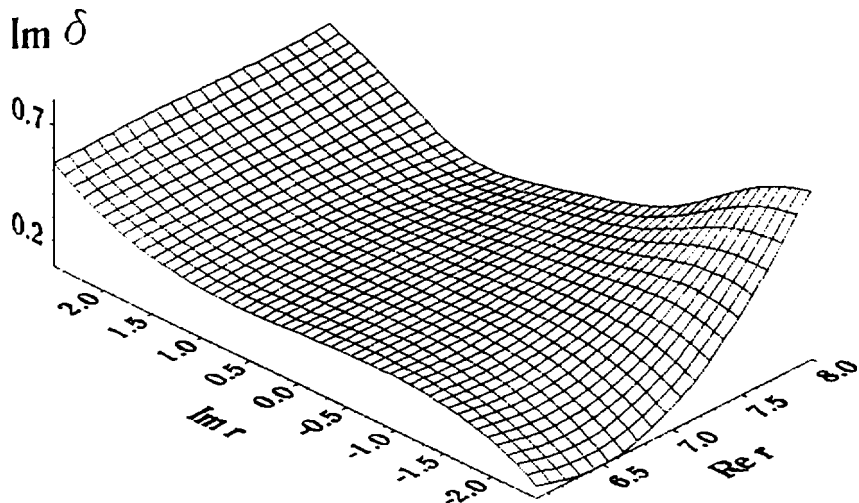


Рис.4. То же, что и на рис.3, но для мнимой части $Im \delta$

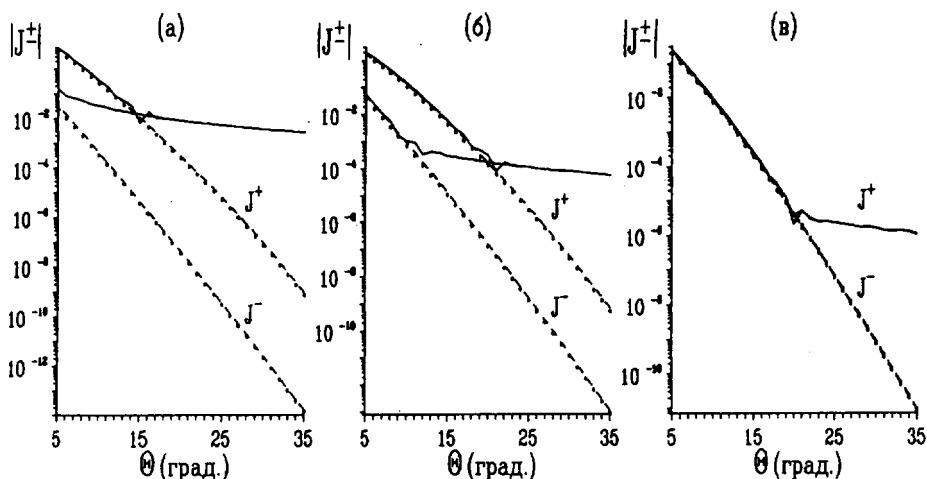


Рис.5. Поведение "ближней" $J^{(+)}$ и "дальней" $J^{(-)}$ амплитуд: (а) $V_0 = -50$ МэВ, $W_0 = 0$; (б) $V_0 = -50$ МэВ, $W_0 = -25$ МэВ; (в) $V_0 = -1$ МэВ, $W_0 = -50$ МэВ. Сплошные линии - точный численный расчет (4), пунктир - расчет методом перевала по формуле (8) с использованием точного выражения (7) для $I(b)$, звездочки - расчет методом перевала, когда $I(b)$ представлен выражением (9)

