J. E. N. 260

Cinemática de los procesos nucleares de baja energía

por

C. Sánchez del Río

JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR

MADRID, 1972

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Documentación Biblioteca y Publicaciones, Junta de Energía Nuclear, Ciudad Universitaria, Madrid-3, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación.

Este trabajo se ha recibido para su impresión en Marzo de 1973.

Depósito legal nº M-9985-1973 I.S.B.N. 84-500-5701-9

CINEMATICA DE LOS PROCESOS NUCLEARES DE BAJA ENERGIA

C. Sánchez del Río

Este informe es la primera redacción de uno de los capítulos de un libro en preparación que lleva por título: "Temas de Física Nuclear Práctica". Se publica como informe JEN por su valor didáctico inmediato y para que la redacción definitiva venga enriquecida por las observaciones de los lectores.

Madrid, Febrero de 1973

3. CINEMATICA DE LOS PROCESOS NUCLEARES DE BAJA ENERGIA.

3.1 Principios de conservación.

Los procesos que se observan en Física Nuclear son reacciones nucleares (en particular colisiones que mantienen la identidad de los núcleos o partículas que intervienen) y desintegraciones nucleares. En ambos casos se cumplen siempre los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento (también llamado momento lineal o simplemente momento).

La energía total E de una partícula de masa m es

$$E = T + mc^2 \qquad [3.1]$$

siendo T la energía cinética y mc^2 la energía intrínseca debida a su masa (relación de Einstein -c es la velocidad de la luz en el vacío $\simeq 3 \times 10^{10}$ cm/s-); como en los procesos nucleares las masas pueden variar, este término -que se ignora en fenómenos macroscópicos- es aquí esencial. Según la Mecánica Clásica, válida para procesos de baja energía, la energía cinética T, la masa m, la velocidad $\vec{v}$ y el momento $\vec{p}$ están relacionados por las ecuaciones

$$T = \frac{1}{2} mv^2, \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad [3.2]$$

de donde

$$T = \frac{p^2}{2m}, \qquad p = \sqrt{2mT}. \qquad [3.3]$$

Un inciso sobre unidades. En Física Nuclear es costumbre medir las energías en electron-volts (1 eV = 1.6×10^{-12} erg) o más frecuentemente en megaelectron-volts (MeV). Si definimos $M = mc^2$ y medimos esta magnitud en MeV podemos decir que m viene expresado en

MeV/c^2; del mismo modo se puede definir $\vec{P} = \vec{p}c$ y medir este nuevo vector en MeV (con lo que la unidad de momento es MeV/c); si además llamamos $\vec{V} = \vec{v}/c$ a la velocidad dividida por c vemos que se cumplen las relaciones

$$E = T + M \qquad T = \frac{1}{2} M V^2 \qquad \vec{P} = M \vec{V}$$

$$T = \frac{P^2}{2M} \qquad P = \sqrt{2M T}$$

idénticas a las fórmulas anteriores, con la única excepción de la primera, donde ha desaparecido el factor c^2. En estas expresiones, V es un número (< 1) sin dimensiones y todas las demás magnitudes vienen medidas en MeV.

Por otra parte, el mismo número que mide M en MeV expresa m en MeV/c^2 y el mismo número que mide P en MeV expresa p en MeV/c. Esto indica que si reemplazamos [3.1] por

$$E = T + m \qquad [3.4]$$

podemos usar [3.2], [3.3] y [3.4] coherentemente introduciendo para las energías E y T sus valores en MeV, para m su valor en MeV/c^2, para p su valor en MeV/c y recordando que v es la velocidad tomando como unidad la velocidad de la luz en el vacío. Esta manera de proceder es muy conveniente, porque simplifica considerablemente los cálculos numéricos.

Por ejemplo, consideremos un protón (cuya masa es 938 MeV/c^2) con una energía cinética de 10 MeV. Su velocidad es

$$v = 3 \times 10^{10} \sqrt{\frac{2 \times 10}{938}} = 4.38 \times 10^9 \text{ cm/s}$$

y su momento

$$p = \sqrt{2 \times 938 \times 10} = 137 \text{ MeV/c.}$$

Si dado el momento en esta unidad se desea calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria de una partícula de carga eléctrica q que se mueve en un campo magnético B, puede utilizarse la fórmula práctica

$$B\rho = \frac{10^4}{3\,q}\,p \qquad [3.5]$$

donde B se expresa en Gauss, ρ en cm, p en MeV/c y q tomando como unidad la carga del electrón. Esta fórmula puede deducirse fácilmente igualando la fuerza que B ejerce sobre la partícula con la fuerza centrífuga debida al movimiento circular; quede la deducción como un ejercicio para el lector. Conviene observar, sin embargo, que [3.5] es también válida si p se calcula relativísticamente. En el caso del protón (q = 1) a 10 MeV, si se mueve en un campo de 5000 Gauss el radio de curvatura será

$$\rho = \frac{10^4 \times 137}{3 \times 5000} = 91.3 \text{ cm.}$$

Terminado este inciso, volvamos al principio de conservación de la energía en los procesos nucleares. Si designamos con el subíndice i las energías de las partículas iniciales y con el f las de las finales, el principio se expresa por

$$\sum E_i = \sum E_f \qquad [3.6]$$

(la sumatoria se extiende a todas las partículas de cada clase que intervienen en el proceso) lo que equivale, según [3.3] , a

$$\sum (T_i + m_i) = \sum (T_f + m_f)$$

o bien

$$\sum (m_i - m_f) = \sum (T_f - T_i) = Q \qquad [3.7]$$

que define el valor Q característico (también llamado energía - desprendida) del proceso de que se trate. Si $Q > o$ el proceso se llama exoenergético: la energía cinética final $\sum T_f$ es mayor que la inicial $\sum T_i$ y este aumento viene compensado por la pérdida de masa ($\sum m_f < \sum m_i$) durante el proceso. Si $Q > o$ el proceso es endoenergético y se pierde energía cinética, teniendo lugar un aumento de la masa total.

