CEA 1703 - CONSOLI T.

MESURE DE LA DENSITE ELECTRONIQUE DES MILIEUX IONISES PAR DES METHODES HYPERFREQUENCES (1960).

Sommaire. - Dans le cadre des cours sur les plasmas à l'I.N.S.T.N. cette étude d'analyse résume les articles cités en bibliographie sur les techniques hyperfréquences pour la mesure de la densité électronique d'un gaz ionisé. Elle n'est ni exhaustive, ni complète. Pour plus de détails on voudra bien se rapporter aux travaux mentionnés.

La première partie consacrée à des rappels théoriques, concerne la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux ionisés et sur l'excitation d'ondes stationnaires dans les cavités électromagnétiques.

La seconde se rapporte aux techniques de mesures proprement dites. On a fait figurer dans cette partie des techniques devenues classiques et celles plus récentes en cours d'études dans divers laboratoires et au Service de Physique Appliquée à SACLAY.

.../...

CEA 1703 - CONSOLI T.

MEASUREMENT OF THE ELECTRONIC DENSITY OF IONISED MEDIA BY HYPERFREQUENCY METHODS. (1960).

Summary. - Within the limits of the I.N.S.T.N. courses on plasmas, this analytical study summarizees the articles quoted in the references on hyperfrequency techniques for the measurement of electronic density of an ionised gas. It is neither exhaustive nor complete, and further details may be obtained by referring to the works mentionned.

The first part, devoted to the theoretical side, concerns the propagation of electromagnetic waves in ionised media and the excitation of stationary waves in electromagnetic cavities.

The second part deals with the measurement techniques themselves. It includes those techniques which have become classics, and also more recent ones being developed in various laboratories and in the Service of Applied Physics at SACLAY.

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

# MESURE DE LA DENSITE ELECTRONIQUE DES MILIEUX IONISES PAR DES METHODES HYPERFREQUENCES

par

T. CONSOLI

Rapport CEA N° 1703

1960

CENTRE D'ÉTUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY
SERVICE DE DOCUMENTATION
Boîte postale n° 2 - Gif-sur-Yvette (S.-et-O.)

- Rapport C.E.A. n° 1703 -

Service de Physique appliquée
Section d'Ionique générale

# MESURE DE LA DENSITE ELECTRONIQUE DES MILIEUX IONISES PAR DES METHODES HYPERFREQUENCES

par

T. CONSOLI

1960

PA/ICn/RT. 106

## - RESUME -

---

Dans le cadre des cours sur les plasmas à l'I. N. S. T. N. cette étude d'analyse résume les articles cités en bibliographie sur les techniques hyperfréquences pour la mesure de la densité électronique d'un gaz ionisé. Elle n'est ni exhaustive, ni complète. Pour plus de détails on voudra bien se rapporter aux travaux mentionnés.

La première partie consacrée à des rappels théoriques, concerne la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux ionisés et sur l'excitation d'ondes stationnaires dans les cavités électromagnétiques.

La seconde se rapporte aux techniques de mesures proprement dites. On a fait figurer dans cette partie des techniques devenues classiques et celles plus récentes en cours d'étude dans divers laboratoires et au Service de Physique Appliquée à SACLAY.

Je remercie à ce propos mes collègues MM. M. DAGAI et D. LEPECHINSKI pour leur collaboration sur les méthodes de "Polarisation Rotatoire Magnétique dans les plasmas" et de "Retard de Groupe" (paragraphes 4 et 5) ; et M. NGUYEN TRONG KHOI pour la rédaction du paragraphe 8 sur un "Dispositif expérimental" dans la méthode de cavité.

# - TABLE des MATIERES -

- - -

1 - INTRODUCTION -

1 - Théorie des techniques

A. Equations de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu fortement ionisé.

1. 1 - Hypthèses

1. 2 - Equation de propagation

1. 2. 1 - Equations du plasma

1. 2. 2. - Equations des champs

1. 3. - Etude de quelques cas particuliers

1. 3. 1 - CAS I - Absence de champ magnétique

1. 3. 2. - CAS II - Propagation longitudinale

1. 3. 3. - CAS III- Propagation transversale

I. 4. - Résistivité du plasma - Fréquence de collision

1. 5. - Discussion des équations. Importance de la deuxième équation de MAXWELL.

