

J. E. N. 251

Propulsión Iónica

por
G. Velarde

JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR

MADRID, 1972

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Documentación Biblioteca y Publicaciones, Junta de Energía Nuclear, Ciudad Universitaria, Madrid-3, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación

Este trabajo se ha recibido para su impresión en Noviembre de 1972.

0. SUMARIO

0.1.

En este estudio se dan las ecuaciones del funcionamiento interno y externo del cohete iónico.

0.2.

El cohete iónico, figuras 1 a 4 (§ 5.1), consta de un depósito con el propulsante y su bomba de alimentación, y de las cámaras de emisión y aceleración de iones y electrones. El propulsante, al entrar en la cámara de emisión, se pone en contacto con una rejilla de wolframio incandescente, ionizándose, es decir, perdiendo alguno de sus electrones corticales, y quedando cargado positivamente. Posteriormente, al entrar los iones del propulsante en la cámara de aceleración, en donde hay un fuerte campo electrostático, son acelerados hasta alcanzar la velocidad deseada, siendo después expulsados del cohete con trayectorias, al ser posible colimadas, para optimar así su cantidad de movimiento.

En estas condiciones se pueden obtener impulsos específicos superiores a los 10000 seg (más de 30 veces los alcanzados en la propulsión química), pero con empujes de unos gramos. Este sistema de propulsión es, por tanto, muy conveniente para vuelos espaciales fuera de la atmósfera y de la atracción de los astros.

1. ECUACIONES DEL FUNCIONAMIENTO INTERNO DEL COHETE IONICO.

1.1. Introducción

Si solamente se expulsasen iones, los electrones sobrantes cargarían electrostáticamente el cohete, produciéndose fuerzas electrostáticas que frenarían el haz de iones. Pero aún en el caso de expulsar iones y electrones en cantidades determinadas para mantener el cohete neutro, las cargas espaciales producidas por ellos originarían fuerzas electromagnéticas que perturbarían el haz de iones.

La probabilidad de que los iones y electrones en el espacio exterior se recombinen formando átomos neutros, o de que choquen en

tre si, es escasa; ya que los caminos libres medios recorridos por las partículas desde su salida del cohete hasta que se recombinan o chocan, son directamente proporcionales al cuadrado de sus velocidades e inversamente proporcionales a las densidades de corriente, obteniéndose, para valores normales en los cohetes iónicos, un camino medio de recombinación de 10 Km y un camino medio de colisión de 100 m. Por tanto puede considerarse que los iones y electrones en el espacio exterior forman un plasma.

De todo lo anterior, para que los iones expulsados del cohete se muevan en el espacio exterior sin pérdida apreciable de energía o de dirección, se requieren dos condiciones:

1.1.1. Cohete eléctricamente neutro

Es decir, que la corriente total neta que deja el cohete debe ser nula; para lo cual a la salida del cohete el gasto de cargas eléctricas positivas llevadas por los iones debe igualar al de negativas llevadas por los electrones.

1.1.2. Plasma neutro

O sea que la densidad de carga espacial neta debe estar neutralizada; para lo cual en el espacio exterior al cohete, la densidad de carga eléctrica positiva debida al haz de iones debe igualar a la negativa debida al haz de electrones.

1.2. Gasto numérico de partículas

Se obtiene por

$$c_1 I_p = e Q_p \dot{N}_p, \quad p = j, e \quad (1)$$

que aplicada a la cámara de iones, da

$$c_2 I_j = Q_j \dot{N}_j \quad (2)$$

y a la cámara de electrones

$$c_2 I_e = \dot{N}_e \quad (3)$$

siendo

subíndice p = partícula p, electrón o ión

subíndice j = ión j

subíndice i = todas los iones, suma para todas las j

subíndice e = electrón

$$c_1 = 2.99793 \times 10^9 \text{ ues.A}^{-1}$$

$$c_2 = c_1/e = 6.24197 \times 10^{18}$$

$$e = \text{carga del electrón} = 4.80286 \times 10^{-10} \text{ ues}$$

Q_j = número de cargas eléctricas del ión j = número de electrones que faltan al ión j para formar el átomo neutro

$$Q_e = 1$$

\dot{N}_p = gasto numérico de partículas j, partículas.seg⁻¹

I_p = corriente eléctrica debida a las partículas p, A

1.2.1 Cohete neutro

Del apartado 1.1.1, resulta

$$\dot{N}_e = \sum_j Q_j \dot{N}_j \quad \therefore \quad I_i = \sum_j I_j = I_e \quad (4)$$

1.3. Densidad espacial de partículas

Viene dada por

$$n_p = \frac{\dot{N}_p}{S_p v_p} = \frac{c_1 I_p}{e Q_p S_p v_p}, \quad p = j, e; \text{ partículas.cm}^{-3} \quad (5)$$

que aplicada al haz de iones, da

$$n_j = \frac{\dot{N}_j}{S_i v_j} = \frac{c_2 I_j}{S_i Q_j v_j}; \text{ iones.cm}^{-3} \quad (6)$$

y al haz de electrones

$$n_e = \frac{\dot{N}_e}{S_e v_e} = \frac{c_2 I_e}{S_e v_e}; \text{ electrones.cm}^{-3} \quad (7)$$

siendo

S_p = sección del haz de partículas p; como todas las clases de iones están mezcladas homogéneamente, S_i es la misma para todos los iones y S_e la de los electrones, coincidiendo ambas secciones con las correspondientes superficies de las rejillas aceleradoras, cm².

v_p = velocidad relativa, respecto al cohete, de cada partícula p , a la salida de su cámara de aceleración (rejilla aceleradora); se supone que todas las partículas de la misma clase tienen igual velocidad, v_e es la misma para todos los electrones, cm.sg^{-1}

1.3.1. Cargas especiales neutralizadas.

Al igualar las densidades de carga espaciales (§ 1.1.2), resulta

$$\sum_j n_j Q_j = n_e \quad \dots \quad \sum_j \frac{\dot{N}_j Q_j}{v_j} = \frac{S_i \dot{N}_e}{S_e v_e}, \quad \sum_j \frac{I_j}{v_j} = \frac{S_i I_e}{S_e v_e} \quad (8)$$

y definiendo una velocidad iónica promediada

$$v_i = \frac{\sum_j \frac{\dot{N}_j Q_j}{v_j}}{\sum_j \frac{\dot{N}_j Q_j}{v_j}} = \frac{I_i}{I_j} \quad (9)$$

obtenemos

$$\frac{v_i S_i}{I_i} = \frac{v_e S_e}{I_e} \quad (10)$$

1.3.2. Cohete y cargas espaciales neutralizadas.

De (4), la expresión (10) se simplifica en

$$v_i S_i = v_e S_e \quad (11)$$

1.4. Masa de las partículas.

Teniendo en cuenta que el ion j está formado por el átomo j al quitarle Q_j electrones corticales, la masa del ion j en función del número de Avogadro, será

$$m_j = \frac{A_j}{c_3} - Q_j m_e = \frac{A_j}{c_3} (1 - \alpha_j); \quad \text{g} \cdot \text{ion}^{-1} \quad (12)$$

o bien

$$\frac{m_j}{m_e} = Q_j \frac{1 - \alpha_j}{\alpha_j} \quad (13)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 m_e &= \text{masa del electrón} = 9.1085 \times 10^{-28}, \text{ g} \\
 A_j &= \text{peso atómico del átomo } j, \text{ g.mol}^{-1}, \text{ tabla 1} \\
 c_3 &= \text{número de Avogadro} = 6.02486 \times 10^{23}, \text{ átomos.mol}^{-1} \\
 1/c_3 m_e &= 1822.24
 \end{aligned}$$

$$\alpha_j = \frac{Q_j}{A_j / c_3 m_e} \ll \frac{1}{2}, \text{ tabla 1}$$

1.4.1.

Como $Q_j \sim 1$ ó 2 , y $A_j/c_3 m_e \sim 10^4$ a 10^5 para los propulsores alcalinos que son los empleados, las expresiones anteriores se reducen a

$$\alpha_j \sim 10^{-4} \text{ a } 10^{-5} \ll 1, \quad m_j \sim \frac{A_j}{c_3}, \quad \frac{m_j}{m_e} \sim \frac{Q_j}{\alpha_j} \quad (14)$$

1.5. Gasto másico de las partículas.

Viene dado por

$$\dot{w} = \sum_p \dot{w}_p, \quad \dot{w}_p = \dot{N}_p m_p, \quad p = j, e; \quad \text{g. seg}^{-1} \quad (15)$$

y teniendo en cuenta las expresiones de \dot{N}_p y m_p dadas en (2, 3 y 12), resulta

$$\dot{w}_i = c_4 \sum_j I_j \frac{1 - \alpha_j}{\alpha_j} \sim c_4 \sum_j I_j \frac{1}{\alpha_j}, \quad \text{g. seg}^{-1} \quad (16)$$

$$\dot{w}_e = c_4 I_e, \quad \text{g. seg}^{-1} \quad (17)$$

siendo

$$c_4 = m_e c_2 = 5.68550 \times 10^{-9}$$

1.5.1. Cohete neutro.

De (4), obtenemos

$$\dot{w} \sim c_4 \sum_j I_j \frac{1}{\alpha_j}, \quad \text{g. seg}^{-1} \quad (18)$$

1.6. Velocidad de las partículas.

La velocidad relativa respecto al cohete, de cada partícula

p, a la salida de su cámara de aceleración (rejilla acelerada), se obtiene al igualar su incremento de energía cinética al trabajo realizado por el campo electrostático, o sea

$$\frac{1}{2} m_p (v_p^2 - v_p'^2) = c_5 e Q_p V_p, \quad p = j, e; \quad \text{erg} \quad (19)$$

y sustituyendo m_p dado en (12), la velocidad relativa será

$$v_j = c_6 \sqrt{v_i \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_j} + \left(\frac{v_j'}{c_6}\right)^2}; \quad \text{cm. seg}^{-1} \quad (20)$$

$$v_e = c_6 \sqrt{v_e + \left(\frac{v_e'}{c_6}\right)^2}; \quad \text{cm. seg}^{-1} \quad (21)$$

siendo

$$c_5 = 10^7 / c_1 = 3.33563 \times 10^{-3} \quad \text{erg.ues}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$c_6 = \sqrt{\frac{2 e c_5}{m_e}} = 5.93103 \times 10^7 \quad \text{cm. seg}^{-1} \cdot \text{V}^{-\frac{1}{2}}$$

V_p = trabajo efectuado por el campo eléctrico sobre una partícula p con carga eléctrica unidad, el mismo para cada cámara, V_i para la cámara de iones y V_e para la de electrones. V

v_p' = velocidad inicial de la partícula p, a la entrada en su cámara de aceleración (salida de la placa emisora).

1.6.1.

En la placa emisora de iones los átomos del propulsante son ionizados, alcanzando una distribución que aproximadamente pueden considerarse maxwelliana, de la forma

$$\eta_j^! = \frac{\sqrt{e_j^!}}{\exp(e_j^! / KT_j^!)} \times \text{constante} \quad (22)$$

siendo

$$e_j^! = \frac{1}{2} m_j v_j'^2 = \text{energía cinética de los iones a la salida de la placa emisora, erg}$$

$\eta_j^! d e_j^!$ = densidad de los iones a la salida de la placa emisora con energías cinéticas en el intervalo $d e_j^!$;

k = constante de Boltzman = 1.381×10^{-16} erg.K⁻¹

T_i' = temperatura absoluta de los iones a la salida de la placa emisora, la misma para todas las clases de iones, °K

La energía cinética media, viene dada por

$$\overline{e_j'} = \frac{\int_0^\infty e_j' \eta_j' d e_j'}{\int_0^\infty \eta_j' d e_j'} = \overline{e_i'} = \frac{3}{2} k T_i' \quad (23)$$

y su velocidad correspondiente

$$v_j'(e_j') = \sqrt{\frac{3 k T_i'}{m_j}} = \sqrt{\frac{3 c_3 k T_i'}{A_j(1-\alpha_j)}} \sim 1.57990 \times 10^4 \sqrt{\frac{T_i'}{A_j}} \quad (24)$$

que para los propulsantes alcalinos y con temperaturas del orden de los $T_i' \sim 1500$ °K, la velocidad inicial de los iones es de unos $v_j'(e_j') \sim 10^4$ cm.seg⁻¹, la cual es despreciable frente a la velocidad de salida de la cámara de aceleración de iones que es de unos $v_j \sim 10^7$ cm.seg⁻¹, para un empuje específico de $I_s \sim 10^4$ seg.