Con la misma nomenclatura el principio de conservación del momento total de expresa por

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f . \qquad [3.8]$$

Las fórmulas [3.7] y [3.8] son la base del estudio cinemático de los procesos nucleares. Veamos a continuación dos casos en los cuales su aplicación es de singular simplicidad.

Consideremos primero la desintegración de un núcleo en reposo de masa m, en dos de masas m_2 y m_3, proceso que indicaremos por

$$m_1 \longrightarrow m_2 + m_3 \qquad (T_1 = o).$$

El ejemplo más típico es la desintegración alfa; m_1 se refiere a - un núcleo pesado, m_2 al núcleo residual y m_3 a la partícula alfa - (núcleo de He^4). En este caso, según [3.7]

$$Q = m_1 - (m_2 + m_3) = T_2 + T_3$$

y según [3.8] como el momento inicial es nulo los dos núcleos finales salen en direcciones opuestas y (p significa el valor absoluto de $\vec{p}$)

$$p_2 = p_3$$

por lo que de acuerdo con [3.3]

$$m_2 \, T_2 = m_3 \, T_3 .$$

Despejando T_3 de aquí y $Q = T_2 + T_3$ (como indica [3.9]) se tiene

$$T_3 = \frac{m_2}{m_2 + m_3} Q \qquad T_2 = Q - T_3.$$

En la desintegración alfa $m_3 \ll m_2$, por lo que la partícula alfa se lleva la mayor parte de la energía. En la práctica suele obtenerse suficiente precisión usando en lugar de las masas los números másicos de los correspondientes núcleos, que son aproximadamente proporcionales a aquéllas.

El segundo caso es la reacción nuclear producida por un neutrón de energía cinética despreciable que choca con un núcleo en reposo, dando lugar a dos nuevos núcleos. Indicaremos este proceso por

$$m_1 + m_2 \longrightarrow m_3 + m_4 \qquad (T_1 = T_2 = o).$$

La energía cinética desprendida será

$$T_3 + T_4 = m_1 + m_2 - (m_3 + m_4) = Q$$

y la condición de momento inicial nulo indica que $p_3 = p_4$. Procediendo como antes se tiene el resultado análogo

$$T_3 = \frac{m_4}{m_4 + m_3} Q \qquad y \qquad T_4 = Q - T_3.$$

Un ejemplo de reacción cuya cinética viene regida por estas fórmulas es la fisión binaria de un núcleo de U^{235} producida por neutrones térmicos.

3.2 Reacciones nucleares con dos partículas finales.

Consideremos el caso de un núcleo (o partícula) de masa m_1 que se hace incidir sobre otro de masa m_2 que se encuentra en reposo - produciéndose una reacción nuclear que da lugar a dos nuevos núcleos (o partículas) de masas m_3 y m_4. Este tipo de reacciones es el más frecuente en experimentos nucleares de baja energía (es decir, de - unos pocos MeV) en los que una partícula acelerada incide sobre un blanco quieto. Indicaremos este proceso por

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 \qquad (T_1 \neq o \quad T_2 = o).$$

Conocidas las masas y T_1 se trata de calcular T_3 y T_4 en función de los ángulos θ_3 y θ_4 de salida de las dos partículas finales respecto de la dirección de la incidente. Según [3.8] las tres direcciones son coplanares (ver figura 3.1).

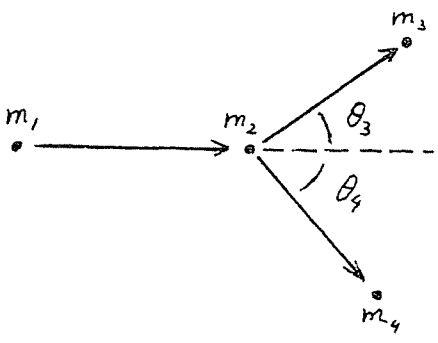

Fig. 3.1

Según [3.7] se tiene en este caso

$$Q = m_1 + m_2 - (m_3 + m_4) = T_3 + T_4 - T_1 \qquad [3.9]$$

y teniendo en cuenta [3.8]

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4.$$

Proyectando esta ecuación vectorial sobre la dirección de $\vec{p}_1$ y la perpendicular a ella en el plano que definen $\vec{p}_3$ y $\vec{p}_4$, y haciendo uso de [3.3] se tiene

$$\sqrt{2\, m_1\, T_1} = \sqrt{2\, m_3\, T_3}\ \cos\theta_3 + \sqrt{2\, m_4\, T_4}\ \cos\theta_4$$

$$o = \sqrt{2\, m_3\, T_3}\ \text{sen}\,\theta_3 + \sqrt{2\, m_4\, T_4}\ \text{sen}\,\theta_4. \qquad [3.10]$$

