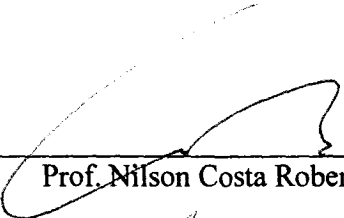


ESTUDO DA SENSIBILIDADE DO PROBLEMA DE TRANSPORTE DE RADIAÇÃO
EM MEIO ESPALHADOR

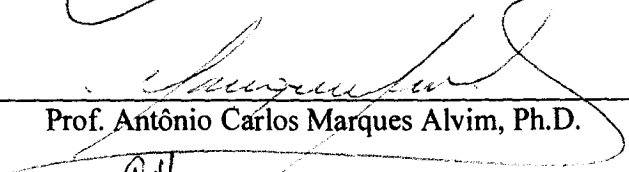
Rogério Chaffin Nunes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Aprovada por:



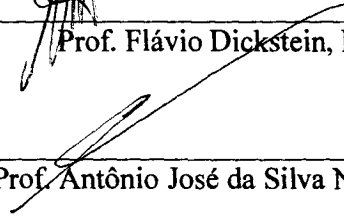
Prof. Nilson Costa Roberty, D.Sc.



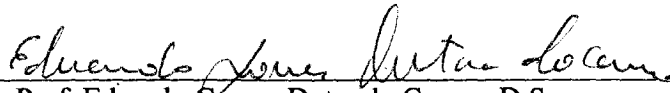
Prof. Antônio Carlos Marques Alvim, Ph.D.



Prof. Flávio Dickstein, D.Sc.



Prof. Antônio José da Silva Neto, Ph.D.



Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2002

NUNES, ROGERIO CHAFFIN

Estudo da Sensibilidade do Problema
de Transporte de Radiação em Meio
Espalhador [Rio de Janeiro] 2002

X, 148 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc.,Engenharia Nuclear, 2002)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Método dos Elementos Finitos;
2. Métodos de Ordenadas Discretas;
3. Equação de Transporte;
4. Estudo da Sensibilidade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais,
a Jorgeanne.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Nilson Costa Roberty pela orientação, pela paciência, pelo incentivo e também pela confiança na minha capacidade.

Aos professores, funcionários e amigos do Programa de Engenharia Nuclear por sua ajuda, compreensão e amizade.

Ao Programa de Engenharia Nuclear que permitiu o uso do LASME- Laboratório de Simulação e Modelamento em Engenharia e do LMN- Laboratório de Métodos Numéricos.

A todos os funcionários da UFRJ que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

A minha família que soube me apoiar.

A minha Jorgeanne pelo seu amor, seu carinho, sua compreensão e seu incentivo.

As agências financiadoras CAPES e FAPERJ pelo importante apoio financeiro, sem o qual não teria sido possível a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

ESTUDO DA SENSIBILIDADE DO PROBLEMA DE TRANSPORTE DE
RADIAÇÃO EM MEIO ESPALHADOR

Rogério Chaffin Nunes

Março/2002

Orientador: Nilson Costa Roberty

Programa: Engenharia Nuclear

Neste trabalho, o sistema de equações diferenciais obtidos pela aproximação angular da equação de transporte bidimensional pelo método de ordenadas discretas é resolvido através da formulação de elementos finitos com o objetivo de investigar a sensibilidade do fluxo emergente de radiação com o fluxo incidente e as propriedades de absorção e espalhamento do meio. A formulação variacional para o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem com condições de fronteira de Neumann generalizadas (3º tipo) permite uma fácil implementação do método dos elementos finitos com malha triangular e espaço de aproximação de 1ª ordem. A geometria escolhida para as simulações é um círculo com uma não-homogeneidade de forma circular em seu interior. O mapeamento de Dirichlet-Neumann é estudado através de diversas simulações envolvendo o fluxo incidente, o fluxo emergente e as propriedades do meio.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STUDY OF THE SENSITIVITY OF THE RADIATION TRANSPORT PROBLEM IN A
SCATTERING MEDIUM

Rogério Chaffin Nunes

March/2002

Advisor: Nilson Costa Roberty

Department: Nuclear Engineering

In this work, the system of differential equations obtained by the angular approach of the two-dimensional transport equation by the discrete ordinates method is solved through the formulation of finite elements with the objective of investigating the sensitivity of the outgoing flux of radiation with the incoming flux and the properties of absorption and scattering of the medium. The variational formulation for the system of differential equations of 2nd order with the generalized boundary conditions of Neumann (3rd type) allows an easy implementation of the method of the finite elements with triangular mesh and approximation space of 1st order. The geometry chosen for the simulations is a circle with a non homogeneous circular form in its interior. The mapping of Dirichlet-Neumann is studied through various simulations involving the incoming flux, the outgoing flux and the properties of the medium.

ÍNDICE

1. Introdução.....	1
2. Revisão Bibliográfica.....	6
3. Preliminares Matemáticas.....	8
3.1. O Método dos Elementos Finitos (MEF).....	8
3.2. Os Espaços de Funções - Espaços de Hilbert L_2 , H^1 e $H^{1/2}$	11
3.3. A Formulação Variacional.....	16
3.4. O Problema de Neumann: Condições de Contorno Natural e Essencial.....	16
3.5. Construção e Representação de uma Triangulação T_h : Malha Triangular de Elementos Finitos.....	23
4. Formulação Matemática do Problema de Transporte.....	27
4.1. A Equação de Transporte de Radiação a uma Velocidade e Estacionária em Meios Bidimensionais: Equação Linearizada de Boltzmann.....	27
4.2. A Formulação Matemática do Problema Direto.....	31
4.3. A Formulação Matemática do Problema de Transporte com o Método de Ordenadas Discretas.....	38
4.3.1. A Formulação Matemática do Problema de Transporte com o Método de Ordenadas Discretas Adaptadas para o Caso Bidimensional no Plano (x,y)	43

4.4. A Aproximação da Equação Transporte por Ordenadas Discretas.....	48
4.5. A Formulação de Paridade da Equação de Transporte	57
4.6. A Solução do Problema Direto.....	69
5. Resultados.....	74
5.1. As Considerações Preliminares.....	74
5.1.1. A Apresentação e a Discriminação dos Termos do Algoritmo Computacional do Problema Direto.....	74
5.1.1.1. A Descrição da Geometria do Problema e a Especificação da Não-Homogeneidade.....	76
5.1.1.2. A Geração Automática da Malha Primitiva.....	76
5.1.1.3. Os Dados de Entrada.....	76
5.1.1.3.1. A Configuração Inicial dos Parâmetros.....	76
5.1.1.4. As Matrizes de Seção de Choque (a).....	77
5.1.1.5. As Matrizes de Condutividade (c).....	77
5.1.1.6. Os Termos de Fonte (f).....	78
5.1.1.7. A Equação Diferencial Parcial	78
5.1.1.8. A Descrição das Condições de Contorno.....	78

5.1.1.8.1. As Configurações Possíveis para as Condições de Contorno do Sistema.....	78
5.1.1.8.2. As Configurações para a Prescrição das Condições de Contorno do Fluxo de Paridade Par (ϕ^+).....	79
5.1.1.8.3. As Configurações para a Prescrição das Condições de Contorno do Fluxo de Paridade Ímpar (ϕ^-).....	80
5.1.1.8.4. As Condições de Contorno do Fluxo de Paridade Par (ϕ^+) para cada Direção de Incidência de Radiação ($\underline{\Omega}_i$) no Plano (X,Y).....	80
5.1.1.9. A Solução do Problema Direto	85
5.2. A Investigação da Sensibilidade do Fluxo de Radiação (ϕ^+) Prescrevendo-se a Mesma Condição de Contorno para cada Variação da Posição da Não-Homogeneidade no Interior da Geometria Circular no Plano (x,y).....	85
5.2.1. A Malha Triangular de Elementos Finitos para a Geometria do Problema sem a Perturbação.....	87
5.2.2. As Malhas com a Perturbação e a Análise da Sensibilidade do Fluxo de Radiação perante a Variação de Posição da Não-Homogeneidade.....	88
5.3. A Investigação da Sensibilidade do Fluxo de Radiação (ϕ^+) para Diferentes Condições de Contorno Prescritas sendo Fixa a Posição da Não-Homogeneidade no Interior da Geometria Circular no Plano (x,y).....	110
5.3.1. A Prescrição das Condições de Contorno para Diferentes Direções de	

Incidência de Radiação (Ω_i) no Plano (x,y) na Investigação da Sensibilidade do Fluxo de Radiação (ϕ^+).....	110
5.3.2. A Malha Triangular de Elementos Finitos com a Posição da Não-Homogeneidade Fixada e a Análise da Sensibilidade do Fluxo de Radiação (ϕ^+) para as Diferentes Condições de Contorno Prescritas.....	112
5.4. A Investigação da Sensibilidade do Fluxo de Radiação (ϕ^+) para Diferentes Valores de Parâmetros sendo Fixas a Posição da Não-Homogeneidade no Interior da Geometria Circular no Plano (x,y) e as Condições de Contorno Prescritas.....	123
5.4.1. A Malha Triangular de Elementos Finitos com a Posição da Não-Homogeneidade Fixada.....	124
5.4.2. A Representação das Diferentes Configurações dos Valores de Parâmetros (σ_a, σ_s, k) e a Análise da Sensibilidade do Fluxo de Radiação (ϕ^+) Fixadas as Condições de Contorno Prescritas e a Posição da Não-Homogeneidade no Interior da Geometria Circular no Plano (x,y)	125
6. Conclusão e Trabalhos Futuros.....	136
Referências Bibliográficas.....	139
Apêndice.....	146

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A partir da equação de transporte de radiação é feito um pseudocódigo, cujo objetivo é adequá-lo a uma geometria de forma circular através do método dos elementos finitos com geração automática de malha triangular. A solução do sistema de equações diferenciais parciais é obtida por um programa que implementa computacionalmente este pseudocódigo. As condições de contorno prescritas para o problema são as condições de contorno generalizadas de Neumann. Desta forma, pode-se, então, calcular os fluxos normais de radiação. Neste trabalho serão analisados dois casos, para posterior comparação dos resultados: no primeiro deles, o caso referência, considera-se a geometria circular homogênea, isto é, sem a perturbação. No segundo caso é introduzida uma perturbação circular no interior do círculo principal. A influência desta perturbação nos valores de fluxo emergente do círculo principal é o objeto de estudo desta tese.

Detalhes da descrição da geometria e das condições de contorno prescritas para o problema: a fronteira do círculo principal é dividida em oito partes iguais, sendo cada eixo dessa divisão a representação de uma direção de incidência de radiação. A ilustração dessa geometria será feita mais adiante através de figuras. Para cada uma das oito regiões é prescrita a condição de contorno. É escolhida apenas uma dessas regiões com o fluxo de entrada não-nulo, ou seja, somente uma dentre essas oito regiões é

iluminada inicialmente e desta forma pode-se observar o comportamento do fluxo de radiação ao longo de sua passagem pela geometria estudada.

O desenvolvimento deste trabalho tem por objetivo investigar a sensibilidade dos valores de contorno (fluxo normal, Dirichlet, Neumann) a variações espaciais dos coeficientes de absorção e de difusão. O meio que está sendo considerado neste trabalho é absorvedor, com espalhamento isotrópico e sem fonte interna. Utiliza-se uma aproximação por ordenadas discretas para a equação de transporte de radiação. Faz-se uso da formulação de paridade, pois esta simplifica o problema devido às suas condições de simetria e é através desta formulação que se encontra o principal objeto de estudo deste trabalho, isto é, o fluxo de radiação e a sua análise.

Visa-se uma futura utilização dos resultados deste trabalho no contexto de reconstrução de parâmetros pela metodologia fonte-detetor, desenvolvida por Reis e Roberty [13].

A relevância desse trabalho se deve a importância em Engenharia da solução do problema de transporte de radiação em meios absorvedores, espalhadores e emissores, ou meios participantes. Como exemplo de aplicação dessa técnica pode-se citar a interação de partículas não carregadas em meios participantes com a sua utilização em tomografia computadorizada tanto para diagnóstico e tratamento em medicina quanto em ensaios não-destrutivos na indústria

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica onde são citados trabalhos [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] nos quais foram utilizadas várias técnicas que validam toda a formulação desenvolvida e os resultados obtidos neste trabalho.

No Capítulo 3 são introduzidos alguns conceitos preliminares de matemática [1, 8, 9] que são fundamentais para o desenvolvimento desse estudo, tais como o método dos elementos finitos (MEF), os Espaços de Funções - Espaços de Hilbert L_2 , H^1 e $H^{1/2}$, a formulação variacional, o problema de Neumann: condições de contorno natural e essencial e a construção e representação de uma triangulação T_h : malha triangular de elementos finitos.

No Capítulo 4 é desenvolvida a formulação matemática do problema de transporte [5, 6, 10, 12], na qual todos os conceitos utilizados para a construção do algoritmo computacional são baseados. Ao longo desse capítulo, nas suas subseções, são apresentadas as teorias, ou seja, os conceitos para casos mais gerais e sempre que necessário são feitas adaptações [2, 7, 11] e simplificações, de modo a facilitar a implementação computacional, para a descrição do modelo que se está estudando. Apresenta-se, primeiro, a equação de transporte de radiação estacionária a uma velocidade em meios bidimensionais: a equação linearizada de Boltzmann. A seguir faz-se a formulação matemática do problema direto e na sequência formula-se o problema de transporte com o método de ordenadas discretas. Nesta parte faz-se uma adaptação para o caso bidimensional no plano (x,y) . Dando continuidade à formulação matemática aproxima-se a equação de transporte por ordenadas discretas para o problema direto. Com o objetivo de facilitar a implementação do pseudocódigo que está sendo desenvolvido. Optou-se pela utilização da formulação de paridade da equação de transporte para o problema direto e por fim chegou-se a solução do problema direto.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados das várias simulações obtidas através

da implementação computacional do algoritmo desenvolvido. Na seção que inicia esse capítulo são feitas algumas considerações preliminares, e em seguida apresentam-se e discriminam-se os termos do algoritmo computacional do problema direto que são: descrição da geometria do problema e especificação da não-homogeneidade, geração automática da malha primitiva, dados de entrada, configuração inicial dos parâmetros, matrizes de seção de choque (a), matrizes de condutividade (c), termos de fonte (f), equação diferencial parcial (PDE), descrição das condições de contorno, com as suas configurações possíveis para todo o sistema e também separadas para os seguintes casos: para o fluxo de paridade par (ϕ^+), para o fluxo de paridade ímpar (ϕ^-) e também para o fluxo de paridade par (ϕ^+) para cada direção de incidência de radiação ($\underline{\Omega}_i$) no plano (x,y) , e a solução da equação diferencial parcial (PDE). Da segunda seção em diante são apresentadas as configurações e os resultados da investigação da sensibilidade do fluxo de radiação (ϕ^+), num total de três grupos de simulações. No primeiro prescreve-se a mesma condição de contorno para cada variação da posição da não-homogeneidade no interior da geometria circular no plano (x,y) e são obtidos os seguintes resultados: a malha triangular de elementos finitos para a geometria do problema sem a perturbação, as malhas com a perturbação e a análise da sensibilidade do fluxo de radiação perante a variação de posição da não-homogeneidade. No segundo grupo, a sensibilidade do fluxo de radiação (ϕ^+) é investigada prescrevendo-se condições de contorno para diferentes direções de incidência de radiação ($\underline{\Omega}_i$) e mantendo-se fixa a posição da não-homogeneidade no interior da geometria circular no plano (x,y) . São obtidos os seguintes resultados: a malha triangular de elementos finitos com a posição da não-homogeneidade fixada e a análise da sensibilidade do fluxo de radiação (ϕ^+) para as diferentes condições de contorno prescritas. No terceiro grupo, a

investigação da sensibilidade do fluxo de radiação (ϕ^+) é feita para diferentes valores de parâmetros (σ_a, σ_s, k), sendo fixas a posição da não-homogeneidade no interior da geometria circular no plano (x, y) e as condições de contorno prescritas. Obtém-se os seguintes resultados: a malha triangular de elementos finitos com a posição da não-homogeneidade fixada e a análise da sensibilidade do fluxo de radiação (ϕ^+) fixadas as condições de contorno prescritas e a dada geometria.

No Capítulo 6 são apresentadas a conclusão e sugestões para trabalhos futuros.

No apêndice são comparados os resultados obtidos entre a técnica utilizada nessa dissertação e o trabalho desenvolvido por NOH *et al.* [14].

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este trabalho faz a combinação do método dos elementos finitos estudado por JOHNSON [1] com o método de ordenadas discretas desenvolvido por LEWIS e MILLER [2]. Esta combinação híbrida de dois métodos é de longa data utilizada por LILLIE e ROBINSON [3] para solução da equação de transporte de nêutrons multigrupo com espalhamento linear. A formulação variacional do tipo Ritz-Galerkin apropriada ao método dos elementos finitos foi desenvolvida para um grupo de nêutrons por KAPER *et tal.* [4] que mostraram a equivalência entre a formulação de 2ª ordem e o problema de transporte de 1ª ordem.

O método de ordenadas discretas foi introduzido na Astrofísica por CHANDRASEKHAR [5] para soluções da equação de transferência radiativa, equivalente do ponto de vista matemático ao problema de transporte de nêutrons com um grupo.

A aplicação do método dos elementos finitos para problema de transporte de 1ª ordem em espaço e ângulo foi feita com sucesso pela primeira vez por DUDERSTADT e MARTIN [6]. Entretanto, o sistema de equações algébricas resultantes a ser computacionalmente resolvido é assimétrico, e de ordem proporcional a discretização e ao número de ordenadas discretas adotadas. Por outro lado, os

esquemas resultantes da implementação do método dos elementos finitos para a formulação variacional do problema de valor de contorno de 2ª ordem resultarão em uma matriz simétrica, banda, positivo definida e diagonal dominante, o melhor cenário para a adoção de métodos iterativos. A quadratura adotada neste trabalho é a bem conhecida quadratura produto [2, 7] desenvolvida para que em cada nível se tenha o mesmo número de ordenadas.

CAPÍTULO 3

PRELIMINARES MATEMÁTICAS

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos matemáticos fundamentais que são básicos para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, tais como o método dos elementos finitos (método de Galerkin), o espaço de dimensão finita no qual as funções estão definidas, a formulação variacional e as condições de contorno natural e essencial.

3.1.O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

O método dos elementos finitos é uma técnica geral para a construção de soluções aproximadas de problemas de valores de contorno. O método envolve dividir o domínio da solução em um número finito de subdomínios simples, os elementos finitos, usando conceitos variacionais para construir uma aproximação da solução sobre a coleção de elementos finitos. Devido a generalidade e riqueza de idéias que envolve o método, ele é usado com bastante sucesso na resolução de uma vasta quantidade de problemas em todas as áreas da Engenharia e da Física Matemática.

A idéia básica em qualquer método numérico para uma equação diferencial é discretizar o dado problema contínuo com muitos (infinitos) graus de liberdade para se obter um problema discreto ou um sistema de equações com somente finitos graus de

liberdade que podem ser resolvidos usando-se um computador.

O processo de discretização usando o método dos elementos finitos é iniciado pela reformulação da dada equação diferencial como um problema variacional equivalente. Para equações elípticas este problema variacional em casos básicos é um problema de minimização da forma:

Encontre $u \in V$ tal que $F(u) \leq F(v) \forall v \in V$, onde V é um dado conjunto de funções admissíveis e $F : V \rightarrow \Re$ é um funcional, ou seja, $F(v) \in \Re \forall v \in V$ com \Re denotando o conjunto de números reais. As funções v em V muitas vezes representam uma quantidade variando continuamente tal como um deslocamento em um corpo elástico, uma temperatura, etc.... $F(v)$ é a energia total associada com v e o problema de minimização corresponde a uma caracterização equivalente da solução da equação diferencial como a função em V que minimiza a energia total do sistema considerado. Em geral a dimensão de V é infinita, ou seja, as funções em V não podem ser descritas por um número finito de parâmetros, e deste modo, em geral, o problema de minimização não pode ser resolvido exatamente. Para se obter um problema que possa ser solucionado num computador, a idéia no MEF é substituir V por um conjunto V_h que consiste de funções simples que somente dependam de um número finito de parâmetros. Isto leva a um problema de minimização de dimensão finita da seguinte forma:

Encontre $u_h \in V_h$ tal que $F(u_h) \leq F(v) \forall v \in V_h$.

Este problema é equivalente a sistemas de equações lineares ou não-lineares. A expectativa, agora, é que a solução u_h do problema seja uma aproximação

suficientemente boa da solução u do problema de minimização original, isto é, da equação diferencial parcial original. Normalmente se escolhe V_h como sendo um subconjunto de V , ou em outras palavras $V_h \subset V$, ou seja, se $v \in V_h$ então $v \in V$, e neste caso o problema de minimização de dimensão finita corresponde ao método clássico de Ritz-Galerkin.

O aspecto especial de um MEF como o particular método de Ritz-Galerkin é o fato de que as funções em V_h sejam polinômios contínuos por parte.

Pode-se também começar de formulações variacionais mais gerais que o problema de minimização, o chamado método de Galerkin, que é o método que será usado neste trabalho.

Para resolver aproximadamente uma dada equação diferencial parcial ou integral usando o MEF, deve-se seguir basicamente os seguintes passos: 1º) formulação variacional do problema dado; 2º) discretização usando o MEF: construção de um espaço de dimensão finita; 3º) solução do problema discreto; 4º) implementação do método em um computador: programação.

Existem formulações variacionais diferentes que podem ser usadas dependendo por exemplo da escolha de variáveis dependentes. A escolha do subespaço de dimensão finita V_h , que é essencialmente a escolha do elemento de discretização finito, elemento finito, é influenciada pela formulação variacional, pela exigência de acurácia, por propriedades de regularidade da solução exata e etc....

Para se resolver o problema discreto, necessita-se de algoritmos otimizados e/ou

métodos para a solução numérica de sistemas de equações lineares ou não-lineares.

A vantagem do MEF é que geometrias complicadas, condições de contorno gerais e propriedades materiais variáveis ou não-lineares podem ser manipulados de uma maneira relativamente fácil. Além disso, a estrutura clara e a versatilidade do MEF torna possível a construção de softwares para aplicações e também deve-se levar em consideração a grande quantidade de códigos de elementos finitos disponíveis. O MEF tem uma fundamentação teórica sólida que proporciona um aumento de confiança e em muitos casos possibilita a análise matemática e a estimativa de erro da solução aproximada pelo método do elemento finito.

3.2. ESPAÇOS DE FUNÇÕES — ESPAÇOS DE HILBERT

L_2 , H^1 e $H^{1/2}$

Quando são dadas as formulações variacionais dos problemas de valores de contorno para as equações diferenciais parciais, é natural, do ponto de vista matemático, e muito usual trabalhar-se com funções de espaços V que sejam ligeiramente maiores, ou seja, que contenham um pouco mais de funções que os espaços de funções contínuas com derivadas contínuas por partes.

Serão recordados, agora, alguns conceitos básicos de álgebra linear.

Se V é um espaço linear, então diz-se que L é uma forma linear em V se:

$L : V \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $L(v) \in \mathbb{R} \forall v \in V$ e L é linear $\forall v, w \in V$ e $\beta, \theta \in \mathbb{R}$.

$$L(\beta v + \theta w) = \beta L(v) + \theta L(w).$$

Pode-se dizer que $a(.,.)$ é uma forma bilinear em $V \times V$ se $a : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$, ou seja, $a(v, w) \in \mathfrak{R} \ \forall v, w \in V$ e $a(.,.)$ é linear em cada argumento, isto é, $\forall u, v, w \in V$ e $\beta, \theta \in \mathfrak{R}$ têm-se:

$$a(\beta u + \theta v, w) = \beta a(u, w) + \theta a(v, w)$$

$$a(u, \beta v + \theta w) = \beta a(u, v) + \theta a(u, w)$$

A forma bilinear $a(.,.)$ em $V \times V$ é dita ser simétrica se:

$$a(v, w) = a(w, v) \ \forall v, w \in V.$$

A forma bilinear simétrica $a(.,.)$ em $V \times V$ é dita ser um produto escalar em V se:

$$a(v, v) > 0 \ \forall v \in V \text{ e } v \neq 0.$$

A norma $\|.\|_a$ associada ao produto escalar é definida por:

$$\|v\|_a = (a(v, v))^{\frac{1}{2}}, \ \forall v \in V.$$

Além disso, se $\langle ., . \rangle$ é um produto escalar com a correspondente norma $\|.\|$, então têm-se a desigualdade de Cauchy.

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Tendo sido lembradas algumas propriedades de álgebra linear, pode-se prosseguir com a descrição do espaço de funções.

A seguir serão introduzidos os espaços de Hilbert L_2 , H^1 e $H^{1/2}$, cujo terceiro é o

espaço no qual estão definidas as funções das condições de contorno. No segundo estão definidas as funções da equação diferencial parcial que são utilizadas nesse trabalho. Esses espaços são muito usuais nas formulações variacionais dos problemas de valores de contorno.

Serão definidos, a seguir, espaços de funções para um domínio unidimensional.

Seja $I = (a, b)$ um intervalo no qual estão definidas as funções quadrado integráveis.

Então:

$$L_2 = \left\{ v : v \text{ é definido em } I \text{ e } \int_I v^2 dx < \infty \right\}.$$

O espaço $L_2(I)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(v, w)_{L_2(I)} = \int_I vw \, dx,$$

e a correspondente norma:

$$\|v\|_{L_2(I)} = \left(\int_I v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (v, v).$$

Pela desigualdade de Cauchy,

$$|(v, w)| \leq \|v\|_{L_2(I)} \|w\|_{L_2(I)},$$

pode-se ver que (v, w) é bem definida, isto é, a integral (v, w) existe se $v, w \in L_2(I)$.

Tendo sido definido o espaço L_2 pode-se, agora, definir o espaço H^1 . Este espaço consiste de funções v definidas em I , as quais juntas com as suas primeiras derivadas,

v^* , são quadrado integráveis, isto é, pertencem a L_2 .

$$H^1(I) = \{v : v \text{ e } v^* \in L_2\}, \text{ } v \text{ e } v^* \text{ são definidos em } I \text{ e } \int_I [v^2 + (v^*)^2] dx < \infty.$$

Equipa-se este espaço com o produto escalar

$$(v, w)_{H^1(I)} = \int_I (vw + v^*w^*) dx,$$

e a correspondente norma

$$\|v\|_{H^1(I)} = \left(\int_I [v^2 + (v^*)^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Espaços de funções para domínios bidimensionais ou tridimensionais:

Sendo Ω um domínio R^d , para $d = 2$ ou 3 , limitado por uma fronteira $\partial\Omega$.

Define-se:

$$L_2(\Omega) = \left\{ v : v \text{ é definido em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} v^2 dx < \infty \right\},$$

$$H^1(\Omega) = \{v : v \text{ e } v^* \in L_2(\Omega)\}, \text{ } v \text{ e } v^* \text{ são definidos em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} [v^2 + (v^*)^2]$$

$dx < \infty$.

equipa-se esses espaços com os seguintes produtos escalares e suas normas respectivamente.

$$(v, w)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} vw dx,$$

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (v, v),$$

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (vw + v'w') dx,$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} [v^2 + (v')^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

É possível definir, para contornos suaves, espaços fracionários que contenham funções que sejam definidas na fronteira $\partial\Omega$ do domínio Ω .

$$H^s(\partial\Omega), \text{ para } s \geq 0.$$

Esses espaços utilizam as derivadas normais das funções em $\partial\Omega$.

$$\frac{\partial^j u(\underline{x})}{\partial n_j}, \text{ para } \underline{x} \in \partial\Omega \text{ e } 0 \leq j \leq m-1.$$

Existe uma importante relação entre os espaços $H^m(\Omega)$, para $m > 0$, de funções definidas em um domínio limitado por uma fronteira e os espaços de fronteira $H^s(\partial\Omega)$.

O mapeamento na fronteira é feito por:

$$H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-j-1/2}(\partial\Omega), \text{ para } m > 0 \text{ e } 0 \leq j \leq m-1.$$

No trabalho em questão $m = 1$, de modo que o espaço de funções do domínio é $H^1(\Omega)$. Consequentemente o espaço de funções da fronteira $\partial\Omega$ é $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Fica então estabelecido que os espaços de funções nos quais são definidos o problema diferencial e as condições de contorno, respectivamente, são:

$$H^1(\Omega) \text{ e } H^{1/2}(\partial\Omega).$$

3.3.FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Dado um problema diferencial com sua devida condição de contorno, pode-se buscar uma solução aproximada para esse problema através da formulação variacional. Utiliza-se uma função teste a fim de se obter uma solução para a equação ou um sistema de equações em todo o domínio.

A formulação variacional é dita ser uma formulação fraca do problema diferencial e a sua solução é dita ser uma solução fraca desse mesmo problema.

A formulação variacional será utilizada na próxima seção através de um exemplo.

3.4.PROBLEMA DE NEUMANN: CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAL E ESSENCIAL

Nesta seção serão discutidas, com um exemplo genérico, as condições de contorno de Neumann e de Dirichlet.

Dado o seguinte problema diferencial

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega,$$

com a seguinte condição de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ em } \partial\Omega.$$

onde Ω é o domínio cercado pelo contorno $\partial\Omega$ e $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada normal externa a esse contorno.

Esse problema é chamado de problema de Neumann. A condição de contorno é uma condição de Neumann, enquanto que a situação $u = u_0$ em $\partial\Omega$ é considerada previamente como a condição de Dirichlet. Em Mecânica ou Física a condição de Neumann corresponde a uma dada força ou fluxo g em $\partial\Omega$.

Pode-se dar a esse problema diferencial à seguinte formulação variacional:

$$a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle, \forall v \in H^1(\Omega),$$

onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx,$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

$$\langle g, v \rangle = \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma.$$

essa formulação variacional é equivalente a seguinte formulação de minimização:

Encontre $u \in H^1(\Omega)$ tal que $F(u) \leq F(v) \, \forall v \in H^1(\Omega)$, onde

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) - \langle g, v \rangle.$$

A seguir será mostrada essa equivalência.

Para ver que

$$a(u, v) = (f, v) + (g, v),$$

dado o problema diferencial

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ em } \partial\Omega.$$

Deve-se multiplicar

$$-\Delta u + u = f$$

pela função teste $v \in H^1(\Omega)$ e integrar em Ω .

Faz-se, agora, uma breve recordação do teorema da divergência

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A \, dx = \int_{\partial\Omega} A \cdot n \, d\Gamma,$$

onde, $A = A(A_1, A_2, A_3)$ é uma função vetor definida em Ω ,

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3},$$

$n = n(n_1, n_2, n_3)$ é a normal unitária externa a $\partial\Omega$,

dx é o elemento de volume, no caso tridimensional, em \mathfrak{R}^3 e $d\Gamma$ é o elemento de comprimento de arco ao longo de $\partial\Omega$.

Um exemplo num caso bidimensional, cujo $A = (vw, 0)$ e $A = (0, vw)$, encontra-se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w \, dx + \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} vw n_i \, d\Gamma, \text{ para } i = 1, 2.$$

Denotando por ∇v e ∇w os gradientes de v e w , ou seja,

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right),$$

e

$$\nabla w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \right),$$

obtêm-se da equação integral acima a seguinte fórmula de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx &\equiv \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right] d\Gamma - \int_{\Omega} v \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} v \Delta w \, dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} v \Delta w \, dx,$$

onde

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \text{ é a derivada na direção normal externa ao contorno } \partial\Omega \text{ e}$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}.$$

Voltando ao problema diferencial proposto anteriormente na página 18 e de acordo com a fórmula de Green, sendo $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ em $\partial\Omega$, tem-se:

$$\begin{aligned} (f, v) &= \int_{\Omega} (-\Delta u + u)v \, dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx \\ &= - \langle g, v \rangle + \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx \\ &= a(u, v) - \langle g, v \rangle. \end{aligned}$$

Rearrmando-se os termos da expressão anterior, obtém-se o problema variacional.

Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução desse problema.

$$a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle,$$

que deve satisfazer o problema diferencial

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ em } \partial\Omega.$$

Usando a fórmula de Green novamente, encontra-se de $a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle$, para uma solução u suficientemente regular, que:

$$(f, v) + \langle g, v \rangle = a(u, v) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} [-\Delta u + u]v \, dx.$$

Explicitando-se os termos do lado esquerdo na forma integral e reordenando-os,

segue que:

$$\int_{\Omega} [-\Delta u + u - f]v \, dx + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial n} - g \right] v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Agora, como a equação anterior converge em particular para todo $v \in H^1(\Omega)$ e para essas funções o termo de contorno desaparece, pode-se concluir que $-\Delta u + u = f$ em Ω converge, isto é,

$$-\Delta u + u - f = 0 \text{ em } \Omega.$$

Então $\int_{\Omega} [-\Delta u + u - f]v \, dx + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial n} - g \right] v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$ é reduzida para

$$\int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial n} - g \right] v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Variando v sobre $H^1(\Omega)$, o que significa que v irá variar livremente em $\partial\Omega$, finalmente obtêm-se

$$\frac{\partial u}{\partial n} - g = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

e desta forma segue que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ em } \partial\Omega.$$

Nota-se que a condição de Neumann $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ em } \partial\Omega \right)$ não aparece explicitamente na formulação variacional, a solução u do problema variacional é somente exigida pertencer a $H^1(\Omega)$ e não é explicitamente exigido que satisfaça $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ em $\partial\Omega$. Essa condição de contorno é em vez disso implicitamente contida em

$$a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Variando primeiro v dentro de Ω , obtendo $-\Delta u + u = f$ em Ω e então $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ em $\partial\Omega$ pela variação de v no contorno. A condição de contorno que não tem que ser explicitamente imposta na formulação variacional, é dita ser a condição de contorno natural. Isto está em contraste com a chamada condição de contorno essencial, como a condição de Dirichlet $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Pode-se a partir de agora formular um MEF para o problema de Neumann.

Sendo T_h a triangulação de Ω e definindo

$V_h = \{v : v \text{ é contínuo em } \Omega, v|_K \text{ é linear } \forall K \in T_h\}$, onde $v|_K$ denota a restrição de v para K , isto é, as funções definidas em K , sendo K os triângulos que formam a malha, estão de acordo com v em K .

Onde a triangulação é representada por $T_h = \{K_1, K_2, \dots, K_M\}$,

o domínio por $\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K = K_1 \cup K_2 \dots \cup K_M$

e o parâmetro de malha $h = \max_{K \in T_h} \{diâmetro(K)\}$, com o $diâmetro(K)$ = o lado mais longo de K .

Como parâmetros para descrever as funções em V_h pode-se escolher os valores nos nós, agora também incluindo os nós no contorno $\partial\Omega$.

Nota-se que as funções em V_h não são obrigadas a satisfazer nenhuma condição de contorno e que $V_h \subset H^1(\Omega)$. A partir do método variacional $a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle$

$\forall v \in H^1(\Omega)$, tem-se, agora, o seguinte MEF para o problema diferencial

$$-\Delta u + u - f = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ em } \partial\Omega:$$

Encontre $u_h \in V_h$ tal que:

$$a(u_h, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle \quad \forall v \in V_h.$$

Esse problema tem solução u_h única, que pode ser determinada resolvendo-se um sistema de equações lineares positivo definido e simétrico.

3.5. CONSTRUÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE UMA TRIANGULAÇÃO T_h : MALHA TRIANGULAR DE ELEMENTOS FINITOS

Um programa para triangulação automática de um dado domínio pode ser baseado na idéia do refinamento sucessivo de uma triangulação inicial. Por exemplo, pode-se refinar cada triângulo conectando os pontos de cada lado, tal como está representado na figura 3.1, abaixo.

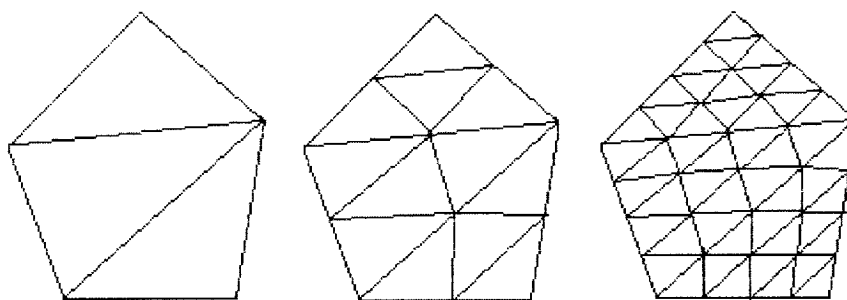


Figura 3.1 - Refinamento Sucessivo de uma Malha Triangular

Um processo de triangulação deste tipo leva a malhas quase-uniformes, cujos triângulos têm essencialmente o mesmo tamanho em todas as partes da malha de Ω .

Se o contorno de Ω for curvo, esta técnica deve ser modificada perto dessa fronteira.

Muitas vezes é desejável poder construir triangulações nas quais os tamanhos dos triângulos variem consideravelmente em diferentes partes de Ω . De fato, podem ser necessários triângulos menores em regiões cuja solução exata varie ligeiramente ou onde certas derivadas da solução exata sejam grandes.

Uma possível estratégia de refinamento é mostrada a seguir na figura 3.2. Nela diferentes redes primitivas de triângulos são refinadas diferentemente de acordo com os elementos de diferentes tamanhos.

Para se representar uma dada triangulação, pode-se proceder da seguinte forma:

Sendo a região com a linha pontilhada, na figura da direita, chamada de zona de transição entre os elementos de tamanhos diferentes.