Por tanto, la expresión (20) se reduce a

$$v_j = c_6 \sqrt{v_i \frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}} \sim c_6 \sqrt{v_i \alpha_j}, \quad \text{cm.seg}^{-1} \quad (25)$$

y teniendo en cuenta la definición de velocidad promediada en (9), se puede obtener un valor de α_i dado por

$$v_i = c_6 \sqrt{v_i \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} = \frac{I_i}{\sum_j \frac{I_j}{c_6 \sqrt{v_i \frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}}}} \quad (26)$$

de donde

$$\sqrt{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} = \frac{\sum_j I_j \sqrt{\frac{1-\alpha_j}{\alpha_j}}}{I_i} \quad (27)$$

1.6.2.

En la placa emisora de electrones, estos son producidos por emisión térmica. Los electrones "libres" del metal de la placa emisora están sometidos a la estadística cuántica de Fermi-Dirac, (5 4), figura 5

$$\eta_e = \frac{\sqrt{e_e}}{1 + \exp [(e_e - e_1)/k T_e]} \times \text{constante} \quad (28)$$

siendo (18 del § 4)

$$e_o = \frac{h^2}{2 m_e} \left(\frac{\gamma^3 \rho c_3}{8 \pi A} \right)^{2/3}, \text{ erg, tabla 2}$$

$$e_1 = e_o \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k T_e}{e_o} \right)^2 \right], \text{ erg,}$$

h = constante de Planck = 6.62×10^{-27} erg seg

ρ = densidad del metal, g.cm^{-3} , tabla 2

A = peso atómico del metal, g.mol^{-1} , tabla 2

e_e = energía total de los electrones en el metal de la placa emisora, erg

γ = número de electrones "libres" por átomo del metal

η_e d e_e = densidad de los electrones en el metal, con energía total en el intervalo d e_e

T_e = temperatura absoluta del metal de la placa emisora, °K

Para $e_e \leq e_o$ y una $T_e = 0^\circ\text{K}$, hay [constante $\sqrt{e_e}$ d e_e] electrones con energía en el intervalo d e_e , siendo esta energía la interna de los electrones, ya que a cero grados absolutos la energía cinética es nula.

Para $e_e \gg e_o$ y a una T_e normal de la placa emisora, la distribución (28) se reduce a

$$\eta_e \sim \frac{\sqrt{e_e}}{\exp (e_e/k T_e)} \times \text{constante} \quad (29)$$

que coincide, salvo un factor constante, con la distribución maxwelliana (22) de los iones libres, a su entrada en su cámara de aceleración.

La energía total media de los electrones "libres" dentro del metal, viene dada por

$$\bar{e}_e = \frac{\int_0^\infty e_e \eta_e d e_e}{\int_0^\infty \eta_e d e_e} \sim \frac{3 e_o}{5} \left[1 + \frac{5 \pi^2}{12} \left(\frac{k T_e}{e_o} \right) \right] \quad (30)$$

Para que un electrón "libre" del metal de la placa emisora pueda escapar, es necesario que venza las fuerzas electrostáticas superficiales de ligadura, de la capa doble formada, para lo cual debe tener una energía total superior a una umbral de

$$e_c = (e \phi) + e_o \quad (31)$$

siendo, figura 6, ϕ el potencial voltáico, y

$(e \phi)$ = energía de extracción (work function), erg, tabla 2

La condición (31) es necesaria pero no suficiente, ya que el electrón puede tener una dirección que no sea la apropiada para la emisión. La condición necesaria y suficiente para que el electrón es cape del metal, es que tenga una velocidad en la dirección perpendicular a la superficie del metal (tomada como eje OX), superior a v_c , dada por

$$v_c = \sqrt{\frac{2 e_c}{m_e}} = \sqrt{\frac{2}{m_e} [(e \phi) + e_o]} \quad (32)$$

y la velocidad media de los electrones emitidos en la dirección OX, será (23 del § 4)

$$v'_e = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{v_c}^{\infty} v_x \eta(v_x, v_y, v_z) dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{v_c}^{\infty} \eta(v_x, v_y, v_z) dv_x} = \frac{\sqrt{2KT_e} \exp \left[- \frac{(e \phi) + e_o}{KT_e} \right]}{\sqrt{\pi m_e} \left[1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{(e \phi) + e_o}{KT_e}} \right]} \quad (33)$$

que debido a la exponencial decreciente, es despreciable con respecto a la de salida de la cámara de aceleración de los electrones v_e . En vez de hacer $v'_e = 0$, es preferible sustituir en (21), V_e por

$$V_e^* = V_e + f(T_e, \text{tipo de material y clase de superficie de la placa emisora, ...}) \quad (34)$$

la cual se determina experimentalmente para que se verifique

$$v_e = c_6 \sqrt{\frac{V_e^*}{e}} \quad (35)$$

1.6.3. Cargas espaciales neutralizadas

De (10, 26 y 35), obtenemos

$$\frac{V_i}{V_e^*} = \left(\frac{S_e I_i}{S_i I_e} \right)^2 \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \quad (36)$$

1.6.4. Cohete y cargas espaciales neutralizadas

Con (4), la expresión anterior se reduce a

$$\frac{V_i}{V_e^*} = \left(\frac{S_e}{S_i}\right)^2 \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \quad (37)$$

1.7 Dimensiones de las cámaras de aceleración

Se obtiene una relación entre las dimensiones de las cámaras, el voltaje acelerador y las densidades de partículas y corrientes, aplicando las ecuaciones de los (§ 1.3 y 1.6) y la ecuación de Poisson con las correspondientes condiciones de contorno. Para simplificar el problema, consideraremos que cada cámara de aceleración está formada por dos placas planas y paralelas (las de emisión y aceleración) de superficie muy grande comparada con su separación, con lo cual el campo eléctrico es normal a las placas, las cuales son equipotenciales; además se supone que entre ellas hay el vacío, por cuyo motivo las partículas no pierden energía por colisión.

1.7.1. Cámara de aceleración de los electrones

La densidad de corriente electrónica I_e/S_e debida a la emisión termiónica depende del material de la placa emisora, a su temperatura absoluta T_e y del voltaje acelerador V_e . Para un voltaje acelerador fijo V_{e1} , partiendo de bajas temperaturas, todos los electrones emitidos por la placa emisora (cátodo) van a parar a la rejilla aceleradora (ánodo); y al ir aumentando sucesivamente la temperatura, figura 7, aumenta la densidad de corriente, hasta que a partir de un cierto valor de $T_{e1} = f(V_{e1})$, parte de los electrones emitidos no van a parar al ánodo, originando una carga espacial que hace que al aumentar la temperatura permanezca constante la densidad de corriente. El punto 1 se llama de saturación. Antes de alcanzar la temperatura de saturación T_{e1} , la densidad de corriente, viene dada por la ley de Richardson, que se obtiene, a partir de (33), y de (22 del § 4), por

$$\frac{I_e}{S_e} = c_2^{-1} e v_e^{\dagger} \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{v_c}^{\infty} \eta(v_x, v_y, v_z) dv_x \sim c_7 T_e^2 \exp(-e \phi_E / kT_e);$$

A.cm⁻²

(30)

en la cual

$$c_7 = \frac{2 \pi e m_e k^2}{c_1 h^3} = 60.2 \text{ A.cm}^{-2} \cdot \text{°K}^{-2}$$

$$(e \phi_E) = (e \phi) - \frac{2 e^{3/2} E^{1/2}}{\sqrt{16 \pi e_0}}$$

siendo E el campo eléctrico exterior aplicado, el cual reduce la energía de extracción (26 del § 4), figura 6.

Para obtener grandes densidades de corriente interesa valores pequeños de la energía de extracción ($e \phi$) y altas temperaturas T_e ; los metales alcalinos aunque de baja energía de extracción funden a bajas temperaturas por lo cual es preferible emplear el W, principalmente con ciertas impurezas que rebajan la energía de extracción, así de $(e \phi) = 4.54 \text{ ev}$ baja a 2.86 ev al añadirle Th.

Para una temperatura fija de la placa emisora T_{e1} , y partiendo de pequeños valores del voltaje acelerador, a medida que este aumenta figura 7, va creciendo la densidad de corriente, hasta que a partir de un cierto valor de $V_{e1} = f(T_{e1})$ no todos los electrones emitidos por el cátodo van a parar al ánodo, y al aumentar el voltaje permanece constante la densidad de corriente. El punto 1 se llama de saturación. Antes de alcanzar el voltaje de saturación V_{e1} , la densidad de corriente viene dada por la ley de Child, que se obtiene con las ecuaciones (7 y 21) y la de Poisson,

$$v_e(x) n_e(x) = c_2 \frac{I_e}{S_e} \quad (39)$$

$$v_e(x) = c_6 \sqrt{V_e(x)} \quad (40)$$

$$\frac{d^2 V_e(x)}{d x^2} = - c_5 4 \pi 9e n_e(x) \quad (41)$$

que en unión de las condiciones de contorno en el cátodo

$$V_e(0) = 0, \quad v_e(0) = v'_e = 0, \quad \left. \frac{d V_e}{d x} \right|_{x=0} = 0 \quad (42)$$

resulta

$$\frac{I_e}{S_e} = \frac{c_5}{9 \pi c_1} \frac{v_e V_e}{d_e^2}; \quad \text{A.cm}^{-2} \quad (43)$$

siendo

x = distancia tomando como origen el cátodo, cm

d_e = distancia entre el cátodo y ánodo, cm

y habiéndose supuesto que la velocidad inicial de los electrones v'_e es nula. En realidad los electrones tienen una velocidad no nula al salir del cátodo, lo cual modifica la ley de Child, en el sentido de emplear el potencial v_e^* definido en (34) en vez del V_e .

Como la temperatura de la placa emisora es muy elevada, la densidad de corriente electrónica está limitada por las cargas espaciales y viene dada por la ley de Child (43), la cual con (35) puede ponerse en la forma

$$\gamma_e^2 = \frac{S_e}{d_e^2} = c_8 \frac{I_e}{v_e^{*3/2}} \quad (44)$$

siendo

$$c_8 = \frac{9 \pi c_1}{c_5 c_6} = \frac{9 \pi c_1^2}{10^7 c_6} = 4.28455 \times 10^5$$

1.7.2. Cámara de aceleración de los iones

La densidad de corriente iónica viene limitada por las cargas espaciales aplicándose la ley de Child (43)

$$\frac{I_i}{S_i} = \frac{c_5}{9 \pi c_1} \frac{v_i V_i}{d_i^2} \quad (45)$$

o bien, con el valor de v_i dado en (26)

$$\gamma_i^2 = \frac{S_i}{d_i^2} = c_8 \frac{I_i}{v_i^{3/2}} \sqrt{\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}} \sim c_8 \frac{I_i}{v_i^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \quad (46)$$

El comportamiento del haz de iones a la salida de la cámara de aceleración depende fundamentalmente de γ_i^2 . Cuando $\gamma_i^2 \ll 1$, las fuerzas producidas por las cargas espaciales son principalmente radiales, por lo cual el haz de iones se expande ligeramente, según la ley

$$\delta \sim \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \sqrt{\frac{S_i}{\pi}} \left[\exp \left(\frac{4\theta}{\gamma_i} \right)^2 - 1 \right] \quad (47)$$

siendo

δ = distancia desde la rejilla de aceleración, cm

θ = ángulo entre la trayectoria exterior del haz y la normal a la rejilla de aceleración, rad

tal que para $\gamma_i^2 \leq 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, δ vale varios Km, y en estas condiciones no se necesita neutralizar las cargas espaciales. Sin embargo, cuando $\gamma_i^2 \leq 1$, el empuje que se puede obtener (60) es $E_i = 7.87037 \times 10^{-7} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i} V_i^2$, con $V_i \sim 10000$ V es de $E_i \sim 80d \sim 0.08$ g, el cual es insuficiente para la propulsión espacial. Con objeto de alcanzar empujes de unos cuantos gramos se necesita una $\gamma_1^2 > 1$ pero entonces el haz iónico se distorsiona considerablemente y es preciso neutralizar las cargas espaciales.