Eliminando θ_4

$$m_1 T_1 + m_3 T_3 - 2\sqrt{m_1 T_1 m_3 T_3} \cos\theta_3 = m_4 T_4$$

y poniendo (ver [3.9]) aquí $T_4 = Q + T_1 - T_3$ resulta

$$Q = T_3\left(1 - \frac{m_3}{m_4}\right) - T_1\left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - \frac{2}{m_4}\sqrt{m_1 T_1 m_3 T_3} \cos\theta_3. \qquad [3.11]$$

Las fórmulas [3.9] , [3.10] y [3.11] resuelven el problema propuesto. La ecuación [3.11] permite determinar T_3 como función de θ_3 si se conocen T_1 y Q; para cada valor de T_3 y θ_3, [3.9] fija T_4 y con - [3.10] se puede calcular θ_4. Para la realización de estos cálculos suele ser suficiente la aproximación que resulta de sustituir las - masas por los correspondientes números másicos.

Aunque las fórmulas [3.9], [3.10] y [3.11] resuelven el problema planteado, el uso de [3.11] solo es cómodo para el cálculo de Q a partir de una determinación experimental de T_3 y θ_3. El cálculo inverso es engorroso y es preferible deducir una fórmula que exprese T_3 en función de θ_3, T_1 y las masas. Puede deducirse tal fórmula de las ecuaciones anteriores, pero es más sencillo hacerlo basándose en el estudio del problema en el sistema del centro de masas, transfiriendo después el resultado al sistema de referencia del laboratorio; esta manera de enfocar el problema permite además comprenderlo mejor y es por otra parte imprescindible para el estudio del apartado 3.3 de este capítulo.

Se define el sistema de referencia del centro de masas (sistema CM) como aquel sistema en el cual el momento resultante de todas las partículas que intervienen es nulo. En particular (y este será nuestro caso) el sistema CM puede ser inercial respecto del sistema del laboratorio (sistema L).

Para designar las magnitudes en el sistema CM usaremos las mismas letras que en el sistema L (el utilizado hasta ahora) pero tildadas, con excepción de las masas que son obviamente las mismas en ambos sistemas. Llamaremos v_c a la velocidad del sistema CM respecto del sistema L. La figura 3.2 muestra la situación antes de la reacción en ambos sistemas; puede verse que

$$v_c = v_2' \; ; \quad v_1' = v_1 - v_c \qquad [3.12]$$

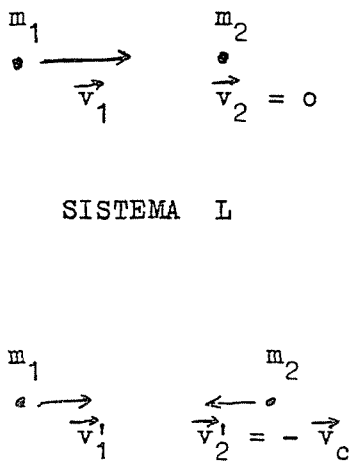

Fig. 3.2

y según la definición del sistema CM

$$m_1 \, v_1' = m_2 \, v_2'. \qquad [3.13]$$

Eliminando v_1' y v_2' de estas ecuaciones resulta

$$m_1 \, v_1 = (m_1 + m_2) v_c. \qquad [3.14]$$

La velocidad del sistema CM es, por lo tanto,

$$v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \, v_1 = \frac{1}{1 + K_{12}} \sqrt{\frac{2 \, T_1}{m_1}} \qquad [3.15]$$

siendo

$$K_{12} = \frac{m_2}{m_1} \, . \qquad [3.16]$$

La energía cinética en el sistema CM antes de la reacción es, teniendo en cuenta [3.12], [3.13] y [3.14],

$$T' = T_1' + T_2' = \frac{m_2}{m_1} T_2' + T_2' = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) \frac{1}{2} m_2 \, v_c^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1$$

o en función de K_{12}

$$T' = \frac{K_{12}}{1 + K_{12}} T_1. \qquad [3.17]$$

La conservación de la energía implica

$$T' + Q = T_3' + T_4'$$

o bien

$$\frac{1}{2} m_3 v_3'^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4'^2 = \frac{K_{12}}{1 + K_{12}} T_1 + Q.$$

Por la propia definición del sistema CM el momento total es en él siempre nulo, por lo que las partículas de masas m_3 y m_4 resultantes de la reacción tienen en dicho sistema direcciones opuestas (ver la figura 3.3) y además

$$m_3 v_3' = m_4 v_4'.$$

Eliminando v_4' de las dos ecuaciones anteriores se tiene

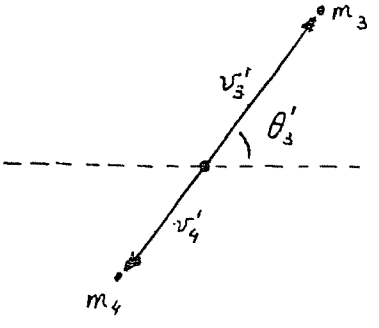

Fig. 3.3

$$\frac{1}{2} m_3 v_3'^2 \frac{m_4 + m_3}{m_4} = \frac{K_{12}}{1 + K_{12}} T_1 + Q$$

y definiendo ahora

$$K_{34} = \frac{m_4}{m_3} \qquad [3.18]$$

resulta inmediatamente

$$v_3' = \left[\frac{2}{m_3} \frac{K_{34}}{1 + K_{34}} \left(\frac{K_{12}}{1 + K_{12}} T_1 + Q\right)\right]^{1/2} \qquad [3.19]$$

que da v_3'. Cambiando los subíndices 3 y 4, la misma fórmula permite calcular v_4'.