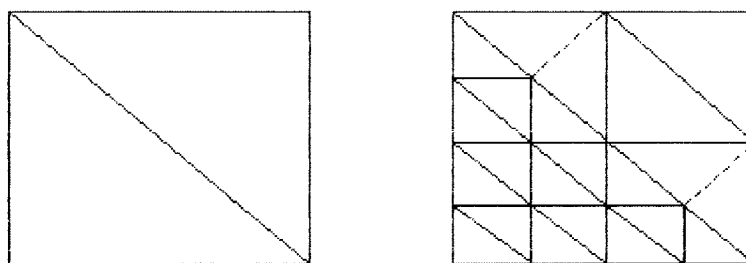


Figura 3.2-Refinamento Não-Homogêneo

Sendo N_i , para $i = 1, \dots, M$ e K_n , para $n = 1, \dots, N$, as enumerações dos vértices (nós) e dos triângulos de T_h respectivamente. Então T_h pode ser especificado usando

duas matrizes, $Z(2,M)$ e $T(3,N)$, onde $Z(j,i)$, com $j = 1,2$ e $i = 1,\dots,M$, são as coordenadas dos vértices N_i e $T(j,n)$, com $j = 1,2,3$ e $n = 1,\dots,N$, são os números dos vértices de cada triângulo que é representado por K_n . A figura 3.3, a seguir, representa uma ilustração de como pode ser feita a enumeração dos elementos finitos numa malha triangular.

Os números que estão indicados por um círculo representam os triângulos enquanto que os demais são os seus vértices.

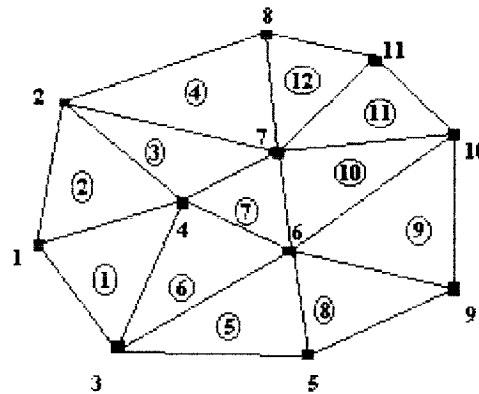


Figura 3.3 - Elementos Finitos

Neste caso, pode-se montar a matriz $T(j,n)$ da seguinte maneira:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 4 & 6 & 6 & 9 & 7 & 10 & 8 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 6 & 6 & 7 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 \end{bmatrix},$$

onde cada coluna representa um triângulo e os elementos de cada uma dessas colunas representam a numeração dos vértices desses triângulos

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE TRANSPORTE

Neste capítulo será desenvolvida a formulação matemática utilizada neste trabalho, a qual é dada pela equação de transporte bidimensional monoenergética e estacionária, também chamada de equação linearizada de Boltzmann, que será discretizada pelo método de ordenadas discretas a fim de se obter a aproximação angular dessa equação, o que resultará num sistema de equações diferenciais que serão resolvidas através da formulação de elementos finitos. A formulação variacional para o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem com condições de fronteira generalizadas de Neumann permite uma fácil implementação do método dos elementos finitos com malha triangular e espaço de aproximação de 1ª ordem.

4.1. A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE RADIAÇÃO ESTACIONÁRIA A UMA VELOCIDADE EM MEIOS BIDIMENSIONAIS: EQUAÇÃO LINEARIZADA DE BOLTZMANN

A teoria de transporte tornou-se um tópico extremamente importante na Física e na

Engenharia, pois os processos de transporte de partículas aparecem em uma grande variedade de fenômenos físicos.

A formulação matemática da teoria de transporte monoenergética e de partículas não carregadas, ou de radiação eletromagnética, em um meio absorvedor, emissor e espalhador, ou seja, um meio participante, é dada pela equação de transporte, ou equação linearizada de Boltzmann, como também é chamada.

A equação de transporte, considerando as dependências temporal, energética, angular e espacial para meios tridimensionais é mostrada a seguir

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial \phi(\underline{x}, E, \underline{\Omega}, t)}{\partial t} + \underline{\Omega} \cdot \nabla \phi(\underline{x}, E, \underline{\Omega}, t) + \sigma_t(\underline{x}, E) \phi(\underline{x}, E, \underline{\Omega}, t) = \\ = \int_{4\pi} \sigma_s(\underline{x}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}) \phi(\underline{x}, E', \underline{\Omega}', t) d\Omega + S(\underline{x}, E, \underline{\Omega}, t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde:

$\phi(\underline{x}, E, \underline{\Omega}, t)$ é o fluxo angular de partículas neutras, ou intensidade de radiação,

$\sigma_t(\underline{x}, E) = \sigma_a(\underline{x}, E) + \sigma_s(\underline{x}, E, \underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega})$ é o coeficiente de extinção total,

$\sigma_a(\underline{x}, E)$ é o coeficiente de absorção,

$\sigma_s(\underline{x}, E, \underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega})$ é o coeficiente de espalhamento,

$S(\underline{x}, E, \underline{\Omega}, t)$ é a fonte de radiação distribuída no interior do meio,

\underline{x} é a variável espacial,

$\underline{\Omega}$ é a direção angular de propagação da radiação,

t é a variável temporal,

E é a energia de radiação e

V é a magnitude da velocidade de radiação.

Como o sistema em estudo não considera a dependência espectral, ou seja, é monoenergético, a dependência da energia E desaparece para cada função, e desta forma tem-se a formulação da equação de transporte a uma velocidade. Considerando também que o sistema é estacionário, a variável temporal de cada função é desconsiderada e com isso a derivada parcial com relação ao tempo, no primeiro termo da equação (4.1) é nula e levando em conta que o meio é bidimensional, a equação de transporte (4.1) pode ser simplificada, resultando em

$$\nabla \cdot (\underline{\Omega} \phi(\underline{x}, \underline{\Omega})) + \sigma_t(\underline{x}) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}) = S(\underline{x}, \underline{\Omega}), \quad (4.2)$$

em

$$\{V \in \mathbb{R}^2, \underline{\Omega} \in 2\pi\},$$

onde

$$S(\underline{x}, \underline{\Omega}) = \int_{2\pi} \sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}') d\Omega' + q(\underline{x}, \underline{\Omega}), \quad (4.3)$$

$\phi(\underline{x}, \underline{\Omega})$ é a intensidade de radiação monocromática, sem dependência espectral, ou o fluxo angular de partículas a uma velocidade no ponto \underline{x} , e na direção de propagação

de radiação $\underline{\Omega}$, sendo absolutamente contínua na direção $\underline{\Omega}$ e mensurável na direção perpendicular $\underline{\Omega}^\perp$, $S(\underline{x}, \underline{\Omega})$ representa um termo fonte cuja a primeira parcela da equação (4.3) significa a contribuição da radiação que vem da direção $\underline{\Omega}'$ a qual é espalhada na direção $\underline{\Omega}$, e q representa uma fonte de radiação interna do meio. O coeficiente de espalhamento será reescrito a seguir de forma a explicitar as dependências espacial e angular.

$$\sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}) = \sigma_s(\underline{x}) \frac{\lambda(\underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega})}{2\pi}, \quad (4.4)$$

onde $\lambda(\underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega})$ é denominada função de fase, sendo usualmente representada por uma expansão em uma série de polinômios de Legendre.

As coordenadas espaciais e angular no sistema cartesiano são escritas como

$$\underline{x} = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3. \quad (4.5)$$

Porém, como no problema em questão não há a dependência na coordenada z , ela será desprezada, pois o interesse nesse trabalho é a exploração da rotação do sistema de coordenadas no plano (x, y) , de modo que as coordenadas espaciais são as coordenadas do plano (x, y) representadas pela equação (4.6).

$$\underline{x} = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2, \quad (4.6)$$

e as coordenadas angulares podem ser representadas pela equação (4.7).

$$\underline{\Omega} = \sin \eta \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \eta \sin \varphi \hat{e}_2 + \cos \eta \hat{e}_3. \quad (4.7)$$

onde η é o ângulo azimutal e φ o ângulo polar, conforme a figura (4.1) a seguir.

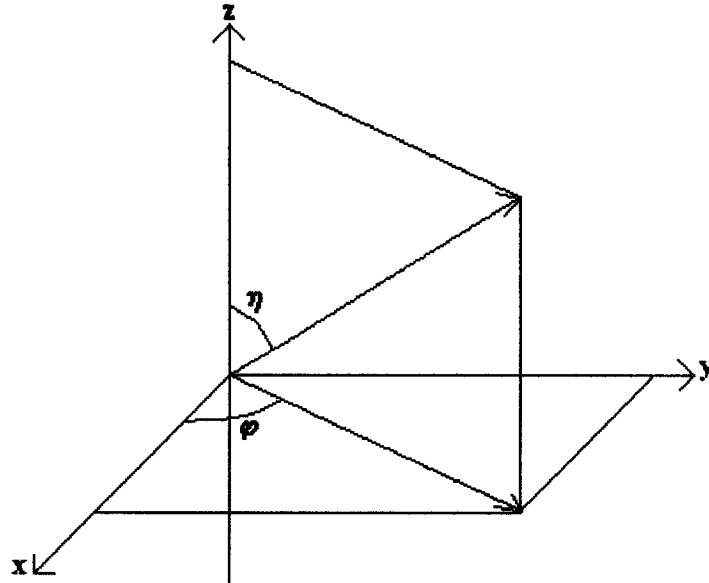


Figura 4.1 - Sistema de Coordenadas Cartesianas 3D

Desde que, como veremos mais adiante, iremos trabalhar somente com a projeção de $\underline{\Omega}$ no plano (x,y) , podemos fazer, sem a perda da generalidade, a formulação do problema direto com $\underline{\Omega}$ também no plano (x,y) , isto é,

$$\underline{\Omega} = \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2. \quad (4.8)$$

Sempre será mencionado, para efeito de esclarecimento, a utilização de $\underline{\Omega}$ também com a dependência azimutal η ou o seu uso somente com a dependência polar φ .

4.2. A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DIRETO

Quando são conhecidas a geometria do meio, assim como suas propriedades

materias, o termo fonte, as condições de contorno e, para o caso com dependência temporal, a condição inicial, tem-se o problema direto, e desta forma é possível calcular a intensidade da radiação, ou fluxo angular de partículas, em todo o meio e em qualquer instante de tempo.

Neste trabalho será explorada a geometria circular no plano (x,y) como mostra a figura (4.2) abaixo:

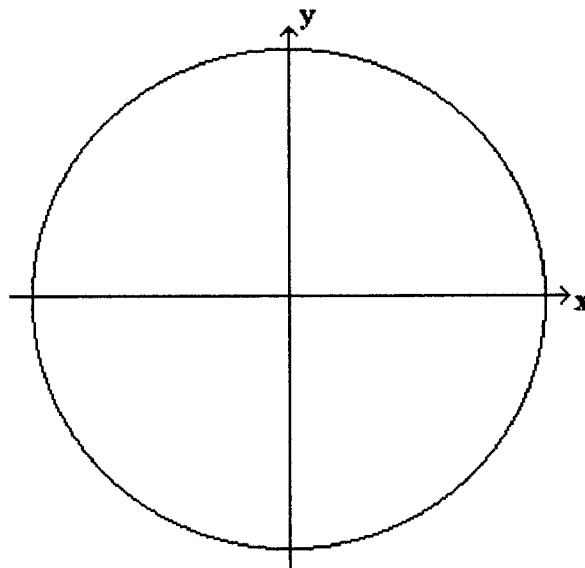


Figura 4.2 - Sistema de Coordenadas Cartesianas 2D

Para ilustra melhor o problema em questão, a figura (4.3) representa as quatro direções (por questão de simetria do problema só será necessária a definição dessas quatro direções) de entrada de radiação nas quais o problema está definido e a tabela (4.1) mostra os valores dos ângulos polares φ_i correspondentes a essas quatro direções, com relação ao sistema de coordenadas cartesiano.

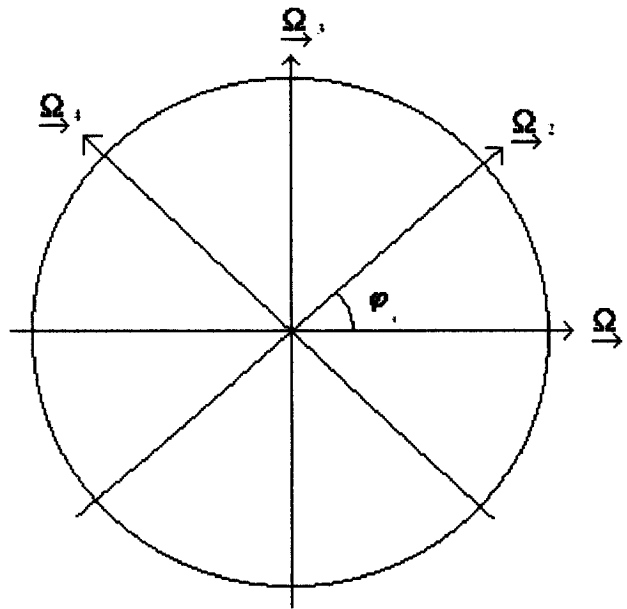


Figura 4.3 - Direções de Incidência de Radiação

φ_i	$\underline{\Omega}_i$
0	$\underline{\Omega}_1$
$\frac{\pi}{4}$	$\underline{\Omega}_2$
$\frac{\pi}{2}$	$\underline{\Omega}_3$
$\frac{3\pi}{4}$	$\underline{\Omega}_4$

Tabela 4.1 - Ângulos de Incidência de Radiação

A figura (4.4), a seguir, mostra a geometria particionada do domínio. Nela vê-se que o domínio foi subdividido em duas regiões devido a simetria do problema em estudo, onde a primeira, Γ_i^- , é chamada de incidente e a segunda, Γ_i^+ , de emergente. É devido a essa questão da simetria que não são necessárias oito direções para descrever a entrada da radiação no sistema, o que facilita muito o desenvolvimento deste trabalho.

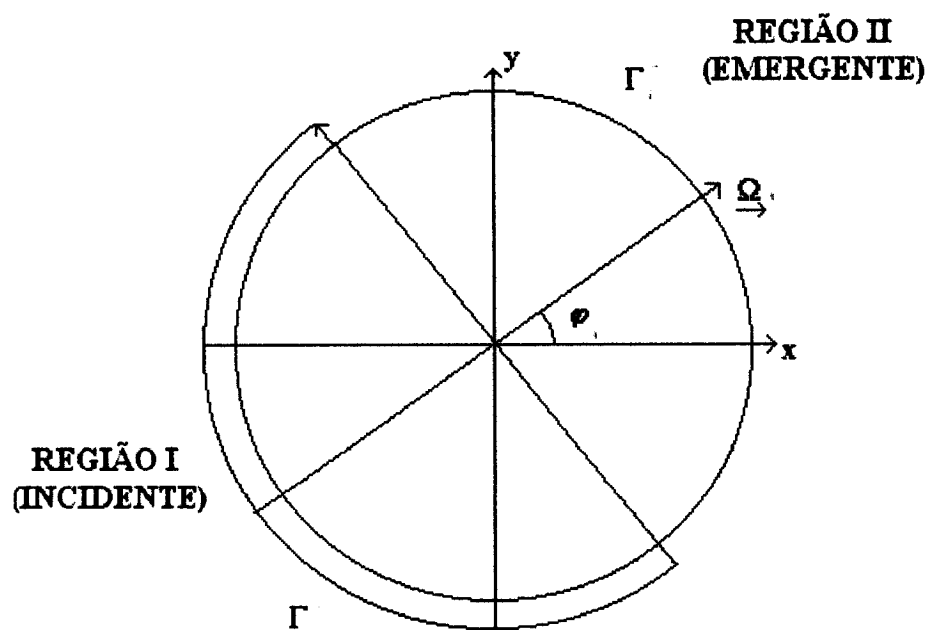


Figura 4.4 - Explicitando as Regiões Incidente e Emergente

Tendo sido especificada a geometria do problema, escreve-se, agora, a equação de transporte e as devidas condições de contorno e dessa forma tem-se a caracterização da formulação matemática do problema direto.

A equação (4.2) em conjunto com as suas condições de contorno dão a formulação do problema direto cujo objetivo é o de calcular o fluxo de partículas, ou intensidade da radiação. A seguir serão escritas as condições de contorno e desta forma estará completa a descrição do problema direto.

As condições de contorno são de fundamental importância para o cálculo do fluxo de partículas, ou intensidade da radiação. A condição de fronteira que será usada nesse problema é a chamada condição de contorno generalizada de Neumann, pois nesta pode-se determinar com precisão a direção com a qual a radiação entra no meio material de acordo com a direção normal externa a superfície do problema. Antes, porém, será necessário definir um novo sistema de coordenadas cartesianas para as

quatro direções, conforme mostrado na figura (4.3), nas quais o problema foi definido. Através desse novo sistema de coordenadas cartesianas será possível identificar se a radiação está entrando pela região *I*, incidente, ou se está entrando pela região *II*, emergente, de acordo com a ilustração da figura (4.4).

As figuras (4.5 – 6) mostram respectivamente o novo sistema de coordenadas cartesianas para o plano (x_i, y_i) , de acordo com a dependência do ângulo polar φ_i , com relação ao sistema antigo de coordenadas, (x, y) , de forma a diferenciar as regiões *I* e *II* e o vetor normal externo a superfície em estudo juntamente com a sua dependência angular, θ , em relação a aquele sistema .

Utiliza-se até o final dessa seção somente a projeção de $\underline{\Omega}$ no plano (x, y) .

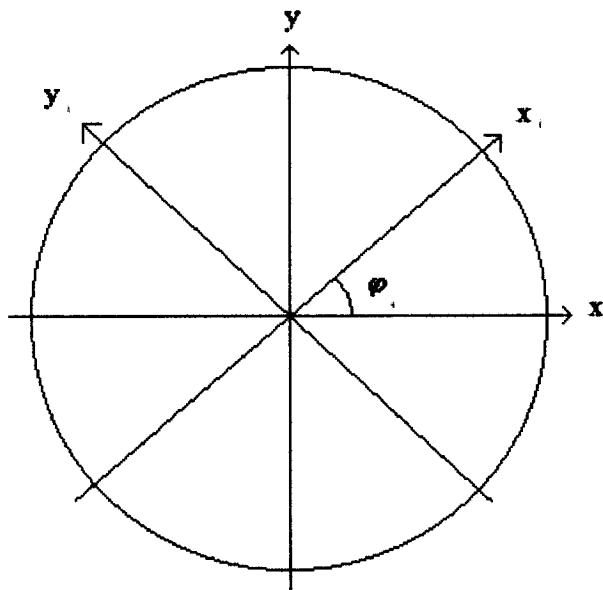


Figura 4.5 - Novo Sistema de Coordenadas 2D

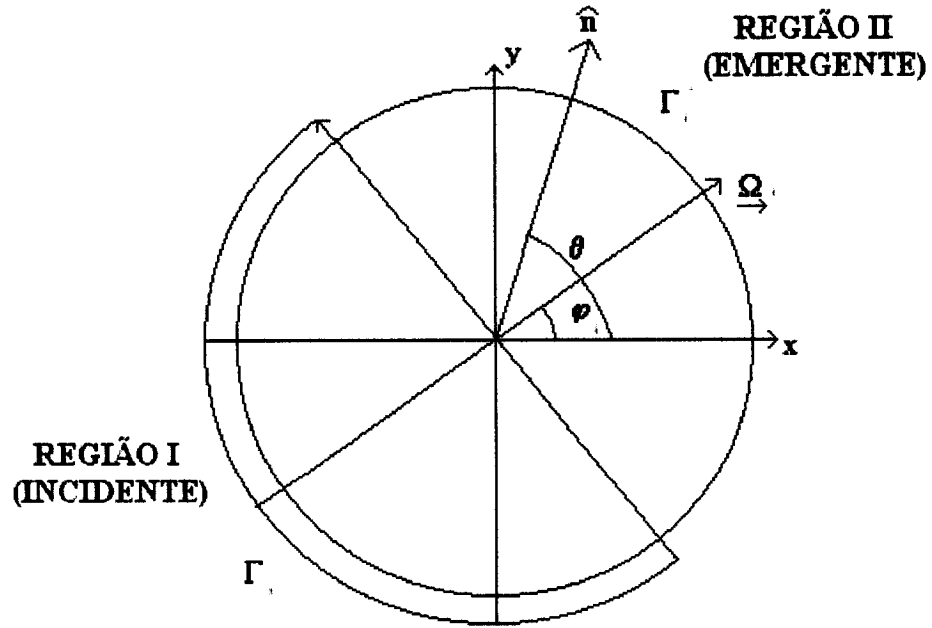


Figura 4.6 - Explicitando o Ângulo do Vetor Normal

O novo sistema de coordenadas cartesianas é definido a seguir

$$x_i = x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i \quad (4.9)$$

e

$$y_i = -x \sin \varphi_i + y \cos \varphi_i, \quad (4.10)$$

com

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (4.11)$$

onde R representa o raio do círculo.

A região incidente da direção i é definida abaixo através da coordenada x_i :

$$x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i = x_i \leq 0 \Rightarrow (x/y \leq -\tan \varphi_i), \quad (4.12)$$

A região emergente da direção i também é definida através da coordenada x_i :

$$x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i = x_i \geq 0 \Rightarrow (x/y \geq -\tan \varphi_i), \quad (4.13)$$

A seguir será definido o vetor normal, \hat{n} , que aponta sempre para a parte externa da superfície do círculo.

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 = v_1(\theta) \hat{e}_1 + v_2(\theta) \hat{e}_2. \quad (4.14)$$

Também será necessário calcular o produto escalar entre $\underline{\Omega}_i$ e $\hat{n}(x,y)$, pois dessa forma tem-se a direção correta do fluxo ponderado pela direção normal.

$$\underline{\Omega}_i \cdot \hat{n} = \cos \theta \cos \varphi_i + \sin \theta \sin \varphi_i = \cos(\theta - \varphi_i) = \sum_{k=1}^2 \omega_{i,k} v_k. \quad (4.15)$$

As projeções no eixo xy , levando-se em consideração o ângulo θ , relativo ao vetor normal, \hat{n} , serão válidas se $x^2 + y^2 = R^2$.

$$x = R \cos \theta \quad (4.16)$$

e

$$y = R \sin \theta, \quad (4.17)$$

Além disso também pode-se chegar a uma outra relação que envolva as componentes x , y , φ_i e θ , já que relacionando (4.12 – 13) com (4.16 – 17) chega-se às seguintes inequações:

$$\frac{x}{y} \leq -\tan \varphi_i \Leftrightarrow \cos(\theta - \varphi_i) \leq 0 \quad (4.18)$$

e

$$\frac{x}{y} \geq -\tan \varphi_i \Leftrightarrow \cos(\theta - \varphi_i) \geq 0. \quad (4.19)$$

Agora, pode-se definir as condições de contorno para o problema direto.

$$\text{Se (4.11) e (4.12)} \Rightarrow \phi_i^I(x, y) = \phi_{i,in}^I(x, y) \quad (4.20)$$

e

$$\text{Se (4.11) e (4.13)} \Rightarrow \phi_i^{II}(x, y) = \phi_{i,in}^{II}(x, y). \quad (4.21)$$

onde os índices I e II representam as regiões incidente e emergente para as quais os fluxos foram prescritos, os quais são indicados pelos índices in , e ponderando esses fluxos pela direção normal têm-se agora as seguintes condições de contorno:

$$\text{Se (4.11) e (4.12)} \Rightarrow \phi_i^I(x, y) \underline{\Omega}_i \cdot \hat{n} = \phi_{i,in}^I(x, y) \cos(\theta - \varphi_i) \quad (4.22)$$

e

$$\text{Se (4.11) e (4.13)} \Rightarrow \phi_i^{II}(x, y) \underline{\Omega}_i \cdot \hat{n} = \phi_{i,in}^{II}(x, y) \cos(\theta - \varphi_i). \quad (4.23)$$

Desta forma conclui-se a formulação do problema direto que é dado pelas equações (4.2 – 3) e pelas condições de contorno (4.22 – 23). Porém, antes de resolver o problema direto será necessária a discretização da equação de Boltzmann, equação (4.2 – 3), o que será feito na seção seguinte.

4.3. A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

DE TRANSPORTE COM O MÉTODO DE ORDENADAS DISCRETAS

A complexidade das equações que descrevem os processos de transporte de partículas forçam a implementação de métodos numéricos de solução. Tais métodos procuram introduzir aproximações que convertam a forma integrodiferencial da equação de transporte em um sistema de equações algébricas que são mais apropriadas para serem resolvidas por um computador.

O procedimento mais direto é o de aproximações por ordenadas discretas no qual a variável dependente na equação de transporte $\phi(\underline{x}, \underline{\Omega}, t)$ é substituída por um conjunto discreto de valores em um conjunto discreto de pontos $(\underline{x}_k, \underline{\Omega}_m, t_n)$. As derivadas e as integrais que aparecem na equação de transporte também devem ser substituídas pela correspondente representação discreta usando-se diferenças finitas e métodos de integrações numéricas. Desta forma chega-se a um conjunto de equações algébricas para a representação discreta da variável dependente.

No método de ordenadas discretas a variável angular é discretizada em um pequeno número de direções, ou raios, então a equação de transporte de partículas é escrita para cada uma delas.

As aproximações são feitas pelo método S_N geral a partir da equação de transporte. O domínio angular, $\underline{\Omega} \in S^2 = 4\pi$ (no caso tridimensional, no caso bidimensional $\underline{\Omega} \in S^1 = 2\pi$), é discretizado em K direções, ou seja,

$\underline{\Omega} \in \{\underline{\Omega}_k\}$ com $k = 1, 2, \dots, K$,

portanto, pode-se aproximar a integral em $\underline{\Omega}$ por uma quadratura numérica cuja a forma genérica pode ser expressa como

$$\int_{4\pi} A(\underline{\Omega}) d\Omega \simeq \sum_{k=1}^K w_k A(\underline{\Omega}_k), \quad (4.24)$$

onde w_k representa o peso da quadratura que está associado à direção $\underline{\Omega}_k$, a soma de todos os w_k com $k = 1, 2, \dots, K$ é igual a 4π , no caso tridimensional, e igual a 2π no caso bidimensional.

Desta forma o termo integral da equação (4.1), lembrando que se está trabalhando com a equação de transporte monoenergética e estacionária, é aproximado pela seguinte quadratura numérica,

$$\int_{4\pi} \sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}', \cdot \underline{\Omega}) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}', t) d\Omega' \simeq \sum_{l=1}^K w_l \sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}_l \cdot \underline{\Omega}_k) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}_l, t), \quad (4.25)$$

com $k = 1, 2, \dots, K$.

A equação (4.25) é para o caso tridimensional e de acordo com o sistema cartesiano de coordenadas, pode-se decompor $\underline{\Omega}_k$ nas direções sobre os três eixos de coordenadas

$$\underline{\Omega}_k = \mu_k \hat{e}_1 + \zeta_k \hat{e}_2 + \eta_k \hat{e}_3, \text{ onde } \mu_k^2 + \zeta_k^2 + \eta_k^2 = 1, \quad (4.26)$$

onde μ_k, ζ_k, η_k são cossenos diretores,

com

$$\underline{x} = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3, \quad (4.27)$$

e

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_3. \quad (4.28)$$

Então a equação (4.1), para o caso monoenergético e estacionário, é aproximada por

$$\begin{aligned} \mu_k \frac{\partial \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}_k)}{\partial x} + \zeta_k \frac{\partial \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}_k)}{\partial y} + \eta_k \frac{\partial \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}_k)}{\partial z} + \sigma_t(\underline{x}) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}_k) = \\ = \sum_{l=1}^K w_l \sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}_l \cdot \underline{\Omega}_k) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}_l) + S(\underline{x}, \underline{\Omega}_k). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Cada direção $\underline{\Omega}_k$ é relacionada a um peso w_k , os quais representam áreas sobre uma esfera unitária, e a sua soma total corresponde, portanto à área de uma esfera unitária. A invariância das ordenadas a 90 graus é desejável assim como a simetria dos pesos na mesma situação, ou seja, no caso em que (μ_k, ζ_k, η_k) representam uma direção no primeiro octante, a condição de simetria exige a existência dos pontos $(-\mu_k, \zeta_k, \eta_k)$ no segundo octante, $(-\mu_k, -\zeta_k, \eta_k)$ no terceiro octante, $(\mu_k, -\zeta_k, \eta_k)$ no quarto octante, $(\mu_k, \zeta_k, -\eta_k)$ no quinto octante, $(-\mu_k, \zeta_k, -\eta_k)$ no sexto octante, assim como $(-\mu_k, -\zeta_k, -\eta_k)$ no sétimo octante e por fim $(\mu_k, -\zeta_k, -\eta_k)$ no oitavo octante. Portanto a descrição dos pontos de colocação em um octante permite, de maneira imediata, a identificação dos pontos de colocação em todos os demais octantes.

Têm-se $N/2$ níveis relativos a cada eixo sobre os quais os pontos são colocados, sendo N o valor representante da ordem da quadratura. Os vértices dos triângulos sobre a superfície da esfera são formados pelas interseções de cada nível com os níveis relativos aos outros eixos, de forma que o número total de vértices por octante é igual a

$N(N+2)/8$ e dessa maneira a aproximação S_N é definida em cada octante. A figura (4.7) ilustra uma quadratura com nível de simetria S_6 , vê-se através desse exemplo que para o caso de uma quadratura de ordem 6, $N = 6$, que o número total de vértices por octante obedece a fórmula $N(N+2)/8$, e portanto é igual a 6.

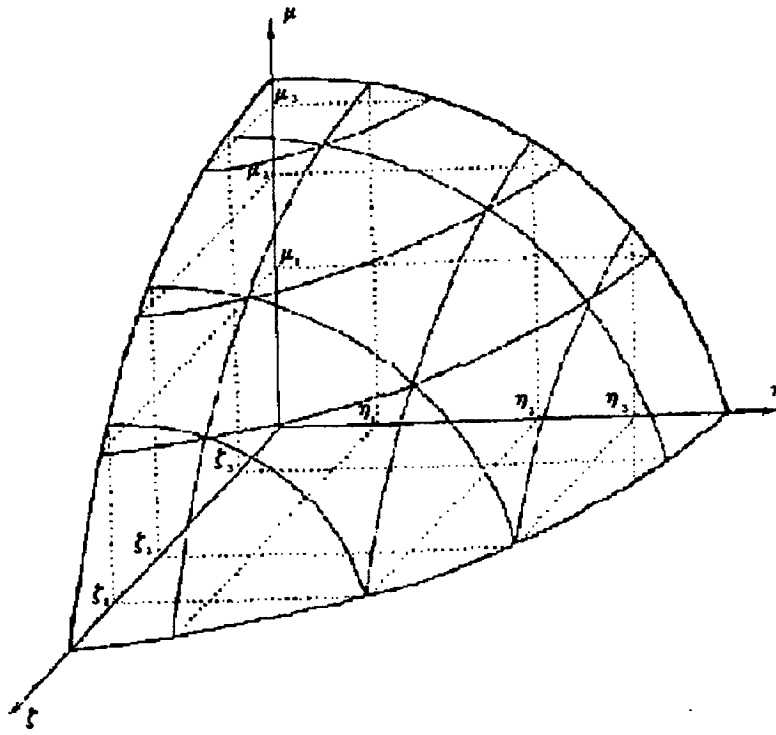


Figura 4.7 - Quadratura com Nível de Simetria S_6

O mais sério problema na utilização do método de ordenadas discretas é o bem conhecido efeito raio. Este fenômeno ocorre porque o método de ordenadas discretas trata a migração do fluxo de radiação, ou de partículas, pelo confinamento deles em caminhos com direções discretas especificadas.

Existem algumas regiões do sistema que não podem ser alcançadas ao longo da trajetória direta feita pelo fluxo de radiação, ou de partículas. As distorções nas aproximações dos fluxos, causadas pelo efeito raio, são conseqüentemente mais

severas e maiores na razão entre as seções de choque de absorção e de espalhamento, porque o espalhamento aumenta o número de trajetórias com direções prescritas que estão disponíveis ao fluxo. O método de ordenadas discretas pode ser considerado como substituindo a invariância rotacional da equação de transporte de Boltzmann por um conjunto de equações de transporte as quais são acopladas pelo espalhamento. Este conjunto finito é, na maioria, invariante sob as rotações discretas do sistema coordenado. Por outro lado, cálculos de transporte que empregam o método dos harmônicos esféricos não exibem o efeito raio, pois as equações dos harmônicos esféricos são invariantes para rotações arbitrárias no sistema de coordenadas.

4.3.1. A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE TRANSPORTE COM O MÉTODO DE ORDENADAS DISCRETAS ADAPTADAS PARA O CASO BIDIMENSIONAL NO PLANO (X, Y)

Tendo em vista o fato da exploração da circularidade da variação em φ , o ângulo polar, será adotado um sistema de quadratura diferente para os planos (x, y) , onde φ está definido, e o ângulo azimutal η , que varia com μ . Sendo $\mu = \cos \eta$ uma mudança de variável de forma a simplificar a notação.

No primeiro caso adota-se a fórmula da regra trapezoidal estendida de Newton-Cotes de ordem zero enquanto que no segundo é utilizada a quadratura de Gauss de ordem 2.

Essas ordens de quadraturas foram escolhidas meramente de modo a simplificar a

implementação computacional. Tem-se a seguir a tabela (4.1) com outras ordens de quadratura de Gauss.

$\pm \mu_n$	w_n	$\pm \mu_n$	w_n
N=2		N=10	
0.5773502691	1.0000000000	0.1488743389	0.2955242247
		0.4333953941	0.2692667193
N=4		0.6794095682	0.2190863625
0.3399810435	0.6521451549	0.8650633663	0.1494513492
0.8611363115	0.3478548451	0.9739065285	0.0666713443
N=6		N=12	
0.2386191860	0.4679139346	0.1252334085	0.2491470458
0.6612093864	0.3607615730	0.3678314989	0.2334925365
0.9324695142	0.1713244924	0.5873179542	0.2031674267
N=8		0.7699026741	0.1600783286
0.1834346424	0.3626837834	0.9041172563	0.1069393260
0.5255324099	0.3137066459	0.9815606342	0.0471753364
0.7966664774	0.2223810344		
0.9602898564	0.1012285363		

Tabela 4.2 - Outras Ordens de Quadratura de Gauss

Aqui teremos uma quadratura diferente da equação (4.25) conforme será mostrado a seguir pela equação (4.30).

Dada a seguinte integral,

$$I(\underline{x}, \underline{\Omega}) = \int_{S^2=4\pi} \sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}', \cdot \underline{\Omega}) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}') d\Omega' \quad (4.30)$$

onde o coeficiente de espalhamento, $\sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}', \cdot \underline{\Omega})$, pode ser escrito separando-se a parte radial da angular, na forma de polinômios de Legendre para a parte angular, como é mostrado na equação (4.31) a seguir,

$$\sigma_s(\underline{x}, \underline{\Omega}', \cdot \underline{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{sl}(\underline{x}) P_l(\underline{\Omega}', \cdot \underline{\Omega}) \quad (4.31)$$

Substituindo-se a equação (4.31) na equação (4.30), tem-se então a equação

(4.32),

$$I(\underline{x}, \underline{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{sl}(\underline{x}) \int_{S^2=4\pi} P_l(\underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}) \phi(\underline{x}, \underline{\Omega}') d\Omega' \quad (4.32)$$

Observando que o $\underline{\Omega}$ que está sendo utilizado aqui leva em consideração o ângulo azimutal e é representado pela equação (4.7).

Faz-se agora uma mudança de variáveis na equação (4.32), de forma a explicitar os ângulos polar e azimutal dentro dessa integral transformando-a numa integral dupla conforme é mostrado na equação (4.33).

$$I(\underline{x}, \mu, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{sl}(\underline{x}) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P_l(\underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}) \phi(\underline{x}, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \quad (4.33)$$

onde $\mu = \cos \eta$, referente ao ângulo azimutal e φ é o ângulo polar do plano (x, y) .

Nota-se que o polinômio de Legendre da fórmula (4.33) continua com a variável antiga e esse caso será tratado agora.

Pelo teorema da adição o polinômio de Legendre,

$$P_l(\underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}) = P_l(\mu)P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu)P_l^m(\mu') \cos[m(\varphi - \varphi')] \quad (4.34)$$

depende da diferença entre φ e φ' e dos produtos dos polinômios associados de Legendre P_l^m , assim, a adoção dos dois tipos de quadratura, ou seja, a de Gauss para a variável azimutal, μ , e a regra trapezoidal estendida para a variável polar, φ , explora melhor as características do problema em estudo.