1.7.3. Cohete neutro

De (4, 44 y 46), resulta

$$\frac{\gamma_i^2}{\gamma_e} = \left(\frac{V_e^*}{V_i}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}} \sim \left(\frac{V_e^*}{V_i}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \quad (48)$$

1.7.4. Cargas espaciales neutralizadas

De (36, 44 y 46), obtenemos

$$\frac{\gamma_i^2}{\gamma_e} = \frac{V_e^* S_i}{V_i S_e} \dots \left(\frac{d_i}{d_e}\right)^2 = \frac{V_i}{V_e^*} \quad (49)$$

1.8 Potencia del propulsante

Viene dada por la derivada temporal de su energía cinética, y es igual a la potencia eléctrica desarrollada en las cámaras. Para una velocidad relativa de las partículas constante

$$P = \sum_p P_p, \quad P_p = \frac{c_g}{2} \frac{d(N m v^2)_p}{d t} = \frac{c_g}{2} \dot{N}_p m_p v_p^2 = \frac{c_g}{2} \dot{w}_p v_p^2, \quad p = j, e; w \quad (50)$$

y teniendo en cuenta (19, 26 y 35), resulta

$$P_i = V_i I_i \quad (51)$$

$$P_e = V_e^* I_e$$

siendo

$$c_9 = 10^{-7} \text{ w.seg.erg}^{-1}$$

1.8.1 Cohete neutro

De (4), obtenemos

$$\frac{P_i}{P_e} = \frac{V_i}{V_e^*} \tag{53}$$

$$P = I_i V_i \left(1 + \frac{V_e^*}{V_i}\right) \tag{54}$$

1.8.2. Cargas espaciales neutralizadas

De (36), resulta

$$\frac{P_i}{P_e} = \frac{I_i}{I_e} \frac{S_e I_i}{S_i I_e} \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \sim \frac{I_i}{I_e} \frac{S_e I_i}{S_i I_e} \frac{1}{\alpha_i} \tag{55}$$

$$P = I_i V_i \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \frac{S_i I_e}{S_e I_i} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}\right] \sim I_i V_i \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \frac{S_e I_e}{S_e I_i} \alpha_i\right] \tag{56}$$

1.8.3. Cohete y cargas espaciales neutralizadas

De lo anterior se obtiene

$$\frac{P_i}{P_e} = \frac{S_e}{S_i} \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \sim \frac{S_e}{S_i} \frac{1}{\alpha_i} \tag{57}$$

$$P = I_i V_i \left[1 + \left(\frac{S_i}{S_e}\right)^2 \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}\right] \sim I_i V_i \left[1 + \left(\frac{S_i}{S_e}\right)^2 \alpha_i\right] \tag{58}$$

1.9. Empuje del propulsante

Se obtiene de la derivada temporal de su cantidad de movimiento. Para una velocidad relativa de las partículas constante

$$E = \sum_p E_p, \quad E_p = \frac{d(N m v)_p}{dt} = \dot{N}_p m_p v_p = \dot{w}_p v_p, \quad p = j, e; \tag{59}$$

y teniendo en cuenta (16, 26 y 27), obtenemos

$$E_i = c_{10} I_i \sqrt{V_i} \sqrt{\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}} \sim c_{10} I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}}; \tag{60}$$

$$E_e = c_{10} I_e \sqrt{V_e^*}; \tag{61}$$

siendo

$$c_{10} = c_4 c_6 = c_2 c_6 m_e = 0.33721$$

1.9.1. Cohete neutro

De (4), resulta

$$\frac{E_i}{E_e} = \sqrt{\frac{V_i}{V_e^*}} \sqrt{\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}} \sim \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}} \quad (62)$$

$$E = c_{10} I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}} \left[1 + \sqrt{\frac{V_e^*}{V_i}} \sqrt{\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}} \right] \sim c_{10} I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha_i V_e^*}{V_i}} \right]; d \quad (63)$$

1.9.2. Cargas espaciales neutralizadas. De (36), obtenemos

$$\frac{E_i}{E_e} = \frac{I_i}{I_e} \left(\frac{S_e I_i}{S_i I_e} \right) \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \sim \frac{I_i}{I_e} \left(\frac{S_e I_i}{S_i I_e} \right) \frac{1}{\alpha_i} \quad (64)$$

$$E = c_{10} I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}} \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i} \right) \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \right] \sim c_{10} I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}} \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i} \right) \alpha_i \right]; d \quad (65)$$

1.9.3. Cohete y cargas espaciales neutralizadas.

Según lo anterior

$$\frac{E_i}{E_e} = \frac{S_e}{S_i} \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \frac{S_e}{\alpha_i S_i} \quad (66)$$

$$E = c_{10} I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}} \left(1 + \frac{S_i}{S_e} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \right) \sim c_{10} I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}} \left(1 + \frac{S_i \alpha_i}{S_e} \right); d \quad (67)$$

1.10. Impulso específico

Es la razón entre el empuje y el gasto ponderal del propulsante, obteniéndose de los (§ 1.5 y 1.9)

$$I_{si} = \frac{E_i}{g \dot{w}_i} = c_{11} \frac{I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}}}{\sum_j \frac{I_j}{\alpha_j}} \sim \frac{I_i \sqrt{\frac{V_i}{\alpha_i}}}{\sum_j \frac{I_j}{\alpha_j}}; \text{seg} \quad (68)$$

$$I_{se} = \frac{E_e}{g \dot{w}_e} = c_{11} \sqrt{V_e^*}; \text{ seg} \quad (69)$$

$$I_s = \frac{E}{g \dot{w}} = c_{11} \frac{I_i \sqrt{V_i} \sqrt{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \sqrt{\frac{V_e^*}{V_i}} \sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \right]}{\sum_j \frac{I_j}{\alpha_j} + I_e}; \text{ seg} \quad (70)$$

siendo

$$c_{11} = \frac{c_6}{g} = 6.0520 \times 10^4$$

$$g = 980 \text{ cm. seg}^{-2}$$

1.10.1. Cohete neutro, con una sola clase de iones

De (4) tenemos

$$\frac{I_{si}}{I_{se}} = \sqrt{\frac{V_i}{V_e^*}} \sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \sim \sqrt{\frac{V_i \alpha_i}{V_e^*}} \quad (71)$$

$$I_s = c_{11} \sqrt{V_i} \sqrt{\alpha_i (1-\alpha_i)} \left[1 + \sqrt{\frac{V_e^*}{V_i}} \sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \right] \sim c_{11} \sqrt{\alpha_i V_i} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_i V_e^*}{V_i}} \right); \text{ seg} \quad (72)$$

1.10.2. Cargas espaciales neutralizadas, con una sola clase de iones

De (36), resulta

$$\frac{I_{si}}{I_{se}} = \left(\frac{S_e I_i}{S_i I_e} \right) \quad (73)$$

$$I_s = c_{11} \sqrt{V_i} \sqrt{\alpha_i (1-\alpha_i)} \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i} \right) \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \right] \sim c_{11} \sqrt{\alpha_i V_i} \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i} \right) \alpha_i \right]; \text{ seg} \quad (74)$$

1.10.3. Cohete y cargas espaciales neutralizadas, con una sola clase de iones

De lo anterior

$$\frac{I_{si}}{I_{se}} = \frac{S_e}{S_i} \quad (75)$$

$$I_s = c_{11} \sqrt{V_i} \sqrt{\alpha_i(1-\alpha_i)} \left(1 + \frac{S_i \alpha_i}{S_e (1-\alpha_i)}\right) \sim$$

$$\sim c_{11} \sqrt{\alpha_i V_i} \left(1 + \frac{S_i}{S_e} \alpha_i\right); \text{ seg} \quad (76)$$

1.11. Razón empuje-potencia

Se obtiene directamente de los (§ 1.8 y 1.9)

$$\epsilon_i = \frac{E_i}{P_i} = c_{10} \frac{1}{\sqrt{V_i}} \sqrt{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} \sim c_{10} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i V_i}}; \text{ d.w}^{-1} \quad (77)$$

$$\epsilon_e = \frac{E_e}{P_e} = c_{10} \frac{1}{\sqrt{V_e^*}}; \text{ d.w}^{-1} \quad (78)$$

$$\epsilon = \frac{E}{P} = c_{10} \frac{\sqrt{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} \left[1 + \frac{I_e}{I_i} \sqrt{\frac{V_e^*}{V_i}} \sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\right]}{V_i \left(1 + \frac{I_e}{I_i} \frac{V_e^*}{V_i}\right)}, \text{ d.w}^{-1} \quad (79)$$

1.11.1. Cohete neutro

De (4), tenemos

$$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_e} = \sqrt{\frac{V_e^*}{V_i}} \sqrt{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} \sim \sqrt{\frac{V_e^*}{\alpha_i V_i}} \quad (80)$$

$$\epsilon = c_{10} \frac{\sqrt{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} \left[1 + \sqrt{\frac{V_e^*}{V_i}} \sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\right]}{\sqrt{V_i} \left(1 + \frac{V_e^*}{V_i}\right)} \sim c_{10} \frac{1 + \sqrt{\frac{\alpha_i V_e^*}{V_i}}}{\sqrt{\alpha_i V_i} \left(1 + \frac{V_e^*}{V_i}\right)} \quad (81)$$

1.11.2. Cargas espaciales neutralizadas

De (36) da

$$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_e} = \frac{S_i I_e}{S_e I_i} = \frac{I_{si}}{I_{se}} \quad (82)$$

$$\epsilon = c_{10} \frac{\sqrt{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} \left[1 + \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i}\right) \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right]}{\sqrt{V_i} \left[1 + \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i}\right)^2 \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right]} \sim$$

$$\sim c_{10} \frac{1 + \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i}\right) \alpha_i}{\sqrt{\alpha_i V_i} \left|1 + \left(\frac{S_i I_e}{S_e I_i}\right) \alpha_i\right|} \quad (83)$$

1.11.3. Cohete y cargas espaciales neutralizadas

De lo anterior

$$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_e} = \frac{S_i}{S_e} = \frac{I_{si}}{I_{se}} \quad (84)$$

$$\epsilon = c_{10} \frac{\sqrt{\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}} \left[1 + \left(\frac{S_i}{S_e} \right) \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \right]}{1 + \left(\frac{S_i}{S_e} \right) \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}} \sim \frac{c_{10}}{\sqrt{\alpha_i V_i} \left[1 + \left(\frac{S_i}{S_e} \right)^2 \alpha_i \right]} \quad (85)$$

1.12. Acoplamiento de las cámaras

El acoplamiento entre el generador eléctrico y las cámaras de iones y electrones puede hacerse en serie o en paralelo, figura 8.