La velocidad v_3 en el sistema L se obtiene componiendo vectorialmente $\vec{v}_c$ (cuya dirección es la de incidencia de la primera partícula) con $\vec{v}_3'$ (ver la figura 3.4). Esto puede realizarse gráficamente dibujando el vector v_c de longitud dada por [3.15], trazando una recta a partir de P y que forme con $\vec{v}_c$ el ángulo θ_3 deseado y dibujando con un compás una circunferencia con centro en O y de radio v_3' dado por [3.19]. Este proceso gráfico de construcción muestra claramente que si $v_c < v_3'$ todos los valores de θ_3 son posibles mientras que si $v_c > v_3'$ sólo pueden encontrarse ángulos θ_3 comprendidos entre $\pm$ arcsen (v_3'/v_c); es decir, en este caso la partícula de masa m_3 sólo puede salir hacia adelante en el sistema del laboratorio.

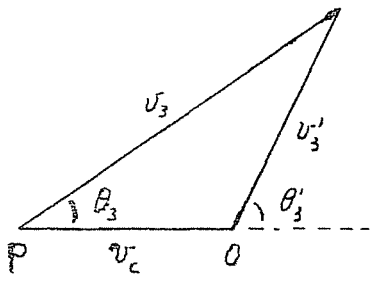

Fig 3.4

Puede también procederse analíticamente para el cálculo de v_3. En el triángulo de la figura 3.4 se tiene

$$v_3'^2 = v_3^2 + v_c^2 - 2\, v_3\, v_c \cos\theta_3 .$$

Despejando v_3 de esta ecuación de segundo grado y elevando al cuadrado resulta

$$v_3^2 = v_c^2 \cos^2\theta_3 + v_c^2 \cos^2\theta_3 - v_c^2 + v_3'^2 \pm$$

$$\pm\, 2\, v_c \cos\theta_3 (v_c^2 \cos^2\theta_3 - v_c^2 + v_3'^2)^{1/2} .$$

Basta multiplicar ahora por $m_3/2$ y sustituir los valores de v_c y v_3' dados por [3.15] y [3.19] para obtener después de algunas simplificaciones

$$T_3 = \frac{T_1}{(1+K_{12})(1+K_{34})} \left\{ \left[2\cos^2\theta_3 + K_{12}K_{34} - 1 + (1+K_{12})K_{34}\frac{Q}{T_1} \right] \pm \right.$$

$$\left. \pm 2\cos\theta_3 \left[\cos^2\theta_3 + K_{12}K_{34} - 1 + (1+K_{12})K_{34}\frac{Q}{T_1} \right]^{1/2} \right\} \qquad [3.20]$$

que da T_3 en función de θ_3. Para llegar a esta expresión es necesario usar la aproximación $m_1 + m_2 \simeq m_3 + m_4$ (ya que Q es en las reacciones nucleares de baja energía muy pequeño frente a las masas) que conduce a $m_1(1 + K_{12}) \simeq m_3(1 + K_{34})$, igualdad que hay que emplear reiteradamente durante el proceso algebraico de simplificación de la fórmula.

Cuando $Q < o$ (reacciones endoenergéticas) la reacción sólo se produce si T_1 supera un cierto valor llamado energía umbral de la reacción. Para que $T'_3 + T'_4$ sea $\geqslant o$ es preciso que $T' + Q$ sea también $\geqslant o$; la energía umbral T_{1u} corresponde al caso $T' = -Q$, por lo que según [3.17]

$$T_{1u} = -\frac{1 + K_{12}}{K_{12}} Q. \qquad [3.21]$$

Esta importante fórmula puede deducirse, también, directa y sencillamente en el sistema de referencia del laboratorio. El momento inicial $m_1 v_2$ debe ser igual a la componente del momento final en la dirección inicial que es $(m_3 + m_4)v_d$, siendo v_d la velocidad de desplazamiento del sistema final en dicha dirección inicial. Como $m_3 + m_4 \simeq m_1 + m_2$ (ya que Q es pequeño frente a $m_1 + m_2$) se tiene

$$m_1 v_1 \simeq (m_1 + m_2)v_d.$$

(Compárese con [3.14] para ver que v_d coincide prácticamente con v_c). Como este desplazamiento de velocidad v_d es inevitable, la

energía cinética asociada al mismo

$$T_d = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_d^2 = \frac{1}{1 + K_{12}} T_1$$

no está disponible para intervenir en la reacción; la parte de energía aprovechable es

$$T_1 - T_d = \frac{K_{12}}{1 + K_{12}} T_1$$

que debe ser igual a $-Q$ para la energía umbral de donde se sigue [3.21].

3.21 Colisiones elásticas.

La colisión elástica de dos partículas de masas m_1 y m_2 es un caso particularmente simple de reacción nuclear en la que después del choque aparecen las mismas partículas. Indicaremos este proceso por

$$m_1 + m_2 \longrightarrow m_1 + m_2 \qquad (T_1 \neq o \quad T_2 = o).$$

Se ha supuesto $T_2 = o$ por ser el caso más corriente en la práctica. El ejemplo más frecuente de colisiones elásticas en Física Nuclear es el choque de un neutrón con un núcleo ligero.