Sendo $w_{\mu n}$ o peso para a quadratura de Gauss com ponto de colocação N e $w_{\varphi kk'}$ o peso da regra trapezoidal, então substituindo-se a equação (4.34) na equação (4.33), obtém-se a equação (4.35) a seguir,

$$I(\underline{x}, \mu, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{sl}(\underline{x}) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \{P_l(\mu)P_l(\mu') + \dots + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu)P_l^m(\mu') \cos[m(\varphi - \varphi')]\} \phi(\underline{x}, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (4.35)$$

Aproximando-se as quadraturas mencionadas na integral dupla da equação (4.35), tem-se a equação (4.36),

$$I(x, y, \mu_n, \varphi_k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{sl}(x, y) \sum_{n'=1}^N \sum_{k'=1}^{2J} w_{\mu n} w_{\varphi kk'} \{P_l(\mu_n)P_l(\mu_{n'}) + \dots + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu_n)P_l^m(\mu_{n'}) \cos[m(\varphi_k - \varphi_{k'})]\} \phi(x, y, \mu_{n'}, \varphi_{k'}). \quad (4.36)$$

Faz-se agora algumas simplificações no problema em questão aproveitando-se a sua simetria e o fato de se estar utilizando o espalhamento isotrópico.

$$N = 2, \quad (4.37)$$

$$l = 0, \quad (4.38)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = 0.5773502691, \quad (4.39)$$

$$w_{\varphi kk'} = \frac{2\pi}{2J}, \quad (4.40)$$

$$w_{\mu 1} = w_{\mu 2} = 1, \quad (4.41)$$

$$\phi(x, y, \mu_1', \varphi_{k'}) = \phi_{k'}(x, y) = \phi(x, y, \underline{\Omega}_{k'}), \quad (4.42)$$

$$\sigma_{s0}(x, y) = \sigma_s(x, y). \quad (4.43)$$

Substituindo-se os valores (4.37 – 38 – 39 – 40 – 41 – 42 – 43) na equação (4.36), obtém-se então a quadratura de forma simplificada para esse trabalho,

$$I(x, y, \mu_1, \varphi_k) = I(x, y, \mu_2, \varphi_k) = 2\sigma_s(x, y) \sum_{k'=1}^{2J} \frac{\pi}{J} \phi_{k'}(x, y). \quad (4.44)$$

Pode-se então escrever a equação de transporte de seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{\Omega}_k \phi_k(x, y)) + \sigma_t(x, y) \phi_k(x, y) = & \dots \\ = 2 \sum_{k'=1}^{2J} w_{\varphi k k'} \sigma_{s k k'}(x, y) \phi_{k'}(x, y) + S_k(x, y), \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde $\sigma_t(x, y)$ é o coeficiente de extinção total, sendo representado por,

$$\sigma_t(x, y) = \sigma_a(x, y) + \sigma_s(x, y). \quad (4.46)$$

O coeficiente de espalhamento $\sigma_s(x, y)$ para o caso isotrópico é dado como:

$$\sigma_s(x, y) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sigma_s(x, y, \mu, \mu', \varphi, \varphi') d\mu d\varphi \cong 2 \sum_{k=1}^{2J} w_{\varphi k k'} \sigma_{s k' k}(x, y), \quad (4.47)$$

então, substituindo-se na equação (4.46) a equação (4.47), tem-se o coeficiente de extinção total para o caso isotrópico,

$$\sigma_t(x, y) = \sigma_a(x, y) + 2 \sum_{k=1}^{2J} w_{\varphi k k'} \sigma_{s k' k}(x, y). \quad (4.48)$$

Observando-se que devido ao processo de reversibilidade do fluxo o coeficiente de espalhamento pode ser escrito em uma das duas formas a seguir:

$$\sigma_{skk'}(x,y) = \sigma_{sk'k}(x,y). \quad (4.49)$$

4.4. A APROXIMAÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE POR ORDENADAS DISCRETAS

A formulação matemática desenvolvida na subseção 4.3.1 levou em consideração a adaptação das quadraturas que serão utilizadas na equação de transporte para o caso bidimensional, a fim de ajustá-las para que se respeite a geometria circular em estudo. Sendo assim, nesta seção, será tratado o problema direto da equação de transporte bidimensional que será aproximada por ordenadas discretas.

Conforme ilustra a figura (4.8), está se trabalhando no plano (x,y) e a geometria deste problema foi dividida, discretizada, em oito regiões devido às direções de incidência de radiação $\underline{\Omega}_k$. Porém, devido a simetria rotacional, o número de direções K que antes era de oito é reduzido a metade, sendo representado por J , pois $J = K/2$. As direções de incidência são representadas por $\underline{\Omega}_j$, conforme mostrado na figura (4.3).

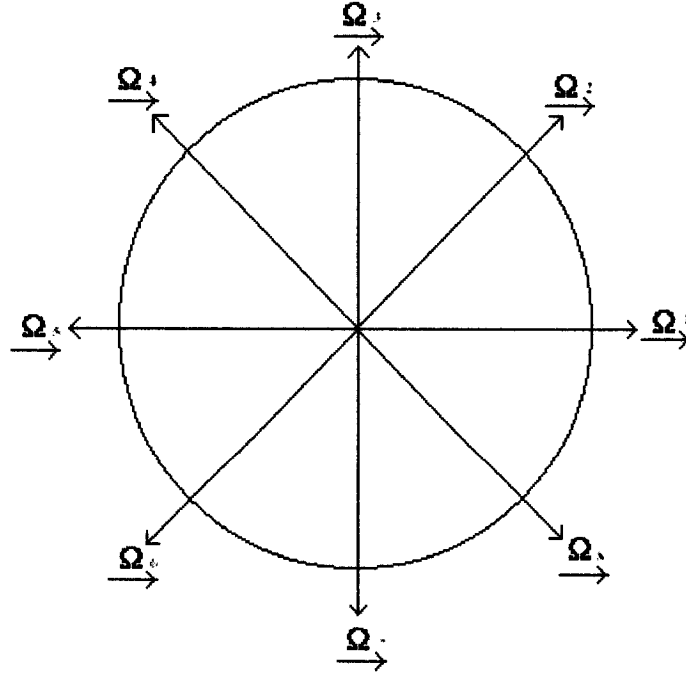


Figura 4.8 - Sistema Completo de Direções de Incidência

Manipulando-se as equações (4.45 – 46 – 47 – 48 – 49), que representam a discretização do domínio em estudo, e utilizando-se o fato do espalhamento ser isotrópico, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\nabla \cdot (\underline{\Omega}_k \phi_k(\underline{x})) + \left(\sigma_a(\underline{x}) + 2 \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{2J} w_{\phi k k'} \sigma_{s k k'}(\underline{x}) \right) \phi_k(\underline{x}) = \quad (4.50)$$

$$= 2 \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^K w_{\phi k k'} \sigma_{s k k'}(\underline{x}) \phi_{k'}(\underline{x}) + q_k(\underline{x}),$$

Para $k = 1, 2, \dots, 2J$.

Rearrmando-se os termos da equação (4.50), obtém-se o sistema de equações de

transporte discretizadas.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{\Omega}_k \phi_k(\underline{x})) + \sigma_a(\underline{x}) \phi_k(\underline{x}) = \\ = 2 \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{2J} w_{\phi k k'} \sigma_{s k k'}(\underline{x}) [\phi_{k'}(\underline{x}) - \phi_k(\underline{x})] + q_k(\underline{x}), \end{aligned} \quad (4.51)$$

com $k = 1, 2, \dots, 2J$,

e com

$$w_{\phi k k'} = \frac{2\pi}{2J}, \quad (4.52)$$

e

$$\sigma_{s k k'}(\underline{x}) = \sigma_s(\underline{x}), \quad (4.53)$$

onde as direções $\underline{\Omega}_k, \underline{\Omega}_{k'}$, são determinadas pela partição de domínio consistente com o sistema fonte-detetor e $w_{\phi k k'}$ são os pesos correspondentes na quadratura.

Manipula-se, agora, a equação (4.51), que é a equação de Boltzmann na forma discreta, de modo que os termos no somatório do lado direito da equação sejam reordenados e, desta maneira, chega-se ao seguinte resultado:

$$\nabla \cdot \underline{\Omega}_k \phi_k(\underline{x}) + \sum_{k'=1}^{2J} W_{k k'} \phi_k(\underline{x}) = q_k(\underline{x}), \quad (4.54)$$

com $k, k' = 1, 2, \dots, 2J$,

onde os elementos da matriz $W_{k k'}$, matriz de seção de choque, são dados pelo

produto dos coeficientes de espalhamento relativos as direções $\underline{\Omega}_k$ e aos seus respectivos pesos de quadratura.

Lembrando que $w_{\phi kk'} = \frac{2\pi}{2J}$ e $\sigma_{skk'}(\underline{x}) = \sigma_s(\underline{x})$ (para o caso isotrópico), então as

matrizes de seção de choque, W , podem ser escritas como:

$$W_{kk} = \sigma_a(\underline{x}) + 2 \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{2J} w_{\phi kk'} \sigma_{skk'}(\underline{x}) = \sigma_a(\underline{x}) + \left(\frac{2 \times (2J-1) \pi}{J} \right) \sigma_s(\underline{x}), \quad (4.55)$$

$$W_{kk'} = -2w_{\phi kk'} \sigma_{skk'}(\underline{x}) = -\frac{2\pi\sigma_s(\underline{x})}{J}, \quad (4.56)$$

Será feita agora a representação dessas matrizes de seção de choque, já particionadas para as duas regiões (ou dois blocos), como será mostrado mais adiante, levando-se em conta as regiões I e II , como foi ilustrado na figura (4.4), e substituindo-se os índices k' por i e k por j ,

$$W_{ii}^I = \sigma_a(\underline{x}) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J w_{\phi ij} \sigma_{sij}(\underline{x}), \quad (4.57)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$,

e

$$W_{ij}^I = -2w_{\phi ij} \sigma_{sij}(\underline{x}), \quad (4.58)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, J$ e $i \neq j$,

e

$$W_{ij}^{II} = -2w_{\phi ij}\sigma_{sij}(\underline{x}), \quad (4.59)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, J$ e $i \neq j$.

Para o caso isotrópico, que é o utilizado neste problema, tem-se:

$$W_{ii}^I = \sigma_a(\underline{x}) + \left(\frac{2 \times (2J-1)\pi}{J} \right) \sigma_s(\underline{x}), \quad (4.60)$$

$$W_{ij}^I = -\frac{2\pi\sigma_s(\underline{x})}{J}, \quad (4.61)$$

e

$$W_{ij}^{II} = -\frac{2\pi\sigma_s(\underline{x})}{J}. \quad (4.62)$$

Desta forma pode-se construir as matrizes de coeficientes de absorção e espalhamento em dois blocos conforme a representação a seguir, pois de acordo com o sistema fonte-detetor a matriz W é simétrica e cíclica.

$$W = \begin{bmatrix} W_{ij}^I & W_{ij}^{II} \\ W_{ij}^{II} & W_{ij}^I \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, J$,

onde

$$W_{ij}^I = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & W_{1,3} & \dots & W_{1,J} \\ W_{1,2} & W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,J+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{1,J} & W_{1,J+1} & W_{1,J+2} & \dots & W_{1,1} \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

e

$$W_{ij}^{II} = \begin{bmatrix} W_{1,J+1} & W_{1,J} & W_{1,J-1} & \dots & W_{1,2} \\ W_{1,J} & W_{1,J+1} & W_{1,J} & \dots & W_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{1,2} & W_{1,3} & W_{1,4} & \dots & W_{1,J+1} \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

tem-se então a matriz W , separada pelos dois blocos, de acordo com a fórmula (4.63),

$$W = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} W_{1,1} & W_{1,2} & W_{1,3} & \dots & W_{1,J} & W_{1,J+1} & W_{1,J} & W_{1,J-1} & \dots & W_{1,2} \\ W_{1,2} & W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,J+1} & W_{1,J} & W_{1,J+1} & W_{1,J} & \dots & W_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{1,J} & W_{1,J+1} & W_{1,J+2} & \dots & W_{1,1} & W_{1,2} & W_{1,3} & W_{1,4} & \dots & W_{1,J+1} \\ \hline W_{1,J+1} & W_{1,J} & W_{1,J-1} & \dots & W_{1,2} & W_{1,1} & W_{1,2} & W_{1,3} & \dots & W_{1,J} \\ W_{1,J} & W_{1,J+1} & W_{1,J} & \dots & W_{1,3} & W_{1,2} & W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,J+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{1,2} & W_{1,3} & W_{1,4} & \dots & W_{1,J+1} & W_{1,J} & W_{1,J+1} & W_{1,J+2} & \dots & W_{1,1} \end{array} \right] \quad (4.66)$$

onde $J = K/2$,

e cujas propriedades são:

1) Simétrica e diagonal dominante;

2) A soma dos termos de uma linha é igual ao coeficiente de absorção;

3) Linhas ciclicamente rotacionadas;

4) Constituída de dois blocos simétricos.

A figura (4.9) representa a primeira linha da matriz W levando-se em consideração a simetria do coeficiente de espalhamento com relação à direção de incidência (simetria rotacional da matriz de coeficientes W).

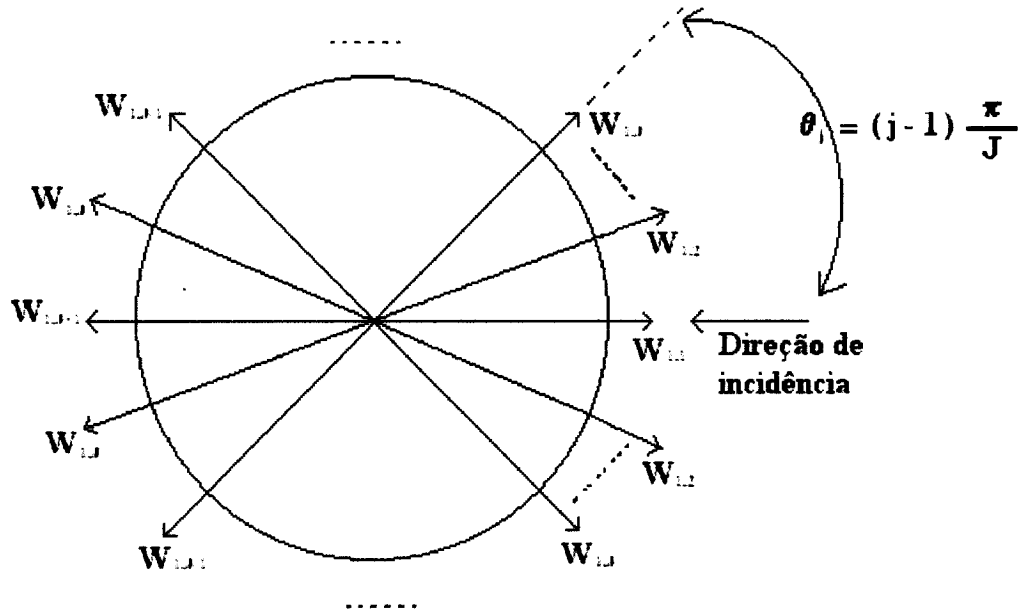


Figura 4.9 - Simetria Rotacional da Matriz de Coeficientes W

Também se observa que ao se deslocar de um ângulo

$$\theta_j = (j-1) \frac{\pi}{J}, \quad (4.67)$$

pode-se escrever sem perder a generalidade que

$$W_{1,1} = W_{j,j}, \quad (4.68)$$

com $j = 1, 2, \dots, 2J$,

e os termos fora da diagonal são tomados simetricamente a ela e também observa-se, por exemplo, que a segunda linha de W pode ser obtida a partir da primeira linha dessa matriz fazendo-se apenas o deslocamento dos seus coeficientes.

Conforme mencionado anteriormente, o sistema foi particionado em dois blocos, um para cada região conforme a divisão da geometria do problema, e desta forma o conjunto de equações que constituem o sistema fica representado da seguinte maneira:

Sistema de equações para o bloco I (recebe o índice I por ser a região incidente):

$$\nabla \cdot \underline{\Omega}_i + W_{ij}^I \phi_i^I + W_{ij}^{II} \phi_i^{II} = q_i^I \quad (4.69)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, J$.

Sistema de equações para o bloco II , (recebe o índice II por ser e região emergente):

$$-\nabla \cdot \underline{\Omega}_i + W_{ij}^{II} \phi_i^I + W_{ij}^I \phi_i^{II} = q_i^{II} \quad (4.70)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, J$.

O bloco II tem as direções $\underline{\Omega}_j$ invertidas em relação ao bloco I , sendo assim, a representação das direções para o sistema completo é dada por:

$$\underline{\Omega}_j = -\underline{\Omega}_{j+1}, \quad (4.71)$$

com $j = 1, 2, \dots, J$.

Com o objetivo de preparar o algoritmo computacional e por uma questão de simplificação serão introduzidas algumas notações a seguir,

$$\underline{\Omega}_i = \cos \varphi_i \hat{e}_1 + \sin \varphi_i \hat{e}_2 = \omega_{i,1} \hat{e}_1 + \omega_{i,2} \hat{e}_2 = \sum_{l=1}^2 \omega_{i,l} \hat{e}_l, \quad (4.72)$$

onde as coordenadas de $\underline{\Omega}_i$ são as coordenadas em relação ao plano (x, y) .

$$\nabla \phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \hat{e}_2 = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_l} \hat{e}_l, \quad (4.73)$$

$$\nabla \cdot \underline{\Omega}_i = 0. \quad (4.74)$$

Reescrevendo as equações (4.69 – 70) com a notação utilizada em (4.72 – 73 – 74) obtém-se dois sistemas de equações diferenciais, sendo um sistema de equações para cada bloco no qual o domínio foi particionado e juntamente com as condições de contorno prescritas, dadas pelas equações (4.22 – 23), obtém-se a formulação aproximada da equação de transporte por ordenadas discretas para o problema direto particionada em dois blocos.

Para o bloco I :

$$\sum_{l=1}^2 \omega_{i,l} \frac{\partial \phi_i^I}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^J W_{ij}^I \phi_j^I + \sum_{j=1}^J W_{ij}^{II} \phi_j^{II} = q_i^I, \quad (4.75)$$

e

$$\phi_i^I(x, y) \underline{\Omega}_i \cdot \hat{n} = \phi_{i,m}^I(x, y) \cos(\theta - \varphi_i), \quad (4.76)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

Para o bloco *II*:

$$-\sum_{l=1}^2 \omega_{i,l} \frac{\partial \phi_i^{II}}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^J W_{ij}^{II} \phi_j^I + \sum_{j=1}^J W_{ij}^I \phi_j^{II} = q_i^{II}, \quad (4.77)$$

e

$$\phi_i^{II}(x, y) \underline{\Omega}_i \cdot \hat{n} = \phi_{i,in}^{II}(x, y) \cos(\theta - \varphi_i). \quad (4.78)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

4.5. A FORMULAÇÃO DE PARIDADE DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

A introdução da formulação de paridade tem como objetivo a simplificação do problema direto. O fluxo angular, considerado como uma função da direção, é separado em duas partes, uma par e outra ímpar. O passo matemático fundamental de se resolver o fluxo angular nas componentes par e ímpar é significativo para aplicações, pois ele complementa o princípio variacional para essas componentes. Este princípio pode ser usado para construir limites numéricos superiores e inferiores próximos da solução exata.

As componentes de paridade do fluxo angular também tem um significado físico à parte do seu uso matemático. A de paridade par, ϕ^+ , dá o fluxo de partículas, ou intensidade de radiação, enquanto que a de paridade ímpar, ϕ^- , dá a densidade de

corrente de radiação. As componentes de paridade ϕ^+ e ϕ^- resultam na transformação da equação de transporte de primeira ordem num par de equações de segunda ordem, uma para ϕ^+ e a outra para ϕ^- .

A formulação de paridade para todas as funções envolvidas na equação de transporte será dada a seguir:

$$\phi_i^+ = \frac{1}{2}(\phi_i^I + \phi_i^{II}) \quad (4.79)$$

e

$$\phi_i^- = \frac{1}{2}(\phi_i^I - \phi_i^{II}), \quad (4.80)$$

onde ϕ_i^+ é o fluxo de partículas, ou intensidade de radiação, e ϕ_i^- é a densidade de corrente.

$$W_{ij}^+ = (W_{ij}^I + W_{ij}^{II}) \quad (4.81)$$

e

$$W_{ij}^- = (W_{ij}^I - W_{ij}^{II}), \quad (4.82)$$

onde W_{ij}^+ e W_{ij}^- são as componentes par e ímpar das matrizes de seção de choque.

$$q_i^+ = \frac{1}{2}(q_i^I + q_i^{II}) \quad (4.83)$$

e

$$q_i^- = \frac{1}{2}(q_i^I - q_i^{II}), \quad (4.84)$$

onde q_i^+ e q_i^- são as componentes par e ímpar dos termos de fonte de radiação interna ao meio.

Pode-se também escrever os fluxos das regiões I e II em função das componentes de paridade (4.79 – 80) como:

$$\phi_i^I = (\phi_i^+ + \phi_i^-) \quad (4.85)$$

e

$$\phi_i^{II} = (\phi_i^+ - \phi_i^-). \quad (4.86)$$

Com a utilização da formulação de paridade, equações (4.79 – 80 – 81 – 82 – 83 – 84), nas equações aproximadas de transporte (4.75 – 77) têm-se então dois sistemas de equações diferenciais com dependências, apenas, dos termos de paridade par e ímpar.

$$\sum_{l=1}^2 \omega_{i,l} \frac{\partial \phi_i^-}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^J W_{ij}^+ \phi_j^+ = q_i^+, \quad (4.87)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$,

e

$$\sum_{l=1}^2 \omega_{i,l} \frac{\partial \phi_i^+}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^J W_{ij}^- \phi_j^- = q_i^-, \quad (4.88)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

Utilizando-se a propriedade de inversão de matrizes nas equações (4.87 – 88)

encontram-se os valores de ϕ^+ e de ϕ^- , que são representados pelas seguintes expressões:

$$\phi_i^+ = \sum_{k=1}^J IW_{ik}^+ q_k^+ - \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^2 IW_{ik}^+ \omega_{k,l} \frac{\partial \phi_k^-}{\partial x_l}, \quad (4.89)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$,

e

$$\phi_i^- = \sum_{k=1}^J IW_{ik}^- q_k^- - \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^2 IW_{ik}^- \omega_{k,l} \frac{\partial \phi_k^+}{\partial x_l}, \quad (4.90)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$,

onde IW é a matriz inversa de W .

Ao substituir-se os valores de ϕ^+ e ϕ^- calculados por (4.89 – 90) nas equações (4.87 – 88), serão obtidas as equações que contenham separadamente os termos de ϕ^+ e ϕ^- , como será visto a seguir:

Para o fluxo de partículas ϕ^+ :

$$- \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\omega_{i,l} IW_{ij}^- \omega_{j,k} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_k} \right] + \quad (4.91)$$

$$+ \sum_{j=1}^J W_{ij}^+ \phi_j^+ = q_i^+ - \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\omega_{i,l} IW_{ij}^- q_j^- \right],$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

Para a densidade de corrente ϕ^- :

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\omega_{i,l} I W_{ij}^+ \omega_{j,k} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_k} \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^J W_{ij}^- \phi_j^- = q_i^- - \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\omega_{i,l} I W_{ij}^+ q_j^+ \right],
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

Pode-se observar que as equações (4.91 – 92) são de segunda ordem, ou seja, a inclusão das componentes de paridade ϕ^+ e ϕ^- resultam na transformação da equação de transporte de primeira ordem num par de equações de segunda ordem.

Rearrmando-se as equações (4.91 – 92) com o objetivo de escrevê-las na forma da equação de transporte de radiação, ou partículas, para um sistema elíptico no qual estão explícitas as matrizes de difusão, de absorção e os termos de fonte.

$$-\nabla \cdot (c^+ \otimes \nabla \phi^+) + a^+ \phi^+ = f^+ \tag{4.93}$$

e

$$-\nabla \cdot (c^- \otimes \nabla \phi^-) + a^- \phi^- = f^-, \tag{4.94}$$

em $B(0, R)$,

onde \otimes representa o produto tensorial, $B(0, R) = \Omega$ representa o domínio do problema, uma bola centrada em zero e com raio igual a R , c^+ e c^- são os tensores de difusão, a^+ e a^- as matrizes de absorção e f^+ e f^- os termos de fonte.

Tensores de difusão:

$$c_{ij,k,l}^+ = \omega_{i,l} I W_{ij}^+ \omega_{j,k} \quad (4.95)$$

e

$$c_{ij,k,l}^- = \omega_{i,l} I W_{ij}^- \omega_{j,k}, \quad (4.96)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, J$ e $k, l = 1, 2$.

Matrizes de absorção:

$$a_{ij}^+ = W_{ij}^+ \quad (4.97)$$

e

$$a_{ij}^- = W_{ij}^-, \quad (4.98)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, J$.

Termos de fonte:

$$f_i^+ = q_i^+ - \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} [\omega_{i,l} I W_{ij}^- q_j^-] \quad (4.99)$$

e

$$f_i^- = q_i^- - \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} [\omega_{i,l} I W_{ij}^+ q_j^+], \quad (4.100)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

Para que seja completada a formulação de paridade para o problema direto é necessária a descrição das condições de contorno com essa mesma formulação.

Condições de contorno para o fluxo, ϕ_i^+ , e para a densidade de corrente, ϕ_i^- :

A partir das equações (4.85 – 86) eliminando-se os ϕ_i^- , substituindo-os pela expressão obtida em (4.90), restarão como incógnitas somente os termos de ϕ_i^+ , pois ϕ_i^I e ϕ_i^{II} são valores prescritos e q_j^- são os termos de fonte interna que também são conhecidos.

As expressões para os ϕ_i^+ são, então, escritas das seguintes formas:

$$\phi_i^+ - \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 IW_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} = \phi_i^I - \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^- \quad (4.101)$$

e

$$\phi_i^+ + \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 IW_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} = \phi_i^{II} + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^-, \quad (4.102)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

Eliminando-se os ϕ_i^+ , substituindo-os pela expressão obtida em (4.89), restarão somente os termos de ϕ_i^- como incógnitas.

As expressões para os ϕ_i^- são então escritas das seguintes formas:

$$\phi_i^- - \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 IW_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_l} = \phi_i^I - \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+ \quad (4.103)$$

e

$$\phi_i^- + \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 IW_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_l} = -\phi_i'' + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+, \quad (4.104)$$

com $i = 1, 2, \dots, J$.

Ponderam-se as equações (4.101 – 102), equações em relação a ϕ^+ , para a direção normal \hat{n} , utilizando-se para isso de (4.15). Isto se faz necessário por se tratar das condições de contorno generalizadas de Neumann.

A direção normal às regiões I e II só difere por um sinal já que, por convenção, a direção normal à região II é escolhida como sendo positiva.

Para a região I:

$$\begin{aligned} -\cos(\theta - \varphi_i) \phi_i^+ + \sum_{k=1}^2 \nu_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} &= -\cos(\theta - \varphi_i) \phi_i^I + \\ &+ \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^- \cos(\theta - \varphi_i). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Para a região II:

$$\begin{aligned} +\cos(\theta - \varphi_i) \phi_i^+ + \sum_{k=1}^2 \nu_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} &= +\cos(\theta - \varphi_i) \phi_i^{II} + \\ &+ \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^- \cos(\theta - \varphi_i). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Fazendo o mesmo procedimento anterior para as equações (4.103 – 104), equações

em relação a ϕ^- , têm-se então:

Para a região I :

$$\begin{aligned}
 & -\cos(\theta - \varphi_i)\phi_i^- + \sum_{k=1}^2 \nu_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_l} = -\cos(\theta - \varphi_i)\phi_i^I + \\
 & + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+ \cos(\theta - \varphi_i).
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Para a região II :

$$\begin{aligned}
 & +\cos(\theta - \varphi_i)\phi_i^- + \sum_{k=1}^2 \nu_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} = -\cos(\theta - \varphi_i)\phi_i^{II} + \\
 & + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+ \cos(\theta - \varphi_i).
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

Considerando-se as equações (4.11 – 18 – 19 – 20 – 21), então, as equações (4.105 – 106) podem ser reescritas da seguinte forma, para os casos cujo $\cos(\theta - \varphi_i) \leq 0$ e $\cos(\theta - \varphi_i) \geq 0$ respectivamente:

Para a região $I\{\cos(\theta - \varphi_i) \leq 0\}$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^2 \nu_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} - \cos(\theta - \varphi_i)\phi_i^+ = \\
 & = -\cos(\theta - \varphi_i) \left[\phi_{i,in}^I - \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^- \right].
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Para a região $II\{\cos(\theta - \varphi_i) \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 v_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} + \cos(\theta - \varphi_i) \phi_i^+ = \\
& = +\cos(\theta - \varphi_i) \left[\phi_{i,in}'' + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^- \right].
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Repetindo o procedimento anterior para as equações (4.107 – 108), nos casos cujo $\cos(\theta - \varphi_i) \leq 0$ e $\cos(\theta - \varphi_i) \geq 0$ respectivamente, leva-se aos seguintes sistemas de equações:

Para a região $I\{\cos(\theta - \varphi_i) \leq 0\}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 v_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_l} - \cos(\theta - \varphi_i) \phi_i^- = \\
& = -\cos(\theta - \varphi_i) \left[\phi_{i,in}^I - \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+ \right].
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Para a região $II\{\cos(\theta - \varphi_i) \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 v_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} IW_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_l} + \cos(\theta - \varphi_i) \phi_i^- = \\
& = +\cos(\theta - \varphi_i) \left[-\phi_{i,in}'' + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+ \right].
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Serão analisados os intervalos angulares a fim de se obter uma única expressão, ou seja, um algoritmo que seja válido para todo o domínio.

Considerando-se os seguintes intervalos angulares do domínio, define-se a função $\phi_{i,in}$ a partir de (4.109 – 110). Essa função relaciona os fluxos prescritos para as

regiões I e II com os termos de fonte interna.

Para $\left\{ \frac{\pi}{2} < |\theta - \varphi_i| < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\theta - \varphi_i) \leq 0 \right\}$:

$$\phi_{i,in} = \phi_{i,in}^I - \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^- \Leftarrow \cos(\theta - \varphi_i) \leq 0 \quad (4.113)$$

ou

Para $\left\{ 0 < |\theta - \varphi_i| < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < |\theta - \varphi_i| < 2\pi \Rightarrow \cos(\theta - \varphi_i) \geq 0 \right\}$:

$$\phi_{i,in} = \phi_{i,in}^{II} + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^- q_j^- \Leftarrow \cos(\theta - \varphi_i) \geq 0. \quad (4.114)$$

Também será definida a função $\bar{\phi}_{i,in}$ utilizando-se as equações (4.111 – 112).

Para $\left\{ \frac{\pi}{2} < |\theta - \varphi_i| < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\theta - \varphi_i) \leq 0 \right\}$:

$$\bar{\phi}_{i,in} = \phi_{i,in}^I - \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+ \Leftarrow \cos(\theta - \varphi_i) \leq 0 \quad (4.115)$$

ou

Para $\left\{ 0 < |\theta - \varphi_i| < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < |\theta - \varphi_i| < 2\pi \Rightarrow \cos(\theta - \varphi_i) \geq 0 \right\}$:

$$\bar{\phi}_{i,in} = -\phi_{i,in}^{II} + \sum_{j=1}^J IW_{ij}^+ q_j^+ \Leftarrow \cos(\theta - \varphi_i) \geq 0. \quad (4.116)$$

Pode-se, finalmente, escrever a equação, ou algoritmo, das condições de contorno generalizadas de Neumann para ϕ_i^+ , que é válida para todo o domínio.

$$\sum_{k=1}^2 v_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} I W_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} + \text{abs}(\cos(\theta - \varphi_i)) \phi_i^+ = \quad (4.117)$$

$$= \text{abs}(\cos(\theta - \varphi_i)) \phi_{i,in}$$

Para $i = 1, 2, \dots, J$ e $x^2 + y^2 = R^2$, onde a função abs leva em conta somente o valor absoluto do cosseno.

Será mostrada a seguir a equação para ϕ^- das condições de contorno generalizadas de Neumann:

$$\sum_{k=1}^2 v_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} I W_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_l} + \text{abs}(\cos(\theta - \varphi_i)) \phi_i^- = \quad (4.118)$$

$$= \text{abs}(\cos(\theta - \varphi_i)) \phi_{i,in}$$

Para $i = 1, 2, \dots, J$ e $x^2 + y^2 = R^2$.

As equações (4.113 – 114 – 115 – 116 – 117 – 118) são reescritas de forma mais simplificada.

$$\hat{n} \cdot (c^+ \nabla \phi^+) + Q \phi^+ = g^+ \quad (4.119)$$

em $\partial B(0, R) = \partial \Omega$, que é a fronteira do domínio do problema.

e

$$\hat{n} \cdot (c^- \nabla \phi^-) + Q \phi^- = g^- \quad (4.120)$$

em $\partial B(0, R)$,

onde

$$\hat{n} \cdot (c^+ \nabla \phi^+) = \sum_{k=1}^2 v_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} I W_{ij}^- \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^+}{\partial x_l} \quad (4.121)$$

e

$$\hat{n} \cdot (c^- \nabla \phi^-) = \sum_{k=1}^2 v_k \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^2 \omega_{i,k} I W_{ij}^+ \omega_{j,l} \frac{\partial \phi_j^-}{\partial x_l}, \quad (4.122)$$

$$Q = \text{abs}(\cos(\theta - \varphi_i)), \quad (4.123)$$

$$g^+ = \text{abs}(\cos(\theta - \varphi_i)) \phi_{i,in} \quad (4.124)$$

e

$$g^- = \text{abs}(\cos(\theta - \varphi_i)) \Phi_{i,in}. \quad (4.125)$$

onde Q e g são relacionados aos valores das derivadas normais.

Devido a utilização da formulação de paridade, o problema direto é representado pela equações (4.93 – 94 – 119 – 120).

4.6. A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

De posse da geometria, do sistema de equações diferenciais da equação de transporte já aproximado devidamente e também das condições de contorno, ou seja, com o problema direto já especificado, pode-se a partir de agora resolvê-lo através do método dos elementos finitos, conforme foi descrito no capítulo 3, utilizando-se da

formulação variacional, ou formulação fraca, de modo que a sua solução, chamada de solução fraca do problema diferencial, seja a solução do sistema.

O método dos elementos finitos pode ser resumido basicamente como a projeção da forma fraca da equação diferencial em um espaço de funções de dimensão finita.

Dado o problema de valor de contorno, cujo o objetivo é encontrar ϕ_j^+ e $\phi_j^- \in H^1(B(0, R))$,

com $j = 1, 2, \dots, J$,

tal que:

$$-\nabla \cdot (c^+ \otimes \nabla \phi^+) + a^+ \phi^+ = f^+ \quad (4.126)$$

e

$$-\nabla \cdot (c^- \otimes \nabla \phi^-) + a^- \phi^- = f^-, \quad (4.127)$$

em $B(0, R)$,

$$\hat{n} \cdot (c^+ \nabla \phi^+) + Q \phi^+ = g^+ \quad (4.128)$$

e

$$\hat{n} \cdot (c^- \nabla \phi^-) + Q \phi^- = g^-, \quad (4.129)$$

em $\partial B(0, R)$,

pode ser dado pela seguinte formulação variacional:

Assumindo que ϕ_j seja uma solução da equação diferencial (4.126 – 127), multiplica-se essa equação por uma função teste arbitrária Ψ_i e integra-se em todo o domínio $V = B(0, R) \in H^1(B(0, R))$, o que resulta em:

$$\int_{B(0,R)} -\nabla \cdot (c\nabla\phi_j)\Psi_i dV + \int_{B(0,R)} a\phi_j\Psi_i dV = \int_{B(0,R)} f\Psi_i dV, \quad (4.130)$$

lembrando que:

$$\nabla \cdot (\vec{A}f) = (\vec{A} \cdot \nabla f) + (\nabla \cdot \vec{A})f, \quad (4.131)$$

então,

$$(\nabla \cdot \vec{A})f = \nabla \cdot (\vec{A}f) - (\vec{A} \cdot \nabla f) \quad (4.132)$$

como

$$\vec{A} = c\nabla\phi_j, \quad (4.133)$$

e

$$f = \Psi_i, \quad (4.134)$$

a equação (4.132) é escrita como:

$$\nabla \cdot (c\nabla\phi_j)\Psi_i = \nabla \cdot (c\nabla\phi_j\Psi_i) - (c\nabla\phi_j) \cdot \nabla\Psi_i, \quad (4.135)$$

portanto, substituindo (4.135) na equação (4.130), segue que:

$$\int_{B(0,R)} \{-\nabla \cdot (c\nabla\phi_j\Psi_i) + (c\nabla\phi_j) \cdot \nabla\Psi_i\}dV + \int_{B(0,R)} a\phi_j\Psi_i dV = \int_{B(0,R)} f\Psi_i dV, \quad (4.136)$$

rearrumando-se os termos, vem que:

$$\int_{B(0,R)} ((c\nabla\phi_j) \cdot \nabla\Psi_i + a\phi_j\Psi_i)dV - \int_{B(0,R)} \nabla \cdot (c\nabla\phi_j\Psi_i)dV = \int_{B(0,R)} f\Psi_i dV, \quad (4.137)$$

utilizando-se das propriedades do teorema de Green, ou da divergência, a integral de todo o domínio, $B(0,R)$,

$$\int_{B(0,R)} \nabla \cdot (c\nabla\phi_j\Psi_i)dV, \quad (4.138)$$

se transforma numa integral da superfície $\partial B(0,R)$, tal como,

$$\int_{B(0,R)} \nabla \cdot \vec{Z}dV = \int_{\partial B(0,R)} \vec{Z} \cdot \hat{n}d\Gamma, \quad (4.139)$$

com

$$\vec{Z} = c\nabla\phi_j\Psi_i, \quad (4.140)$$

e portanto,

$$\int_{B(0,R)} \nabla \cdot (c\nabla\phi_j\Psi_i)dV = \int_{\partial B(0,R)} \hat{n} \cdot (c\nabla\phi_j\Psi_i)d\Gamma \quad (4.141)$$

substituindo-se (4.141) em (4.137) tem-se então,

$$\int_{B(0,R)} ((c\nabla\phi_j) \cdot \nabla\Psi_i + a\phi_j\Psi_i)dV - \int_{\partial B(0,R)} \hat{n} \cdot (c\nabla\phi_j\Psi_i)d\Gamma = \int_{B(0,R)} f\Psi_i dV, \quad (4.142)$$

substitui-se, agora, o termo referente às condições de contorno (4.128 – 129) na integral de superfície e desta forma obtem-se:

$$\int_{B(0,R)} ((c\nabla\phi_j) \cdot \nabla\Psi_i + a\phi_j\Psi_i)dV - \int_{\partial B(0,R)} (-Q_j\phi_j + g)\Psi_i d\Gamma = \int_{B(0,R)} f\Psi_i dV, \quad (4.143)$$

rearrumando-se os termos chega-se a seguinte expressão:

$$\int_{B(0,R)} ((c\nabla\phi_j) \cdot \nabla\Psi_i + a\phi_j\Psi_i - f\Psi_i)dV - \int_{\partial B(0,R)} (-Q_j\phi_j + g)\Psi_i d\Gamma = 0 \quad (4.144)$$

$$\Leftrightarrow \forall \Psi_i \in H^1(B(0,R))$$

onde a equação (4.144) é chamada de forma variacional, ou fraca, e a sua solução de solução fraca do problema diferencial (4.126 – 127 – 128 – 129). Obviamente qualquer solução da equação diferencial também é uma solução do problema variacional e a recíproca também é verdadeira sob algumas restrições no domínio e nas funções coeficientes.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos pela implementação computacional do problema direto formulado no capítulo anterior. A rotina computacional desenvolvida para a solução desse problema foi escrita para o MATLAB 6.0.0.88 R12. O algoritmo foi compilado ou codificado num microcomputador com 128 Mb de memória RAM e com um microprocessador da marca Pentium, cujo modelo é PIII 550 MHz. Foram feitas várias simulações na investigação da solução desse problema, tais como variações da geometria, das condições de contorno, e também dos parâmetros, ou seja, das constantes de condutividade (ou difusão) e os coeficientes de absorção e espalhamento.