I. 6. - Trajectoire d'un électron isolé dans le champ électromagnétique en l'absence de tout champ magnétique statique.

I. 7. - Retour sur quelques cas particuliers - Présence du champ magnétique.

I. 7. I. - Propagation dans la direction transversale au champ magnétique statique.

I. 7. 2. - Propagation longitudinale.

I. 8 - Orbites d un électron dans des champs HF et magnétique statique croisés.

1. 9 - Fréquences caractéristiques - Résonance - Coupure

1. IO - Coefficients caractéristiques - Atténuation - Déphasage - profondeur de pénétration.

1. 11 - Un exemple

1. 11. 1 - Calcul de la profondeur de pénétration dans le cas où le champ statique est absent.

1. 11. 2 - Examen des diverses approximations.

1. 12 - Influence de la température électronique et des frontières du plasma avec le milieu neutre, sur les équations de propagation des ondes électromagnétiques - Validité des approximations utilisées.

B - Ondes électromagnétiques stationnaires dans une cavité résonante contenant du plasma.

2. 1. - Théorie du phénomène - Relation fondamentale

2. 2. - Approximation des plasmas peu denses

2. 3. - Cas d'un gradient de densité normal au champ électrique, en l'absence de champ magnétique.

2. 4. -. Deux exemples.

2. 4. 1. -Exemple I - Cavité sphérique.

2. 4. 2. -Exemple II- Cavité cylindrique.

II - LES TECHNIQUES DE MESURES -

A - Techniques de propagation

3. 1. - Méthode transversale.

3. 1. 1. - Principe de la mesure interférométrique.

3. 1. 2. - Calcul de la densité et de la fréquence de collision.

3. 2. - Détermination des profils de densité.

3. 3. - Limitation des méthodes transversales.

4. - Méthodes longitudinales.

4. 1. - Méthode de R. M. GALLET et ALL. basée sur la mesure de la vitesse de phase du rayon droit.

4. 2. - Méthode de détermination de la densité électronique d'un plasma par la vitesse de groupe.

4. 2. 1. - Principe de la méthode .

4. 2. 2. - Discussion de la méthode.

4. 2. 3. - Formule approchée pour le calcul de la vitesse de groupe.

5 - Troisième méthode longitudinale - Polarisation Rotatoire magnétique dans les plasmas.

5. 1. - Historique de l'Effet Faraday.

5. 2. - Principe de la méthode

5. 2. 1. - Hypothèses.

5. 2. 5. - Expressions de la rotation.

5. 2. 3. - Tableau de trois approximations.

5. 2. 4. - Régions des propagations - Formules approchées.

5. 3. - Application de la méthode et des courbes.

.../...

5. 4. - Principe des dispositifs expérimentaux.

6. - Etat des trois méthodes longitudinales.

7. 1. - Mesure de la densité par une méthode optique

7. 2. - Limitations de la méthode discussion

8. - Les techniques de cavité.

8. 1. - Principe de la méthode.

8. 2. - Un exemple de dispositif expérimental.

8. 2. 1. - La cavité hyperfréquence.

8. 2. 2. - La formation du plasma.

8. 2. 3. - Le choix du mode de résonance de la cavité.

8. 2. 6. - Les erreurs de mesures.

8. 3. - Limitationsdans la technique de cavité.

9. - Conclusions générales.

IO. - Tableau des techniques de mesures de la densité électronique.

APPENDICE I -

11. - Rappel de la théorie magnéto ionique. -

Propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu faiblement ionisé.

11. 1. - Hypothèses.

11. 2. - Equation de propagation.

11. 3. - Equations du milieu. .

11. 4. - Equations des champs.

.../...

11. 5. - Le tenseur de conductivité.

11. 6. - Un exemple.

11. 6. - Cas sans collisions.

11. 7. - Cas avec collisions.

11. 8. - Expression du tenseur de conductivité.