Como en una colisión elástica $Q = m_1 + m_2 - (m_1 + m_2) = o$ la partícula de masa m_1 sólo pierde al chocar, la energía que comunica a la de masa m_2 por conservación del momento; en el sistema CM se trata de una simple desviación. Todo el problema que ahora se plantea puede estudiarse como caso particular de las fórmulas del apartado anterior y otras que pueden deducirse de ellas. Pero dada la simplicidad del problema y la conveniencia de obtener nuevas ecuaciones útiles en Física de Neutrones, procederemos directamente.

Como sólo nos vamos a interesar por la pérdida energética de la partícula de masa $m_1 (\leq m_2)$ llamaremos v_o y T_o a la velocidad y energía cinética de la misma (por ejemplo, un neutrón) antes del choque y v y T a las respectivas magnitudes después del choque; en el sistema del centro de masas (sistema CM) utilizaremos letras tildadas como antes. Los ángulos de desviación de la partícula de masa m_1 debidos al choque se designarán por θ y θ' en los sistemas L y CM, respectivamente.

La velocidad del centro de masas es según [3.14]

$$v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_o$$

y la velocidad de la partícula incidente en el sistema CM

$$v_o' = v_o - v_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_o$$

que coincide con v' en este caso, ya que el choque en el sistema CM es una simple desviación (por ser $Q = o$ y porque el momento en este sistema es nulo antes y después del choque). La figura 3.5 es equivalente a la figura 3.4 con la notación actual e indica la composición de $\vec{v}_c$ y $\vec{v}'(= v_o')$ para obtener $\vec{v}$. Con los valores dados para v_c y v_o' se tiene

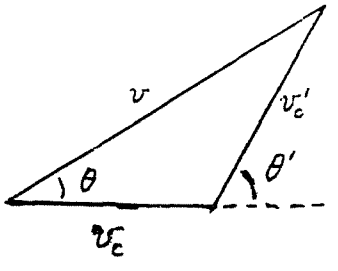

Fig. 3.5

$$v^2 = v_o^2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 + v_o^2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 +$$

$$+ 2\, v_o^2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) \cos\theta'$$

de donde la relación de energías de la partícula de masa m_1 después y antes del choque es

$$\frac{T}{T_o} = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_1\, m_2 \cos\theta'}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1 + r}{2} - \frac{1 - r}{2} \cos\theta' \qquad [3.22]$$

siendo

$$r = \left(\frac{K - 1}{K + 1}\right)^2 \qquad \text{con} \quad K = \frac{m_2}{m_1}\,. \qquad [3.23]$$

Se ve de aquí que el menor valor que puede tomar T es $T_o r$ (cosa que sucede para $\theta' = 180º$) que corresponde a la máxima pérdida energética posible. Si $m_2 \simeq m_1$ (caso del choque neutrón-protón p. ej.) $r = o$ y $T = o$; en cambio, si $m_2 \gg m_1$ (caso del choque de un neutrón con un núcleo pesado) $r \simeq 1$ y la pérdida energética es despreciable.

El paso de θ' a θ viene dado según se ve en la figura 3.5 por

$$\cos\theta = \frac{v_c + v_o' \cos\theta'}{v} = \frac{1 + K\cos\theta'}{\sqrt{1 + K^2 + 2K\cos\theta'}}\,. \qquad [3.24]$$

Ocurre a menudo que la colisión en el sistema CM es isótropa. Este es, por ejemplo, el caso de los neutrones para energías menores de 200 keV y todavía resulta ser una buena aproximación hasta unos 10 MeV. Si sucede esta isotropía en el sistema CM la probabilidad de que la desviación esté comprendida entre θ' y $d\theta'$ es proporcional al correspondiente ángulo sólido $2\pi \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = 2\pi\, d(\cos\theta')$; esta relación indica que todos los valores posibles de $\cos\theta'$ son equiprobables y como [3.22] depende linealmente de $\cos\theta'$ se sigue que todas las energías finales posibles -comprendidas entre T_o y $T_o r$- son equiprobables. La probabilidad de que la partícula incidente (de energía T_o) tenga después del choque una energía comprendida entre T y T + dT es, por tanto,

$$P\,dT = \frac{dT}{T_o - rT_o} . \qquad [3.25]$$

Con esta expresión puede fácilmente calcularse la pérdida logarítmica media definida por el valor medio de la diferencia de los logaritmos neperianos de T_o y T:

$$\xi = \overline{\ln T_o - \ln T} = \overline{\ln \frac{T_o}{T}} = \int_{rT_o}^{T_o} \ln \frac{T_o}{T} \frac{dT}{T_o - rT_o} = 1 + \frac{r}{1-r} \ln r. \qquad [3.26]$$

Esta magnitud es útil en el estudio de procesos estadísticos de colisiones elásticas porque no depende de T_o; para $K > 10$ puede usarse la fórmula aproximada

$$\xi \simeq \frac{2}{K + 2/3} .$$

Otra magnitud estadísticamente útil es el valor medio del coseno del ángulo de desviación en el sistema del laboratorio (admitiendo isotropía en el sistema CM). Viene dado por (ver [3.24])

$$\overline{\cos\theta} = \frac{1}{4\pi} \int \cos\theta \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 + K\cos\theta'}{\sqrt{1+K^2+2K\cos\theta'}} \operatorname{sen}\theta' d\theta' = \frac{2}{3K} \qquad [3.27]$$

Las fórmulas [3.22] a [3.27] son muy útiles en el estudio de la moderación de neutrones por colisiones elásticas con los núcleos de un medio en el cual se difundan.