1.12.1 Acoplamiento en serie

El acoplamiento en serie se caracteriza porque la intensidad de los iones es la misma que la de los electrones, $I_i = I_e$. Además se puede ajustar la relación entre los voltajes de modo que se cumpla la relación (37). Por tanto, en el acoplamiento en serie se pueden cumplir las dos condiciones de los (§ 1.1.1 y 1.1.2), con lo cual el cohete y las cargas espaciales están neutralizadas.

1.12.2. Acoplamiento en paralelo

El acoplamiento en paralelo se caracteriza por tener las cámaras de iones y electrones los mismos voltajes, $V_i = V_e$. Aún en el caso de conseguir iguales intensidades $I_i = I_e$, con lo cual la corriente en el generador sería $I = I_i + I_e = 2I_i$, es prácticamente imposible que se verifique la relación (37) al ser $V_i = V_e \leq V_e^*$ y $S_i \sim S_e$. En estas condiciones prácticamente solo se puede cumplir el (§ 1.1.1), o sea se puede conseguir que el cohete esté eléctricamente neutro, pero no neutralizar las cargas espaciales.

1.12.3. Comparación de los acoplamientos

Comparando los acoplamientos en serie y en paralelo con la misma clase y gasto numérico de partículas, e iguales empujes ióni

cos, o sea si

$$\begin{aligned}
 (\alpha_i)_{\text{serie}} &= (\alpha_i)_{\text{para}}, (I_i)_{\text{serie}} = (I_e)_{\text{serie}} = (I_i)_{\text{para}} = \\
 &= (I_e)_{\text{para}}, (V_i)_{\text{serie}} = (V_i)_{\text{para}}
 \end{aligned} \tag{86}$$

en el acoplamiento en serie, al ser normalmente $S_i \sim S_e$, $\alpha_i \ll 1$, de (57, 58 y 66), resulta

$$(P)_{\text{serie}} \sim I_i V_i, \left(\frac{P_i}{P_e}\right)_{\text{serie}} \sim \frac{1}{\alpha_i}, \left(\frac{E_i}{E_e}\right)_{\text{serie}} \sim \frac{1}{\alpha_i} \tag{87}$$

y en el acoplamiento en paralelo, como $V_i = V_e \leq V_e^*$, de (53, 54, y 62), obtenemos

$$(P)_{\text{para}} \geq 2I_i V_i, \left(\frac{P_i}{P_e}\right)_{\text{para}} \leq 1, \left(\frac{E_i}{E_e}\right)_{\text{para}} \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha_i}} \tag{88}$$

Mientras que en ambos acoplamientos el empuje debido a los iones es muy superior al debido a los electrones, la potencia eléctrica consumida en acelerar los iones, es para el acoplamiento en serie muy superior a la consumida en acelerar los electrones, y del mismo orden de magnitud en el acoplamiento en paralelo, con lo cual se precisa en este caso una potencia total de aceleración doble de la necesaria en el acoplamiento en serie.

En ambos casos se verifica que (§ 1.10 y 1.11)

$$I_s \cdot \epsilon \sim \text{constante} \tag{89}$$

y según el tipo de misión a realizar había que sacrificar el impulso específico o bien la razón empuje-potencia.

2. ECUACIONES DEL FUNCIONAMIENTO EXTERNO DEL COHETE

2.1. Introducción

Las ecuaciones balísticas del cohete iónico son análogas a las de otros tipos de cohetes.

Sin embargo, debido a los pequeños empujes obtenidos, la aplicación de este tipo de propulsión está indicada en los vuelos

espaciales, fuera de la atmósfera y atracción de los astros.

2.2. Balística del cohete libre, sin fuerzas exteriores

De la conservación de la masa, obtenemos,

$$\dot{M} + \dot{w} = 0 \quad , \quad \dot{M} = -\dot{w} = -\dot{M}_p \quad (1)$$

y de la conservación de la cantidad de movimiento, teniendo en cuenta que la velocidad absoluta de las partículas del propulsante es $v_p - C$, resulta

$$\dot{M} C = \sum_p \dot{w}_p (v_p - C) = \dot{M} C + M \dot{C} \quad \therefore \quad M \dot{C} = \sum_p \dot{w}_p v_p \quad (2)$$

siendo

M = masa instantánea del cohete durante la propulsión iónica, g

M_p = masa del propulsante al empezar la propulsión iónica, g

M_v = masa del cohete sin propulsante, g

$M_o = M_p + M_v$ = masa del cohete al empezar la propulsión iónica, g

C = velocidad instantánea del cohete, cm. seg^{-1}

C_o = velocidad del cohete al empezar la propulsión iónica, cm. seg^{-1}

C_b = velocidad del cohete al terminar la propulsión iónica, cm. seg^{-1}

El segundo miembro de la expresión (2) es el empuje (59-1) producido por el propulsante, por tanto

$$E = M \dot{C} \quad (3)$$

2.2.1

Suponiendo que las magnitudes que definen el funcionamiento interno del cohete no varían durante el tiempo de propulsión iónica, es decir, se mantienen constantes, por ejemplo, el tipo y gasto de partículas, y el empuje, tenemos

$$M_p = \dot{w} t_b ; g \quad (4)$$

$$M = M_o - \dot{w} t = M_o - M_p \frac{t}{t_b} ; g \quad (5)$$

siendo t_b el tiempo que dura la propulsión iónica.

Sustituyendo (5) en (3) e integrando, obtenemos la velocidad instantánea del cohete

$$\begin{aligned} C &= C_o - \frac{E t_b}{M_p} \ln\left(1 - \frac{M_p t}{M_o t_b}\right) = C_o - \frac{E}{\dot{w}} \ln\left(1 - \frac{\dot{w} t}{M_v + \dot{w} t_b}\right) = \\ &= C_o - g I_s \ln\left(1 - \frac{\dot{w} t}{M_v + \dot{w} t_b}\right); \text{ cm. seg}^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

que al final de la propulsión iónica vale

$$\begin{aligned} C_b &= C_o + \frac{E t_b}{M_p} \ln\left(1 + \frac{M_p}{M_v}\right) = C_o + \frac{E}{\dot{w}} \ln\left(1 + \frac{\dot{w} t_b}{M_v}\right) = \\ &= C_o + g I_s \ln\left(1 + \frac{\dot{w} t_b}{M_v}\right); \text{ cm. seg}^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

y los tiempos desde que empezó la propulsión iónica

$$t = \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{C - C_o}{g I_s} \right] \right\} \left\{ t_b + \frac{M_v}{\dot{w}} \right\}; \text{ seg} \quad (8)$$

$$t_b = \left\{ \exp \left[\frac{C_b - C_o}{g I_s} \right] - 1 \right\} \left\{ \frac{M_v}{\dot{w}} \right\}; \text{ seg} \quad (9)$$

El factor $\frac{E t_b}{M_p} = \frac{E}{\dot{w}} = g I_s$ representa la velocidad media de las diversas partículas del propulsante.

2.2.2.

Si la masa total del propulsante al empezar la propulsión iónica es pequeña comparada con la del cohete, $M_p \ll M_o$. $\therefore M_p \ll M_v$, tomando el primer término del desarrollo en serie de (6 y 7), resulta

$$C \sim C_o + \frac{E t}{M_v + \dot{w} t_b} \sim C_o + \frac{E t}{M_v}, \text{ cm. seg}^{-1} \quad (10)$$

$$C_b \sim C_o + \frac{E t_b}{M_v} \sim C_o + \frac{E t_b}{M_v + \dot{w} t_b}, \text{ cm. seg}^{-1} \quad (11)$$

2.3. Relación entre las ecuaciones de funcionamiento externo e interno del cohete iónico.

Basta sustituir las expresiones de \dot{w} , E y I_s dadas en los (§ 1.5, 1.9 y 1.10) en las ecuaciones (6 a 9). En particular, para el acoplamiento en serie con una sola clase de iones, tenemos para las velocidades

$$C \sim C_o - c_6 \sqrt{\alpha_i V_i} \ln\left(1 - \frac{c_4 I_i t}{M_v \alpha_i + c_4 I_i t_b}\right), \text{ cm.seg}^{-1} \quad (12)$$

$$C_b \sim C_o + c_6 \sqrt{\alpha_i V_i} \ln\left(1 + \frac{c_4 I_i t_b}{M_v}\right), \text{ cm.seg}^{-1} \quad (13)$$

y para los tiempos desde que empezó la propulsión iónica

$$t \sim \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{C - C_o}{c_6 \sqrt{\alpha_i V_i}} \right] \right\} \left\{ t_b + \frac{M_v \alpha_i}{c_4 I_i} \right\}, \text{ seg} \quad (14)$$

$$t_b \sim \left\{ \exp \frac{C_b - C_o}{c_6 \alpha_i V_i} - 1 \right\} \left\{ \frac{M_v \alpha_i}{c_4 I_i} \right\}, \text{ seg} \quad (15)$$

3. COMPONENTES DEL COHETE IONICO

3.1. Masa de los componentes

Se ha de procurar que sean lo más reducidas posible, con objeto de aumentar las actuaciones del cohete. En el (§ 2.2) la masa del cohete al iniciarse la propulsión iónica se descomponía en

$$M_o = M_v + M_p ; \text{ g} \quad (16)$$

y a su vez, la masa en vacío se descompone en

$$M_v = M_{dp} + M_{te} + M_{ea} + M_{um} ; \text{ g} \quad (17)$$

en la cual

M_{dp} = masa del depósito de propulsante, g

M_{te} = masas de los generadores térmico y eléctrico, y de la turbina y condensador, g

M_{ea} = masas de los sistemas emisores de iones y electrones y de sus cámaras de aceleración, g

M_{um} = masa restante del cohete, útil y muerta, g

3.1.1.

La masa del depósito de propulsante puede considerarse proporcional al peso del propulsante, o sea

$$M_{dp} = K_{dp} M_p ; g \quad (18)$$

siendo K_{dp} del orden de 0.1.

3.1.2.

La masa de los componentes termo-eléctricos depende considerablemente del sistema empleado; en general se puede suponer proporcional a la potencia eléctrica generada, o sea

$$M_{te} = K_{te} P , g \quad (19)$$

Limitándonos al caso de emplear como generador térmico un reactor nuclear de fisión, si se emplea un sistema compacto de turbina de mercurio, análogo al SNAP 8, K_{te} es del orden de 19; mientras que si se emplea un sistema termoiónico este valor puede reducirse a 1.

3.1.3.

La masa de los componentes de los emisores y aceleradores de iones y electrones, puede considerarse también proporcional a la potencia eléctrica, es decir

$$M_{ea} = K_{ea} P ; g \quad (20)$$

siendo K_{ea} alrededor de 0.1.

3.1.4.

La masa del cohete al iniciarse la propulsión iónica será entonces

$$M_o = (1 + K_{dp}) M_p + (K_{te} + K_{ea}) P + M_{um} ; g \quad (21)$$

3.2. Propulsante

El propulsante debe estar totalmente ionizado, ya que los átomos no ionizados no contribuyen al empuje. Además la energía de ionización y los calores latentes de fusión y vaporización deben ser lo más reducidos posible.

De todo los elementos, los alcalinos son los que tienen energías de ionización más bajas, pudiendo ionizarse por contacto con placas incandescentes (1.400 a 2.200 °K) de Pt o W, con un rendimiento aproximadamente la unidad. Entre los metales alcalinos, tabla 1, el Cs es el que tiene menor energía de ionización y menores calores latentes de fusión y vaporización, así como un valor del parámetro α más pequeño, que hace que la razón empuje-potencia aumente a costa del impulso específico que disminuye (89 - 1).

3.3. Cámaras de ionización y aceleración

El propulsante en forma de vapor, entra en la cámara de ionización a través de una rejilla distribuidora, pasando después a una serie de rejillas incandescentes, que hacen de ánodo, en donde el propulsante es ionizado; entrando después en la cámara de aceleración y saliendo a través de la rejilla aceleradora o cátodo. A partir de entonces, se encuentra la rejilla de emisión termoiónica de electrones, la cámara de aceleración de electrones y su rejilla aceleradora, figuras 2 y 4.