11. 9. - Tableau des cas.

11. 10 - Discussion.

APPENDICE II -

Bref aperçu des effets de la température électronique signalé par DRUMMOND, sur la propagation des ondes électromagnétiques.

APPENDICE III -

Représentation dans l'espace (N, $n_e$, B) ou (N, X, Y) indice, densité, champ magnétique de deux cas de propagation

- Propagation transversale avec polarisation électrique parallèle au champ magnétique.

- Propagation longitudinale.

APPENDICE IV -

Positionnement des dispositifs de test U. H. F.

Bibliographie : Géneral electric revue 1923

(0) - L. LANGMUIR and H. M. MOTT SMITH

(1) - J. A. STRATTON - Electrognetic Theory (Mc. Gran Hill 1941)

S. K. MITRA - The Upper Atmophere (The Asiatic Society, Calcutta 1952)

J. A. RATCLIFF - (The Magneto - Ionic Theory and its applications to the Ionosphere) Cambridge 1952.

V. GINSBURG - "On the absorption of Radio waves and Number of collisions in the ionosphere - J. Phys (U. R. S. S. 1944).

E. ASTRÖM - "On waves in an Ionized Gas (Arkiv Fysik 1950)

HALL GARDNER and FUNDINGASLAND - "Analysis of the Interaction of Electromagnetic Radiation with a plasma in a Magnetic Field - Report UCRL 4744 - September 1956.

(2) - J. E. DRUMMOND "Basic Microwave Properties of hot Magnetoplasmas" Phys. Rev. 1958 - (110)

Microwave Propagation in hot Magnetoplasmas Phys. Rev. II2 (1958).

I. B. BERNSTEIN - Waves in a Plasma in a Magnetic Field - Phys;. Rev. 109 - 1958.

E. ASTROM - Waves in a Hot Ionized Gas in a Magnetic Field in Electromagnetic Phenomena in Cosminal Physics. B. Lehnert - Cambridge 1958.

A. G. SITENKO and K. N. STEPANOV - J. E. T. P. -(Soviet Physics) 1956 (31).

.../...

AKHIEZER et AL. - High Frequency Plasma oscillations. Geneve P. 2300

W. P. ALLIS - R. J. PAPA - Normal waves surfaces in a plasma in a magnetic field - M. I. T. Quanterly Progress Report Oct. 1959

(3) - L. S.PITZER - Physics of Fully Ionized Gases - Interscience 1956

(4) M. MARGENAU - Conductivity of plasmas to microwaves - Phys. Rev. 109. 6. 1958

L. SPITZER - c.f. réf. (3)

T. G. COWLING - The electrical conductivity of an ionized gas in a magnetic field... 1945 - Proc. Roy. Soc. A. 183. 453

W. P. ALLIS - Motions of ions and electrons. MIT technical - Report 299- June 13. 1956.

(5) - MARK A. HEALD- The Application of microwave techniques to Stellaratov Reseavch - MATT-17 August 1959.

(6) - J. G. LINHART - Plasma Physics - North Holland publishing company 1960 - Amsterdam.

(7) - C. F. (2) J. E. DRUMMOND

(8) - S. J. BUCHSBAUM, L. MOWER - Electromagnetic wave propagation in a bounded anisotropic plasma -

M. I. T. Quaterly Progress - Report Julyis 1959.

A. BERK - Electromagnetic wave propagation in a plasma - M. I. T.

M. I. T. Quaterly Progress Report - 15 octobre 1959.

.../...

(9) - S. J. BUCHSBAUM and S. C. BROWN - Microwane Measurement of high electrons densities Phys. Rev. 106. 196 - 1957

S. C. BROWN D. ROSE - Methods of measuring the properties of Ionized gases at high frequencies - M. I. T. Technical report 230 - May 1952.

S. C. BROWN - The interaction of microwaves with Gas discharge plasma IRE TRANSACTION - January

S. C. BROWN - Microwave studies of gas discharge plasma - Genève rapport P. 387

(10) - c;f; (5)

et C. B. WHARTON - Microwane Diagnostic for controlled Fusion Research - Report U. C. R. L. 4836 - September 1957

(11) - C. B. WHARTON and D. M. SLAGER - Microwave Interferometer measurements for the determination of Average Electron - Density and of density profiles in Plasmas - U. C. R. L. Report 5244 - June 1958.