3.22 Colisiones inelásticas.

Del estudio de las colisiones elásticas parece deducirse que un neutrón que choque con un núcleo muy pesado apenas pierde energía. En la práctica, sin embargo, se observa que puede perder una gran parte de su energía por otro proceso: una colisión inelástica. Este proceso es un caso particularmente sencillo de reacción nuclear endoenergética, por lo que parece procedente dedicarle unos breves comentarios.

En una colisión inelástica la partícula incidente de masa m_1 reaparece después del choque como en el caso elástico, pero el núcleo blanco de masa m_2 queda excitado y tiene, por tanto, una masa ligeramente superior m_2^*. Indicaremos este proceso para los casos usuales mediante

$$m_1 + m_2 \longrightarrow m_1 + m_2^* \qquad (T_1 \neq o, \quad T_2 = o).$$

En este caso el valor Q de la reacción es la energía de excitación del núcleo blanco

$$Q = m_2 - m_2^* < o.$$

Son de aplicación las fórmulas [3.20] y [3.21] que resultan simplificadas porque siempre es $Q \ll m_2$ por lo que K_{12} y K_{34} pueden reemplazarse por K dado por [3.23]. Conviene observar que aunque la energía de la partícula incidente sea constante, Q no lo es; varía de unos choques a otros porque el núcleo blanco puede quedar en diversos estados de excitación. A efectos estadísticos puede usarse un valor medio apropiado de Q que puede evaluarse si se conocen las secciones eficaces de excitación de los diversos niveles (lo que no es fácil).

3.3 Secciones eficaces diferenciales en distintos sistemas de referencia.

La sección eficaz total de una reacción nuclear es por su propio significado la misma en el sistema de referencia del centro de masas (CM) que en el sistema de referencia del laboratorio (L). En cambio, la sección eficaz diferencial varía de un sistema a otro - por estar involucrados los ángulos. Vamos aquí a deducir una fórmula que relaciona las secciones eficaces diferenciales en los sistemas L y CM para el caso de una reacción nuclear del tipo de las estudiadas en el apartado 3.2. Emplearemos idéntica nomenclatura (letras tildadas para el sistema CM).

Obviamente

$$\sigma(\theta,\phi)\ d\Omega = \sigma'(\theta',\phi')\ d\Omega'.$$

En los casos más corrientes, aunque los núcleos incidente y blanco tengan spin no nulo, no están polarizados, por lo que σ (y σ') no dependen de ϕ (o ϕ'). La ecuación anterior se reduce a

$$\sigma(\theta)\ 2\pi\ \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = \sigma'(\theta')\ 2\pi\ \mathrm{sen}\,\theta'\ d\theta'$$

de donde

$$\frac{\sigma'(\theta')}{\sigma(\theta)} = \frac{d(\cos\theta)}{d(\cos\theta')}\ . \qquad [3.28]$$

Observando la figura 3.4 se deduce la relación

$$\mathrm{tg}\ \theta_3 = \frac{v_3'\ \mathrm{sen}\ \theta_3'}{v_c + v_3'\cos\theta_3'} = \frac{\mathrm{sen}\ \theta_3'}{\gamma + \cos\theta_3'} \qquad [3.29]$$

siendo

$$\gamma = \frac{v_c}{v_3'} \qquad [3.30]$$

que se calcula mediante [3.15] y [3.19].

El valor de $\mathrm{tg}\,\theta_3$ resulta conveniente para el cálculo de

$$\frac{d(\cos\theta_3)}{d(\cos\theta_3')} = \frac{d(\cos\theta_3)}{d(\mathrm{tg}\ \theta_3)}\ \frac{d(\mathrm{tg}\ \theta_3)}{d(\cos\theta_3')} \qquad [3.31]$$

ya que de acuerdo con la trigonometría elemental

$$\cos\theta_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\theta_3}}$$

y según [3.29]

$$\mathrm{tg}\ \theta_3 = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta_3'}}{\gamma + \cos\theta_3'}\ .$$

Realizando las correspondientes derivaciones se obtiene la expresión del primer miembro de [3.31] que introducida en [3.28] da como resultado

$$\sigma(\theta_3) = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\theta_3')^{3/2}}{1 + \cos\theta_3'}\ \sigma'(\theta_3') \qquad 3.32$$

que es la relación buscada entre las secciones eficaces diferenciales en los sistemas del laboratorio y del centro de masas.

En el caso particular de las colisiones elásticas estudiadas en el apartado 3.21 el parámetro γ definido por [3.30] se expresa por una relación muy sencilla. En efecto, basta poner en [3.15] y [3.19] $Q = o$, $K_{12} = K_{34} = K$, $m_3 = m_1$ y recordar [3.23] para obtener

$$\gamma = \frac{1}{K} = \frac{m_1}{m_2}$$

que no depende de la energía T_1 de la partícula de masa m_1 como, por otra parte, podía preverse observando [3.24]. Incidentalmente, la fórmula [3.32] para este caso, puede obtenerse directamente derivando la función [3.24] e introduciendo el resultado en [3.28].