5.1. AS CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

5.1.1. A APRESENTAÇÃO E A DISCRIMINAÇÃO DOS TERMOS DO ALGORITMO COMPUTACIONAL

Algumas considerações iniciais são necessárias para a implementação do algoritmo computacional do seguinte problema direto,

$$-\nabla \cdot (c \otimes \nabla \phi) + a\phi = f \tag{5.1}$$

em $B(0,R)$,

$$\hat{n} \cdot (c\nabla \phi) + Q\phi = g \tag{5.2}$$

em $\partial B(0,R)$,

onde $B(0,R)$ representa o domínio do problema, uma bola centrada em zero e com raio igual a R , c é o tensor de difusão, a a matriz de absorção e f o termo de fonte, Q e g são relacionados aos valores das derivadas normais.

A figura (5.1) representa um diagrama esquemático deste algoritmo.

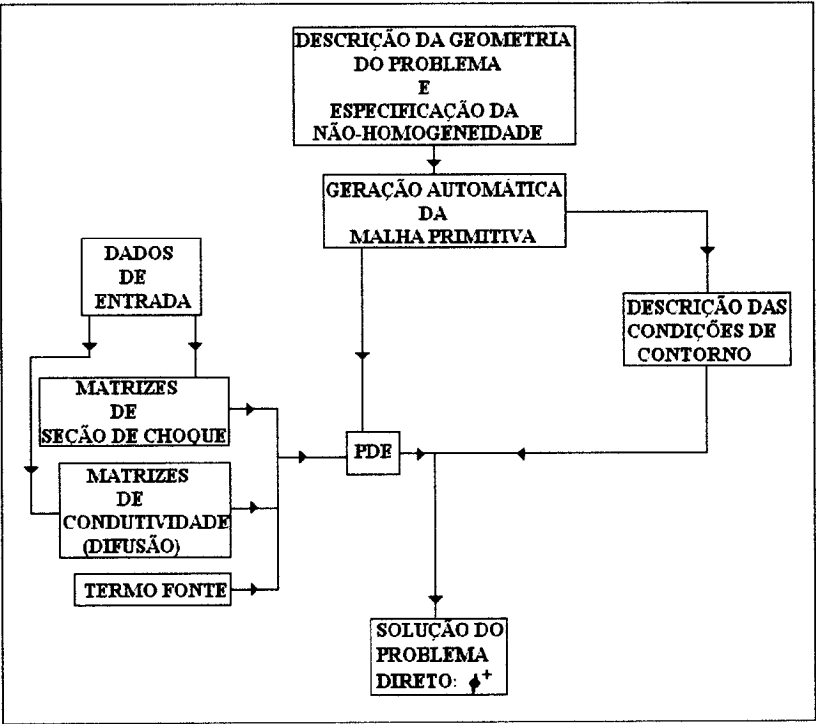


Figura 5.1 - Histograma do Algoritmo Computacional

A seguir serão discriminados todos os termos do algoritmo computacional do

problema direto.

5.1.1.1. A DESCRIÇÃO DA GEOMETRIA DO PROBLEMA E A ESPECIFICAÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE

A geometria é composta de dois círculos, o maior deles possui raio igual a 1 ($R = 1 \text{ cm}$) enquanto que o menor, a não-homogeneidade, tem raio igual a 0,2 ($r = 0,2 \text{ cm}$). O domínio é então dividido igualmente em oito regiões iguais observando-se a questão da simetria para a formulação do problema direto.

5.1.1.2. A GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA MALHA PRIMITIVA

O domínio é mapeado, aproximado por triângulos, gerando uma malha de elementos finitos.

5.1.1.3. OS DADOS DE ENTRADA

Esses dados de entrada são utilizados ao longo do programa.

5.1.1.3.1. A CONFIGURAÇÃO INICIAL DOS PARÂMETROS

O coeficiente de absorção é 0,001 ($\sigma_a = 0,001 \text{ cm}^{-1}$);

O coeficiente de espalhamento é 0,249 ($\sigma_s = 0.249 \text{ cm}^{-1}$);

o centro da circunferência menor, a não-homogeneidade, é $(x_0[cm]; y_0[cm])$;

o valor máximo para a altura dos triângulos da malha é 0,01 ($h_{\max} = 0,01 \text{ cm}$);

a constante de condutividade da circunferência maior é 1 ($k_1 = 1$);

a constante de condutividade da circunferência menor é 10 ($k_2 = 10$).

onde as constantes de condutividade k_1 e k_2 são fatores de ajuste que estão embutidos nos termos de absorção e espalhamento da equação de transporte de radiação, não sendo necessário explicitá-los ao longo do desenvolvimento da formulação matemática, contudo para a implementação computacional a discriminação desses termos se faz necessária para que se possa diferenciar com maior clareza o termo de perturbação.

5.1.1.4. AS MATRIZES DE SEÇÃO DE CHOQUE (a)

As matrizes de seção de choque são dadas pelas equações (4.97 – 98 – 60 – 61 – 62).

onde as constantes de condutividade k_1 e k_2 devem ser explicitadas na rotina computacional por uma simples multiplicação direta nas fórmulas (4.97 – 98).

5.1.1.5. AS MATRIZES DE CONDUTIVIDADE (c)

As matrizes de condutividade são dadas pelas equações (4.95 – 96).

onde as constantes de condutividade k_1 e k_2 devem ser explicitadas na rotina computacional por uma simples multiplicação inversa nas fórmulas (4.95 – 96).

5.1.1.6. OS TERMOS DE FONTE (f)

Os termos de fonte são dados pelas equações (4.99 – 100), mas neste trabalho são considerados como nulos ($f = 0$).

5.1.1.7. A EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

A equação diferencial parcial (PDE) é dada pela equação (5.1).

5.1.1.8. A DESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A condição de contorno de Neumann generalizada é dada pela equação (5.2).

5.1.1.8.1. AS CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS PARA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DO SISTEMA

A tabela (5.1), a seguir, mostra todas as configurações possíveis para as condições de contorno do sistema,

		b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
		$\emptyset \rightarrow x \cdot 1$	$x \cdot 1 \rightarrow x \cdot 2$	$x \cdot 2 \rightarrow 2x \cdot 1$	$2x \cdot 1 \rightarrow x$	$x \rightarrow 2x \cdot 2$	$2x \cdot 2 \rightarrow 2x \cdot 3$	$2x \cdot 3 \rightarrow 2x \cdot 4$	$2x \cdot 4 \rightarrow 2x$
ϕ^+	$\phi_{1, in}$	$\phi_{1, in}^{\Pi}$	$\phi_{1, in}^{\Pi}$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^{\Pi}$	$\phi_{1, in}^{\Pi}$
	$\phi_{2, in}$	$\phi_{2, in}^{\Pi}$	$\phi_{2, in}^{\Pi}$	$\phi_{2, in}^{\Pi}$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^{\Pi}$
	$\phi_{3, in}$	$\phi_{3, in}^{\Pi}$	$\phi_{3, in}^{\Pi}$	$\phi_{3, in}^{\Pi}$	$\phi_{3, in}^{\Pi}$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$
	$\phi_{4, in}$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^{\Pi}$	$\phi_{4, in}^{\Pi}$	$\phi_{4, in}^{\Pi}$	$\phi_{4, in}^{\Pi}$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^I$
ϕ^-	$\overline{\phi}_{1, in}$	$-\phi_{1, in}^{\Pi}$	$-\phi_{1, in}^{\Pi}$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$-\phi_{1, in}^{\Pi}$	$-\phi_{1, in}^{\Pi}$
	$\overline{\phi}_{2, in}$	$-\phi_{2, in}^{\Pi}$	$-\phi_{2, in}^{\Pi}$	$-\phi_{2, in}^{\Pi}$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$-\phi_{2, in}^{\Pi}$
	$\overline{\phi}_{3, in}$	$-\phi_{3, in}^{\Pi}$	$-\phi_{3, in}^{\Pi}$	$-\phi_{3, in}^{\Pi}$	$-\phi_{3, in}^{\Pi}$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$
	$\overline{\phi}_{4, in}$	$\phi_{4, in}^I$	$-\phi_{4, in}^{\Pi}$	$-\phi_{4, in}^{\Pi}$	$-\phi_{4, in}^{\Pi}$	$-\phi_{4, in}^{\Pi}$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^I$

Tabela 5.1 - Configuração Completa das Condições de Contorno

5.1.1.8.2. AS CONFIGURAÇÕES PARA A PRESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO DO FLUXO DE PARIDADE PAR (ϕ^+)

Neste trabalho só serão apresentados os resultados referentes a ϕ^+ que é o fluxo, os resultados relativos à corrente ϕ^- não serão apresentados. Neste caso as configurações para as condições de contorno que serão utilizadas nesta pesquisa são dadas pela tabela (5.2), que são referentes a ϕ^+ . As configurações da tabela (5.3) que se referem às condições de contorno de ϕ^- não serão utilizadas, porém serão mostradas para efeito de ilustração.

		b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
		$0 \rightarrow x \cdot 3$	$x \cdot 3 \rightarrow x \cdot 2$	$x \cdot 2 \rightarrow 2 \cdot x \cdot 3$	$2 \cdot x \cdot 3 \rightarrow x$	$x \rightarrow 2 \cdot x \cdot 3$	$2 \cdot x \cdot 3 \rightarrow x \cdot 3$	$x \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot x \cdot 3$	$2 \cdot x \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot x$
ϕ^+	$\phi_{1, in}$	$\phi_{1, in}^{\text{II}}$	$\phi_{1, in}^{\text{II}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$\phi_{1, in}^{\text{II}}$	$\phi_{1, in}^{\text{II}}$
	$\phi_{2, in}$	$\phi_{2, in}^{\text{II}}$	$\phi_{2, in}^{\text{II}}$	$\phi_{2, in}^{\text{II}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$\phi_{2, in}^{\text{II}}$
	$\phi_{3, in}$	$\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$
	$\phi_{4, in}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$	$\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$

Tabela 5.2 - Condições de Contorno para o Fluxo de Paridade Par

5.1.1.8.3. AS CONFIGURAÇÕES PARA A PRESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO DO FLUXO DE PARIDADE ÍMPAR (ϕ^-)

Conforme mencionado anteriormente, essas configurações da tabela (5.3) não serão utilizadas nesse trabalho.

		b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
		$0 \rightarrow x \cdot 3$	$x \cdot 3 \rightarrow x \cdot 2$	$x \cdot 2 \rightarrow 2 \cdot x \cdot 3$	$2 \cdot x \cdot 3 \rightarrow x$	$x \rightarrow 2 \cdot x \cdot 3$	$2 \cdot x \cdot 3 \rightarrow x \cdot 3$	$x \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot x \cdot 3$	$2 \cdot x \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot x$
ϕ^-	$\phi_{1, in}$	$-\phi_{1, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{1, in}^{\text{II}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$\phi_{1, in}^{\text{I}}$	$-\phi_{1, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{1, in}^{\text{II}}$
	$\phi_{2, in}$	$-\phi_{2, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{2, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{2, in}^{\text{II}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$\phi_{2, in}^{\text{I}}$	$-\phi_{2, in}^{\text{II}}$
	$\phi_{3, in}$	$-\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{3, in}^{\text{II}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$	$\phi_{3, in}^{\text{I}}$
	$\phi_{4, in}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$	$-\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$-\phi_{4, in}^{\text{II}}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$	$\phi_{4, in}^{\text{I}}$

Tabela 5.3 - Condições de Contorno para o Fluxo de Paridade Ímpar

5.1.1.8.4. AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DO FLUXO DE

PARIDADE PAR (ϕ^+) PARA CADA DIREÇÃO DE INCIDÊNCIA DE RADIAÇÃO ($\underline{\Omega}_i$) NO PLANO (X, Y)

Serão mostradas pelas figuras (5.2 – 3 – 4 – 5) com as suas respectivas tabelas (5.4 – 5 – 6 – 7), a configuração das condições de contorno para cada direção de incidência de radiação, ou seja, para as direções $\underline{\Omega}_i$ (plano (x,y)), com $i = 1, 2, 3$ e 4.

Configuração das condições de fronteira para a direção $\underline{\Omega}_1$ ($i = 1$):

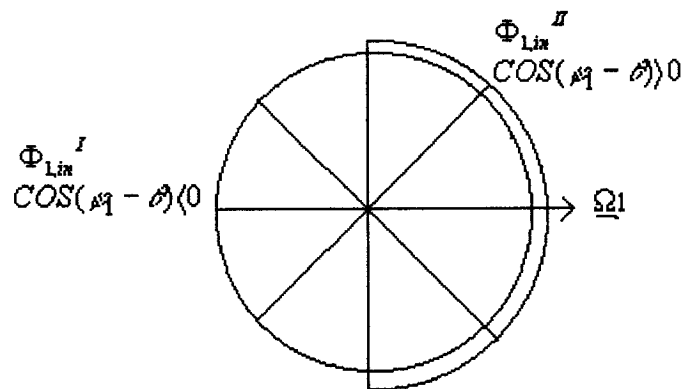


Figura 5.2 - Direção $\underline{\Omega}_1$

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A DIREÇÃO 1(i= 1)

	b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
	$0 \rightarrow x/4$	$x/4 \rightarrow x/2$	$x/2 \rightarrow 3x/4$	$3x/4 \rightarrow x$	$x \rightarrow 5x/4$	$5x/4 \rightarrow 3x/2$	$3x/2 \rightarrow 7x/4$	$7x/4 \rightarrow 2x$
$\phi_{1, in}$	$\phi_{1, in}^{II}$	$\phi_{1, in}^{II}$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^I$	$\phi_{1, in}^{II}$	$\phi_{1, in}^{II}$

Tabela 5.4 - Condi ções de Contorno para a Direção $\underline{\Omega}_1$

Configuração das condições de fronteira para a direção $\underline{\Omega}_2$ ($i = 2$):

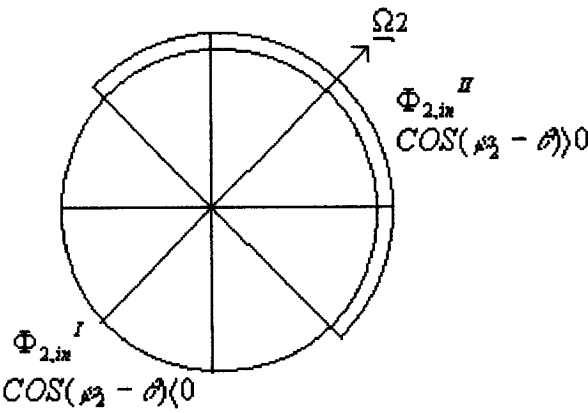


Figura 5.3 - Direção $\underline{\Omega}_2$

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A DIREÇÃO 2 ($i= 2$)

	b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
	$0 \rightarrow x:4$	$x:4 \rightarrow x:2$	$x:2 \rightarrow 2x:4$	$2x:4 \rightarrow x$	$x \rightarrow 5x:4$	$5x:4 \rightarrow 6x:8$	$6x:8 \rightarrow 7x:8$	$7x:8 \rightarrow 2x$
$\phi_{2, in}$	$\phi_{2, in}^{II}$	$\phi_{2, in}^{II}$	$\phi_{2, in}^{II}$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^I$	$\phi_{2, in}^{II}$

Tabela 5.5 - Condições de Contorno para a Direção $\underline{\Omega}_2$

Configuração das condições de fronteira para a direção $\underline{\Omega}_3$ ($i = 3$):

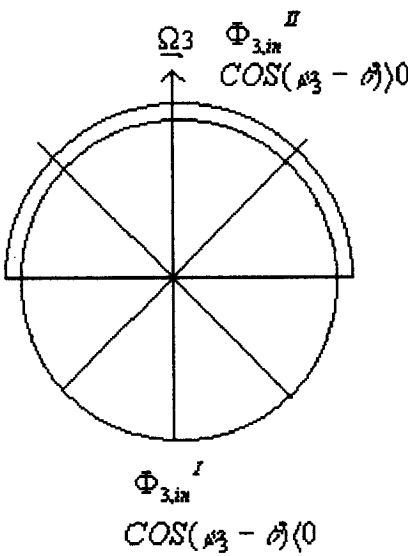


Figura 5.4 - Direção $\underline{\Omega}_3$

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A DIREÇÃO 3 ($i= 3$)

	b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
	$u \rightarrow x \cdot 4$	$x \cdot 4 \rightarrow x \cdot 2$	$x \cdot 2 \rightarrow 2 \cdot x \cdot 4$	$2 \cdot x \cdot 4 \rightarrow x$	$x \rightarrow 2 \cdot x \cdot 4$	$2 \cdot x \cdot 4 \rightarrow x \cdot 4$	$x \cdot 4 \rightarrow 2 \cdot x \cdot 4$	$2 \cdot x \cdot 4 \rightarrow 2 \cdot x$
$\phi_{3, in}$	$\phi_{3, in}^{II}$	$\phi_{3, in}^{II}$	$\phi_{3, in}^{II}$	$\phi_{3, in}^{II}$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$	$\phi_{3, in}^I$

Tabela 5.6 - Condições de Contorno para a Direção $\underline{\Omega}_3$

Configuração das condições de fronteira para a direção $\underline{\Omega}_4$ ($i = 4$):

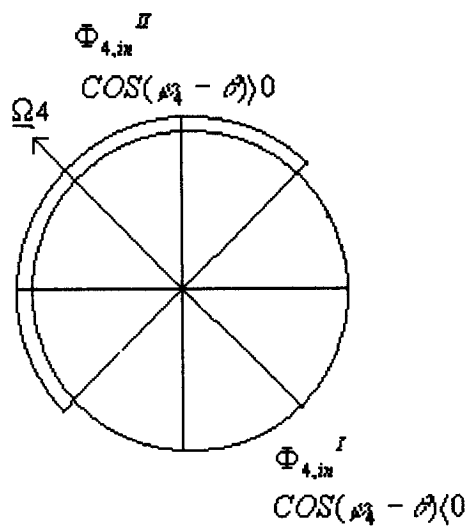


Figura 5.5 - Direção $\underline{\Omega}_4$

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A DIREÇÃO 4 ($i= 4$)

	b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
	$0 \rightarrow x_4$	$x_4 \rightarrow x_2$	$x_2 \rightarrow x_4$	$x_4 \rightarrow x$	$x \rightarrow x_4$	$x_1 \rightarrow x_4$	$x_4 \rightarrow x_4$	$x_4 \rightarrow x$
$\phi_{4, in}$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^{II}$	$\phi_{4, in}^{II}$	$\phi_{4, in}^{II}$	$\phi_{4, in}^{II}$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^I$	$\phi_{4, in}^I$

Tabela 5.7 - Condições de Contorno para a Direção $\underline{\Omega}_4$

onde a figura (5.6) ilustra a localização dos b_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8.

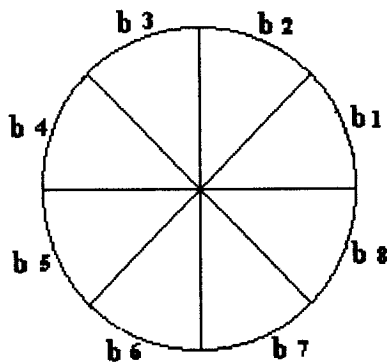


Figura 5.6 - Contorno do Sistema

5.1.1.9. A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

A solução do problema direto é o fluxo $\phi^+[cm^{-2}s^{-1}]$.

5.2. A INVESTIGAÇÃO DA SENSIBILIDADE DO FLUXO DE RADIAÇÃO (ϕ^+) PRESCREVENDO-SE A MESMA CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA CADA VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE NO INTERIOR DA GEOMETRIA CIRCULAR NO PLANO (X, Y)

Os resultados que serão apresentados nesta seção com o objetivo de investigar a sensibilidade do fluxo ϕ^+ consideram como referência as simulações sem a perturbação. As simulações com a não-homogeneidade levam em conta a variação da posição dela no interior do círculo, dada uma condição de contorno fixa, assim como

todos os outros parâmetros.

A condição de contorno prescrita nessa simulação é representada, a seguir, pela tabela (5.8).

PRESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO									
		b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
		$v \rightarrow x, z$	$x, z \rightarrow v$	$x, z \rightarrow \phi, \psi$	$\phi, \psi \rightarrow x, z$	$x \rightarrow \phi, \psi, z$	$\phi, \psi, z \rightarrow x$	$\phi, \psi \rightarrow \psi, z$	$\psi, z \rightarrow \phi, \psi$
ϕ^+	$\phi_{1, in}$	1	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{2, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{3, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{4, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 5.8 - Condição de Contorno Prescrita

As posições do centro da não-homogeneidade em *cm* são:

para a primeira simulação:

$C_1 = (0,7;0,3);$

para a segunda simulação:

$C_2 = (0,3;0,7);$

para a terceira simulação:

$C_3 = (-0,3;0,7);$

para a quarta simulação:

$$C_4 = (-0,7;0,3);$$

para a quinta simulação:

$$C_5 = (-0,7;-0,3);$$

para a sexta simulação:

$$C_6 = (-0,3;-0,7);$$

para a sétima simulação:

$$C_7 = (0,3;0,7);$$

para a oitava simulação:

$$C_8 = (0,7;-0,3);$$

5.2.1. A MALHA TRIANGULAR DE ELEMENTOS FINITOS PARA A GEOMETRIA DO PROBLEMA SEM A PERTURBAÇÃO

A figura (5.7) representa a malha de elementos finitos para a geometria do problema sem a perturbação.

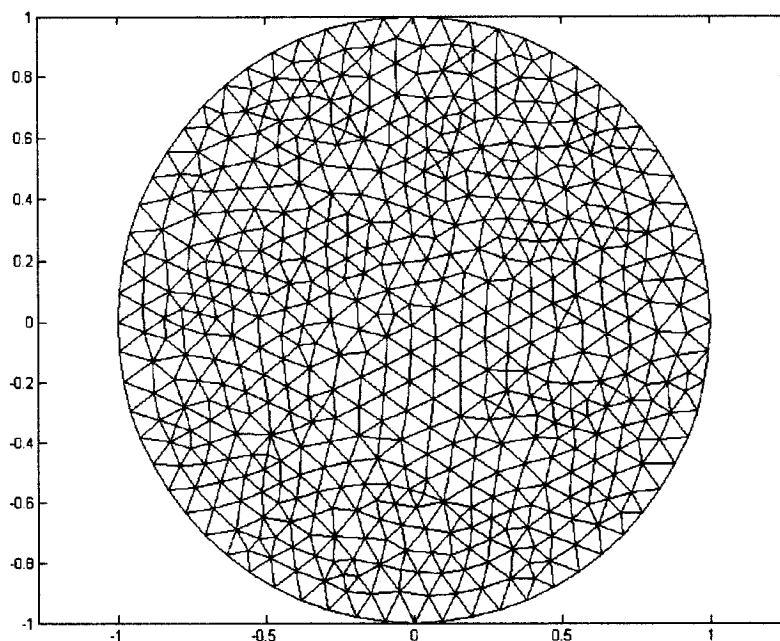


Figura 5.7 - Malha de Elementos Finitos Triangulares da Geometria Homogênea

5.2.2. AS MALHAS COM A PERTURBAÇÃO E A ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DO FLUXO DE RADIAÇÃO PERANTE A VARIAÇÃO DE POSIÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE

A partir de agora serão apresentadas as malhas para cada posição da perturbação, assim como as representações do fluxo sem e com a não-homogeneidade, também serão mostrados os resultados dos fluxos nos pontos nodais da fronteira de modo a comparar as duas situações e observar a sensibilidade do fluxo.

Os resultados da primeira simulação são mostrados a seguir pelas figuras (5.8 – 9 – 10 – 11 – 12).

A figura (5.8) representa a malha para a primeira simulação.

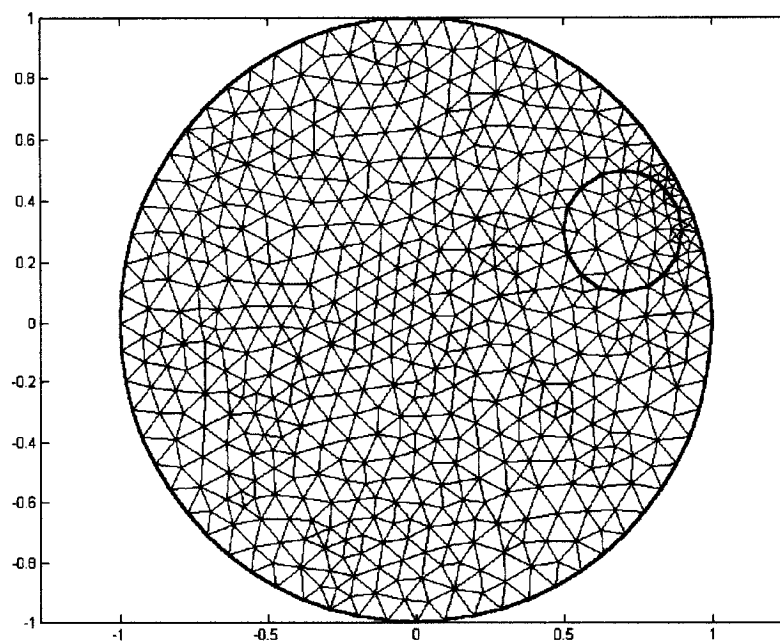


Figura 5.8 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

A figura (5.9) ilustra a passagem do fluxo através da superfície com e sem perturbação. Observa-se a diferença nos dois casos, ou seja, a sensibilidade da região não-homogênea mediante a passagem do fluxo.

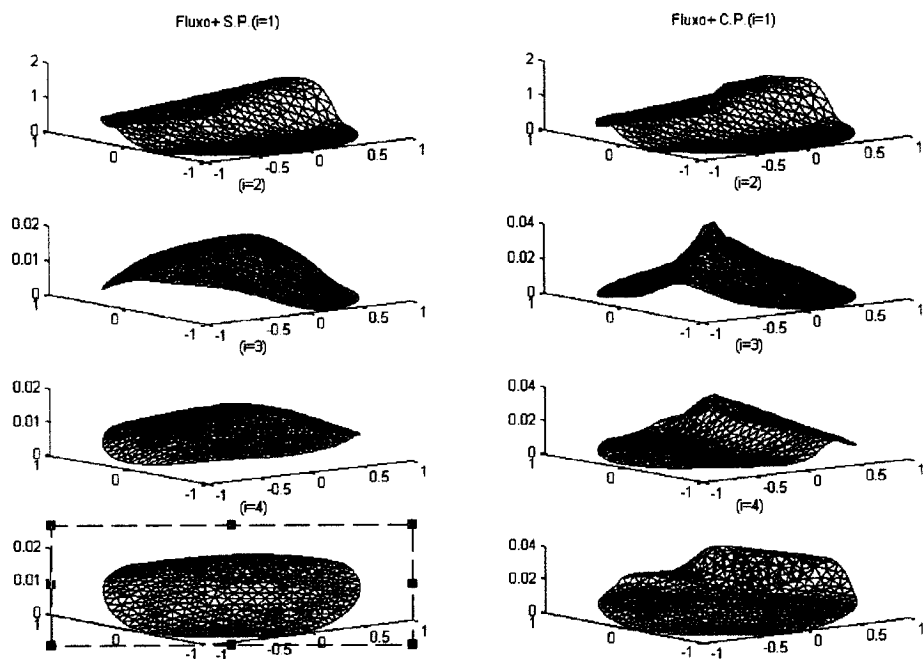


Figura 5.9 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

As figuras (5.10 – 11) representam o fluxo que passa pela fronteira dos problemas homogêneo e não-homogêneo, nas quais o pico maior é o fluxo incidente enquanto que o menor é o fluxo emergente. A diferença entre os dois picos se dá devido ao sistema ser espalhador e absorvedor.

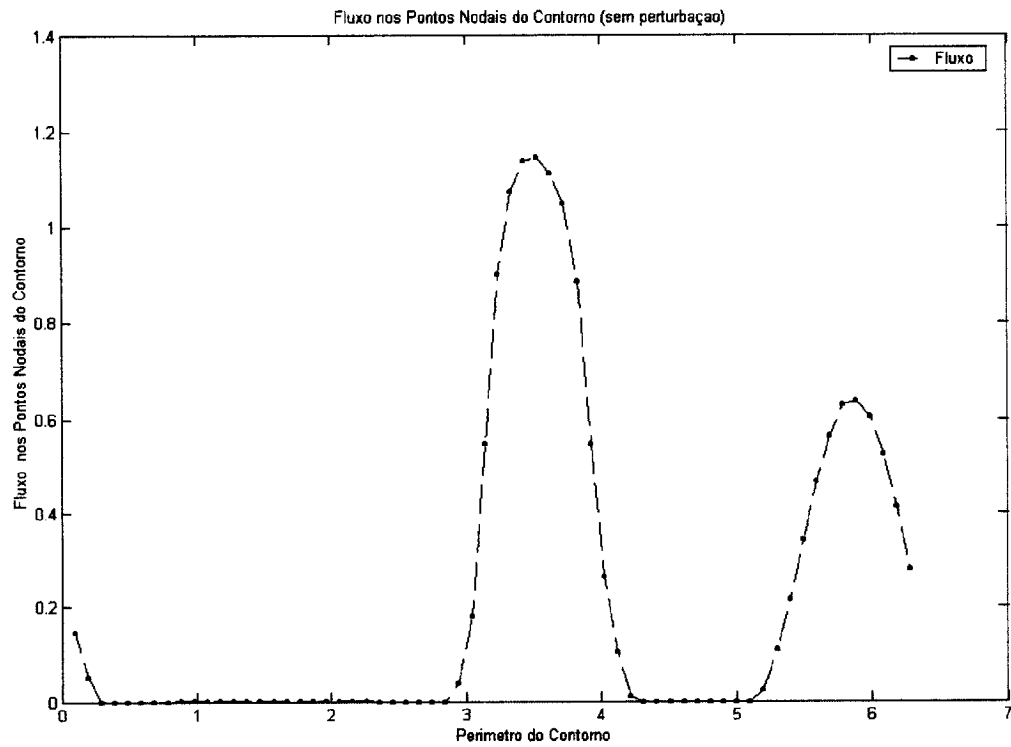


Figura 5.10 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

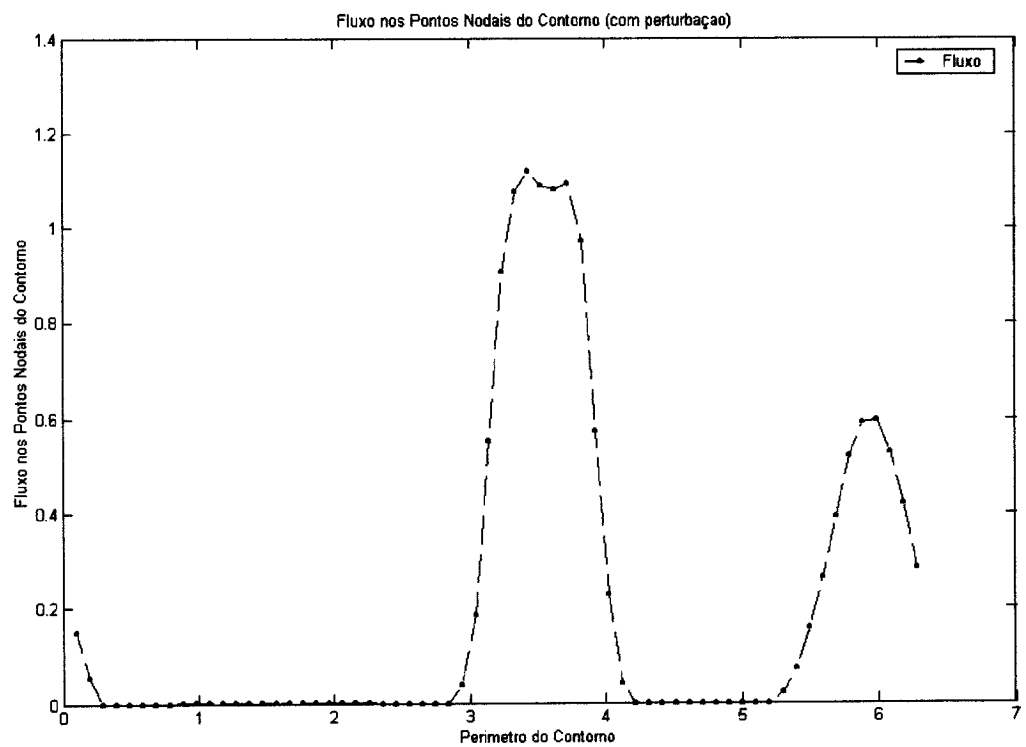


Figura 5.11 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

A figura (5.12) compara o caso homogêneo com o não-homogêneo, pode-se ver que no segundo caso o fluxo emergente é menor que o do primeiro e isso se dá devido à sensibilidade ao defeito.

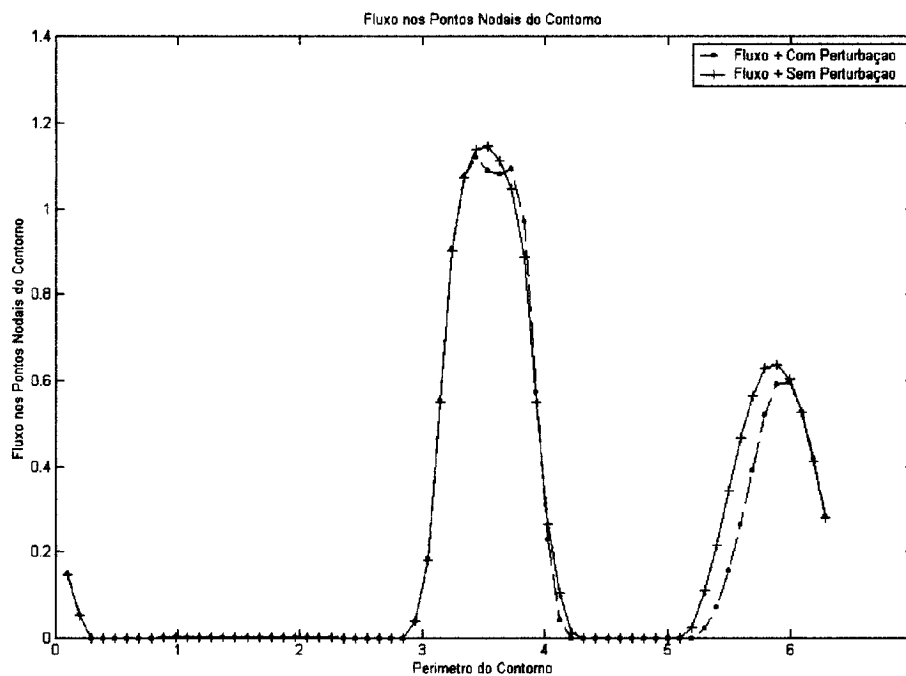


Figura 5.12 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados da segunda simulação são mostrados a seguir pelas figuras (5.13 – 14 – 15 – 16).