El material de las rejillas emisoras de iones o ionizadoras ha de ser resistente a temperaturas de 1400 a 2200 °K y tener una energía de extracción e_e (31 - 1) superior a la de ionización del propulsante, tablas 1 y 2; por lo cual, si se emplea el Cs como propulsante, el W es el metal más indicado.

El material de la rejilla aceleradora de iones ha de ser resistente a la erosión debida al bombardeo iónico. Para el W, la velocidad de erosión viene dada por $\beta I_i / 100 \sigma_i$ en la que βI_i es la corriente iónica interceptada por la rejilla aceleradora de superficie σ_i , con lo cual el tiempo que ha de transcurrir hasta que la erosión alcance δ_i cm de profundidad en el W será

$$\tau = \frac{5000 \delta_i \sigma_i}{\beta_i I_i} ; \text{ seg} \quad (22)$$

y para que $\tau \gg 1$, debe ser $\sigma_i \gg 1$, (que la rejilla sea ancha vista de frente) o bien que $\delta_i \gg 1$ (que la rejilla sea profunda). Para $\beta \sim 10^{-3}$ a 10^{-4} , $I_i/S_i \sim 0.003 \text{ A.cm}^{-2}$, $\sigma_i/S_i \sim 0.1$, $\delta_i \sim 0.1 \text{ cm}$, $\tau \sim 1.7 \times 10^7 \text{ sg} \sim 200 \text{ días}$

4. APENDICE. DISTRIBUCION DE LOS ELECTRONES DENTRO Y FUERA DE LOS METALES.

Los niveles energéticos de los electrones en los átomos aislados se transforman en bandas cuando los átomos constituyen un sólido, tal como indica la figura 6. En los metales la distancia interatómica es lo suficientemente pequeña para que la banda de valencia se solape con la de conducción, y los electrones correspondientes ya no pertenecen a un determinado átomo, sino que forman una especie de gas electrónico. Estos electrones "libres" están sometidos a la estadística de Fermi-Dirac, dada en el (§ 5.3) por:

$$n(e) \, d e = \frac{c(e) \, d e}{\exp\left(\frac{e - e_1}{KT_e}\right) + 1} \quad (1)$$

con la condición

$$n = \int \frac{n(e) \, d e}{\text{volumen}} = \gamma \frac{\rho \, c_3}{A} = \text{número de electrones por unidad de volumen} \quad (2)$$

siendo

$n(e) \, d e$ = número de electrones, por unidad de volumen, cuyas energías están en el entorno $d e$ alrededor de e .

$c(e) \, d e$ = número de celdas en el espacio fásico x, y, z, p_x, p_y, p_z de tamaño h^3 , por unidad de volumen, cuyas energías están en el entorno $d e$ alrededor de e .

h = constante de Plank = $6.625 \times 10^{-27} \text{ erg.seg}$

K = constante de Boltzman = $1.381 \times 10^{-16} \text{ erg.}^\circ\text{K}^{-1}$

e_1 = una constante a determinar por la condición (2)

γ = número de electrones "libres", por átomo de metal

ρ = densidad del metal, g.cm^{-3} , tabla 2

A = peso atómico del metal, g.mol^{-1} , tabla 2

4.1.

De la definición de $c(e) d e$, obtenemos

$$c(e) d e = c(p) d p = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{Volumen en el espacio} \\ \text{fásico de todas las} \\ \text{celdas con cantidad de} \\ \text{movimiento } p + dp \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{Número de direccio} \\ \text{nes del momento } c\vec{i} \\ \text{nético del elec-} \\ \text{trón} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} \text{Volumen de una cel-} \\ \text{da fásica} \end{array} \right) \cdot (\text{Volumen del medio})} \quad (3)$$

El número de direcciones del momento cinético del electrón es $2s+1 = 2$, ya que su spin es $1/2$. El volumen de una celda fásica es h^3 y el volumen del medio V . Un elemento de volumen fásico es $d\tau = d\vec{r} d\vec{p}$, con $d\vec{p} = p^2 dp d\Omega$, siendo $\vec{p} = p \vec{\Omega}$. De lo anterior resulta

$$c(e) d e = c(p) d p = \frac{2}{h^3 V} \int_V d\vec{r} \int_{\vec{\Omega}} p^2 dp d\Omega = \frac{2^3 \pi}{h^3} p^2 dp = \frac{2^{9/2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} e^{1/2} d e \quad (4)$$

en la cual la integración se efectúa para todo valor de \vec{r} y de $\vec{\Omega}$, manteniendo constante p , y habiéndose aplicado la relación entre la energía y la cantidad de movimiento, $e = \frac{p^2}{2m_e}$.

Sustituyendo (4) en (1), resulta

$$n(e) d e = \left(\frac{2^{9/2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} \right) \frac{e^{1/2} d e}{\exp\left(\frac{e - e_1}{KT_e}\right) + 1} \quad (5)$$

$$n(p) d p = \left(\frac{2^3 \pi}{h^3} \right) \frac{p^2 d p}{\exp\left(\frac{p^2 - p_1^2}{2m_e KT_e}\right) + 1} \quad (6)$$

4.2.

Cuando se quiere determinar el número de electrones cuya cantidad de movimiento en la dirección x están en el entorno $d p_x$ alrededor de p_x , en (6) hay que emplear el elemento de volumen fásico

$d\tau = d\vec{r} d\vec{p}$, con $d\vec{p} = dp_x dp_y dp_z$, e integrar para todo valor de \vec{r} , p_y , p_z . Con lo cual (1) se transforma en

$$n(p_x) dp_x = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{dp_x}{\exp \left[\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_1^2}{2 m_e K T_e} \right] + 1} \quad (7)$$

4.3.

Para calcular la constante e_1 basta sustituir (5) en (2), pero debido a la dificultad de las integraciones, consideraremos los siguientes casos.

4.3.1. $T_e = 0$

Empleando el subíndice 0, cuando $e < e_0$, tenemos

$$\eta_0(e) = \frac{2^{9/2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} e^{1/2}, \quad \eta_0(p) = \frac{2^3 \pi}{h^3} p^2 \quad (8)$$

y cuando $e > e_0$

$$\eta_0(e) = \eta_0(p) = 0 \quad (9)$$

es decir, $\eta(e)$ y $\eta(p)$ son parábolas que se extienden desde 0 a e_0 , p_0 , tal como indica la figura 5.

Sustituyendo (8) en (2), resulta

$$\eta = \frac{2^{9/2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} \int_0^{e_0} e^{1/2} de = \frac{2^{13/2} \pi m_e^{3/2}}{3 h^3} e_0^{3/2} \quad (10)$$

luego

$$e_0 = \frac{h^2}{2 m_e} \left(\frac{3 \eta}{8 \pi} \right)^{2/3}, \quad p_0 = \sqrt{2 m_e e_0} = h \left(\frac{3 \eta}{8 \pi} \right)^{1/3} \quad (11)$$

Los valores más probables de la energía e_{p_0} y de la cantidad de movimiento p_{p_0} coinciden con los e_0 y p_0 obtenidos anteriormente.

$$e_{p_0} = e_0, \quad p_{p_0} = p_0 \quad (12)$$

los valores medios $(\bar{e})_0$ y $(\bar{p})_0$, son

$$\bar{e}_o = \frac{\int_0^{e_o} e \eta(e) d e}{\int_0^{e_o} \eta(e) d e} = \frac{2^{9/2} \pi m_e^{3/2}}{h^3 \eta} \int_0^{e_o} e^{3/2} d e = \frac{3}{5} e_o = \frac{3}{10} .$$

$$\frac{h^2}{m_e} \left(\frac{3 \eta}{8 \pi} \right)^{2/3} \quad (13)$$

$$\bar{p}_o = \frac{\int_0^{p_o} p \eta(p) d p}{\int_0^{p_o} \eta(p) d p} = \frac{2^3 \pi}{h^3} \int_0^{p_o} p^3 d p = \frac{3}{4} h \left(\frac{3 \eta}{8 \pi} \right)^{1/3} \quad (14)$$

y los valores correspondientes a estos promedios

$$p_o(\bar{e}_o) = \sqrt{2 m_e \bar{e}_o} = \frac{3}{5} p_o \quad (15)$$

$$e_o(\bar{p}_o) = \frac{\bar{p}_o^2}{2 m_e} = \frac{3^2}{2^4} e_o \quad (16)$$

4.3.2. $e_o \gg K T_e$

Este caso es de gran interés práctico, ya que los electrones "libres" de los metales tienen generalmente una e_o/K mayor que la temperatura de fusión del metal. Sustituyendo (5) en (2), resulta

$$\eta = \left(\frac{2^{9/2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} \right) \int_0^\infty \frac{e^{1/2} d e}{\exp \left(\frac{e - e_1}{K T_e} \right) + 1} = \left(\frac{2^{13/2} \pi m_e^{3/2}}{3 h^3} \right) e_1^{3/2} .$$

$$\left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{K T_e}{e_1} \right)^2 + \dots \right] \quad (17)$$

luego

$$e_1 \simeq e_o \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{K T_e}{e_o} \right)^2 \right] \quad (18)$$

Los valores medios \bar{e} y \bar{p} , son

$$\bar{e} = \frac{\int_0^\infty e \eta(e) d e}{\eta} \simeq \bar{e}_o \left[1 + \frac{5 \pi^2}{12} \left(\frac{K T_e}{e_o} \right)^2 \right] \quad (19)$$

$$\bar{p} = \frac{\int_0^\infty \sqrt{2 m_e e} \eta(e) d e}{\eta} \simeq \bar{p}_o \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{K T_e}{e_o} \right)^2 \right] \quad (20)$$

4.4.

Cuando $p^2 - p_1^2 \gg 2 m_e K T_e$, tal como ocurre para los electro

nes emitidos, la expresión (7) se simplifica en

$$\begin{aligned} \eta(p_x) dp_x &= \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \exp \left[- \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_1^2}{2 m_e K T_e} \right] dp_x = \\ &= \frac{2}{h^3} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{p_y^2}{2 m_e K T_e} \right) dp_y \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{p_z^2}{2 m_e K T_e} \right) dp_z \right] \cdot \\ &\cdot \exp \left(- \frac{p_x^2 - p_1^2}{2 m_e K T_e} \right) dp_x = \frac{2}{h^3} (2 \pi m_e K T_e) \exp \left(- \frac{p_x^2 - p_1^2}{2 m_e K T_e} \right) dp_x \quad (21) \end{aligned}$$

4.4.1.

El número de electrones emitidos por unidad de volumen, será

$$\begin{aligned} \eta_{emitidos} &= \int_{p_c}^{\infty} \eta(p_x) dp_x = \frac{2}{h^3} (2 \pi m_e K T_e) \exp \left(\frac{p_1^2}{2 m_e K T_e} \right) \cdot \\ &\cdot \int_{\frac{p_c}{\sqrt{2 m_e K T_e}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{(2 \pi m_e K T_e)^{3/2}}{h^3} \exp \left(\frac{e_1}{K T_e} \right) \left[1 - \right. \\ &\left. - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{(e \phi) + e_o}{K T_e}} \right] \quad (22) \end{aligned}$$

4.4.2.