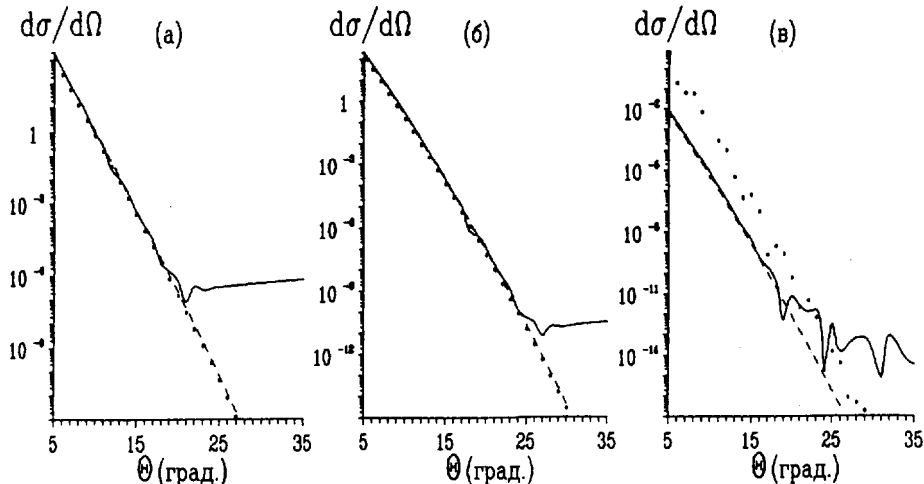


Рис.6. Дифференциальные сечения рассеяния (в $\text{фм}^2/\text{ср}$): (а) $V_0 = -50$ МэВ, $W_0 = 0$; (б) $V_0 = -50$ МэВ, $W_0 = -25$ МэВ; (в) $V_0 = -1$ МэВ, $W_0 = -50$ МэВ. Сплошные линии - точный численный расчет, пунктир - расчет методом перевала с точным выражением (7) для эйконального интеграла, звездочки - расчет методом перевала с модельным эйконалом (9)

интеграла (9). Таким образом, для дифференциальных сечений в области изменения углов $5^\circ < \theta < 20^\circ$ можно пользоваться предложенным подходом, и он вполне покрывает область возможного экспериментального наблюдения сечений.

На рис.6 сравниваются точные численные расчеты дифференциальных сечений (сплошные кривые) и их же расчеты методом перевала как с точным (7) (пунктир), так и с модельным (9) (звездочки) выражением для эйконоального интеграла. Видно, что во всех случаях расчеты по перевальной методике с точным и модельным эйконалами I для вариантов (а) и (б) совпадают с результатами численного интегрирования вплоть до углов, начиная с которых наклон кривых дифференциальных сечений качественно изменяется. Однако в случае сильного поглощения (в) сечение, вычисленное с модельным выражением (9), сдвинуто по абсолютной величине относительно расчета по перевальной методике с использованием точного выражения эйконала. Следует отметить, что при выбранных параметрах потенциала основной вклад в дифференциальное сечение при относительно малых углах рассеяния определяется в основном амплитудой $t_{(+)} \sim J^{(+)}$.

В качестве другого примера на рис.7 показано поведение сечения при относительно малых углах, где проявляется картина дифракционных максимумов и минимумов. Параметры потенциала ($V_0 = -60$ МэВ, $W_0 = -54$ МэВ, $a_0 = 1,04$ фм, $a = 0,71$ фм), энергия $E = 1504$ МэВ и атомные веса сталкивающихся ядер $A_1 = 16$, $A_2 = 60$, а также область изменения углов выбраны в соответствии с имеющимися данными рассеяния $^{16}\text{O} + ^{60}\text{Ni}$ и подогнанным под них потенциалом [9].

Здесь представлены расчеты: численное интегрирование (сплошная линия), расчет методом перевала с точным выражением для эйконоального интеграла (пунктир) и расчет методом перевала с модельным выражением для фазы (9) (звездочки). Видно, что использование перевальной методики позволяет хорошо воспроизвести форму и порядок зависимости сечения от угла рассеяния. Если же использовать только первое слагаемое $p = 1$ в выражении (7) для эйконоального интеграла $I(b)$, то это, как показано в [7], приводит к очень сильному отличию абсолютной величины сечения, примерно на четыре порядка, от его точного значения.

В заключение обратим внимание на то, что использованное нами приближенное решение уравнения на седловую точку [7] с учетом только $p = 1$ члена в (7) не меняет общих выводов. Проверка показывает, что

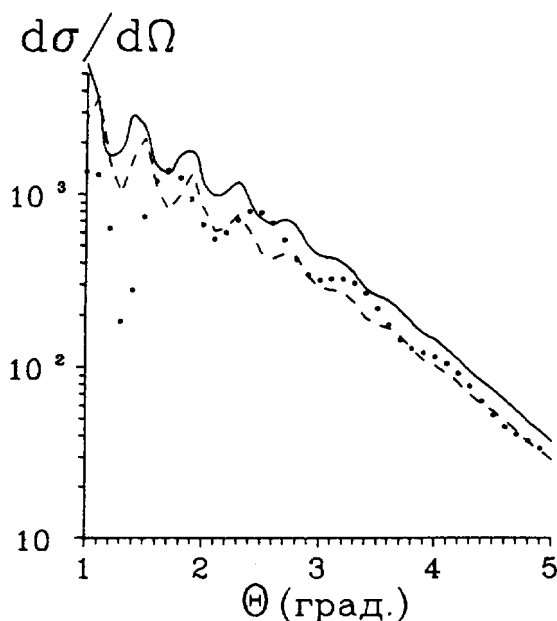


Рис.7. То же, что и на рис.6, но для рассеяния $^{16}\text{O} + ^{60}\text{Ni}$ с реалистическими параметрами потенциала из [9]