3.4 Procesos nucleares con más de dos partículas finales.

Hay muchos procesos nucleares en los cuales el número de partículas finales es superior a dos. Por ejemplo, la desintegración beta da lugar a tres partículas finales: el núcleo residual, un electrón y un neutrino. Lo mismo ocurre en la fisión espontánea ternaria (en tres fragmentos). En las reacciones nucleares, cuando la energía cinética de la partícula incidente es elevada muchas veces, el número de partículas finales es superior a dos; relativamente probables son, por ejemplo, las reacciones (n, 2n) en las cuales al final se tiene un núcleo residual y dos neutrones.

En todos estos casos los principios de conservación de energía y momento no bastan para determinar la energía de cada partícula final. El espectro energético depende de la dinámica intrínseca del proceso. A veces ocurre, sin embargo, que esta dinámica es independiente (por lo menos aproximadamente) de las coordenadas y momentos de las partículas finales, en cuyo caso la probabilidad de obtener una cierta situación cinemática final es simplemente proporcional a la densidad de estados cuánticos disponibles en dicha situación. En el lenguaje de la teoría cuántica de perturbaciones dependientes del tiempo la afirmación anterior equivale a decir que si el cuadrado del elemento de matriz que describe el proceso es constante, la probabilidad del mismo es proporcional al factor de densidad de estados. El cálculo de este factor es, por otra parte, importante porque es necesario para evaluar la probabilidad de cada situación final si se conoce la dinámica del proceso (el correspondiente elemento de matriz) o para tener indicaciones sobre la dinámica comparando los resultados de un experimento con lo que sería de esperar si la probabilidad del proceso fuese simplemente

proporcional al factor de densidad de estados finales. Este apartado se dedica a deducir la fórmula general que da la densidad de estados cuánticos disponibles (o factor de densidad de estados) y a su aplicación a un caso sencillo que responde con bastante aproximación a una situación real.

Un estado definido de una partícula -es decir, su posición (x, y, z) y su momento (p_x p_y p_z)- puede representarse por un punto en un espacio de 6 dimensiones (espacio de las fases). Inversamente a cada punto del espacio de las fases le corresponde un estado cinemático de la partícula definido. En Mecánica Clásica, dos puntos del espacio de las fases (correspondientes a dos estados de la partícula) pueden estar tan cerca el uno del otro como se quiera. Esto no es así en Mecánica Cuántica, debido al principio de indeterminación: se demuestra que a cada estado le corresponde una celdilla de volumen $(2\pi\hbar)^3$ en el espacio de las fases ($\hbar$ es la constante de Planck dividida por 2π).

En consecuencia, el número N_1 de estados finales disponibles para una partícula es finito y viene dado por

$$N_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x\, d^3p$$

siendo d^3x y d^3p los elementos de volumen en el espacio ordinario (de configuración) y en el espacio de los momentos respectivamente. Si la partícula está confinada en un volumen V podemos escribir

$$N_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p.$$

Para una partícula de energía cinética menor o igual a T y masa m, la integral de esta fórmula es el volumen de la esfera cuya ecuación en el espacio de momentos (ver [3.3]) es

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 2mT.$$

Definiremos la densidad de estados ρ en el espacio de las fases como el número de estados disponibles por unidad de intervalo energético y escribiremos (ya que $dT = dE$ según [3.4])

$$\rho_1(E) = \frac{dN_1}{dE} .$$

Muchas veces, y para abreviar, a esto se llama el "espacio de fase" de una partícula.

La generalización de lo anterior a un sistema de n partículas es inmediata; si todas están confinadas en el mismo volumen

$$N_n = \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\right]^n \int \prod_{i=1}^{n} d^3 p_i$$

y

$$\rho_n(E) = \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\right]^n \frac{d}{dE} \int \prod_{i=1}^{n} d^3 p_i . \qquad [3.33]$$

Estas fórmulas son válidas para partículas de spin nulo. Si la partícula i tiene spin caracterizado por el número cuántico S_i el segundo miembro de [3.33] debe multiplicarse todavía por

$$\prod_{i=1}^{n} (2S_i + 1). \qquad [3.34]$$

La integral en [3.33] debe extenderse a todos los valores posibles de los momentos p_i. Ahora bien, como el momento total $\vec{p}$ del sistema de partículas ha de conservarse, los momentos no son todos independientes, sino que están sujetos a satisfacer la ecuación

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i . \qquad [3.35]$$

Por otra parte, el significado de E en [3.33] es obviamente la energía total del sistema

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i \qquad [3.36]$$

la restricción [3.35] suele recogerse extendiendo la integral en [3.33] a n-1 partículas excluyendo una (digamos la n-ésima) cuyo momento viene fijado por [3.35].