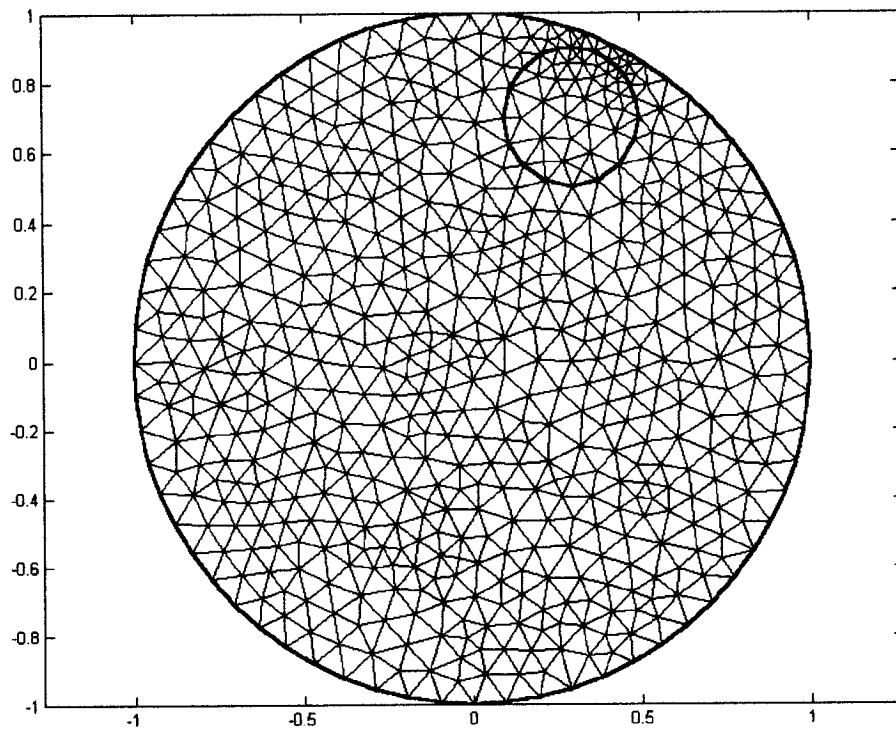


Figura 5.13 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

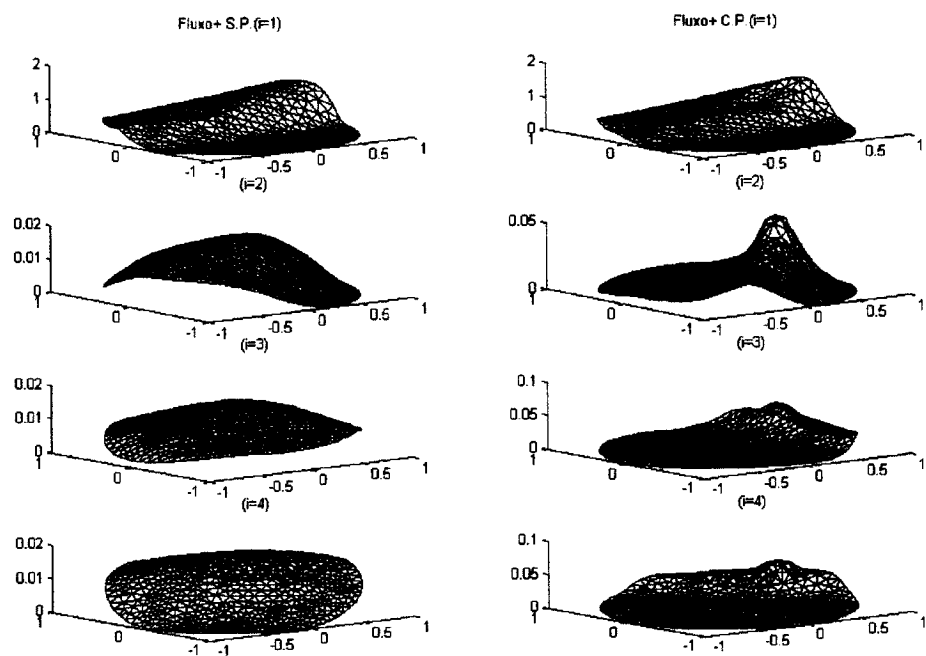


Figura 5.14 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

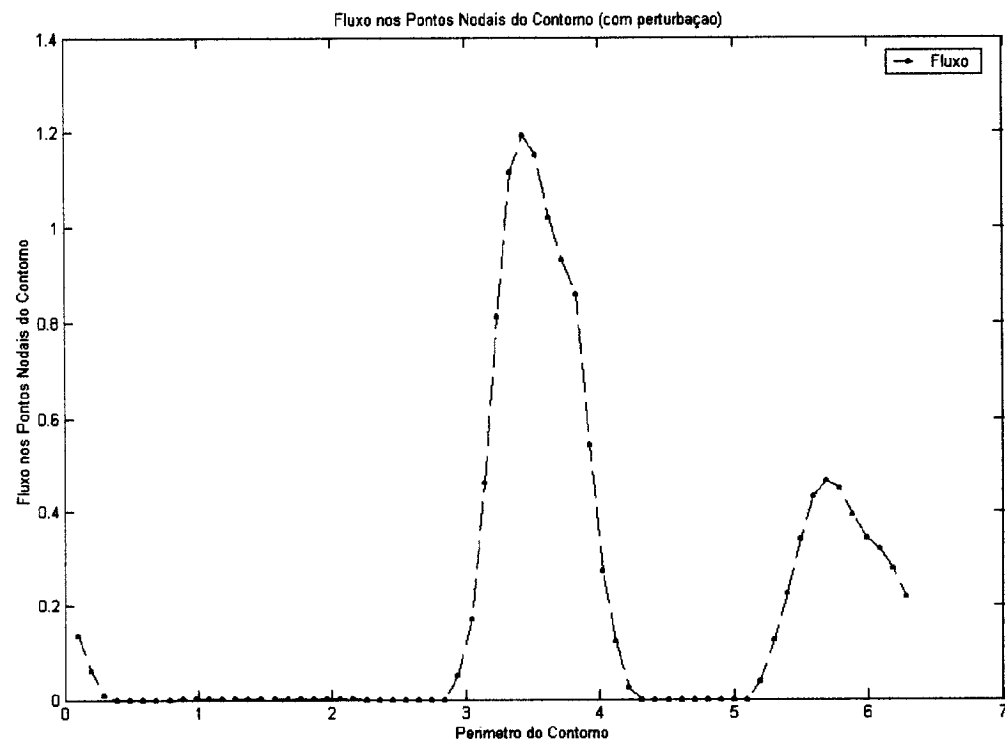


Figura 5.15 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

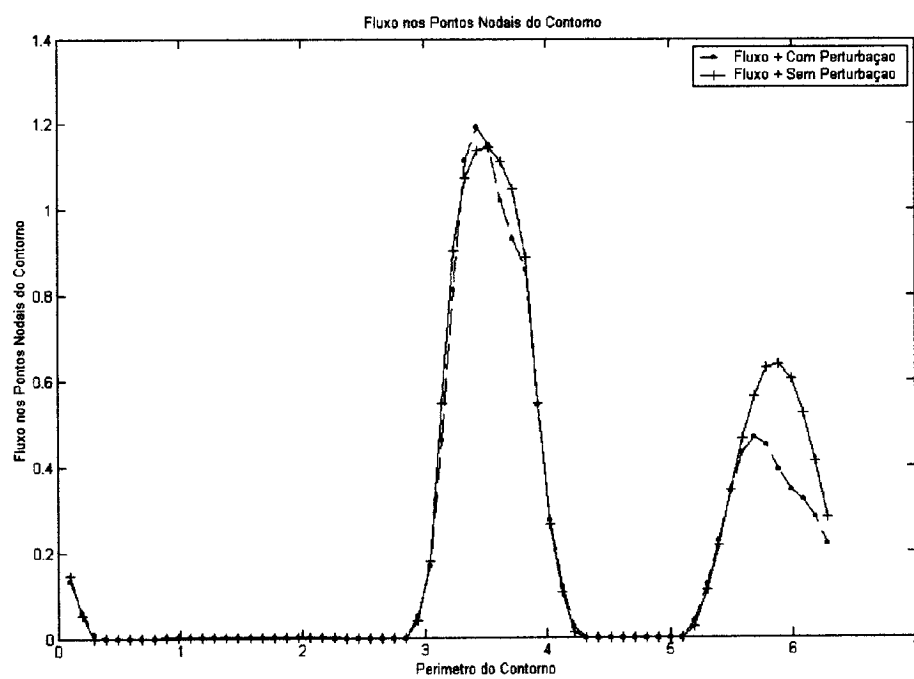


Figura 5.16 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados da terceira simulação são mostrados a seguir pelas figuras

(5.17 – 18 – 19 – 20).

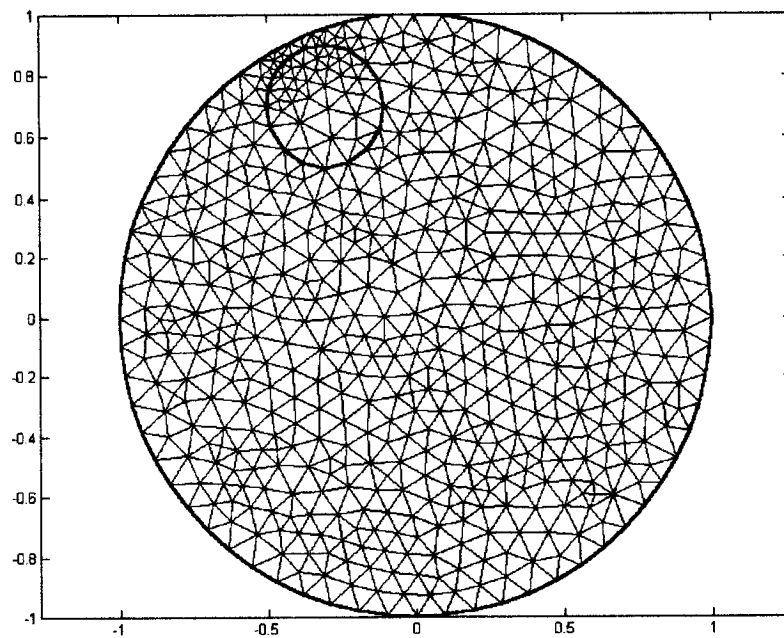


Figura 5.17 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

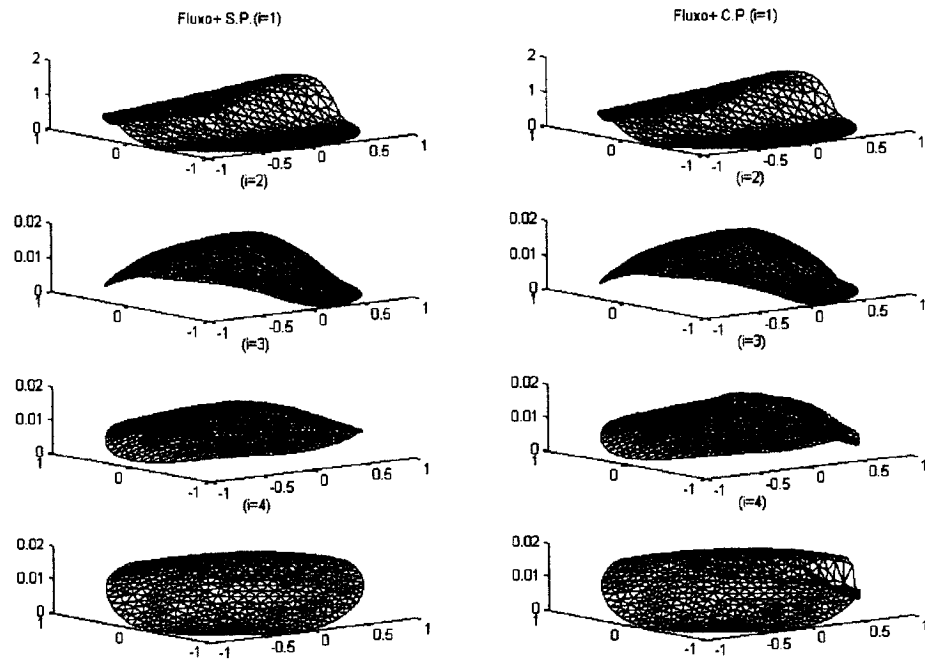


Figura 5.18 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

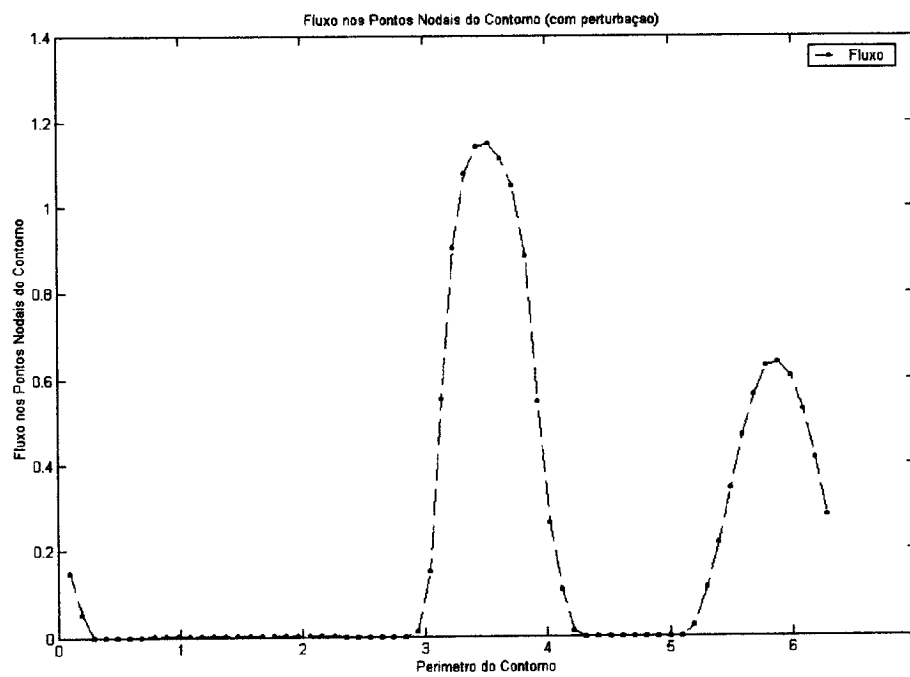


Figura 5.19 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

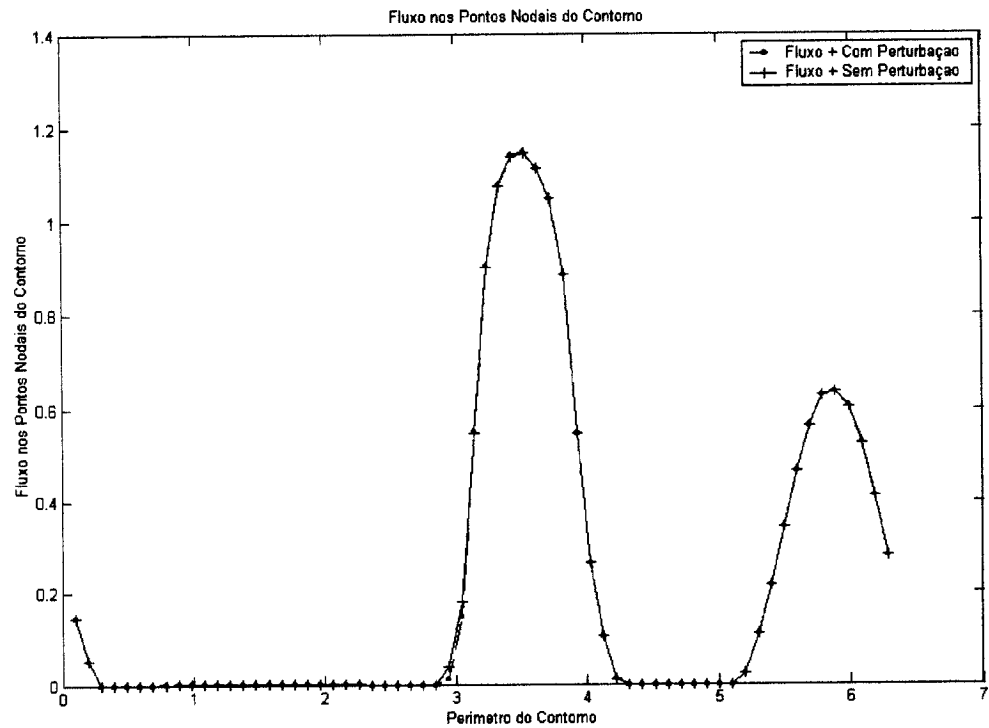


Figura 5.20 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados da quarta simulação são mostrados a seguir pelas figuras (5.21 – 22 – 23 – 24).

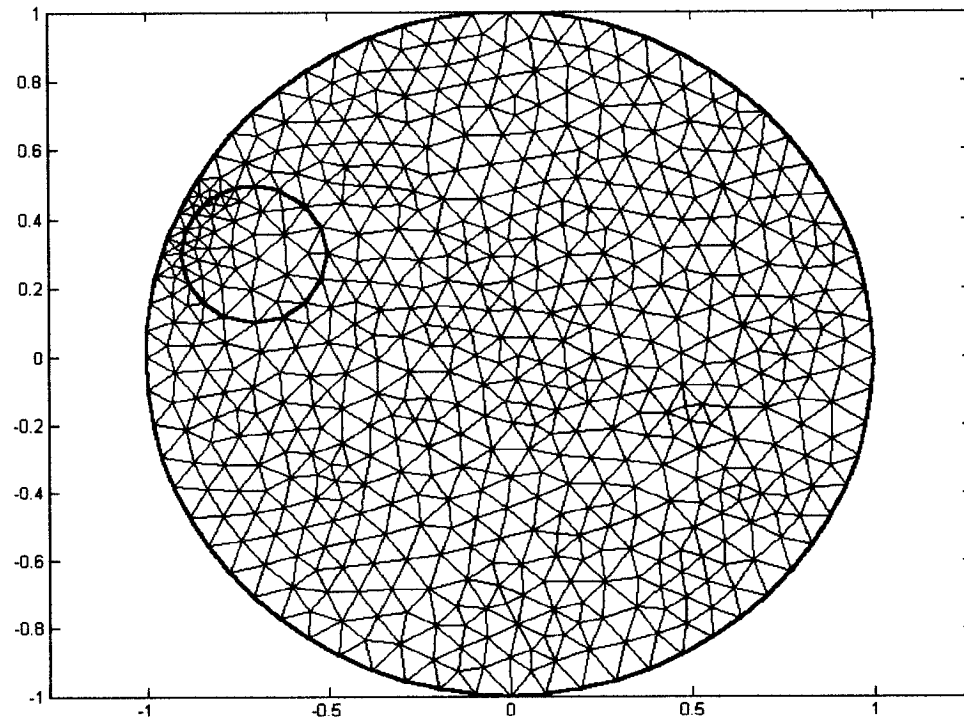


Figura 5.21 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

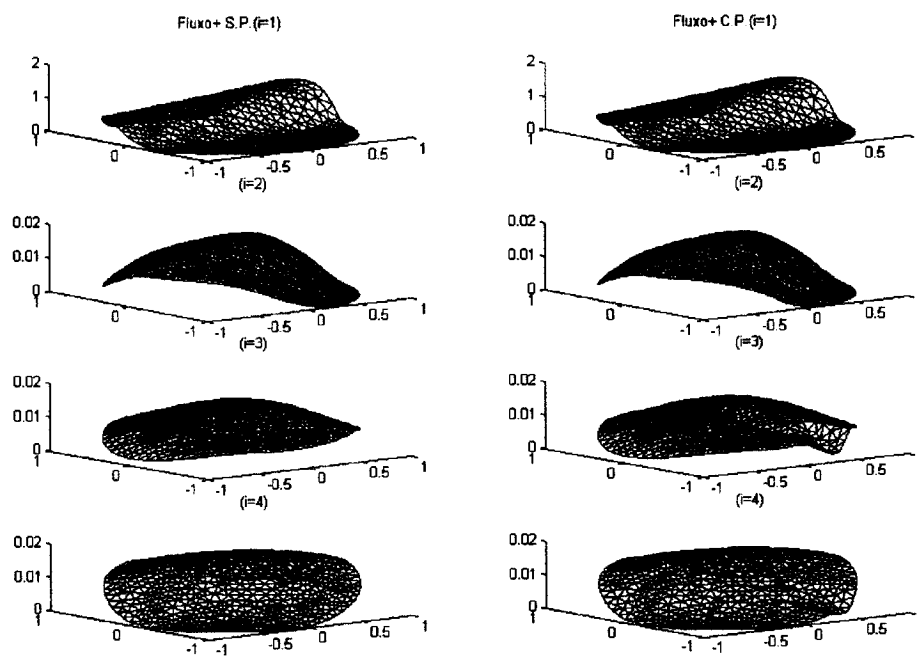


Figura 5.22 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

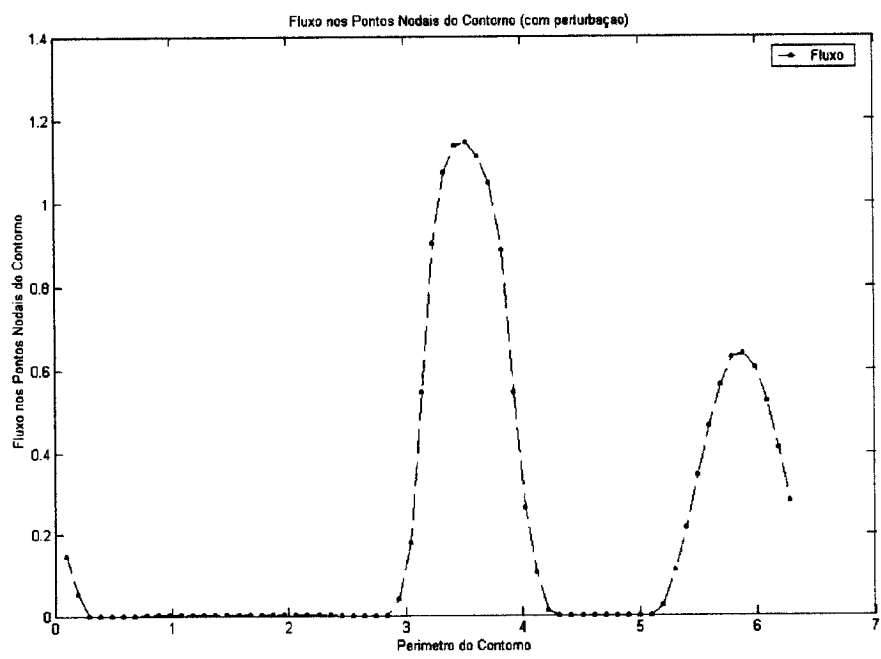


Figura 5.23 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

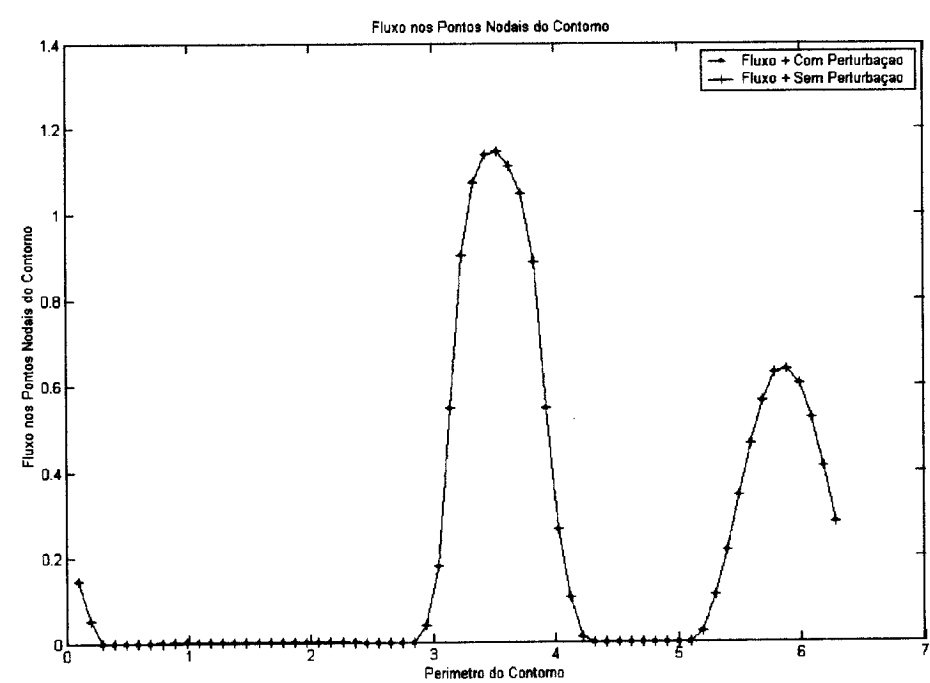


Figura 5.24 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados da quinta simulação são mostrados a seguir pelas figuras (5.25 – 26 – 27 – 28).

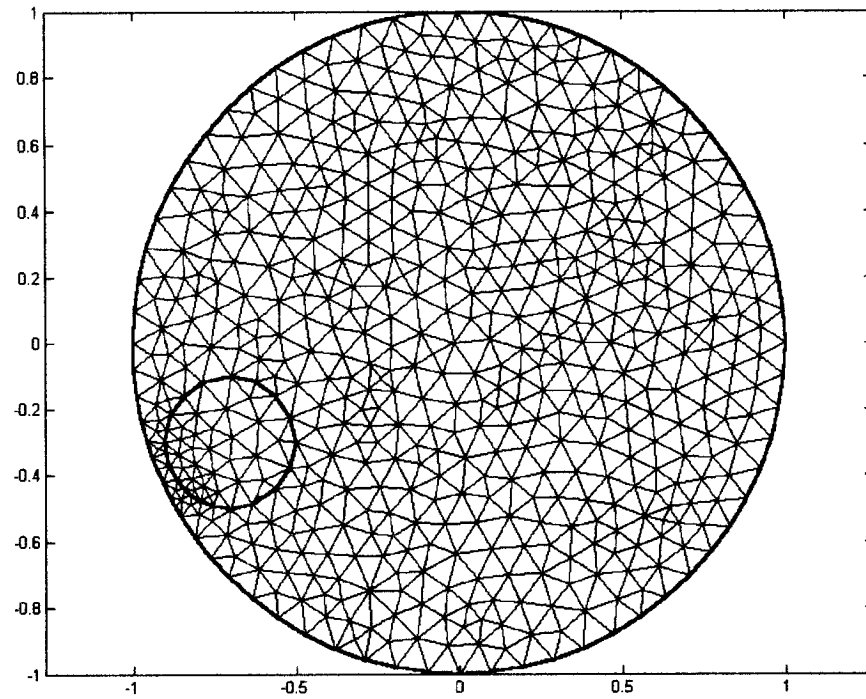


Figura 5.25 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

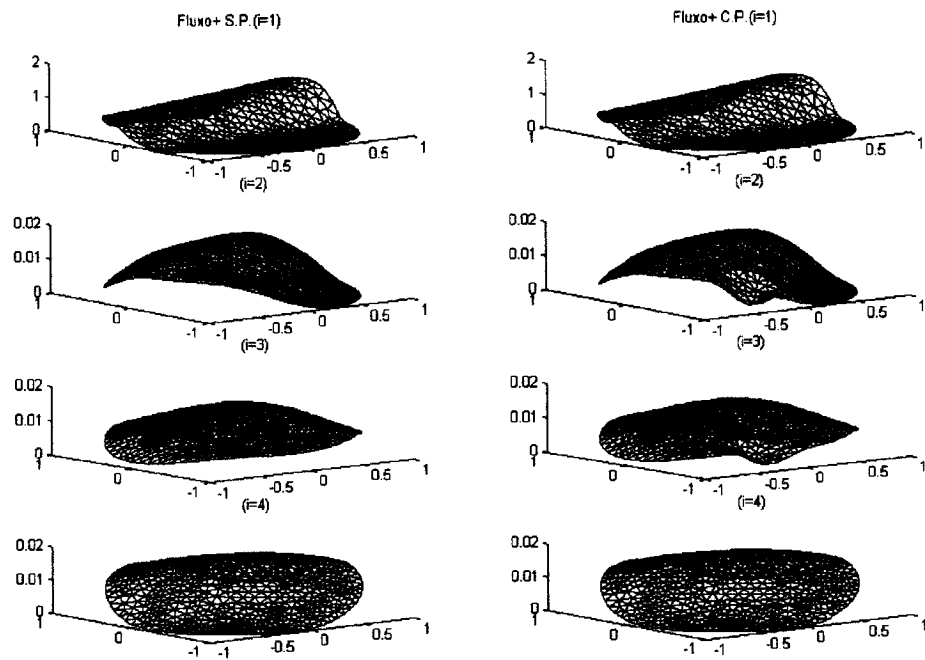


Figura 5.26 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

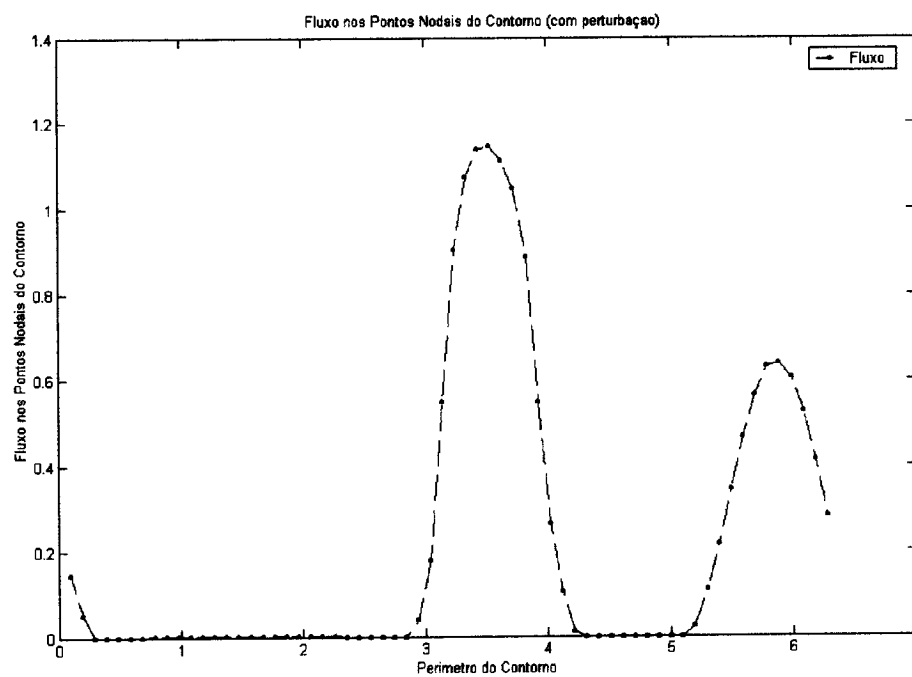


Figura 5.27 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

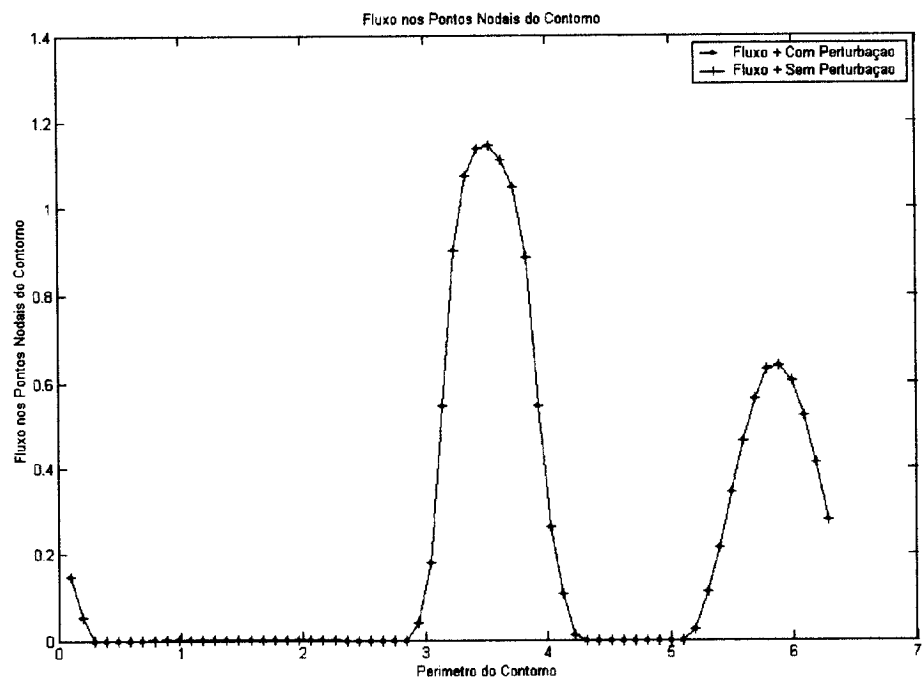


Figura 5.28 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados da sexta simulação são mostrados a seguir pelas figuras (5.29 – 30 – 31 – 32).

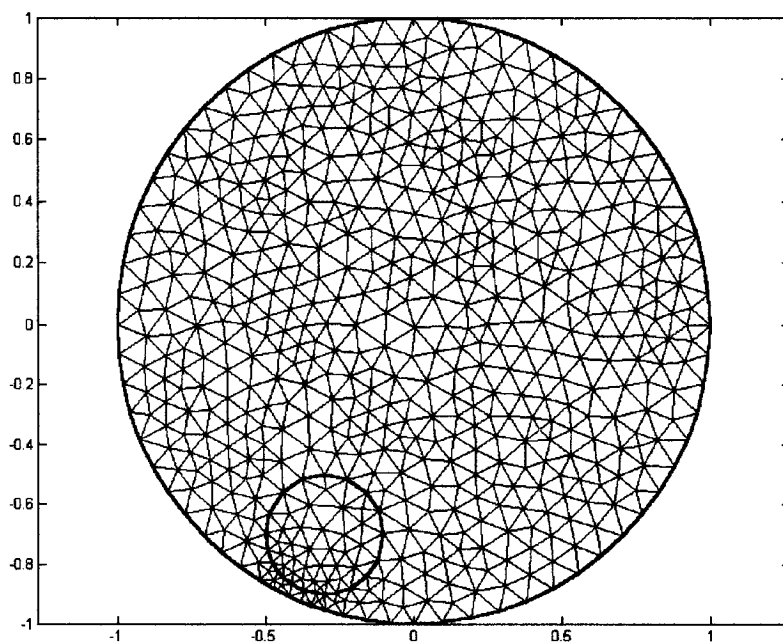


Figura 5.29 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

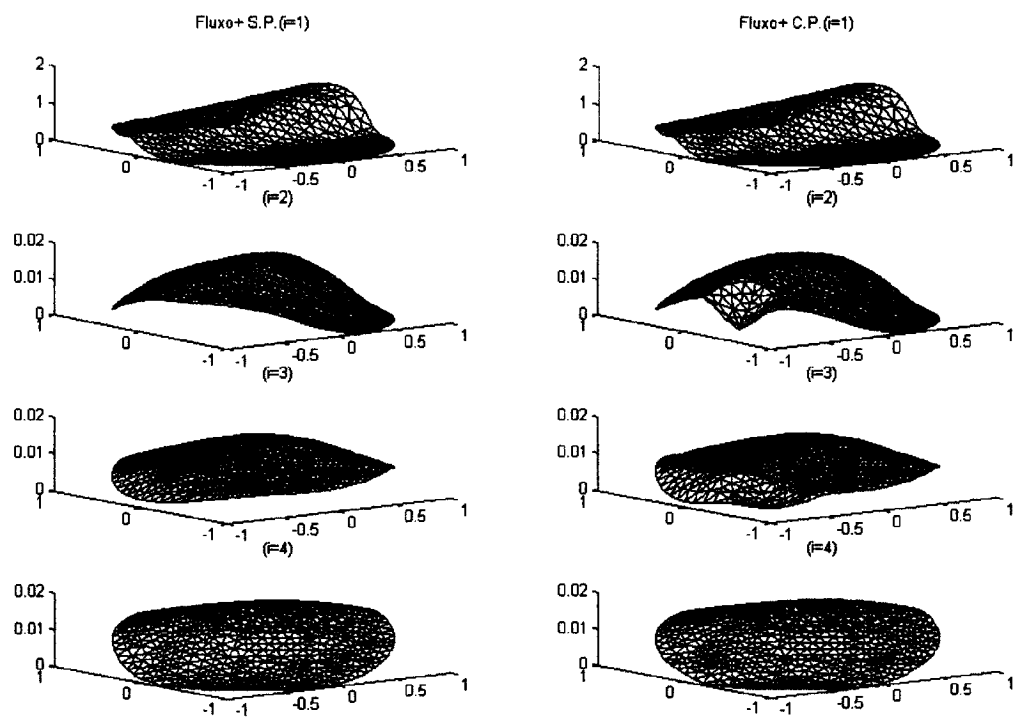


Figura 5.30 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

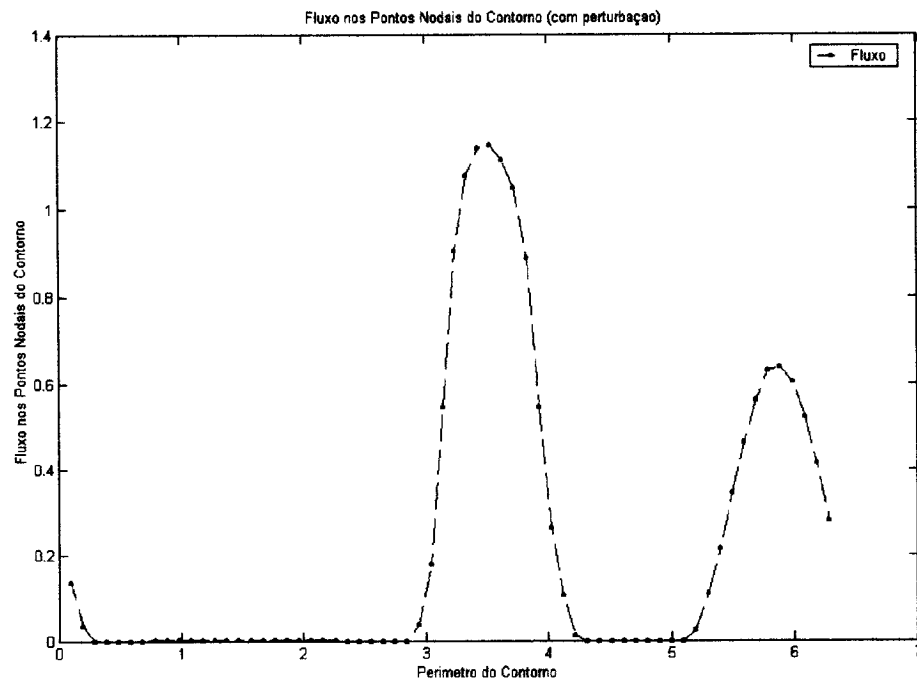


Figura 5.31 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

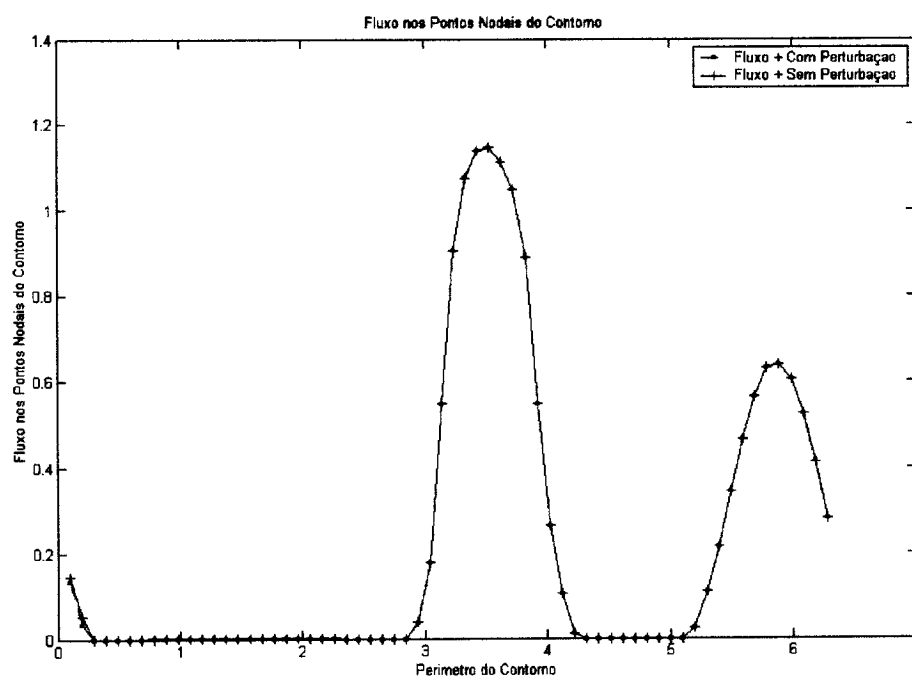


Figura 5.32 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados da sétima simulação são mostrados a seguir pelas figuras

(5.33 – 34 – 35 – 36).