расчет амплитуд рассеяния и, соответственно, дифференциальных сечений с помощью перевальной методики практически не зависит от того, используем мы приближенные (из [7]) или точные значения для седловых точек. Вся тонкость заключается в правильном моделировании гладкой части эйконального интеграла, определяемой суммой членов с $p > 1$, и поэтому нужно каждый раз проводить тщательный анализ приближенных эйкональных интегралов и фаз квазиклассических волновых функций при выходе на плоскость комплексного прицельного параметра.

Литература

1. Лукьянов В.К.// ЯФ. 1995. Т.58. С.1955.
2. Glauber R.J.// *in Lectures on Theoretical Physics* (Interscience, New York, 1959), V.I.

3. Schiff L.I.// Phys.Rev. 1956. V.103. P.443.; Saxon D.S. and Schiff L.I.// Nuovo Cimento. 1957. V.6. P.614.; Yennie D.R., Boos F.L. and Ravenhall D.C.// Phys.Rev.B. 1965. V.137. P.882.; Лукьянов В.К.// Изв. РАН, сер.физ., 1994. Т.58(1). С.8.
4. Лукьянов В.К. //Изв. РАН, сер. физ. 1996, Т. 60(11) С.8.
5. Ембулаев А.В., Земляная Е.В., Лукьянов В.К, Пермяков В.П., Чубов Ю.В. // Препринт ОИЯИ, Р7-97-185, 1997.
6. Shepard J.R. and Rost E.// Phys.Rev.C. 1982. V.25. P.2660.
7. Земляная Е.В., Лукьянов В.К., Пермяков В.П., Чубов Ю.В. // Изв. РАН, сер. физ. 1997. Т.61(1). С.140.
8. Amado R.D., Dedonder J.P., Lenz F.// Phys. Rev C. 1980, V. 21, N. 2, P. 647 ;
9. Roussel-Chamaz P. et al // Nucl. Phys. 1988. V. A477. P.345.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1998 года.

**Издательский отдел
Объединенного института ядерных исследований
предлагает Вам приобрести перечисленные ниже книги:**

Индекс книги	Название книги
94-55	Боголюбовские чтения. Материалы Международного совещания. Дубна, 1993 г. 216 с. (на русском и англ. яз.) Книга В.С.Барашенкова «Сечения взаимодействия частиц и ядер с ядрами». 1993 г. 346 с.
Д3,14-95-323	Труды VII школы по нейтронной физике. Дубна, 1995, том I, 356 с. (на русском и англ. яз.)
Е10,11-95-387	Труды Международной конференции REAL TIME DATA '94. Дубна, 1994, 358 с. (на англ. яз.)
Д15-96-18	Труды рабочего совещания «Зарядовые и нуклонные радиусы экзотических ядер». Познань, 1995, 172 с. (на русском и англ. яз.)
Е9-96-21	Труды рабочего совещания секции ICFA динамики пучков «По эффектам встречи в кольцевых коллайдерах». Дубна, 1995, 198 с. (на англ.яз.)
Е2-96-100	Труды 3 международного симпозиума «Дейтрон — Дубна-95». Дубна, 1995, 374 с. (на англ. яз.)
Е2-96-224	Труды VII международной конференции «Методы симметрии в физике». Дубна, 1996, 2 тома, 630 с. (на англ. яз.)
Е10-96-258	Труды 17 ежегодного совещания группы пользователей TEX. Дубна, 1996, 170 с. (на англ. яз.)
Е-96-321	Труды международного семинара «Интегралы по траекториям: Дубна-96». Дубна, 1996, 392 с. (на англ. яз.)
Е2-96-334	Труды Российско-немецкого совещания по физике тяжелых кварков. Дубна, 1996, 240 с. (на англ. яз.)
Е3-96-336	Труды 4 Международного семинара по взаимодействию нейтронов с ядрами. Дубна, 1996, 396 с. (на англ. яз.)
Е3-96-369	Труды X международной конференции «Проблемы квантовой теории поля». Дубна, 1996, 437 с. (на англ. яз.)
Е3-96-507	Труды международного семинара «Поляризованные нейтроны в исследованиях конденсированных сред». Дубна, 1996, 154 с. (на англ. яз.) Книга А.Н.Боголюбова. Н.Н.Боголюбов. Жизнь. Творчество. Дубна, 1996; 182 с. (на русском яз.)
Д1,2-97-6	Труды международного семинара «Релятивистская ядерная физика от сотен МэВ до ТэВ». Дубна, 1996, 2 тома, 418 с. и 412 с. (на русском и англ. яз.)
Е7-97-49	Труды 3 международной конференции и «Динамические аспекты деления ядер». Словакия, 1996, 426 с. (на англ. яз.)