Antes de realizar las integraciones en [3.33] podemos considerar que ρ_n es función de todos los p_i, es decir, $\rho_n(E, p_1 \ldots p_n)$ lo que nos permite calcular el espectro diferencial de momentos de cualquier partícula (por ejemplo la k) que vendrá dado por $d\rho_n/d^3p_k$ (ya que éste es el número de estados finales en los cuales la partícula k tiene momento en el intervalo d^3p_k). Evidentemente, $d\rho_n/d^3p_k$ es la expresión que se obtiene si se omite en [3.33] la integración sobre la partícula k; así, por ejemplo, el espectro en momentos de la partícula 1 será proporcional a

$$p_1^2 \, dp_1 \frac{d}{dE} \int \prod_{i=2}^{n-1} d^3 p_i \qquad [3.37]$$

donde la integración se extiende desde la partícula 2 hasta la n-1 (se omite la n-ésima cuyo momento viene fijado por [3.35]). Si interesa conocer la distribución en valores absolutos de los momentos sin importar la dirección, conviene usar coordenadas polares y escribir $d^3p = 4\pi p^2 \, dp$.

En general, el cálculo de las integrales que intervienen en [3.33] y [3.37] dista de ser sencillo. Pero como ilustración de lo expuesto veamos un ejemplo simple: sea una reacción (n, 2n) produci-

da sobre un núcleo pesado. Como la masa de éste es muy grande (respecto de la de los neutrones) podemos despreciar su energía de retroceso, lo que equivale a tomar esta masa como infinita. En esta aproximación los sistemas L y CM coinciden y la energía disponible Q se reparte entre las energías T_1 y T_2 de los dos neutrones salientes

$$Q = T_1 + T_2.$$

El espectro de momentos del neutrón 1 será según [3.37] proporcional a

$$p_1^2\, dp_1 \frac{d}{dQ} \int_0^{\left[2m(Q-T_1)\right]^{1/2}} p_2^2\, dp_2$$

siendo m la masa del neutrón. La integración y subsiguiente derivación son inmediatas. Recordando que p_1 es proporcional a $\sqrt{T_1}$ y $p_1 dp_1$ proporcional a dT_1 la expresión anterior resulta ser proporcional a

$$\sqrt{T_1(Q - T_1)}\; dT_1$$

que da la distribución en energías del primer neutrón. Esta expresión está razonablemente de acuerdo con la experiencia.

La aplicación de los conceptos expuestos en este apartado debe hacerse con mucha prudencia recordando siempre que las distribuciones en momentos o energías pueden calcularse mediante [3.37] si se cumple (por lo menos aproximadamente) la hipótesis de partida, esto es, que la dinámica del proceso sea independiente de las coordenadas y momentos de las partículas que intervienen en el mismo. Frecuentemente esto no ocurre, en cuyo caso lo aquí expuesto es sólo una parte del cálculo que debe ser complementado con el conocimiento del elemento de matriz de la transición. En particular, si se hubiera tomado como ejemplo una reacción (p, 2p) (con protones) en lugar de la

(n, 2n) la comparación de la distribución en energías obtenida aquí, con la experiencia mostraría un considerable desacuerdo, porque la - repulsión de Coulomb entre el núcleo residual y los protones finales modifica notablemente el espectro obtenido por pura consideración de espacio de fases disponible.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid.

"Cinematica de los procesos nucleares de baja energía".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

Este informe es la primera redacción de uno de los capítulos de un libro en preparación que lleva por título: "Temas de Física Nuclear Práctica". Se publica como informe JEN por su valor didáctico inmediato y para que la redacción definitiva venga enriquecida por las observaciones de los lectores.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid.

"Cinematica de los procesos nucleares de baja energía".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

Este informe es la primera redacción de uno de los capítulos de un libro en preparación que lleva por título: "Temas de Física Nuclear Práctica". Se publica como informe JEN por su valor didáctico inmediato y para que la redacción definitiva venga enriquecida por las observaciones de los lectores.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid.

"Cinematica de los procesos nucleares de baja energía".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

Este informe es la primera redacción de uno de los capítulos de un libro en preparación que lleva por título:"Temas de Física Nuclear Práctica". Se publica como informe JEN por su valor didáctico inmediato y para que la redacción definitiva venga enriquecida por las observaciones de los lectores.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid.

"Cinematica de los procesos nucleares de baja energía".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

Este informe es la primera redacción de uno de los capítulos de un libro en preparación que lleva por título:"Temas de Física Nuclear Práctica". Se publica como informe JEN por su valor didáctico inmediato y para que la redacción definitiva venga enriquecida por las observaciones de los lectores.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid

"Kinematics of low-energy nuclear processes".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

This report is the first draft of one of the chapters of a book being prepared under the title: "Topics on Practical Nuclear Physics". It is published as a report because of its immediate educational value and in order to include in its final draft the suggestions of the readers.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid

"Kinematics of low-energy nuclear processes".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

This report is the first draft of one of the chapters of a bock being prepared under the title: "Topics on Practical Nuclear Physics". It is published as a report because of its immediate educational value and in order to include in its final draft the suggestions of the readers.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid

"Kinematics of low-energy nuclear processes".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

This report is the first draft of one of the chapters of a book being prepared under the title: "Topics on Practical Nuclear Physics". It is published as a report because of its immediate educational value and in order to include in its final draft the suggestions of the readers.

J.E.N. 260

Junta de Energía Nuclear, División de Física, Madrid

"Kinematics of low-energy nuclear processes".

SANCHEZ DEL RIO, C. (1973) 24 pp.

This report is the first draft of one of the chapters of a book being prepared under the title: "Topics on Practical Nuclear Physics". It is published as a report because of its immediate educational value and in order to include in its final draft the suggestions of the readers.