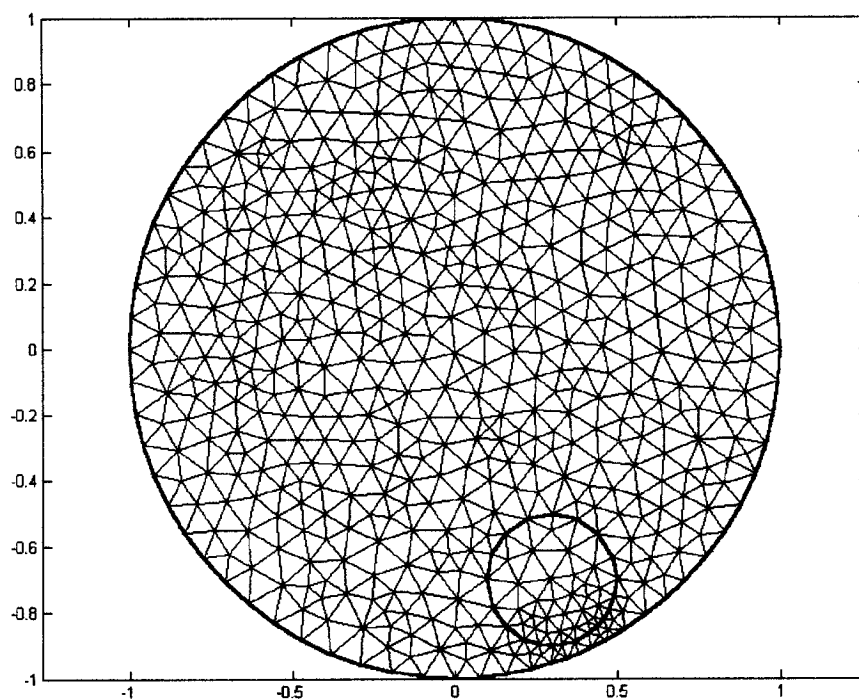


Figura 5.33 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

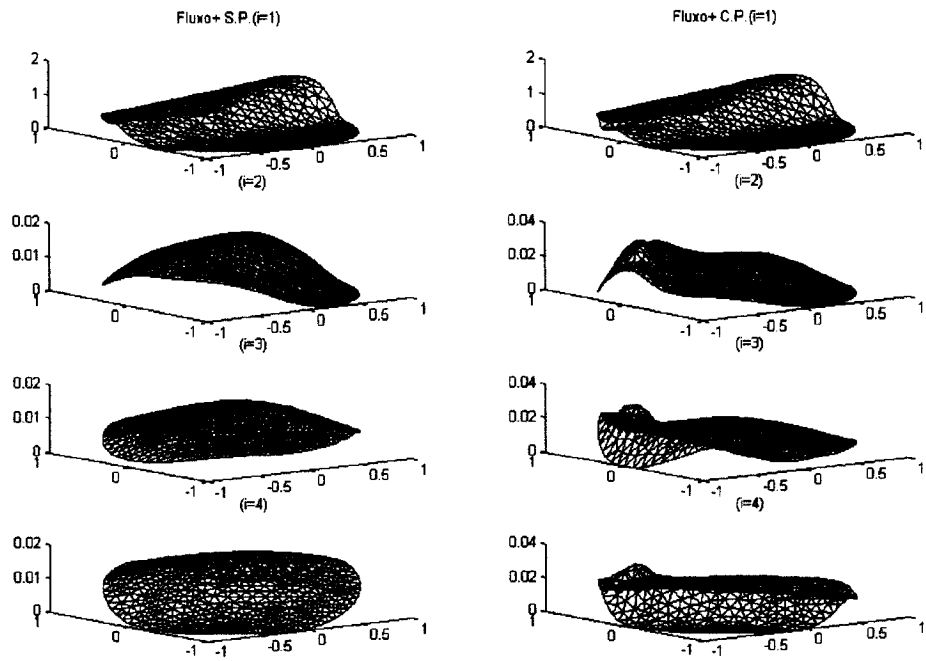


Figura5.34 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

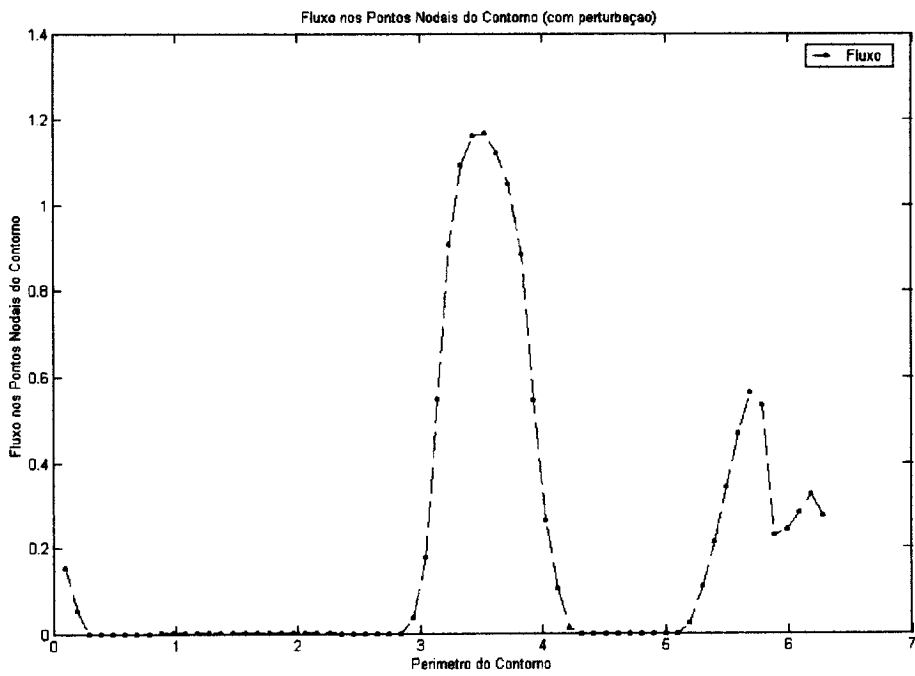


Figura 5.35 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

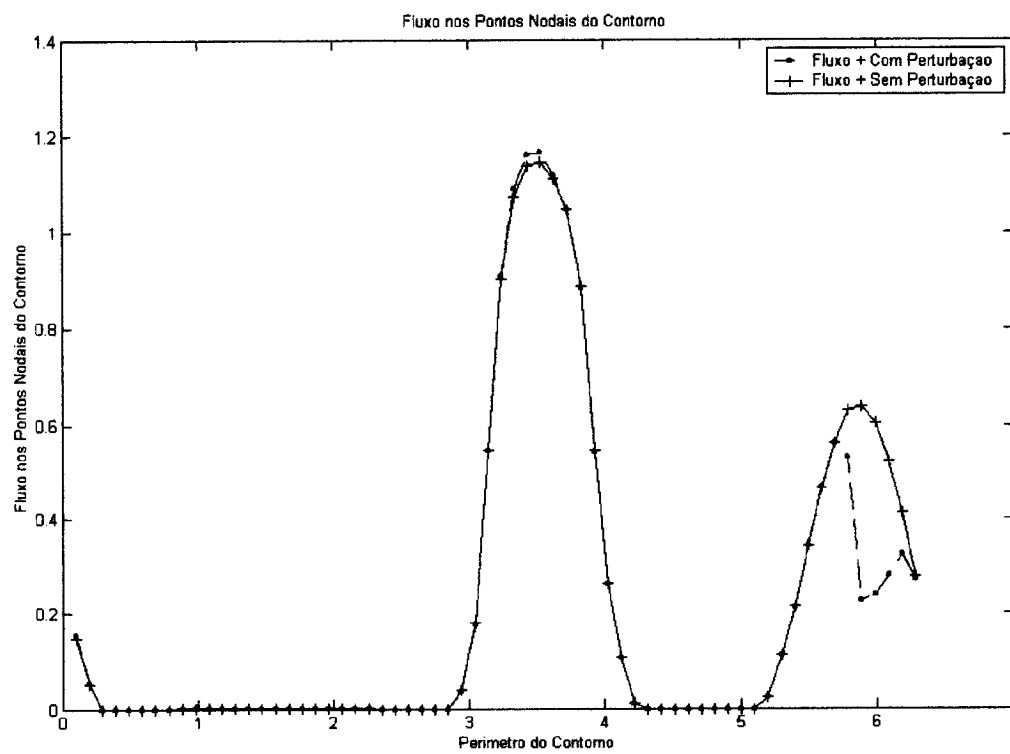


Figura 5.36 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados da oitava simulação são mostrados a seguir pelas figuras

(5.37 – 38 – 39 – 40).

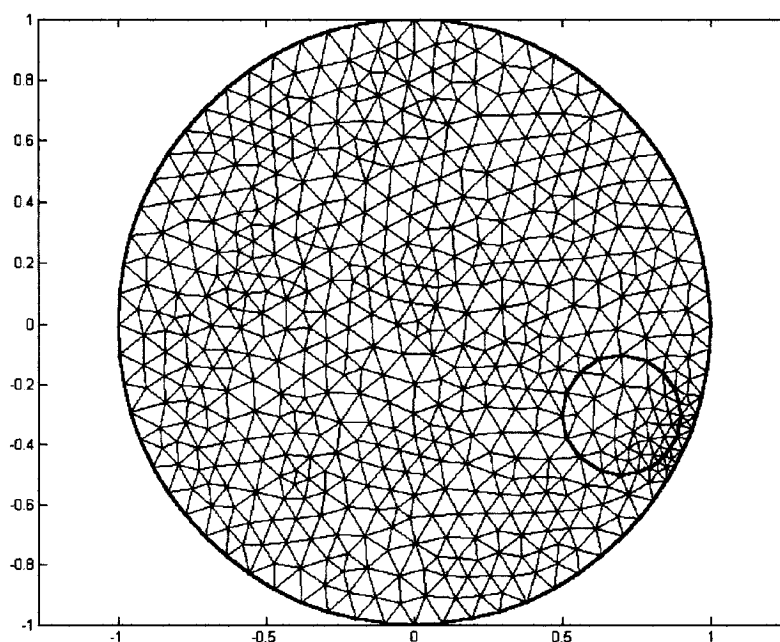


Figura 5.37 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

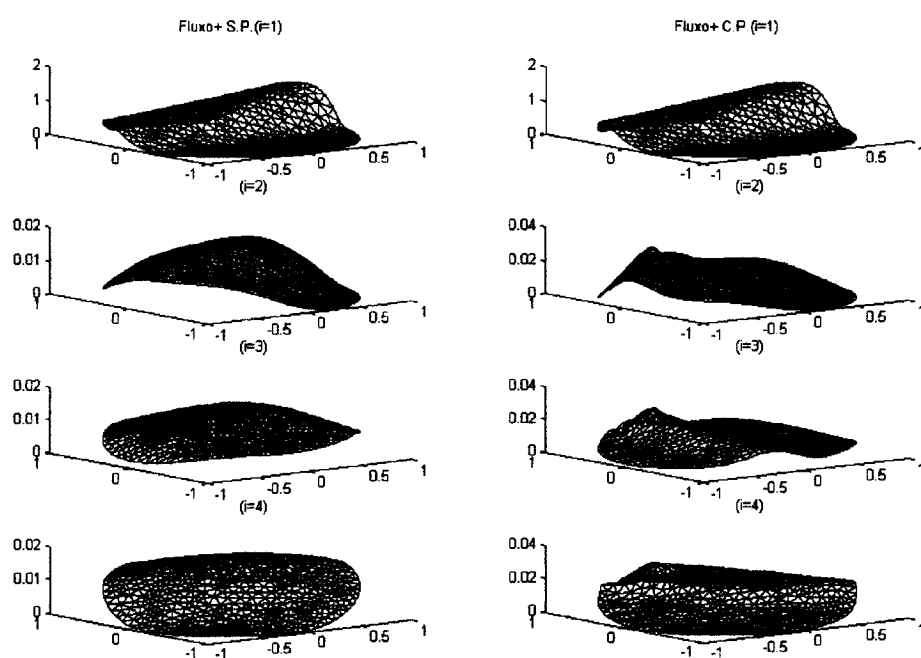


Figura 5.38 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

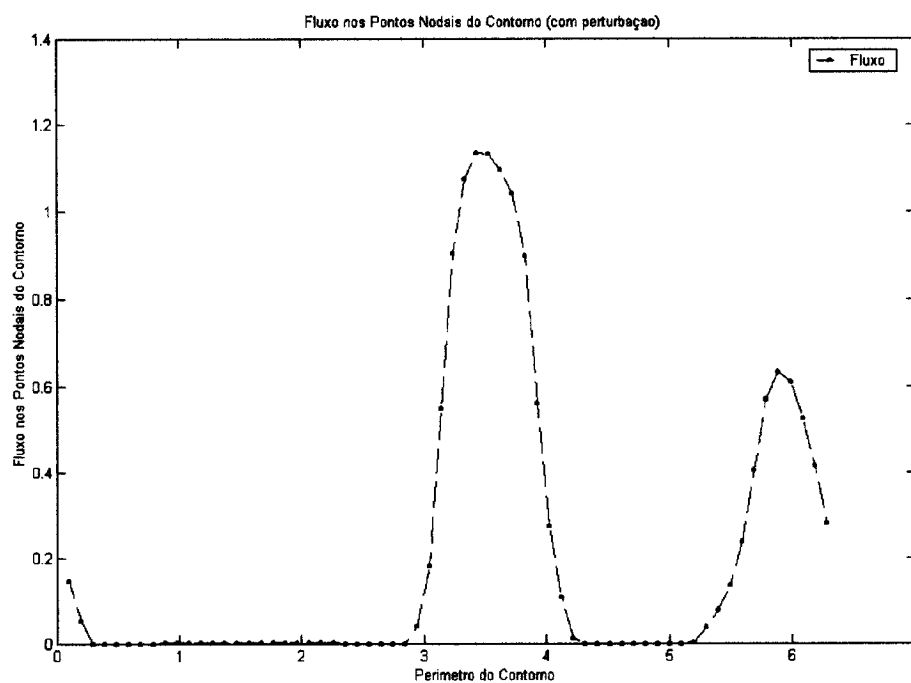


Figura 5.39 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

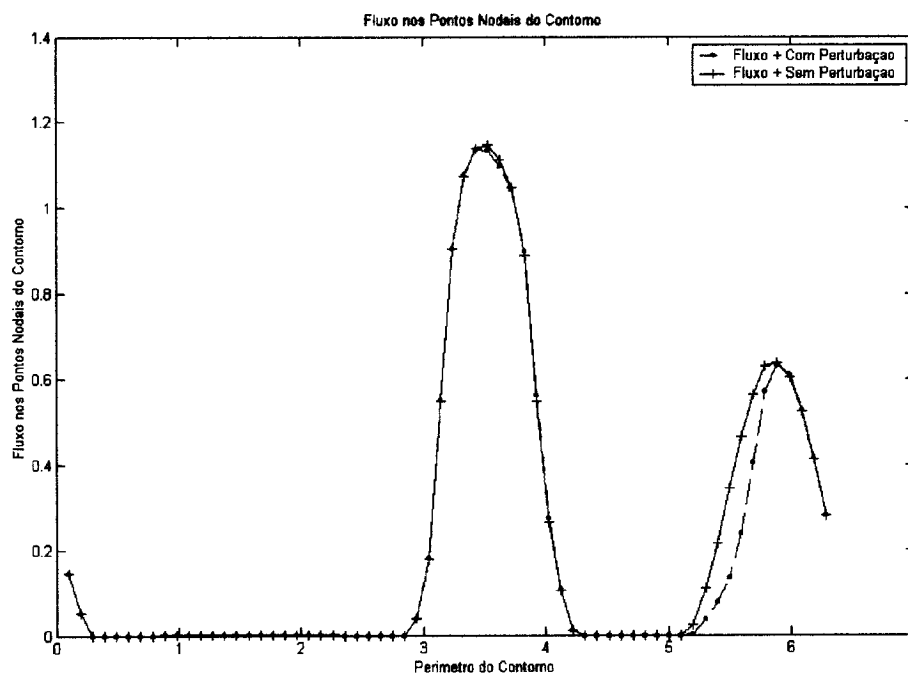


Figura 5.40 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

De acordo com as figuras geradas para as oito simulações pôde-se ver que a sensibilidade do fluxo diante da não-homogeneidade para a dada condição de fronteira só é notada nas simulações que envolvem o primeiro e o quarto quadrantes enquanto que nas demais simulações essa sensibilidade não é percebida.

5.3. A INVESTIGAÇÃO DA SENSIBILIDADE DO FLUXO DE RADIAÇÃO (φ^+) PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO PRESCRITAS SENDO FIXA A POSIÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE NO INTERIOR DA GEOMETRIA CIRCULAR NO PLANO (X, Y)

Nesta seção serão apresentados os resultados da sensibilidade do fluxo para diferentes condições de contorno e fixando-se a geometria e os parâmetros (coeficientes de absorção, de espalhamento e de condutividade).

O centro da não-homogeneidade, em *cm*, será fixo em $(x = 0,7; y = 0,2)$ com raio igual a $0,2$ *cm*.

5.3.1. A PRESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA DIFERENTES DIREÇÕES DE INCIDÊNCIA DE RADIAÇÃO ($\underline{\Omega}_i$) NO PLANO (X, Y) NA INVESTIGAÇÃO DA SENSIBILIDADE DO FLUXO DE RADIAÇÃO (φ^+)

As tabelas (5.8 – 9 – 10 – 11) representam as configurações das condições de contorno que serão utilizadas nos resultados que serão apresentados nesta seção.

Para a direção $\underline{\Omega}_1$ a condição de fronteira é dada pela tabela (5.8) que foi mostrada no início da seção anterior, a qual indica que a entrada da radiação é feita através do contorno b_1 como mostra a figura (5.6).

Para a direção $\underline{\Omega}_2$ a condição de fronteira é dada pela tabela (5.9) a qual indica que a entrada da radiação é feita através do contorno b_2 como mostra a figura (5.6).

PRESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO									
		b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
		0 → x:4	x:4 → x:2	x:2 → 3x:4	3x:4 → x	x → 5x:4	5x:4 → 6x:4	6x:4 → 7x:4	7x:4 → 2x
ϕ^+	$\phi_{1, \text{in}}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{2, \text{in}}$	1	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{3, \text{in}}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{4, \text{in}}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 5.9 - Condição de Contorno Prescrita

Para a direção $\underline{\Omega}_3$ a condição de fronteira é dada pela tabela (5.10) a qual indica que a entrada da radiação é feita através do contorno b_3 como mostra a figura (5.6).

PRESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

		b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
		$0 \rightarrow x-4$	$x-4 \rightarrow x-2$	$x-2 \rightarrow 2x-4$	$2x-4 \rightarrow x$	$x \rightarrow 5x-4$	$5x-4 \rightarrow 6x-4$	$6x-4 \rightarrow 7x-4$	$7x-4 \rightarrow 2x$
ϕ^+	$\phi_{1, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{2, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{3, in}$	1	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{4, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 5.10 - Condição de Contorno Prescrita

Para a direção $\underline{\Omega}_4$ a condição de fronteira é dada pela tabela (5.11) a qual indica que a entrada da radiação é feita através do contorno b_4 como mostra a figura (5.6).

PRESCRIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

		b 1	b 2	b 3	b 4	b 5	b 6	b 7	b 8
		$0 \rightarrow x-4$	$x-4 \rightarrow x-2$	$x-2 \rightarrow 2x-4$	$2x-4 \rightarrow x$	$x \rightarrow 5x-4$	$5x-4 \rightarrow 6x-4$	$6x-4 \rightarrow 7x-4$	$7x-4 \rightarrow 2x$
ϕ^+	$\phi_{1, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{2, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{3, in}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\phi_{4, in}$	1	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 5.11 - Condição de Contorno Prescrita

5.3.2. A MALHA TRIANGULAR DE ELEMENTOS FINITOS
COM A POSIÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE FIXADA E A
ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DO FLUXO DE RADIAÇÃO (ϕ^+)

PARA AS DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO PRESCRITAS

O centro da não-homogeneidade, em *cm*, será fixo em $(x = 0,7; y = 0,2)$ com raio igual a $0,2 \text{ cm}$.

A figura (5.41) representa a malha de elementos finitos para a posição da não-homogeneidade que foi escolhida para as simulações desta seção.

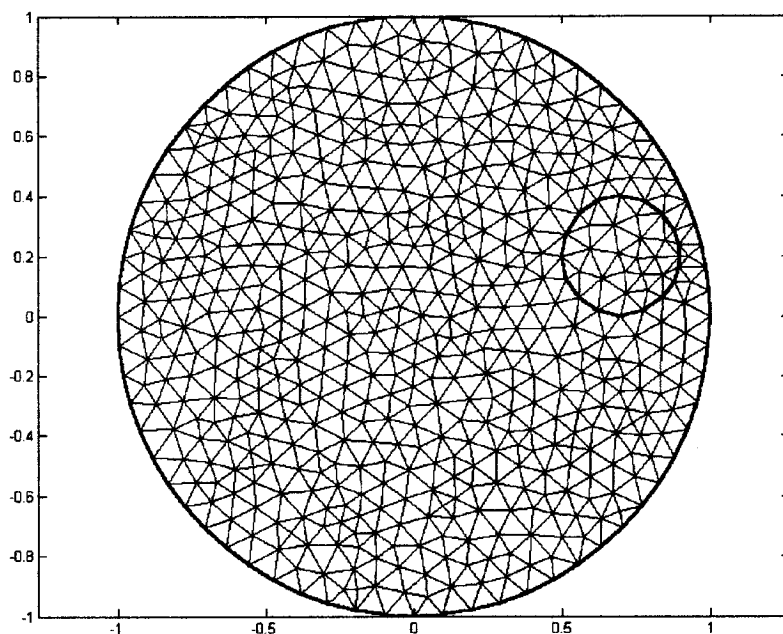


Figura 5.41 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

Os resultados para a primeira condição de contorno, tabela (5.8), serão mostrados a seguir pelas figuras (5.42 – 43 – 44 – 45).

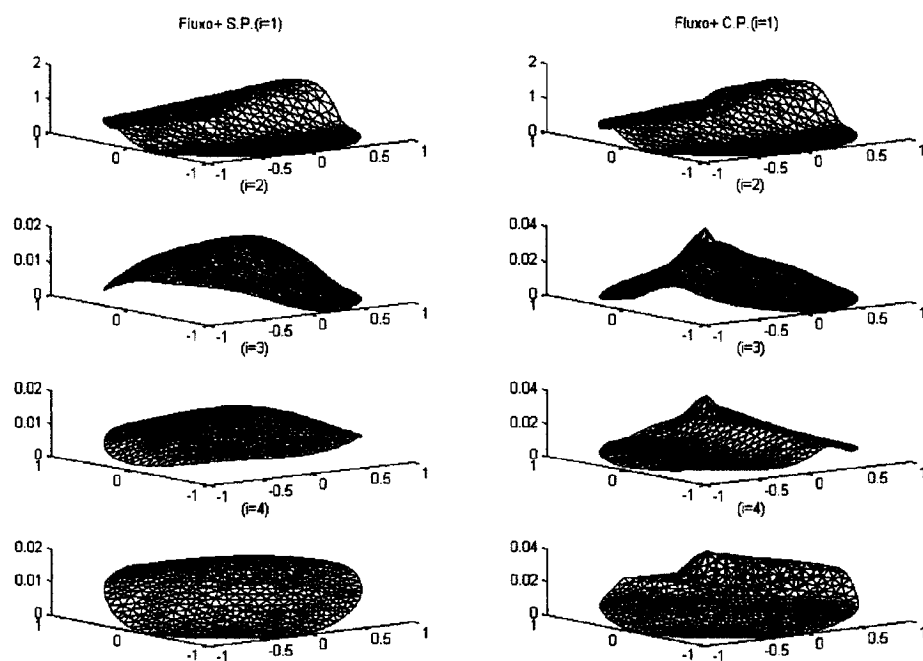


Figura 5.42 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

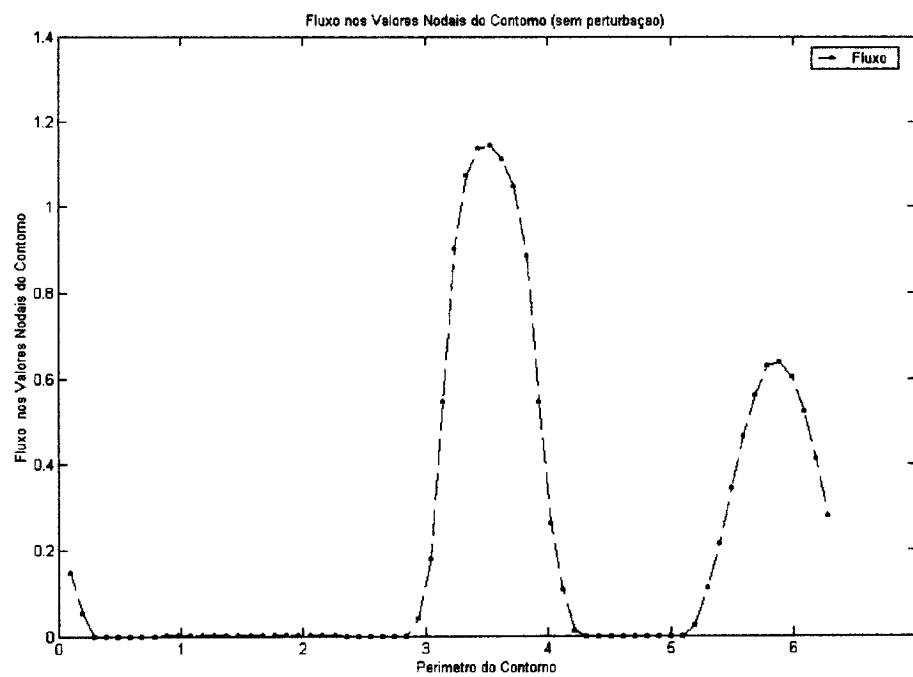


Figura 5.43 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

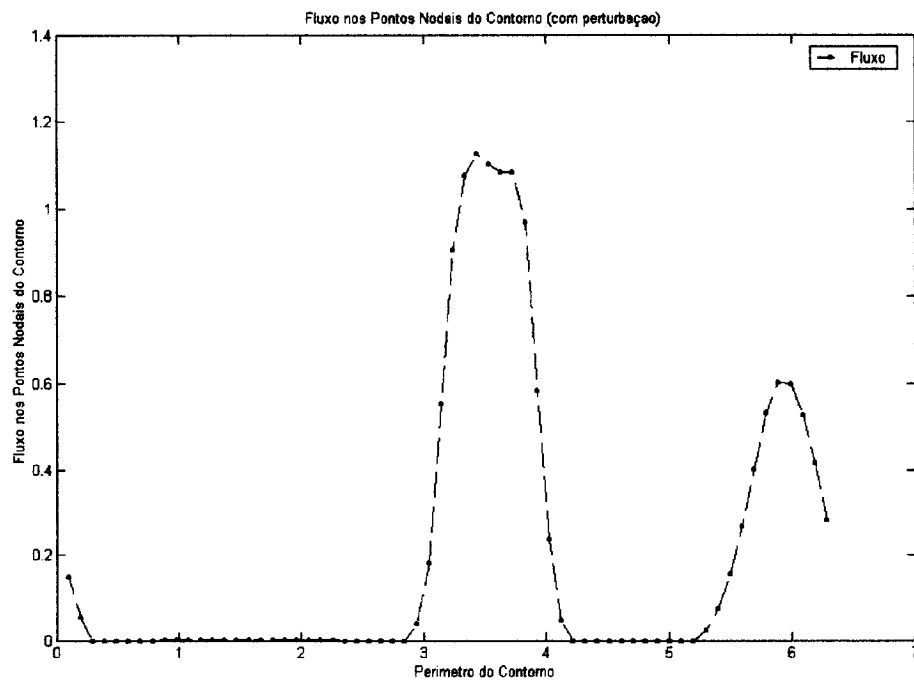


Figura 5.44 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

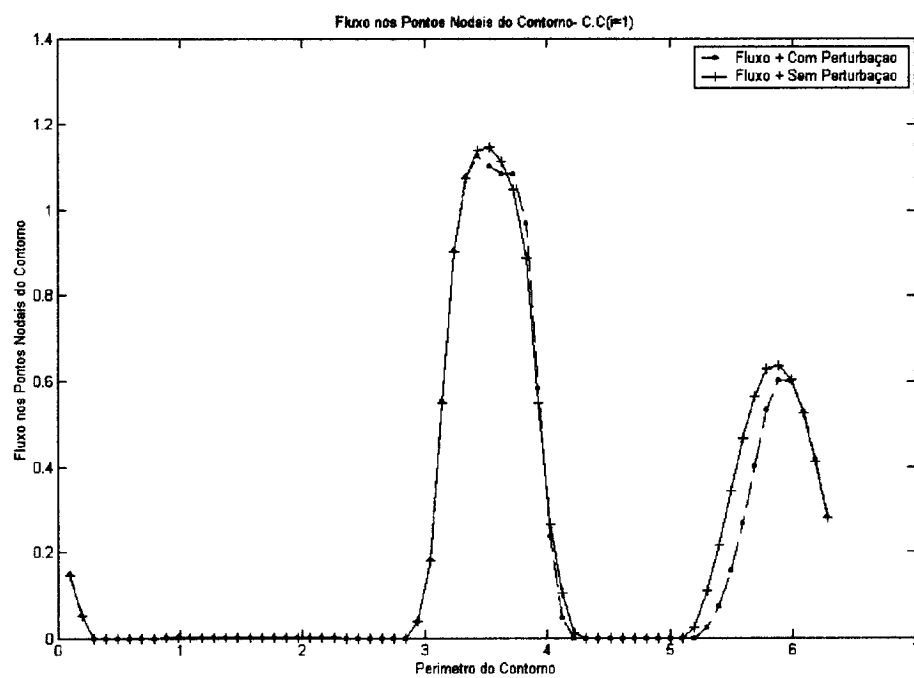


Figura 5.45 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados para a segunda condição de contorno, tabela (5.9), serão mostrados a seguir pelas figuras (5.46 – 47 – 48 – 49).

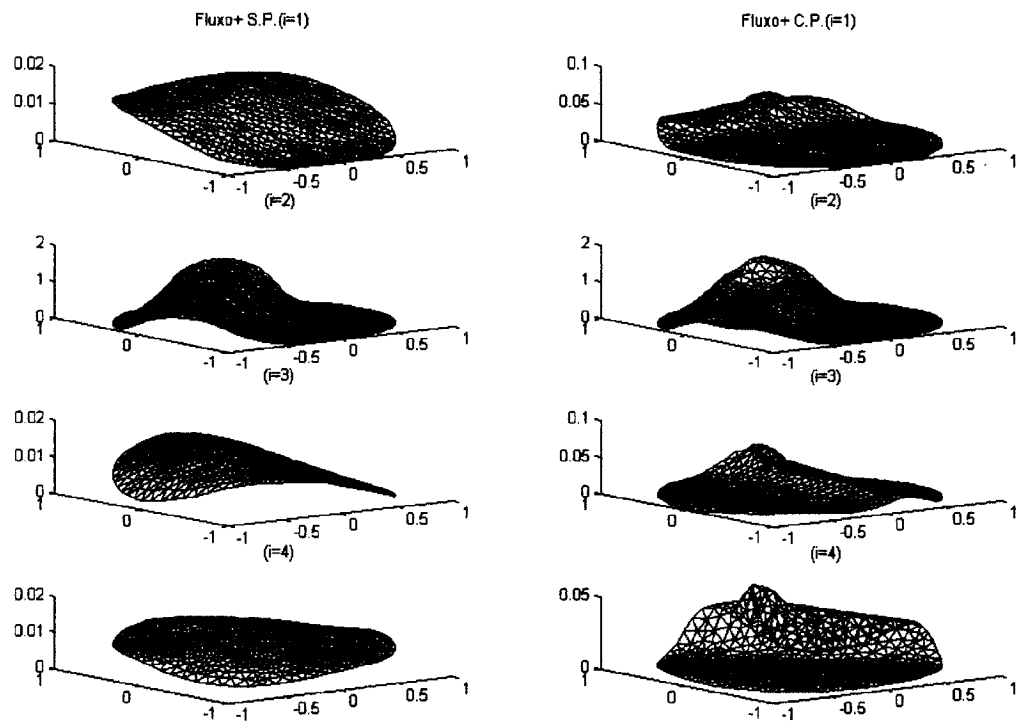


Figura 5.46 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

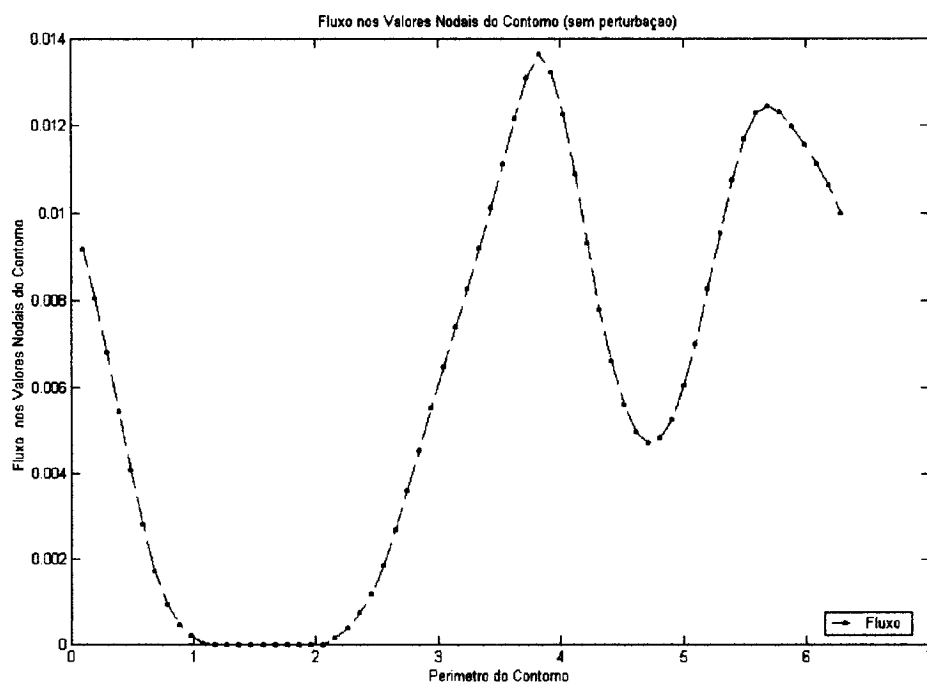


Figura 5.47 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

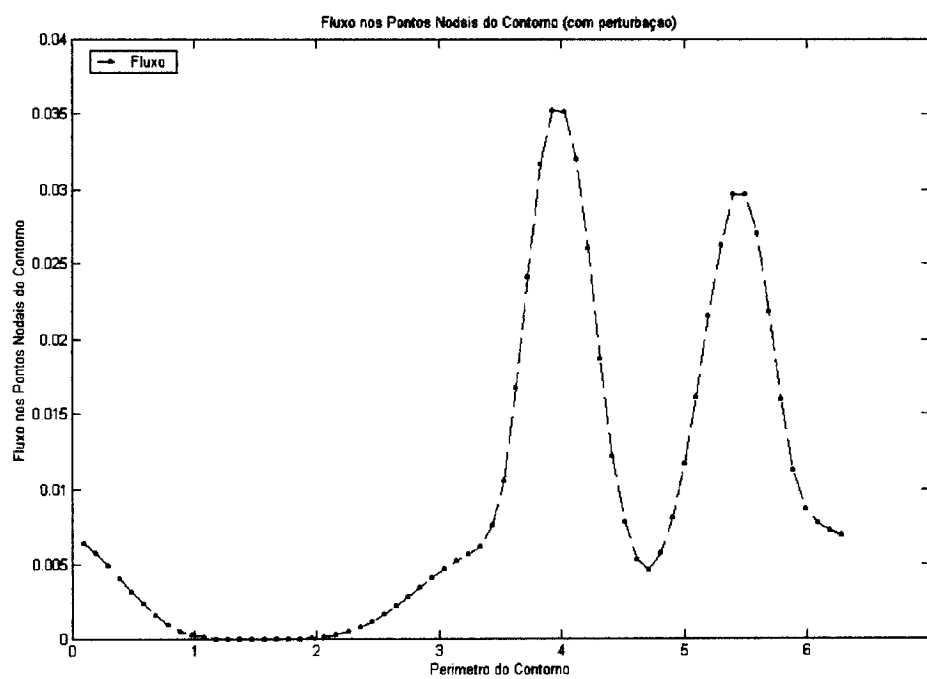


Figura 5.48 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

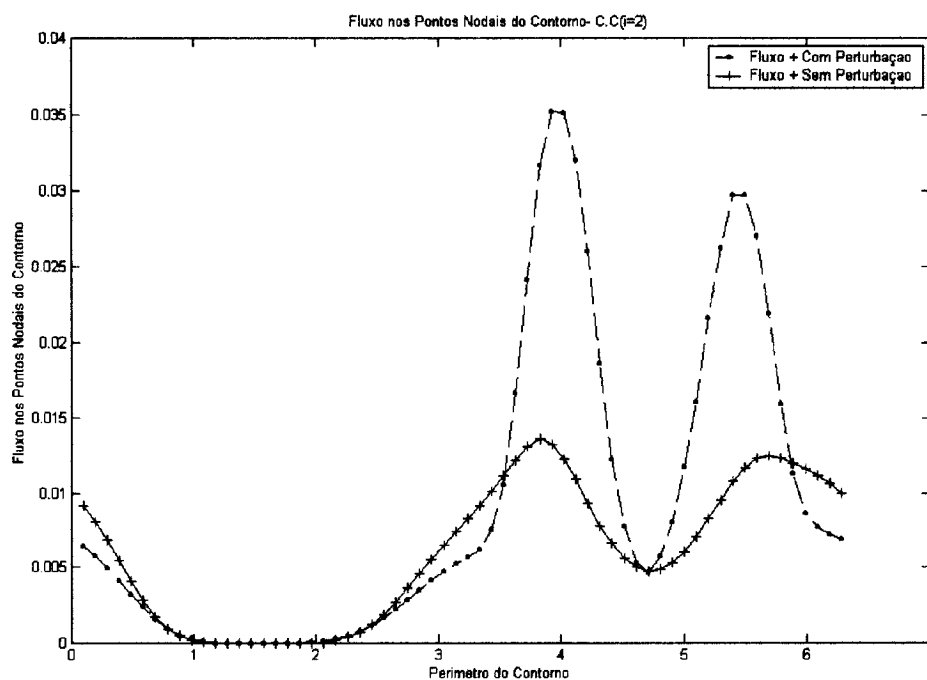


Figura 5.49 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados para a terceira condição de contorno, tabela (5.10), serão mostrados a seguir pelas figuras (5.50 – 51 – 52 – 53).