La cantidad de movimiento media en la dirección de los electrones emitidos, es

$$\bar{p}_x \text{ emitidos} = \frac{\int_{p_c}^{\infty} p_x \eta(p_x) dp_x}{\int_{p_c}^{\infty} \eta(p_x) dp_x} = \frac{\sqrt{2 m_e K T_e} \exp \left[- \frac{(e \phi) + e_1}{K T_e} \right]}{\sqrt{\pi} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{(e \phi) + e_o}{K T_e} \right]} \quad (23)$$

4.5. Efecto Schottky

Cuando se aplica una diferencia de potencial entre la rejilla y la placa emisora, la energía de extracción ($e \phi$) disminuye. La energía potencial de un electrón fuera del metal se calcula por el método de las imágenes. La fuerza ejercida entre el metal y el electrón que dista de la superficie x , es la misma que se obtiene al reemplazar el metal por un electrón positivo situado en la imagen del electrón respecto a la superficie del metal. Es decir, ambos electrones estarán distanciados $2x$, y la fuerza ejercida será $\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_o^* (2x)^2}$, co-

respondiendo un potencial de $-\frac{e^2}{16 \pi e_0^* x}$. Si se aplica un campo eléctrico exterior, constante E, figura 6, el incremento de energía potencial en el electrón será $-e E x$, con lo cual la energía potencial del electrón fuera del metal será

$$U = -\frac{e^2}{16 \pi e_0^* x} - e E x, \quad e_0^* \text{ constante dieléctrica} \quad (24)$$

cuyo máximo corresponde a

$$\frac{dU}{dx} = \frac{e^2}{16 \pi e_0^* x_m^2} - e E = 0 \quad \therefore \quad x_m = \left(\frac{e}{16 \pi e_0^* E}\right)^{1/2} \quad (25)$$

y cuyo valor máximo de U será:

$$U_m = -\frac{2 e^{3/2} E^{1/2}}{\sqrt{16 \pi e_0^*}} \quad (26)$$

lo que equivale a reducir el valor de $(e \phi)$ en la cantidad U_m , o sea

$$(e \phi_E) = (e \phi) - |U_m| \quad (27)$$

4.5.1. Corrección debida al efecto tunel

Cuando el campo eléctrico exterior es nulo, los electrones con energía inferior a $e_c = e_0 + (e \phi)$ no pueden ser emitidos clásica ni cuánticamente.

Cuando el campo eléctrico exterior no es nulo, el potencial exterior resultante, forma según (24), una barrera de potencial, fig. 6, de tal modo que los electrones con energía inferior a $e_c - |U_m| = e_0 + (e \phi_E)$ no podrán ser emitidos clásicamente, mientras que cuánticamente tienen una determinada probabilidad de atravesar la barrera, tanto mayor cuanto mayor sea la energía del electrón, ya que de este modo disminuye la altura y anchura de la barrera.

Aplicando el método de WKB (§ 5.3), se obtiene la ecuación de Fowler-Nordheim para la densidad adicional de corriente electrónica

$$\frac{I_e}{S_e} = c_{12} \frac{E^2}{\phi} \exp \left[-\frac{c_{13} \phi^{3/2}}{E} \left(1 - c_{14} \frac{E}{\phi} \right) \right], \quad A. \text{ cm}^{-2} \quad (28)$$

siendo

$$c_{12} = 1.6 \times 10^{-10}$$

$$c_{13} = 7 \times 10^9$$

$$c_{14} = 1.4 \times 10^{-9}$$

La densidad de corriente electrónica anterior ha de sumarse a la obtenida clásicamente en (38 - 1).

La ecuación de Fowler-Nordheim es tan sensible al valor del campo eléctrico exterior, como la de Richardson lo es al valor de la temperatura de la placa emisora.

Para que la densidad de corriente electrónica debida al efecto tunel sea apreciable respecto a la clásica, es necesario que el campo eléctrico exterior sea muy superior al empleado usualmente en la cámara de aceleración de los electrones, por lo que su valore puede despreciarse.

TABLA I

	Na	K	Cs	Rb
peso atómico A	22.99	39.10	132.91	85.48
densidad ρ , g.cm ⁻³	0.971	0.870	1.870	1.53
masa m, g.ion ⁻¹	0.382x10 ⁻²²	0.649x10 ⁻²²	2.206x10 ⁻²²	1.419x10 ⁻²²
para Q = 1	2.387x10 ⁻⁵	1.404x10 ⁻⁵	0.413x10 ⁻⁵	0.642x10 ⁻⁵
energía de ionización				
cal.g ⁻¹	5151.4	2560.7	676.0	1127.2
ev.ion ⁻¹	5.138	4.339	3.893	4.176
erg.g ⁻¹	21.560x10 ¹⁰	10.718x10 ¹⁰	2.829x10 ¹⁰	4.718x10 ¹⁰
calor latente fusión; Cal.g ⁻¹	27.050	14.600	3.766	6.100
calor latente vaporización; Cal.g ⁻¹	1005	496	146	212
temperatura fusión, °C	97.8	63.7	28.5	39.0
temperatura vaporización, °C	833	760	705	688
coste \$.g ⁻¹	0.00036	0.02	4.5	5.0

TABLA 2

elemento	A	$\rho, \text{g.cm}^{-3}$	e_o		$(e \phi)$		temp fusión °C
			ev	erg. 10^{12}	ev	erg. 10^{12}	
Li	6.940	0.534	4.7	7.5	2.48	3.96	186.0
Na	22.99	0.971	3.2	5.1	2.28	3.65	97.8
K	39.10	0.870	2.1	3.4	2.22	3.66	63.7
Rb	85.48	1.53	1.8	2.9			39.0
Cs	132.91	1.87	1.5	2.4	1.93	3.19	28.5
Ni	58.71	8.75	7.4	11.9	4.96	7.95	1455
Mo	95.95	10.2	5.8	9.3	4.24	6.80	2640
Pd	106.4	12.2	6.1	9.8	4.98	7.98	1549
Ta	180.95	16.6	5.3	8.5	4.13	6.62	2996
Pt	195.09	21.4	6.0	9.6	5.36	8.69	1773
W	183.86	18.9	5.8	9.3	4.54	7.28	3392
Th	232.05	11.5			3.38	5.42	1845
W toriado					2.86	4.58	

SNOOPER DE PROPULSIÓN IÓNICA

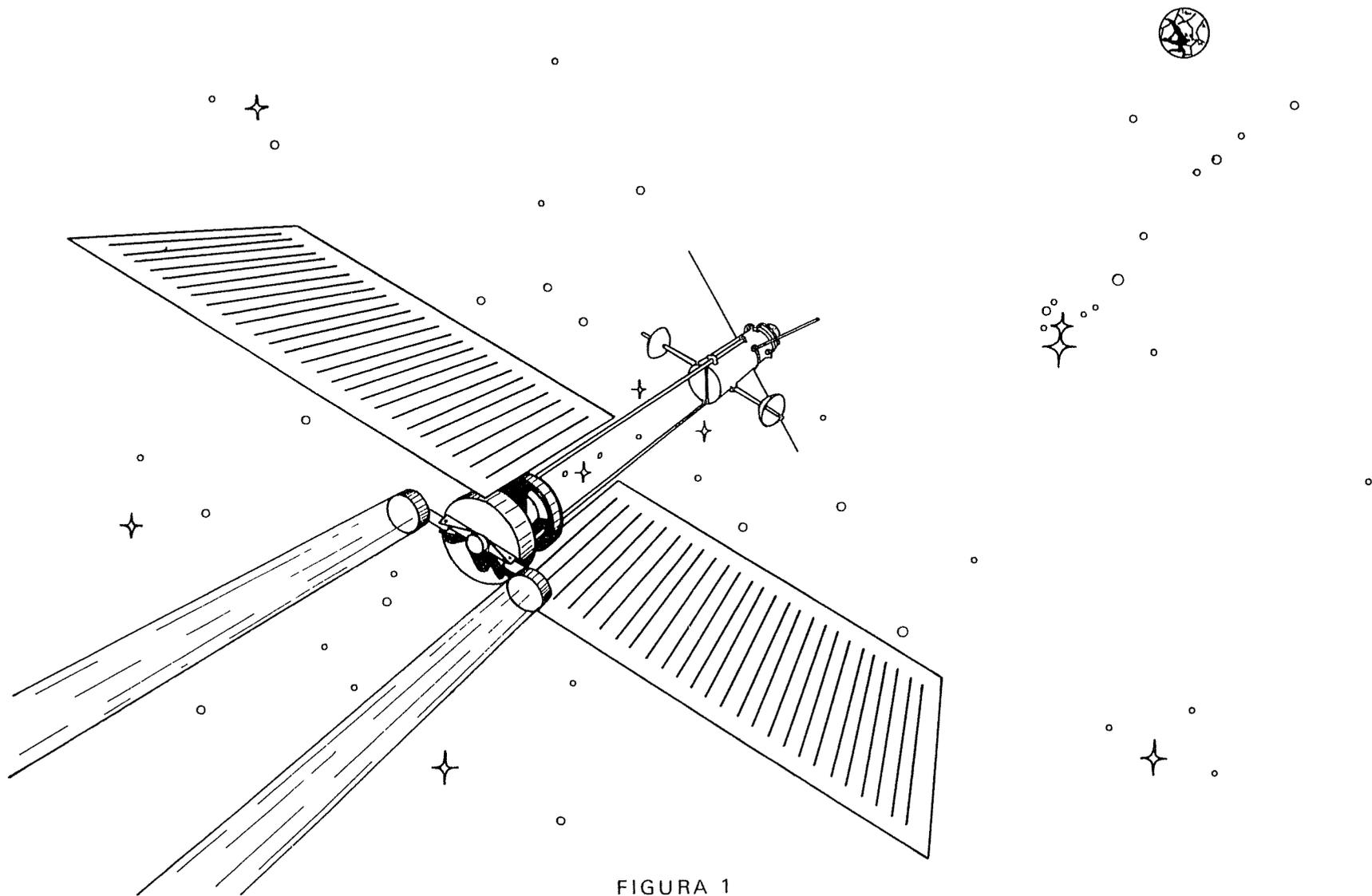
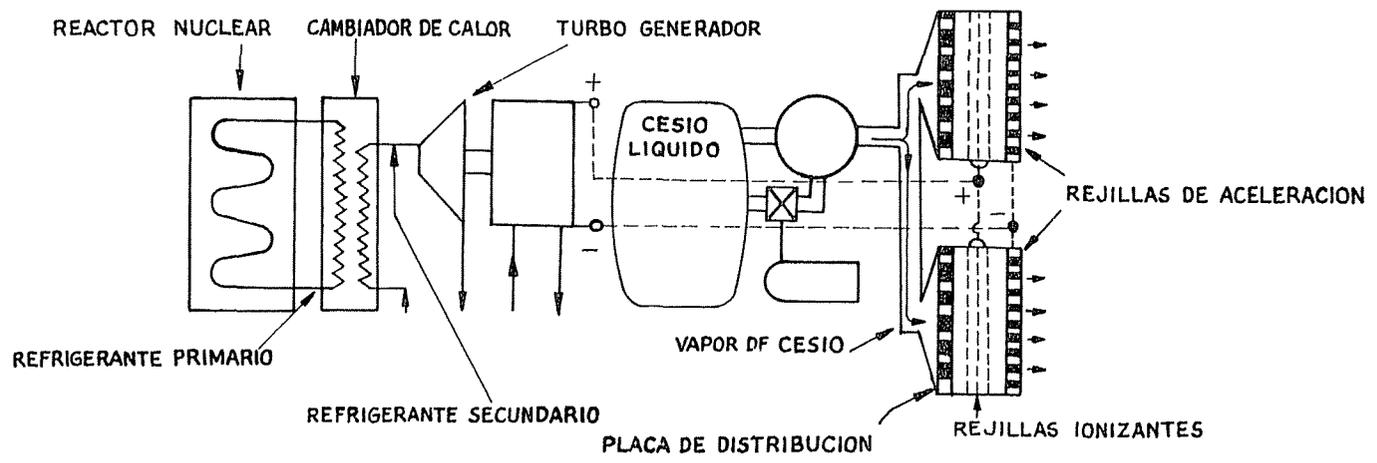