Индекс книги	Название книги
Е1,2-97-79	Труды XII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Релятивистская ядерная физика и квантовая хромодинамика. Дубна, 1994, 2 тома, 364 с. и 370 с. (на англ. яз.)
Д5,11-97-112	Труды IX международной конференции «Математическое моделирование в физике». Дубна, 1996, 378 с. (на русском и англ. яз.)
Е3-97-213	Труды V Международного семинара по взаимодействию нейтронов с ядрами. Дубна, 1997, 446 с. (на англ. яз.)
Д9-97-231	Труды международной школы молодых ученых «Проблемы ускорения заряженных частиц». Дубна, 1996, 285 с. (на русском и англ. яз.)
Е2,4-97-263	Труды III международной конференции «Ренормгруппа-96». Дубна, 1996, 436 с. (на англ. яз.)
Е10-97-272	Труды международного рабочего совещания «Системы сбора данных в экспериментах на нейтронных источниках». Дубна, 1997, 325 с. (на англ. яз.)
Д19-97-284	Труды международного симпозиума «Проблемы биохимии, радиационной и космической биологии». Дубна, 1997, 2 тома: 284 и 405 стр. (на русском и англ. яз.)
Р14-97-343	Труды Национальной конференции по применению рентгеновского синхротронного излучения нейтронов и электронов для исследования материалов. Дубна, 1997, 3 тома, 370 с., 448 с., 340 с. (на русском яз.)
Д -97-376	Труды I открытой конференции молодых ученых и специалистов ОИЯИ. Дубна, 1997, 254 с. (на русском яз.)
Е2-97-413	Труды VII Международного совещания по спиновой физике высоких энергий (СПИН-97). Дубна, 1997, 398 с. (на англ. яз.)

За дополнительной информацией просим обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу:

141980, г.Дубна, Московской области,
ул.Жолио-Кюри, 6.
Объединенный институт ядерных исследований,
издательский отдел
E-mail: publish@pds.jinr.dubna.su

Лукьянов В.К., Пермяков В.П., Чубов Ю.В.
Моделирование эйкональной функции упругого рассеяния
в поле потенциала Вудса—Саксона

P7-98-159

Для аналитических расчетов ядерного рассеяния в высокоэнергетическом приближении $E \gg U$ и $kR \gg 1$ необходимо явно вычислить эйкональную фазу. В работе получено ее модельное выражение для рассеяния на потенциале Вудса—Саксона, которое с хорошей точностью воспроизводит ее поведение на комплексной плоскости, найденное численно. В этом случае удастся рассчитать амплитуду рассеяния методом перевала в явном виде, что облегчает понимание физики процесса. Сравниваются и обсуждаются соответствующие расчеты амплитуд и сечений ядро-ядерного рассеяния с точными и модельными фазами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1998

Перевод авторов

Lukyanov V.K., Permyakov V.P., Chubov Yu.V.
Modelling of the Woods—Saxon Eikonal Function
for Nuclear Elastic Scattering

P7-98-159

The eikonal phase is needed for the analytical calculations for the nuclear scattering in the high-energy approximation ($E \gg U$, $kR \gg 1$). In this paper we obtain its model expression for scattering on Woods—Saxon potential which with a good accuracy reproduces its behavior in complex plane which is found numerically. In the case one evaluates explicitly the scattering amplitude using saddle point method makes the physics more understandable. The numerical amplitudes and cross sections of nucleus-nucleus scattering are compared with exact calculations.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1998

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 22.06.98

Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 0,95

Тираж 305. Заказ 50746. Цена 1 р. 14 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области