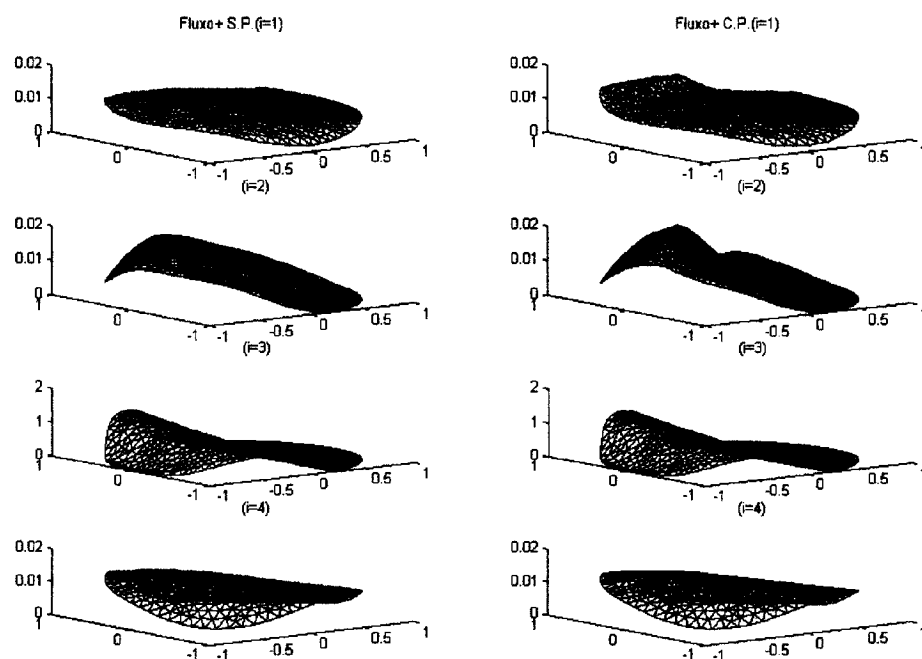


Figura 5.50 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

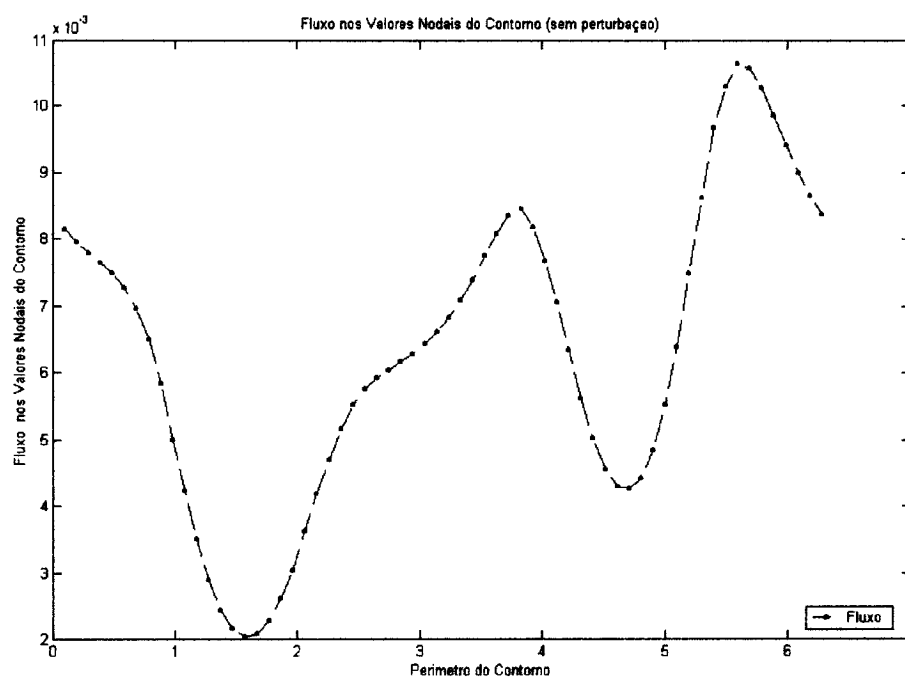


Figura 5.51 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

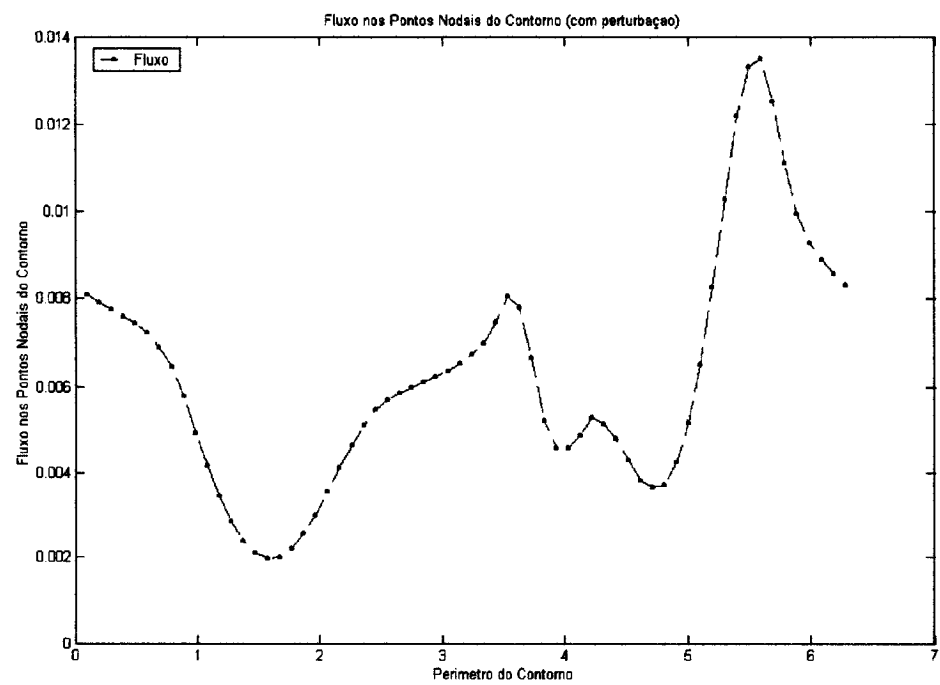


Figura 5.52 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

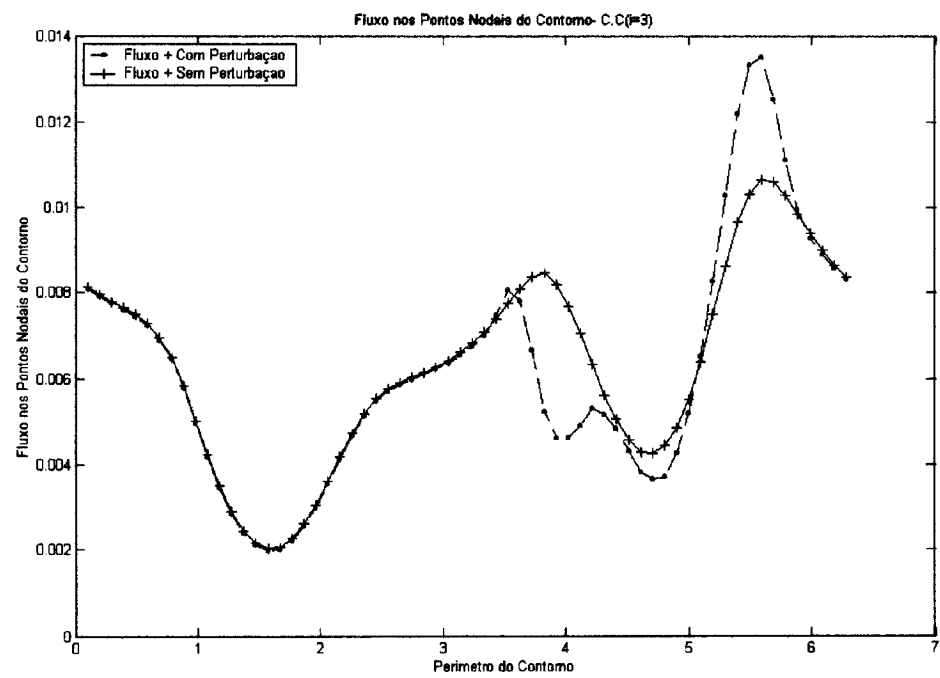


Figura 5.53 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Os resultados para a quarta condição de contorno, tabela (5.11), serão mostrados a seguir pelas figuras (5.54 – 55 – 56 – 57).

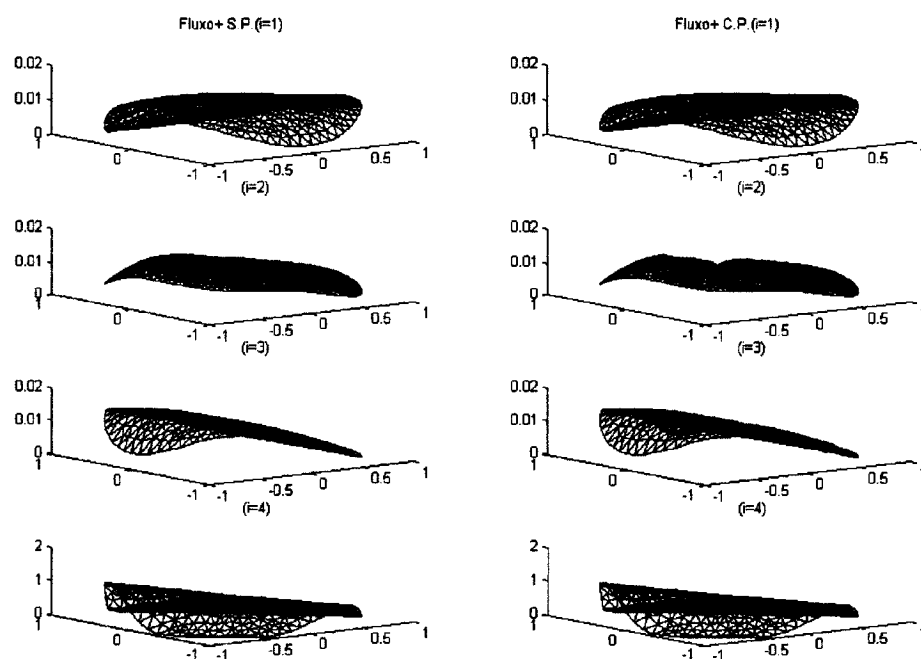


Figura 5.54 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

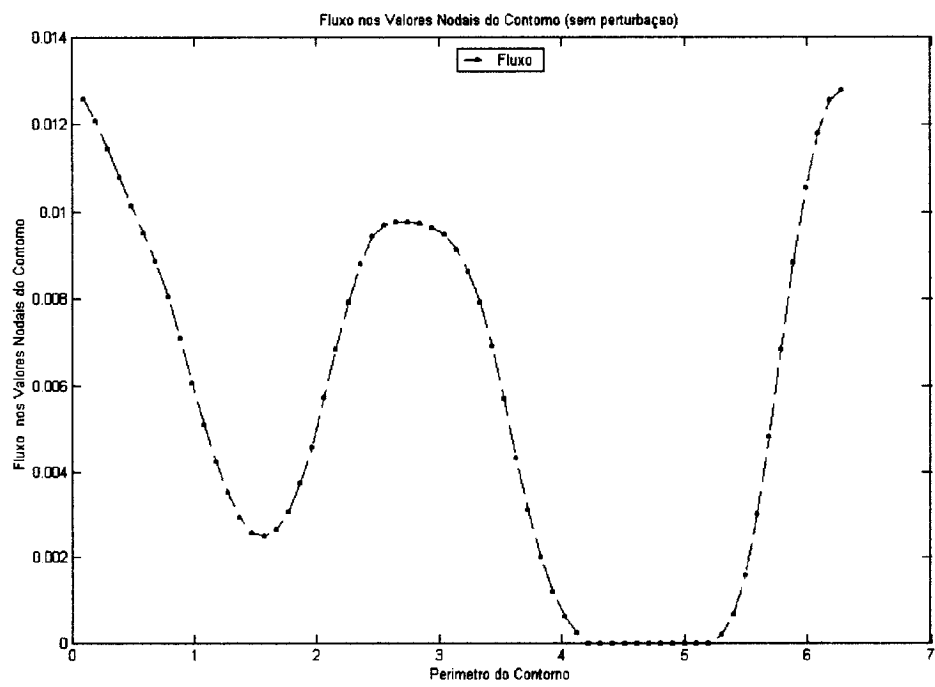


Figura 5.55 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

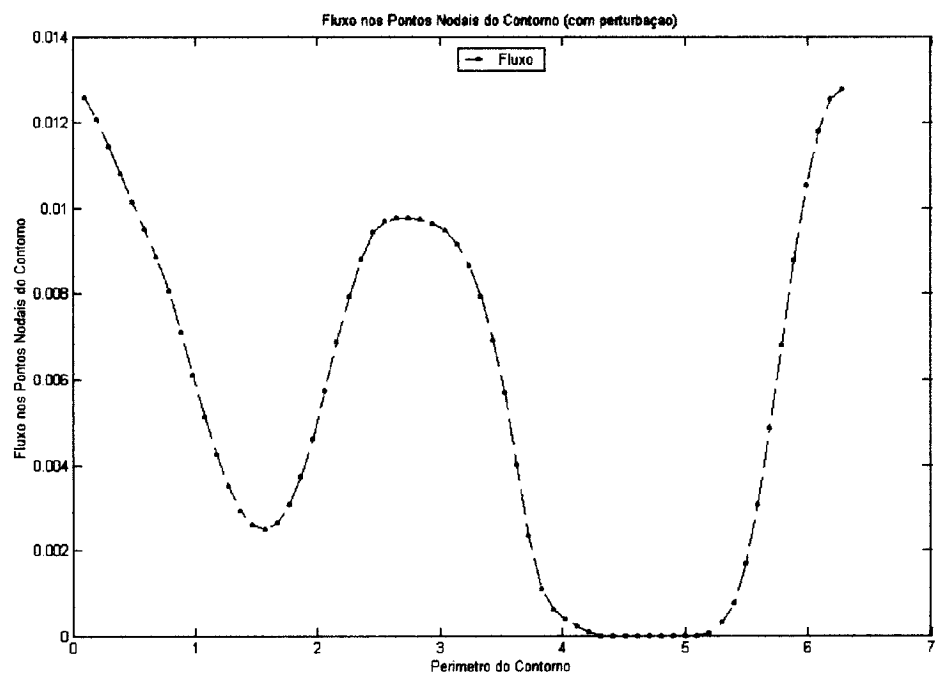


Figura 5.56 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

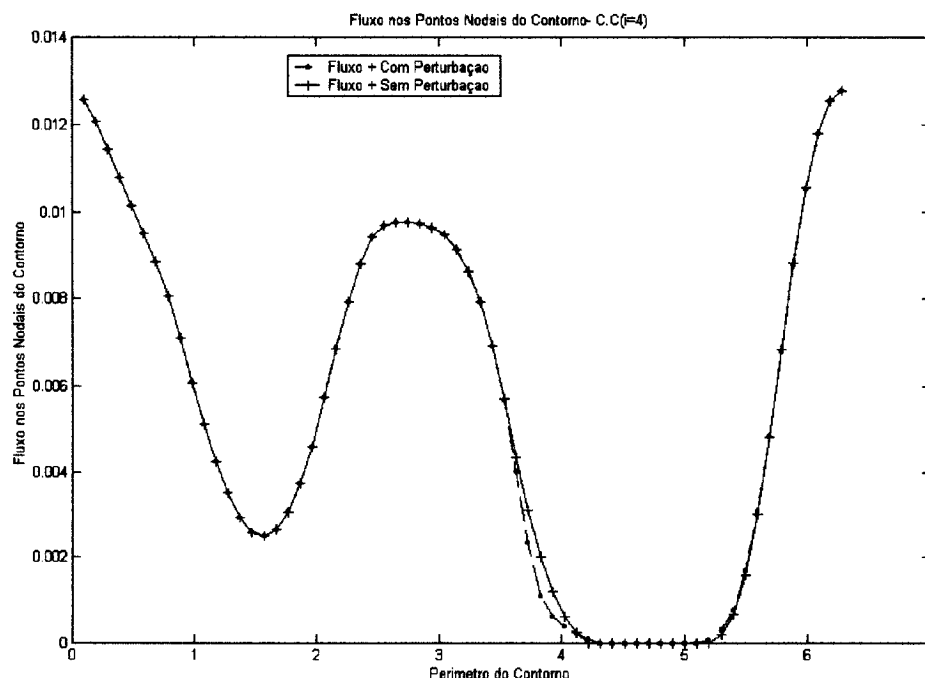


Figura 5.57 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Observa-se que nos resultados obtidos, variando-se as condições de contorno para esta geometria fixa, a sensibilidade do fluxo diante do defeito é notada com maior clareza nos três primeiro casos.

5.4. A INVESTIGAÇÃO DA SENSIBILIDADE DO FLUXO DE RADIAÇÃO (ϕ^+) PARA DIFERENTES VALORES DE PARÂMETROS SENDO FIXAS A POSIÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE NO INTERIOR DA GEOMETRIA CIRCULAR NO PLANO (X,Y) E AS CONDIÇÕES DE CONTORNO PRESCRITAS

Nesta seção serão apresentados os resultados de algumas simulações envolvendo-se variações nos valores dos parâmetros (σ_a , σ_s , k_1 e k_2) e fixando-se a condição de fronteira, dada pela tabela (5.8), e a geometria.

5.4.1. A MALHA TRIANGULAR DE ELEMENTOS FINITOS COM A POSIÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE FIXADA

O centro da circunferência menor, a não-homogeneidade, é fixo ($x_0 = 0,2 \text{ cm}$, $y_0 = 0,5 \text{ cm}$).

A figura (5.58) representa a malha que será usada nas simulações a seguir.

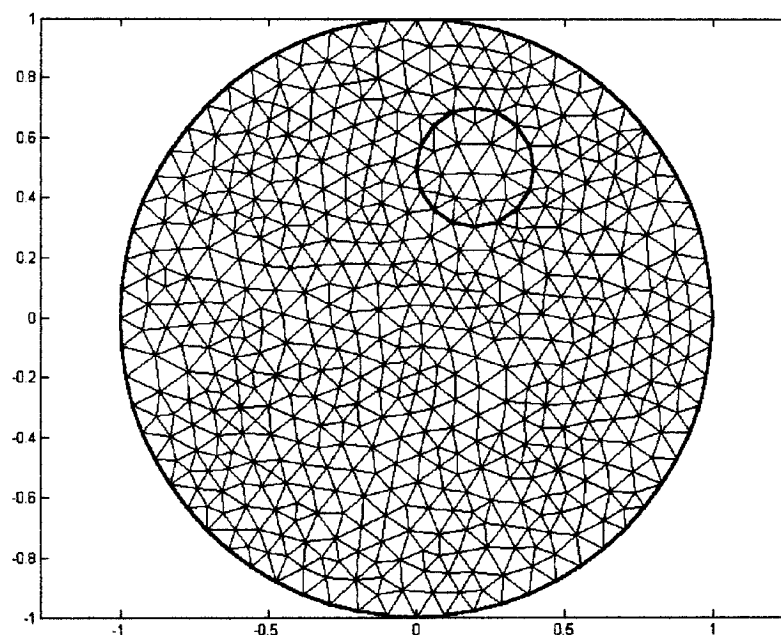


Figura 5.58 - Malha da Geometria com a Não-Homogeneidade

5.4.2. A REPRESENTAÇÃO DAS DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DOS VALORES DE PARÂMETROS (σ_a, σ_s, k) E A ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DO FLUXO DE RADIAÇÃO (φ^+) FIXADAS AS CONDIÇÕES DE CONTORNO PRESCRITAS E A POSIÇÃO DA NÃO-HOMOGENEIDADE NO INTERIOR DA GEOMETRIA CIRCULAR NO PLANO (X, Y)

A configuração para os parâmetros é a seguinte:

Primeira simulação:

Problema padrão.

O coeficiente de absorção é 0,001 ($\sigma_a = 0,001 \text{ cm}^{-1}$);

O coeficiente de espalhamento é 0,249 ($\sigma_s = 0.249 \text{ cm}^{-1}$);

a constante de condutividade da circunferência maior é 1 ($k_1 = 1$);

a constante de condutividade da circunferência menor é 10 ($k_2 = 10$).

Os resultados são representados a seguir pelas figuras (5.59 – 60 – 61 – 62).

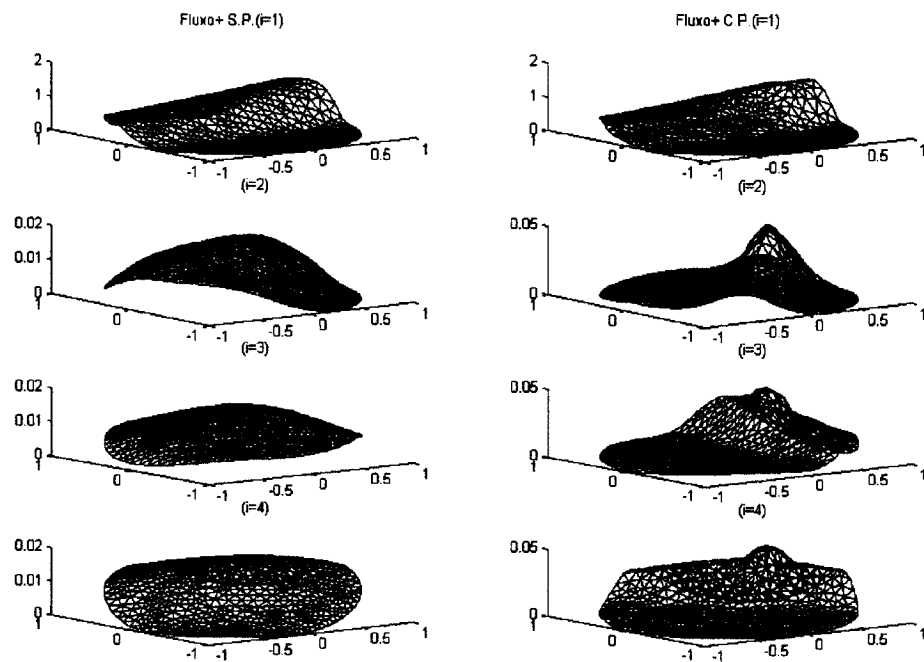


Figura 5.59 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

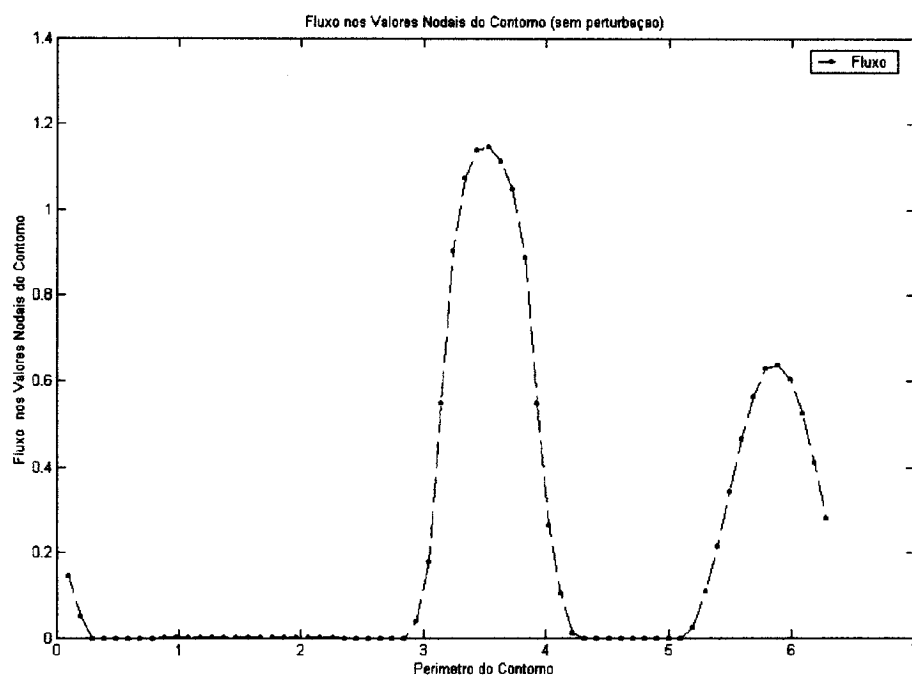


Figura 5.60 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

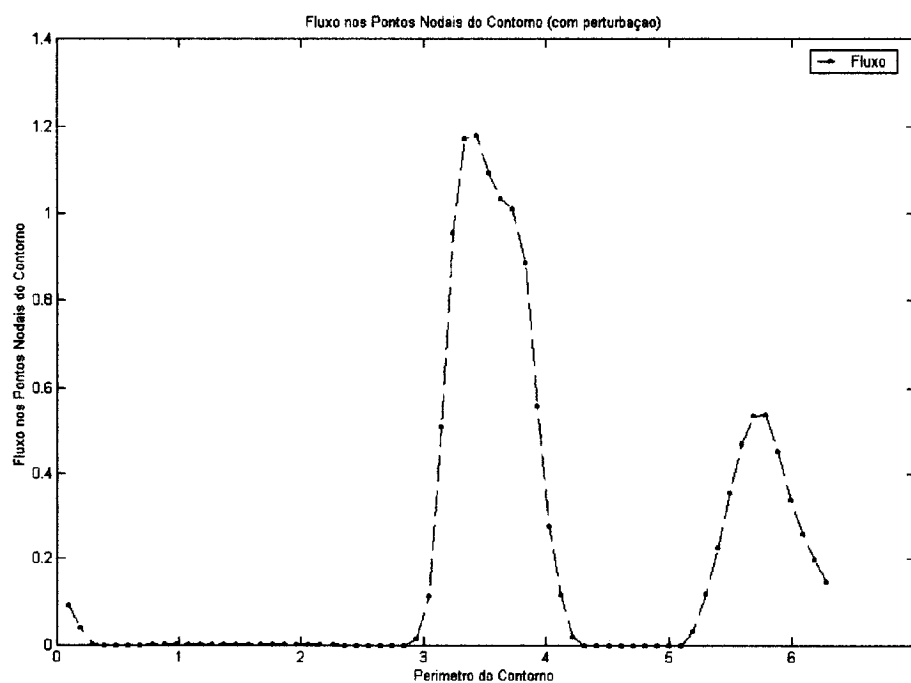


Figura 5.61 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

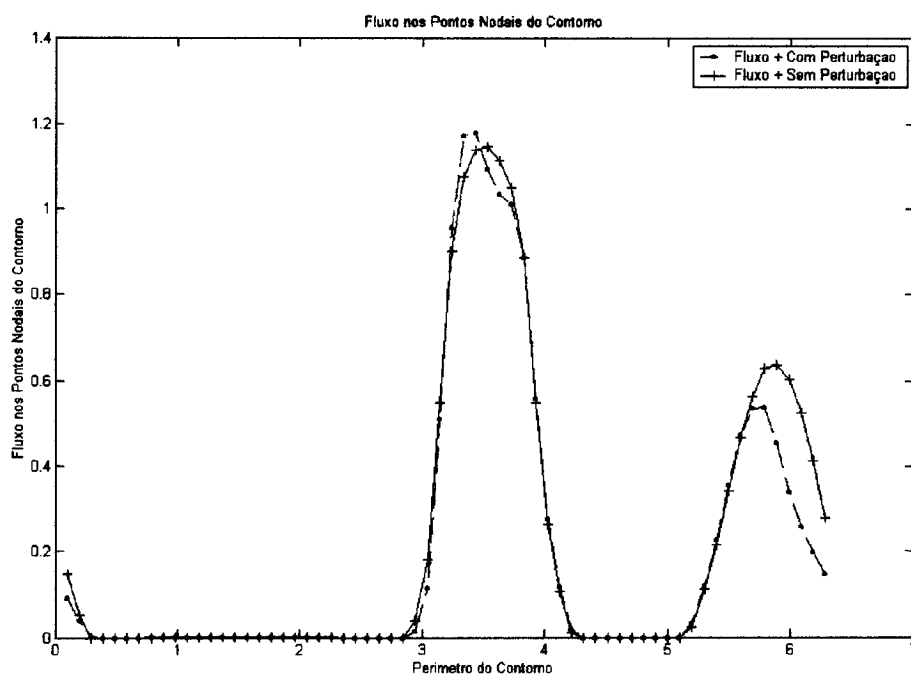


Figura 5.62 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Segunda simulação:

Variando σ_a e σ_s .

O coeficiente de absorção é 0,5 ($\sigma_a = 0,5 \text{ cm}^{-1}$);

O coeficiente de espalhamento é 0,5 ($\sigma_s = 0,5 \text{ cm}^{-1}$);

a constante de condutividade da circunferência maior é 1 ($k_1 = 1$);

a constante de condutividade da circunferência menor é 10 ($k_2 = 10$).

Os resultados são representados a seguir pelas figuras (5.63 – 64 – 65 – 66).

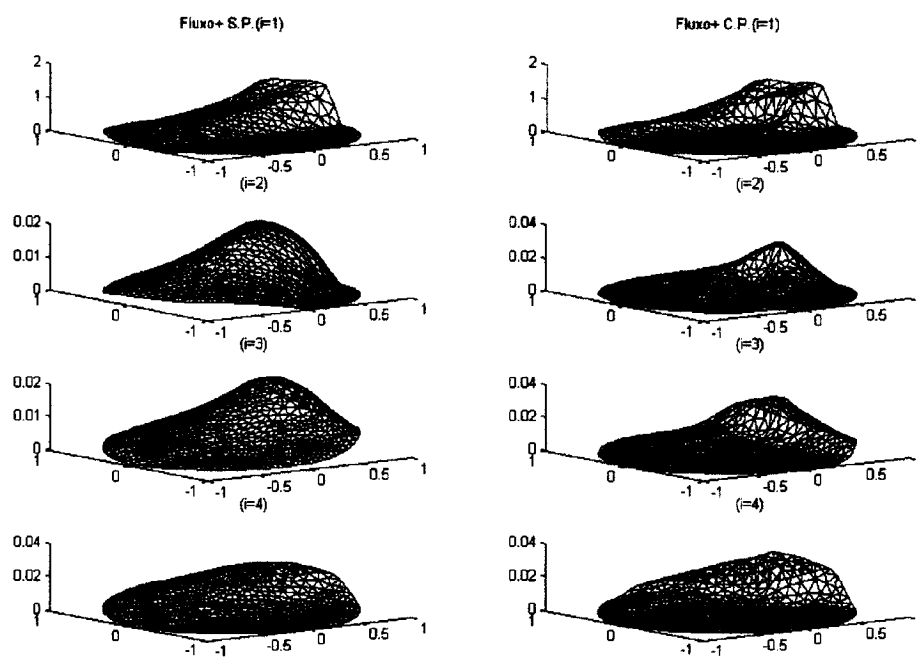


Figura 5.63 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

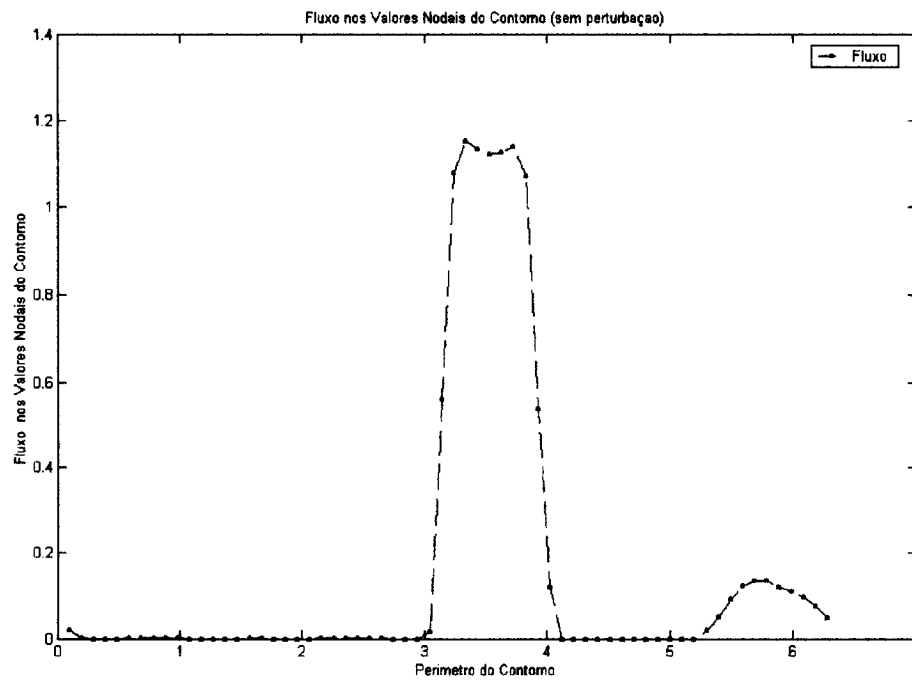


Figura 5.64 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

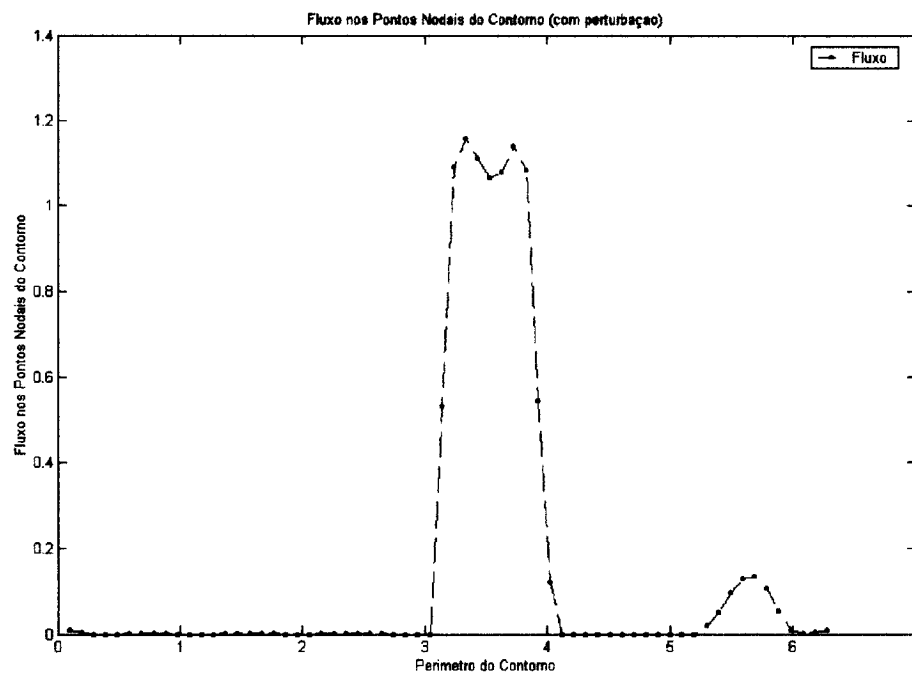


Figura 5.65 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

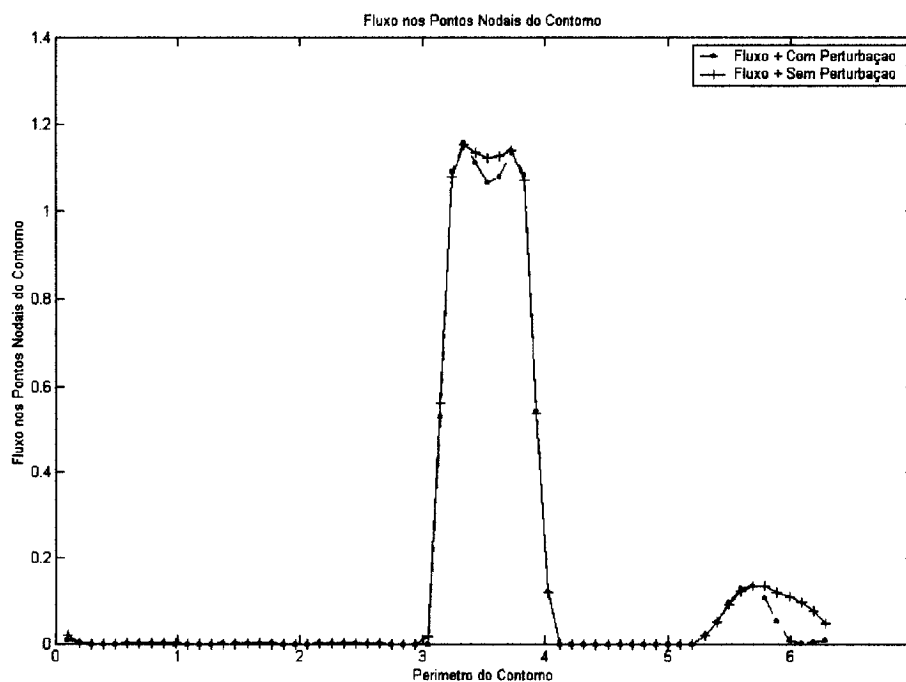


Figura 5.66 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Terceira simulação:

Variando k_1 .