FIGURA 1



COHETE IONICO

FIGURA 2

DISPOSICION DEL MOTOR IONICO Y DEL RADIADOR EN EL SNOOPER

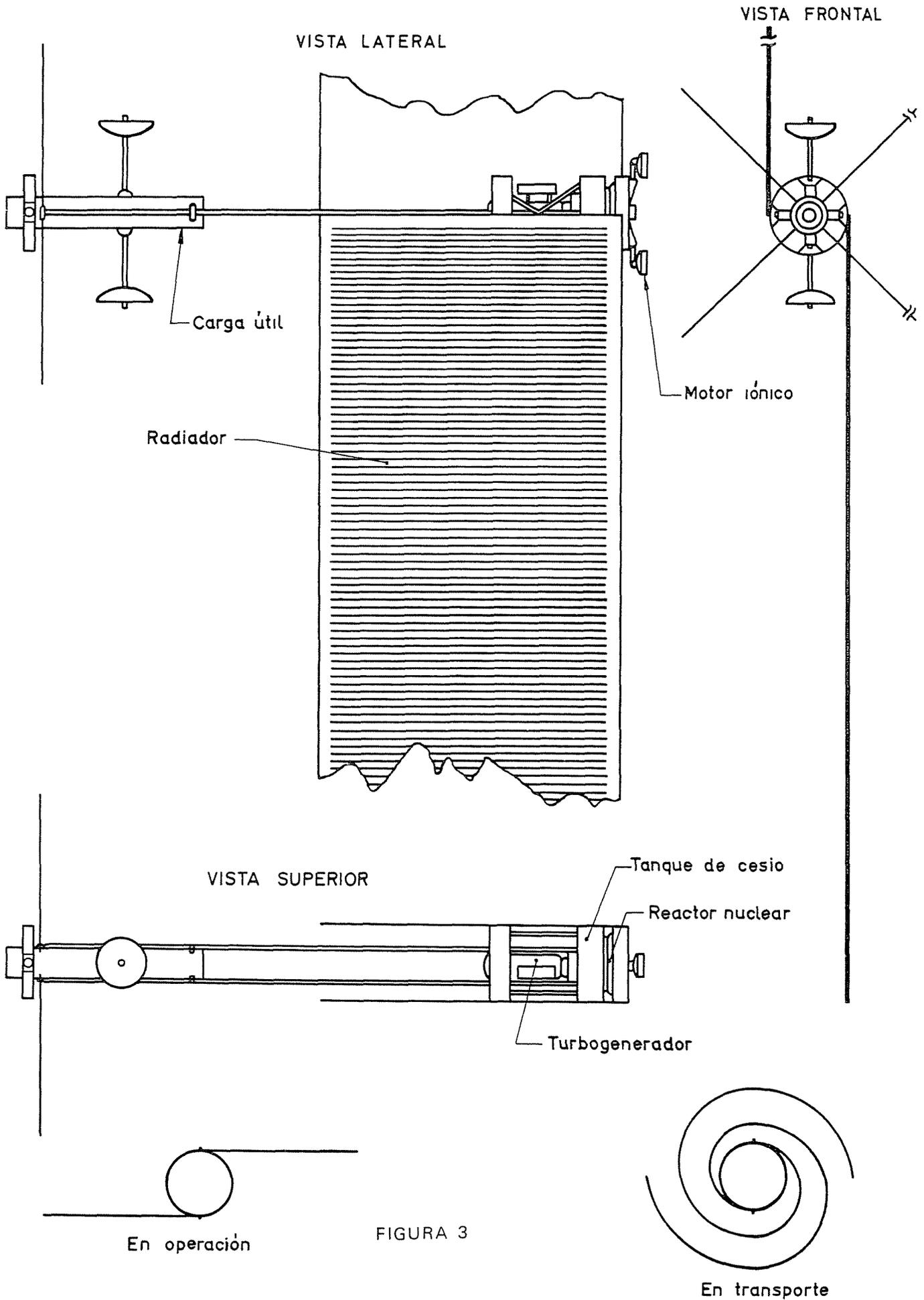


FIGURA 3

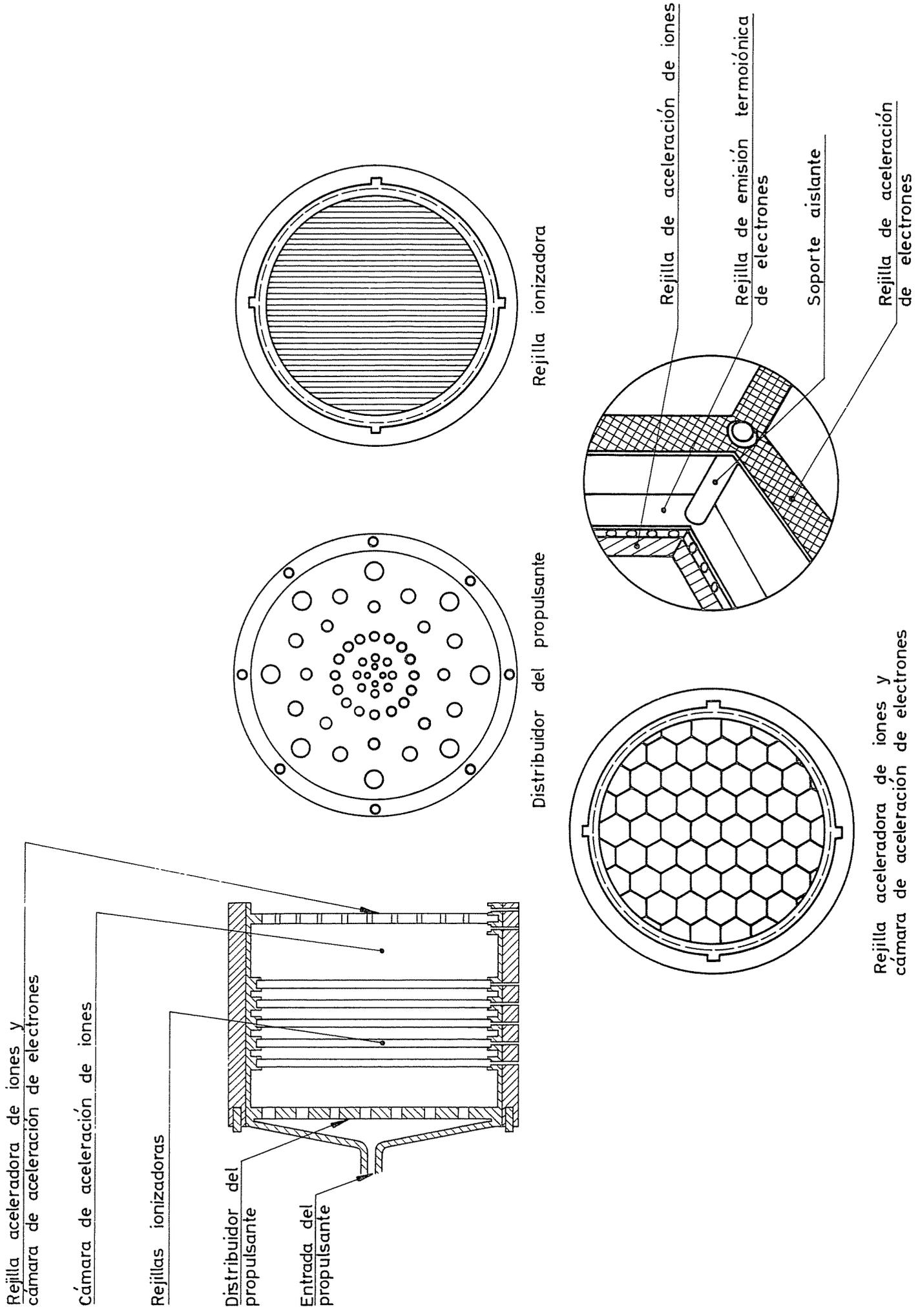
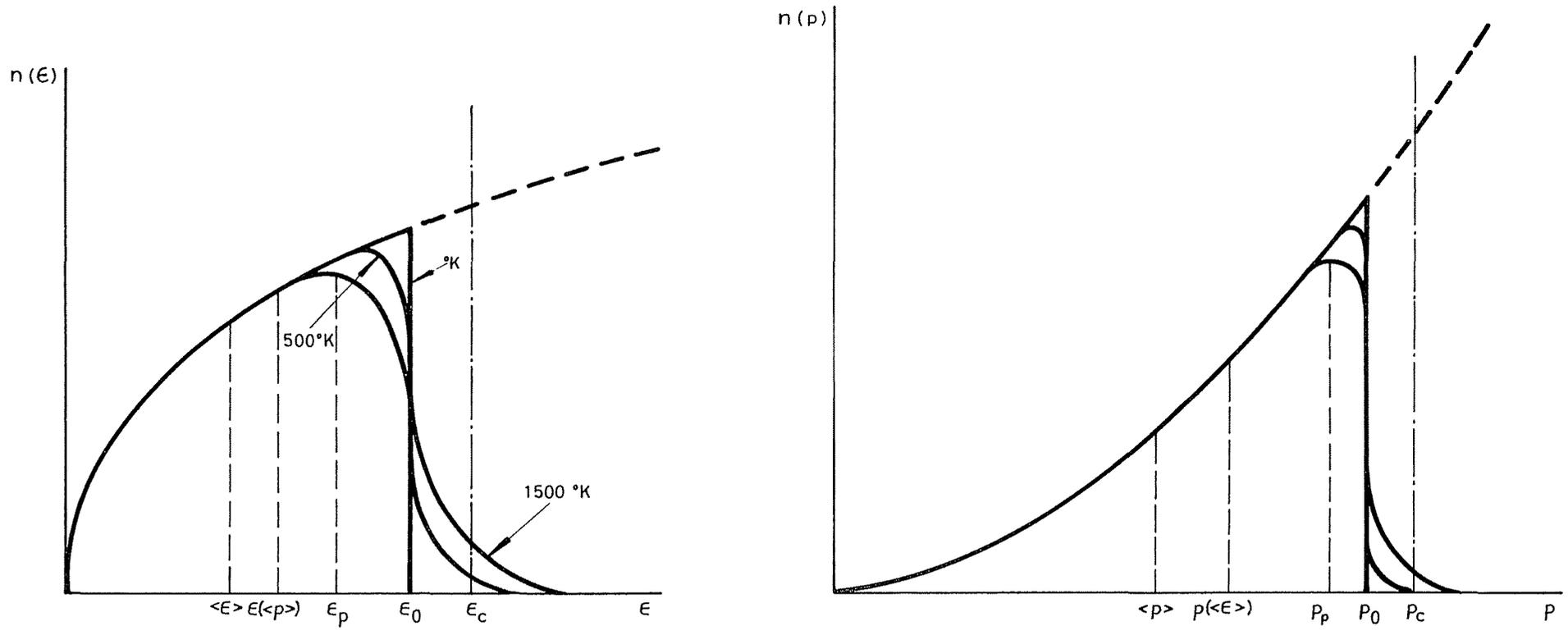
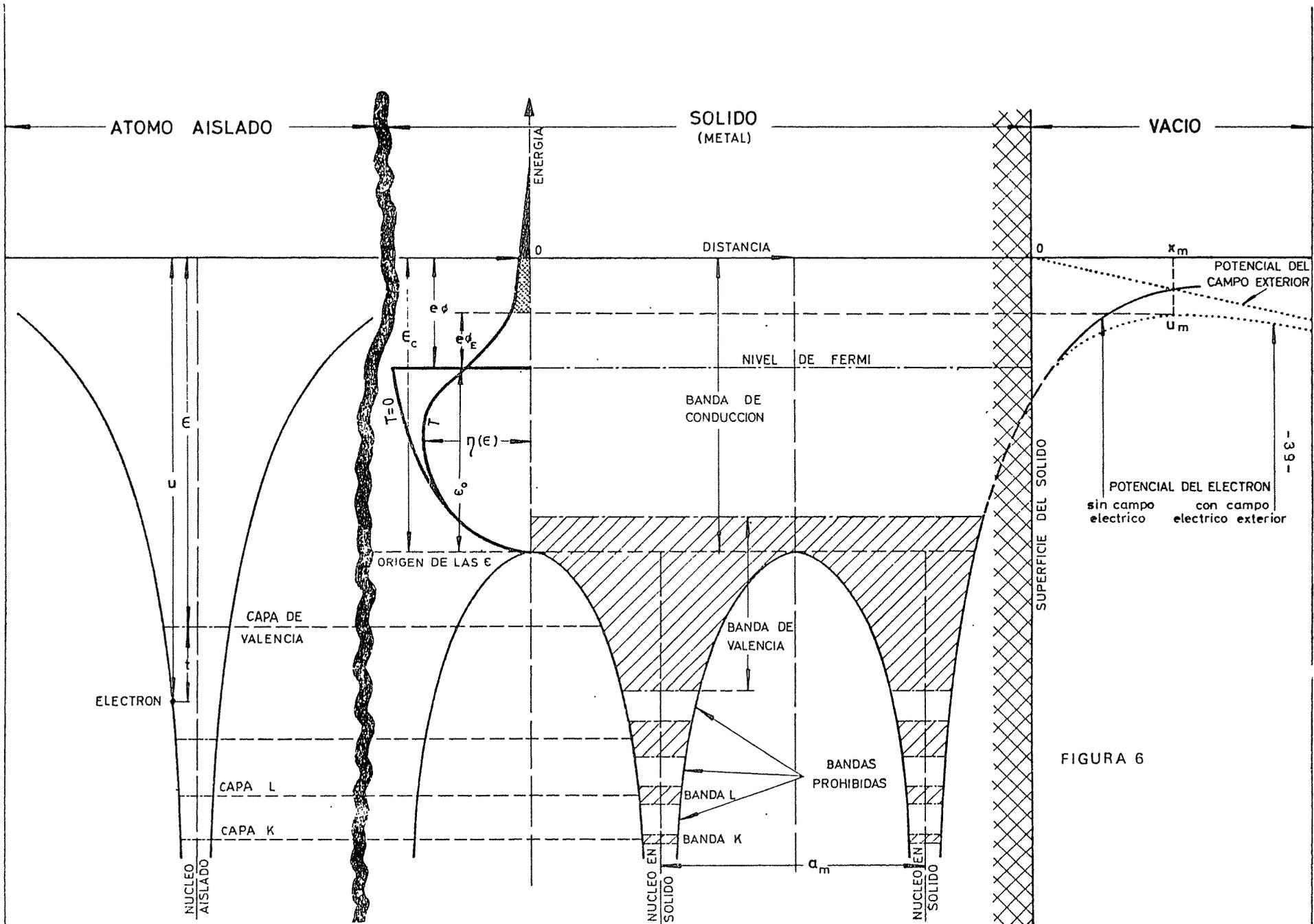


Fig - 4 Cámara de emisión y aceleración de iones y electrones en el CROONOR



DISTRIBUCION ESTADISTICA CUANTICA DE FERMI-DIRAC

FIGURA 5



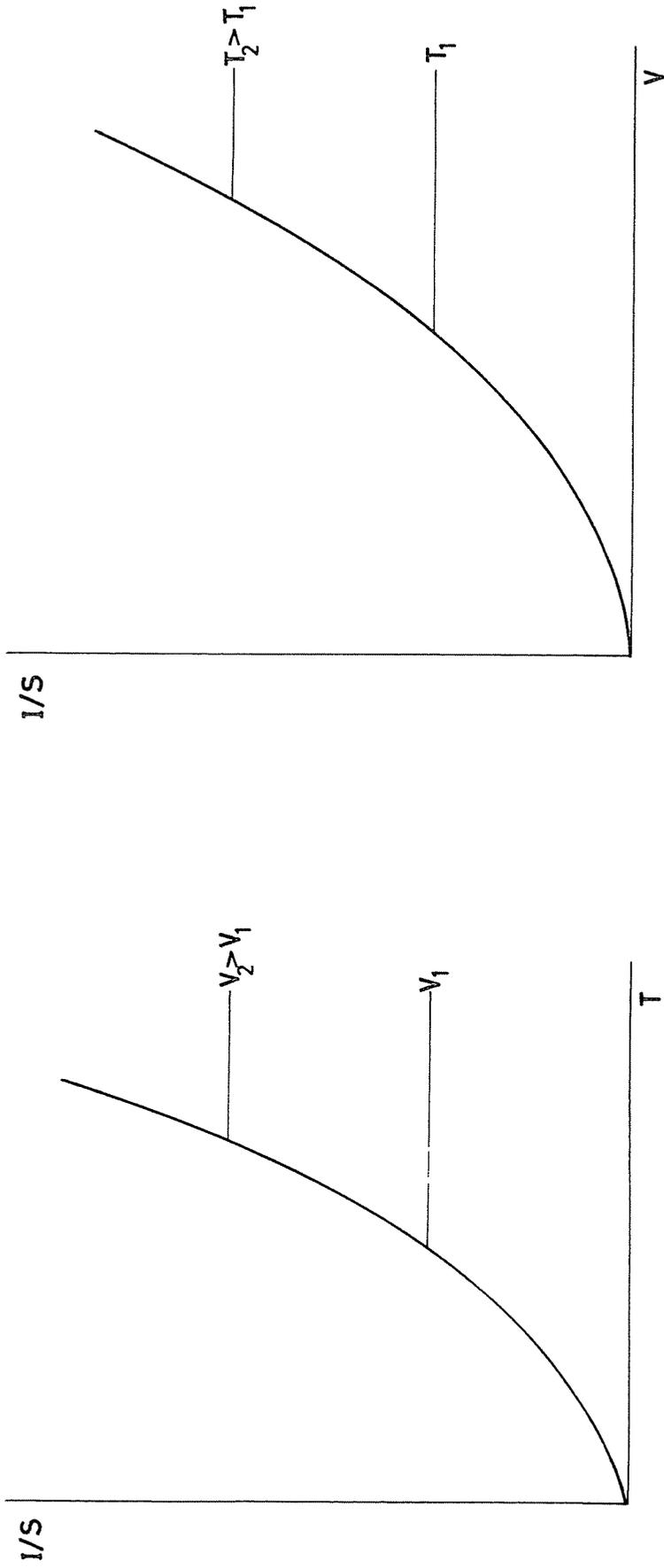
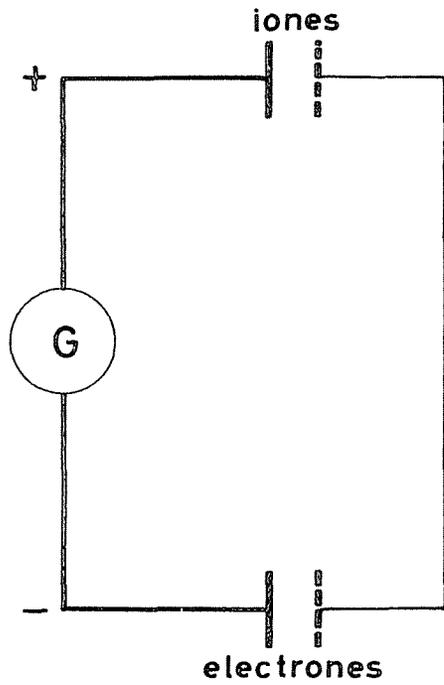
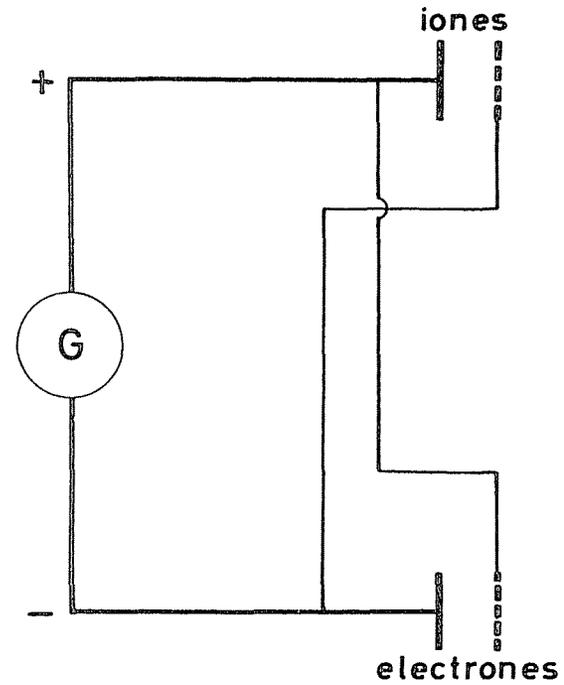


Fig.-7 Leyes de Richardson y Child



Acoplamiento en serie



Acoplamiento en paralelo

Fig.- 8 Acoplamientos de las cámaras de iones y electrones

5. BIBLIOGRAFIA

- 5.1. - Willinski M.I, Orr E.C., "Project Snooper", Rocketdyne, (1956).
- 5.2. - Penner S.S., "Advanced Propulsion Techniques", Pergamon Press, (1961).
- 5.3. - Velarde G., "Física Nuclear", (1965), ETSIA.
- 5.4. - Boden R.H., "The ion rocket engine", Rocketdyne, R-645, 1957.
- 5.5. - Stuhlinger E., "Possibilities of electrical spaceship propulsion", Fifth International Astronautical Congress, 1954.

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid.

"Propulsión iónica"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

Se estudian los parámetros de funcionamiento interno (velocidad de los iones y electrones, corriente, empuje, potencia, impulso específico, ...) y externo (velocidad y tiempo de propulsión) de un cohete iónico, analizándose sus componentes (dimensiones de las cámaras, masas, propulsantes, ...).

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid.

"Propulsión iónica"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

Se estudian los parámetros de funcionamiento interno (velocidad de los iones y electrones, corriente, empuje, potencia impulso específico, ...) y externo (velocidad y tiempo de propulsión) de un cohete iónico, analizándose sus componentes (dimensiones de las cámaras, masas, propulsantes, ...).

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid.

"Propulsión iónica"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

Se estudian los parámetros de funcionamiento interno (velocidad de los iones y electrones, corriente, empuje, potencia, impulso específico, ...) y externo (velocidad y tiempo de propulsión) de un cohete iónico, analizándose sus componentes (dimensiones de las cámaras, masas, propulsantes, ...).

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid.

"Propulsión iónica"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

Se estudian los parámetros de funcionamiento interno (velocidad de los iones y electrones, corriente, empuje, potencia, impulso específico, ...) y externo (velocidad y tiempo de propulsión) de un cohete iónico, analizándose sus componentes (dimensiones de las cámaras, masas, propulsantes, ...).

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid

"Ionic propulsion"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

The inner parameters (electrons and ions velocity, current, thrust, power; specific impulse,...) and the outer parameters (velocity and operating time) of an ion propellant rocket are studied. The components (chamber dimensions, weights, propellants, ...) are also described.

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid

"Ionic propulsion"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

The inner parameters (electrons and ions velocity, current, thrust, power; specific impulse,...) and the outer parameters (velocity and operating time) of an ion propellant rocket are studied. The components (chamber dimensions, weights, propellants, ...) are also described.

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid.

"Ionic propulsion"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

The inner parameters (electrons and ions velocity, current, thrust, power; specific impulse, ...) and the outer parameters (velocity and operating time) of an ion propellant rocket are studied. The components (chamber dimensions, weights, propellants,...) are also described.

J. E. N. 251

Junta de Energía Nuclear, División de Física Teórica, Madrid

"Ionic propulsion"

VELARDE, G. (1973) 42 pp. 8 figs. 5 refs.

The inner parameters (electrons and ions velocity, current, thrust, power; specific impulse, ...) and the outer parameters (velocity and operating time) of an ion propellant rocket are studied. The components (chamber dimensions, weights, propellants, ...) are also described.