O coeficiente de absorção é 0,001 ($\sigma_a = 0,001 \text{ cm}^{-1}$);

O coeficiente de espalhamento é 0,249 ($\sigma_s = 0.249 \text{ cm}^{-1}$);

a constante de condutividade da circunferência maior é 0,1 ($k_1 = 0,1$);

a constante de condutividade da circunferência menor é 10 ($k_2 = 10$).

Os resultados são representados a seguir pelas figuras (5.67 – 68 – 69 – 70).

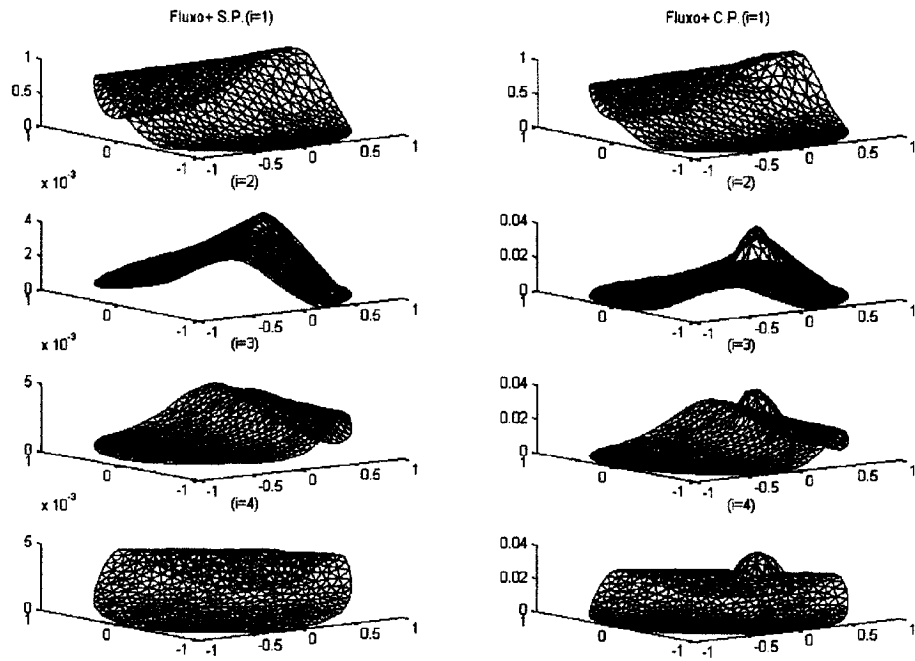


Figura 5.67 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

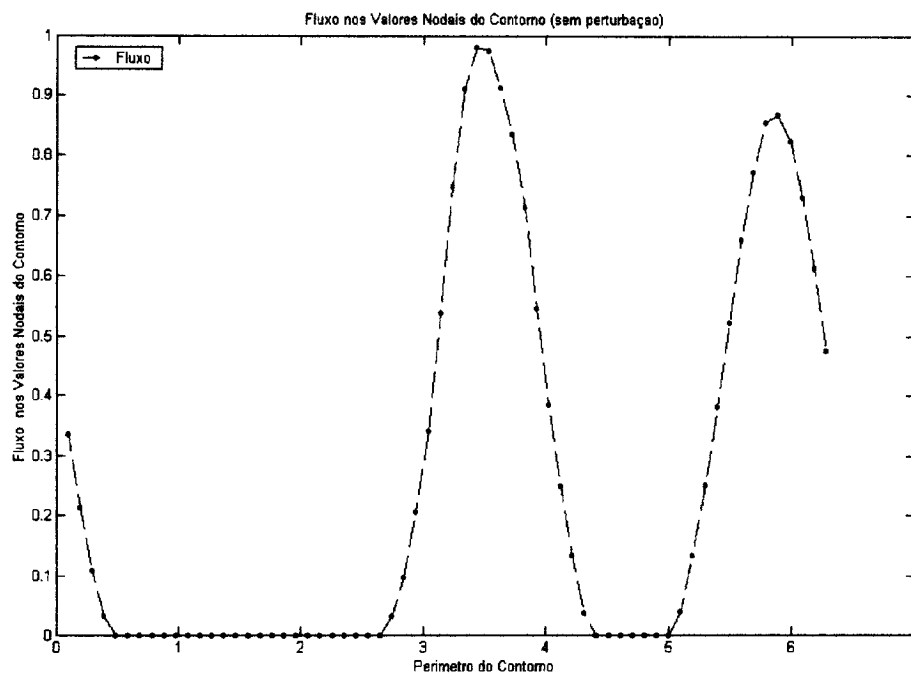


Figura 5.68 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

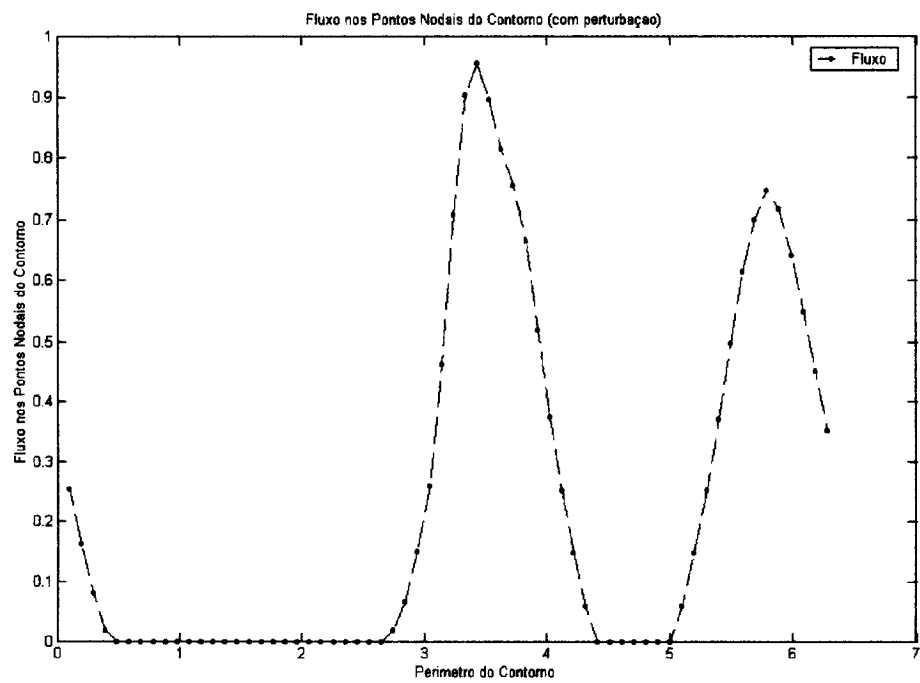


Figura 5.69 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

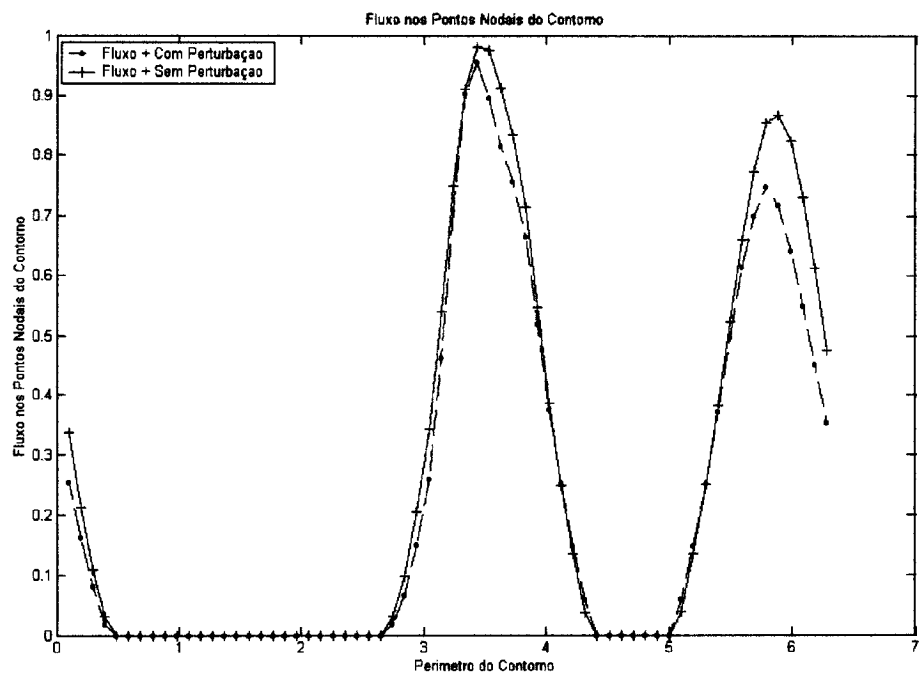


Figura 5.70 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Quarta simulação:

Variando k_2 .

O coeficiente de absorção é 0,001 ($\sigma_a = 0,001 \text{ cm}^{-1}$);

O coeficiente de espalhamento é 0,249 ($\sigma_s = 0.249 \text{ cm}^{-1}$);

a constante de condutividade da circunferência maior é 1 ($k_1 = 1$);

a constante de condutividade da circunferência menor é 100 ($k_2 = 100$).

Os resultados são representados a seguir pelas figuras (5.71 – 72 – 73 – 74).

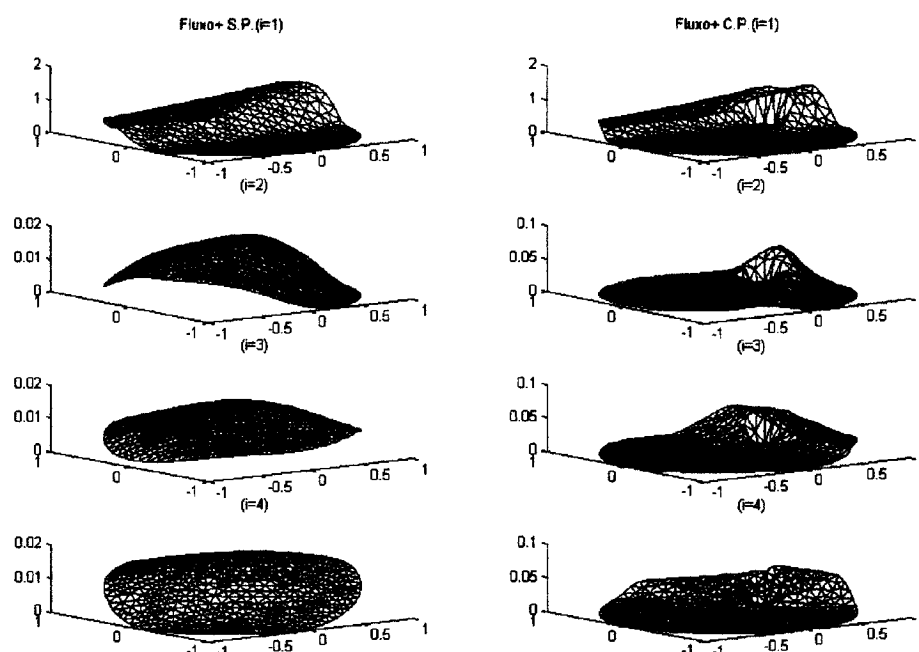


Figura 5.71 - Passagem do Fluxo pelas Geometrias Homogênea e Não-Homogênea

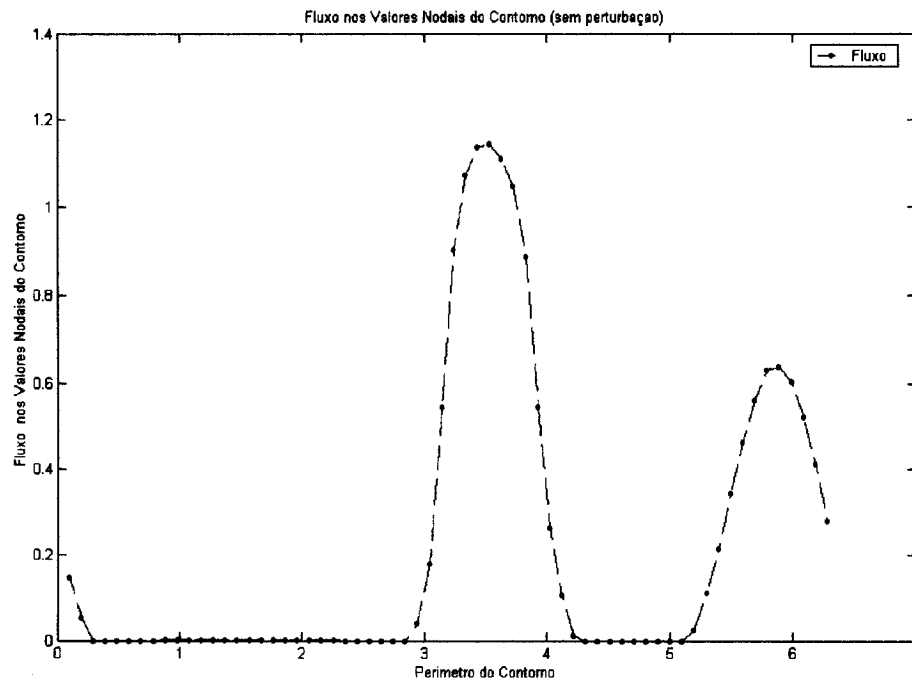


Figura 5.72 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria Homogênea

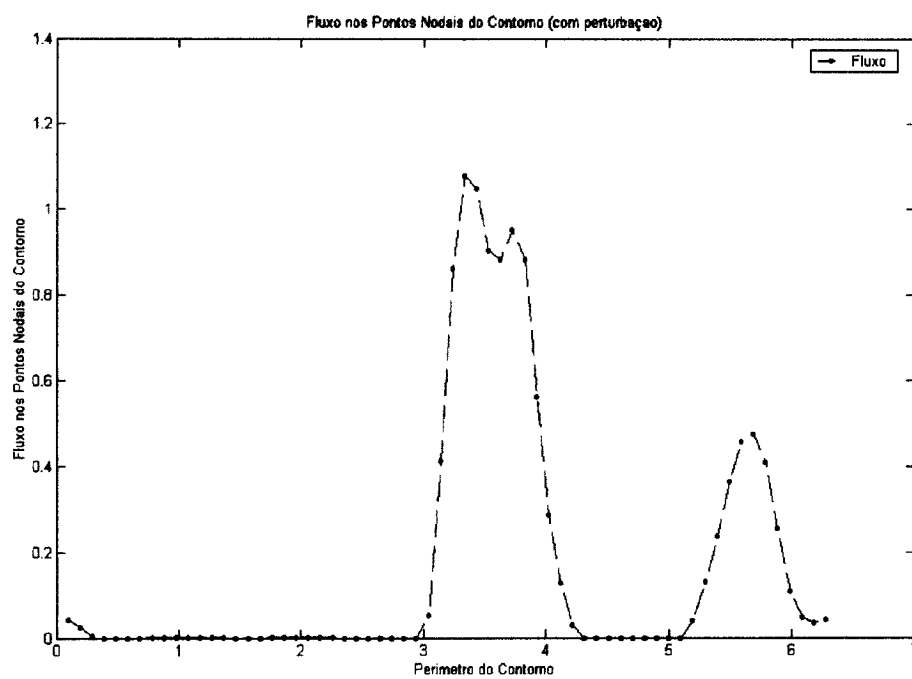


Figura 5.73 - Fluxo nos Pontos Nodais do Contorno da Geometria com a Perturbação

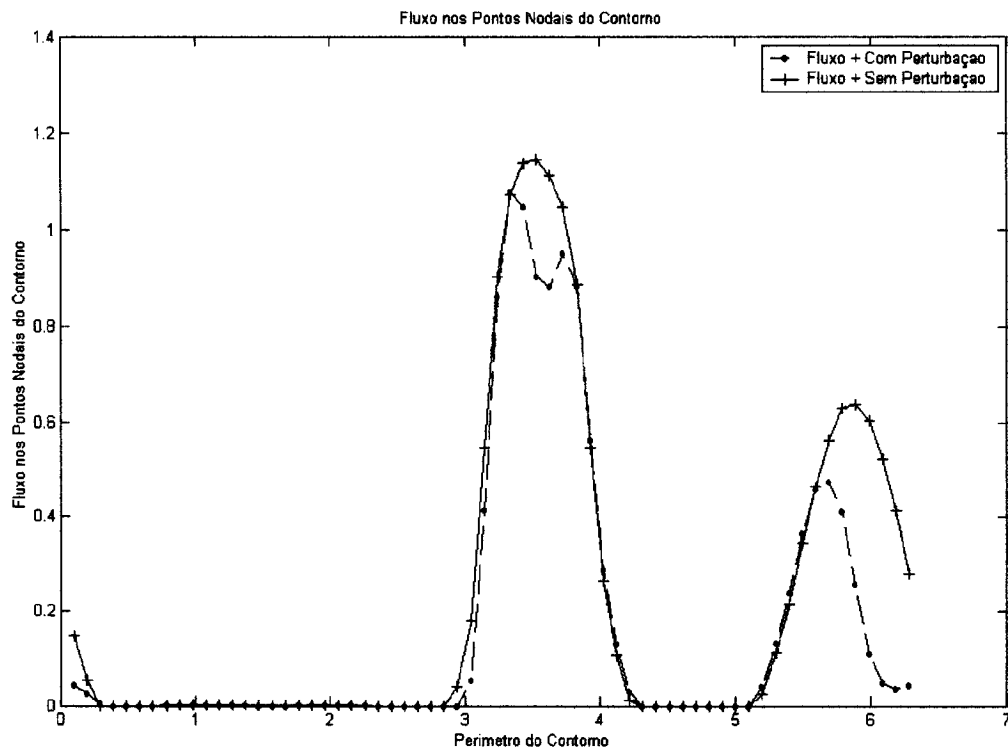


Figura 5.74 - Superposição dos Fluxos nos Pontos Nodais

Como se pôde observar pelas figuras (5.59 – 60 – 61 – 62 – 63 – 64 – 65 – 66 – 67 – 68 – 69 – 70 – 71 – 72 – 73 – 74) desta seção diante dos resultados das quatro simulações, a sensibilidade do fluxo é percebida em todas as situações propostas em relação à referência (primeiro caso), desde o segundo caso, para o qual aumentam-se os valores das seções de choque de absorção e de espalhamento, da mesma forma para a terceira simulação cujo valor da constante de condutividade da circunferência maior, k_1 , é diminuído e por fim, o quarto caso, no qual é aumentado o valor da constante de condutividade da não-homogeneidade, k_2 .

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O capítulo 5 apresenta os resultados obtidos pela implementação computacional do problema direto na investigação da sensibilidade do fluxo de radiação para várias simulações envolvendo variações na geometria, nas condições de contorno e nos parâmetros.

Foi gerada uma malha de elementos finitos com 3 mil triângulos. Num total de 12 mil equações, isto é, 3 mil equações para cada direção de incidência de radiação i , onde $i = 1, 2, 3, 4$.

Deve-se mencionar aqui que o motivo da escolha do espalhamento isotrópico e de outras simplificações ao longo do desenvolvimento deste trabalho foi meramente por uma questão de simplificação da implementação computacional.

As simulações foram divididas em três grupos:

no primeiro grupo de simulações foram fixados os parâmetros e as condições de contorno, variando-se apenas a posição da não-homogeneidade no interior da geometria no plano (x,y) . Quis-se aqui investigar a sensibilidade do fluxo de radiação mediante alterações na configuração da geometria para uma mesma condição de contorno

prescrita para todas essas simulações.

No segundo grupo de simulações foram mantidos fixos os parâmetros e a posição da não-homogeneidade no interior da geometria no plano (x,y) , variando-se somente as condições de contorno. Estudou-se aqui o efeito na sensibilidade do fluxo de radiação devido à rotação das condições de contorno para uma dada configuração da geometria.

No terceiro grupo de simulações foram mantidos fixos a posição da não-homogeneidade no interior da geometria no plano (x,y) e as condições de contorno, variando-se os parâmetros. Assim como nos outros dois grupos de simulação, o objetivo aqui também é o de investigar a sensibilidade do fluxo de radiação, alterando-se valores dos parâmetros tais como os coeficientes de seção de choque de absorção e de espalhamento assim como os coeficientes de condutividade, ou difusão, tanto para a região homogênea quanto para a perturbação. Nesse grupo de simulações são desconsideradas variações tanto na geometria quanto nas condições de contorno.

Conclui-se que para valores apropriados de seção de choque de espalhamento e de absorção (os parâmetros), a atenuação que a radiação incidente sofre, ao passar através da geometria homogênea, não é suficiente para inibir completamente a sensibilidade à perturbação que foi introduzida nesse meio. A perturbação e a geometria homogênea possuem seções de choque diferentes. Pôde-se perceber em todos os grupos de simulações uma sensibilidade em relação ao fluxo de radiação, deste modo, a possibilidade de identificação deste tipo de perturbação usando a presente metodologia está preliminarmente demonstrada.

A validação da técnica utilizada nessa tese será feita mediante a comparação com o

trabalho desenvolvido por NOH *et al.*[14]. Esses resultados se encontram no apêndice.

Uma sugestão de trabalho futuro como extensão desta dissertação é a utilização de uma geometria com simetria axial. O objetivo é o de investigar a sensibilidade do problema de transporte de radiação com as devidas propriedades do meio material e a reconstrução das suas seções de choque. Visa-se uma futura utilização dos resultados no contexto de reconstrução de parâmetros pela metodologia fonte-detector.

Uma outra sugestão refere-se a fazer a adoção de uma formulação do problema ainda com uma geometria com simetria axial, mas usando sistemas de coordenadas diferentes para cada uma das direções radiais de ordenada discreta. Neste caso, o problema com simetria axial poderá ser tratado como se fosse bidimensional, e efeitos negativos como, por exemplo, o efeito raio são atenuados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Johnson, C., *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.

[2] Lewis, E. E. e Miller, W. F. Jr., *Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley & Sons, Inc., 1984.

[3] Lillie, R. A. e Robinson, J. C., *Linear Triangle Finite Element Formulation for Multigroup Neutron Transport Analysis with Anisotropic Scattering*, ORNL/TM-5281, Oak Ridge National Laboratory Report, 1976.

[4] Kaper, H. G., Leaf, G. K. e Lindeman, A. J., *Applications of Finite Element Methods in Reactor Mathematics*, ANL-8126, Argonne National Laboratory Report, 1974.

[5] Chandrasekhar, S., *Radiative Transfer*, Dover Publications, Inc., 1960.

[6] Duderstadt, James J. e Martin, William R., *Transport Theory*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

[7] Abu-Shumays, I. K., "Compatible Product Angular Quadrature for Neutron Transport in x-y Geometry", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 64, pp. 299~316, 1977.

[8] Becker, Eric B., Carey, Graham F. e Oden, J. T., *Finite Element An Introduction*

Volume I, Prentice-Hall, Inc., 1981.

[9] Oden, J. T. e Carey, G. F., *Finite Elements: Mathematical Aspects Volume IV*, Prentice-Hall, Inc., 1983.

[10] Ackroyd, Ron T., *Finite Element Methods for Particle Transport*, John Wiley & Sons, Inc., 1997.

[11] Press, William H., Teukolsky, Saul A., Vetterling, William T. e Flannery, Brian P., *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.

[12] Case, Kenneth M. e Zweifel, Paul F., *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.

[13] Reis, M. L. e Roberty, N. C., "Maximum Entropy Algorithms for Image Reconstruction from Projections", *Inverse Problems*, Vol. 8, pp. 623~644, 1992.

[14] Noh, T., Miller, W. F. Jr. e Morel, J. T., "The Even-Parity and Simplified Even-Parity Transport Equation in Two-Dimensional x-y Geometry", *Journal of Nuclear Science and Tecnology*, Vol. 9, No. 6, pp. 366~373, 1972.

[15] Ukai, S., "Solution of Multi-Dimensional Neutron Transport Equation by the Finite Element Method", *Journal of Nuclear Science and Tecnology*, Vol. 9, No. 6, pp. 366~373, 1972.

[16] Davis, James A., "Continuity Conditions for a Homogeneous or Heterogeneous P_N Aproximation", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 27, pp. 542~548, 1967.

[17] Miller, W. F., Lewis, E. E. e Rossow, E. C., "The Application of Phase-Space Finite Elements to the Two-Dimensional Neutron Transport Equation in X-Y Geometry", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 52, pp. 12~22, 1973.

[18] Martin, William R. e Duderstadt, James J., "Finite Element Solutions of the Neutron Transport Equation with Applications to Strong Heterogeneities", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 62, pp. 371~390, 1977.

[19] Martin, William R., Yehner, Carl E., Lorence, L. e Duderstadt, James J., "Phase-Space Finite Element Methods Applied to the First-Order Form of the Transport Equation", *Annals of Nuclear Energy*, Vol.8, pp. 633~646, 1981.

[20] Siewert, C. E., "A Discrete-Ordinates Solution for Heat Transfer in a Plane Channel", *Journal of Computational Physics*, Vol. 152, pp. 251~263, 1999.

[21] Siewert, C. E., "A Discrete-Ordinates Solution for Radiative-Transfer Models that Include Polarization Effects", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 64, pp. 227~254, 2000.

[22] Garcia, R. D. M. e Siewert, C. E., "Radiative Transfer in Finite Inhomogeneous Plane-Parallel Atmospheres", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 27, pp. 141~148, 1982.

[23] Barichello, L. B., Garcia, R. D. M. e Siewert, C. E., "Particular Solutions for the Discrete-Ordinates Method", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 64, pp. 219~226, 2000.

[24] McCormick, Norman J., "Exact P_N Method Solutions", *Nuclear Science and*

Engineering, Vol. 137, pp. 359~363, 2001.

[25] Barichello, L. B. e Siewert, C. E., "On the Equivalence Between the Discrete Ordinates and the Spherical Harmonics Methods in Radiative Transfer", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 130, pp. 79~84, 1998.

[26] Cengel, Y. A., Özisik, M. N. e Yener, Y., "Determination of Angular Distribution of Radiation in an Isotropically Scattering Slab", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 248~252, 1984.

[27] Aixiang, Huang e Yichen, Ma, "The Application of Modern Numerical Methods to the Neutron Transport Equation", *Transport Theory and Statistical Physics*, Vol. 26, Nos. 1 e 2, pp. 65~83, 1997.

[28] Pitkäranta, J., "Approximate Solution of the Transport Equation by Methods of Galerkin Type", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 60, pp. 186~210, 1977.

[29] Albertoni, S. e Montagnini, B., "On the Spectrum of Neutron Transport Equation in Finite Bodies", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 13, pp. 19~48, 1966.

[30] Shenghua, W., Mingzhu, Y. e Gengi, X., "The Spectrum of the Transport Operator with Generalized Boundary Conditions", *Transport Theory and Statistical Physics*, Vol. 25, No. 7, pp. 811~823, 1996.

[31] Xianwen, Z. e Benzhong, L., "The Spectrum of a One-Velocity Transport Operator with Integral Boundary Conditions of Maxwell Type", *Transport Theory and*

Statistical Physics, Vol. 26, Nos. 1 e 2, pp. 85~102, 1997.

[32] Borysiewicz, M. e Stankiewicz, R., "Weak Solution and Approximate Methods for the Transport Equation", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 68, pp. 191~210, 1979.

[33] Pomraning, G. C. e Clark, M. Jr., "The Variational Method Applied to the Monoenergetic Boltzmann Equation Part I", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 16, pp. 147~154, 1963.

[34] Pomraning, G. C. e Clark, M. Jr., "The Variational Method Applied to the Monoenergetic Boltzmann Equation Part II", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 16, pp. 155~164, 1963.

[35] Buslik, A. J., "Extremum Variational Principles for the Monoenergetic Neutron Transport Equation with Arbitrary Adjoint Source", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 35, pp. 303~318, 1969.

[36] Davis, James A., "Variational Vacuum Boundary Conditions for a P_N Approximation", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 25, pp. 189~197, 1966.

[37] Kaplan, S., "An Analogy Between the Variational Principles of Reactor Theory and those Classical Mechanics", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 23, pp. 234~237, 1965.

[38] Hughes, Thomas J. R., *Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc.,

[39] Reddy, J. N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1986.

[40] Kanai, Madhoo e Davies, John A., "A Spectral Representation of the Linear Transport Problem I", *Transport Theory and Statistical Physics*, Vol. 10, Nos. 1 e 2, pp. 29~51, 1981.

[41] Kobayashi, Keisuke, "On the Advantage of the Finite Fourier Transformation Method for the Solution of a Multigroup Transport Equation by the Spherical Harmonics Method", *Transport Theory and Statistical Physics*, Vol. 24, Nos. 1, 2 e 3, pp. 113~132, 1995.

[42] Kobayashi, Keisuke, "Solution of Multi-Dimensional Neutron Transport Equation of the Spherical Harmonics Method Using the Finite Fourier Transformation and Quadrature Formula", *Transport Theory and Statistical Physics*, Vol. 14, No. 1, pp. 63~81, 1985.

[43] Fiveland, W. A., "The Selection of Discrete Ordinate Quadrature Sets for Anisotropic Scattering", *Fundamentals of Radiation Heat Transfer*, Vol. 160, pp. 89~96, 1991.

[44] Johnson, C. e Pitkäranta, J., "Convergence of a Fully Discrete Scheme for Two-Dimensional Neutron Transport", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 20, No. 5, pp. 951~966, 1983.

[45] Barros, Ricardo C., "On the Equivalence of Discontinuous Finite Element Methods and Discrete Ordinates Methods for the Angular Discretization of the

Linearized Boltzmann Equation in Slab Geometry”, *Ann. Nucl. Energy*, Vol. 24, No. 13, pp. 1013~1026, 1997.

[46] Albrecht, Peter, *Análise Numérica: Um Curso Moderno*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1973.

APÊNDICE

No apêndice será feita uma comparação entre resultados. O objetivo dessa comparação é o de validar a técnica utilizada nessa dissertação. Para se fazer à comparação entre os resultados serão necessárias algumas mudanças: a geometria circular será substituída pela retangular, figura (1), sendo que duas das paredes do retângulo são superfícies reflexivas e as outras duas obedecem às condições de vácuo. As condições de contorno são reflexivas. Os resultados obtidos após essas modificações serão comparados com os do trabalho desenvolvido por NOH *et al.*[14].

CONDIÇÕES DE CONTORNO REFLEXIVAS

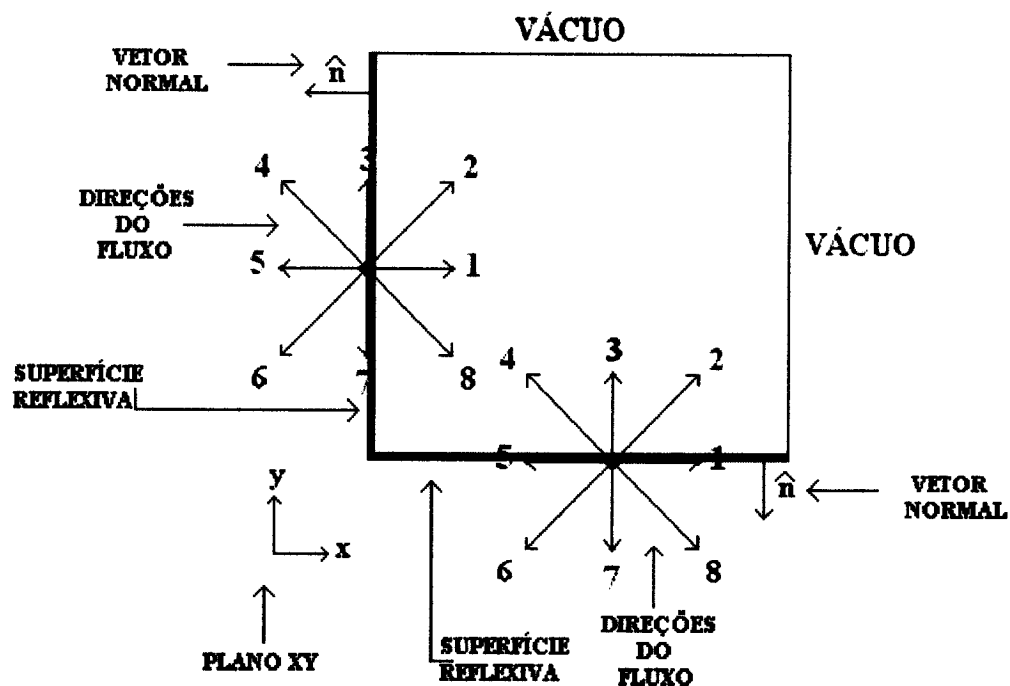


Figura 1 - Geometria Retangular com Superfície Reflexiva

Os fluxos de radiação nas oito direções de incidência:

$$\phi_1$$

$$\phi_2$$

$$\phi_3$$

$$\phi_4$$

$$\phi_5$$

$$\phi_6$$

$$\phi_7$$

$$\phi_8$$

Condições de reflexão:

$$\phi_1 = \phi_5 \quad (1)$$

$$\phi_2 = \phi_4 \quad (2)$$

$$\phi_3 = \phi_7 \quad (3)$$

$$\phi_6 = \phi_8 \quad (4)$$

Formulação de paridade:

Paridade par:

$$\phi_1^+ = \frac{1}{2}[\phi_1 + \phi_5] \quad (5)$$

$$\phi_2^+ = \frac{1}{2}[\phi_2 + \phi_6] \quad (6)$$

$$\phi_3^+ = \frac{1}{2}[\phi_3 + \phi_7] \quad (7)$$

$$\phi_4^+ = \frac{1}{2}[\phi_4 + \phi_8] \quad (8)$$

Paridade ímpar:

$$\phi_1^- - \frac{1}{2}[\phi_1 - \phi_5] \quad (9)$$

$$\phi_2^- - \frac{1}{2}[\phi_2 - \phi_6] \quad (10)$$

$$\phi_3^- - \frac{1}{2}[\phi_3 - \phi_7] \quad (11)$$

$$\phi_4^- - \frac{1}{2}[\phi_4 - \phi_8] \quad (12)$$

Condições de interface:

$$\phi_1^+ + \phi_1^- = \phi_1^+ - \phi_1^- \Rightarrow \phi_1^- = 0 \quad (13)$$

$$\phi_2^+ + \phi_2^- = \phi_4^+ + \phi_4^- \Rightarrow \text{Se (2) + (4)} \Rightarrow \phi_2^+ = \phi_4^+ \quad (14)$$

$$\phi_3^+ + \phi_3^- = \phi_3^+ - \phi_3^- \Rightarrow \phi_3^- = 0 \quad (15)$$

$$\phi_2^+ - \phi_2^- = \phi_4^+ - \phi_4^- \Rightarrow \text{Se (2) - (4)} \Rightarrow \phi_2^- = \phi_4^- \quad (16)$$

Condições de contorno nos pontos da interface, isto é, em $\partial\Omega$ reflexivo:

Superfície reflexiva vertical:

$$(13) \Rightarrow (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_1) \nabla \phi_1^+ = 0 \quad (17)$$

$$(14) \Rightarrow \phi_2^+ = \phi_4^+ \quad (18)$$

$$(15) \Rightarrow (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_3) = 0 \quad (19)$$

$$(16) \Rightarrow (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_2) \nabla \phi_2^+ = (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_4) \nabla \phi_4^+ \quad (20)$$

Superfície reflexiva horizontal:

$$(13) \Rightarrow (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_1) = 0 \quad (21)$$

$$(14) \Rightarrow \phi_2^+ = \phi_4^+ \quad (22)$$

$$(15) \Rightarrow (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_3) \nabla \phi_3^+ = 0 \quad (23)$$

$$(16) \Rightarrow (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_2) \nabla \phi_2^+ = (\hat{n} \cdot \underline{\Omega}_4) \nabla \phi_4^+ \quad (24)$$