C. B. WHARTON and D. M. SLAGER - Microwave Determination of Plasma Density Profiles - Journal of Applied Physics Feb. 1960 vol. 31 - number 2.

(12) - R. MOTLEY and M. A. HEALD - Use of multiple polarisation for Electron Density Profile Measurements in High - Temperature Plasma - Proc. of Symposium on Millimeter wave (Polytechnic Inst. of Brooklyn 1959).

.../...

(R. M. GALLET and ALL. - A microwave whistler mode propagation in a
(13) -) a dense Plasma - Phys. Letters April 1960.

(T. CONSOLI et M. DAGAI - Polarisation rotatoire magnétique dans les
(14)(15)) plasmas. Application à la mesure de la densité electronique. Compte-
( rendu Académie des Sciences t. 250 - 8 février 1960 - Les
)dispositifs expérimentaux t. 250 - 15 février 1960.

(16) - L. R. O. STOREY - Phil. Trans. Roy. Soc. - A - vol. 246 - July 1953

An Investigation of Whistling atmospherics.

(T. CONSOLI - D. LEPECHINSKI - Détermination de la densité d'un
) plasma par la vitesse de groupe. C. R. Académie des Sciences n°15-
( M. Av. 1960.
)
(17) ( T. CONSOLI - D. LEPECHINSKI - Méthode de mesure simultanée
) du champ magnétique de confinement et de la densité électronique
( d'un plasma.
) CR. Acad. des Sciences n° 16 - 12 avril 1960.

(18) - U. ASCOLI and F. RASETTI - Measurements of the refractive indexe of a plasma in the optical Region. Proc. of the Fourth International Conference on Ionisation Phenomena in Gases. Uppsala - August 17. 12. 1959 - vol. II

(18) - RALPH A. ALPHER and DONALD R. WHITE - Interferometric Measurement of Electron Concentration in Plasmas. Physics of Fluids - vol. 1 - number 5 - September-October 1958.

(19) - c. f. (9).

(20) - NGUYEN TRONG KHOI - Service de Physique Appliquée - Rapport interne Mesure de la densité électronique d'un plasma haute fréquence par glissement de la fréquence d'accord d'une cavité U. H. F. - avril 1960.

.../...

(21) - c. f. (4)

(22) - K. B. PERSON
Phys. Rev. 106. 191 - 1951

(23) - J. L. DELCROIX - Introduction à la théorie des gaz ionisés -

Monographie Dunod - Paris 1959

(24) - c. f. (5)

(25) - c. f. (2)

(26) - T. CONSOLI - Expressions générales des tenseurs de conductivité et de l'indice de réfraction - N. T. C. E. A. -40 - Juin 1959.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

## - I - INTRODUCTION -

Une mesure fondamentale dans les recherches sur les gaz ionisés est la détermination de la densité électronique de ces milieux.

Deux catégories de techniques d'inégale importance ayant chacune leurs avantages et inconvénients sont généralement utilisées.

La première que nous citons pour mémoire (0) est une méthode électrique connue depuis 1906 ; c'est la technique des sondes de Langmuir qui permet en particulier la détermination de la densité, et de la température électronique.

Cette méthode d'un usage courant dans les recherches sur les plasmas, d'un maniement aisé, nécessitant un matériel peu coûteux, est limitée dans ses possibilités et son emploi par l'impossibilité d'être utilisée dans les plasmas chauds et denses.

La deuxième technique d'origine plus récente est basée sur l'intéraction des ondes électromagnétiques avec les milieux ionisés.

La détermination de la conductivité électrique de ces milieux par la perturbation subie par l'onde électromagnétique, permet la mesure de nombreux paramètres caractérisant les milieux ionisés, tels que la densité électronique, la fréquence de collision, le coefficient de recombinaison, la distribution de la densité électronique, la vitesse macroscopique du milieu, et le champ magnétique de confinement.

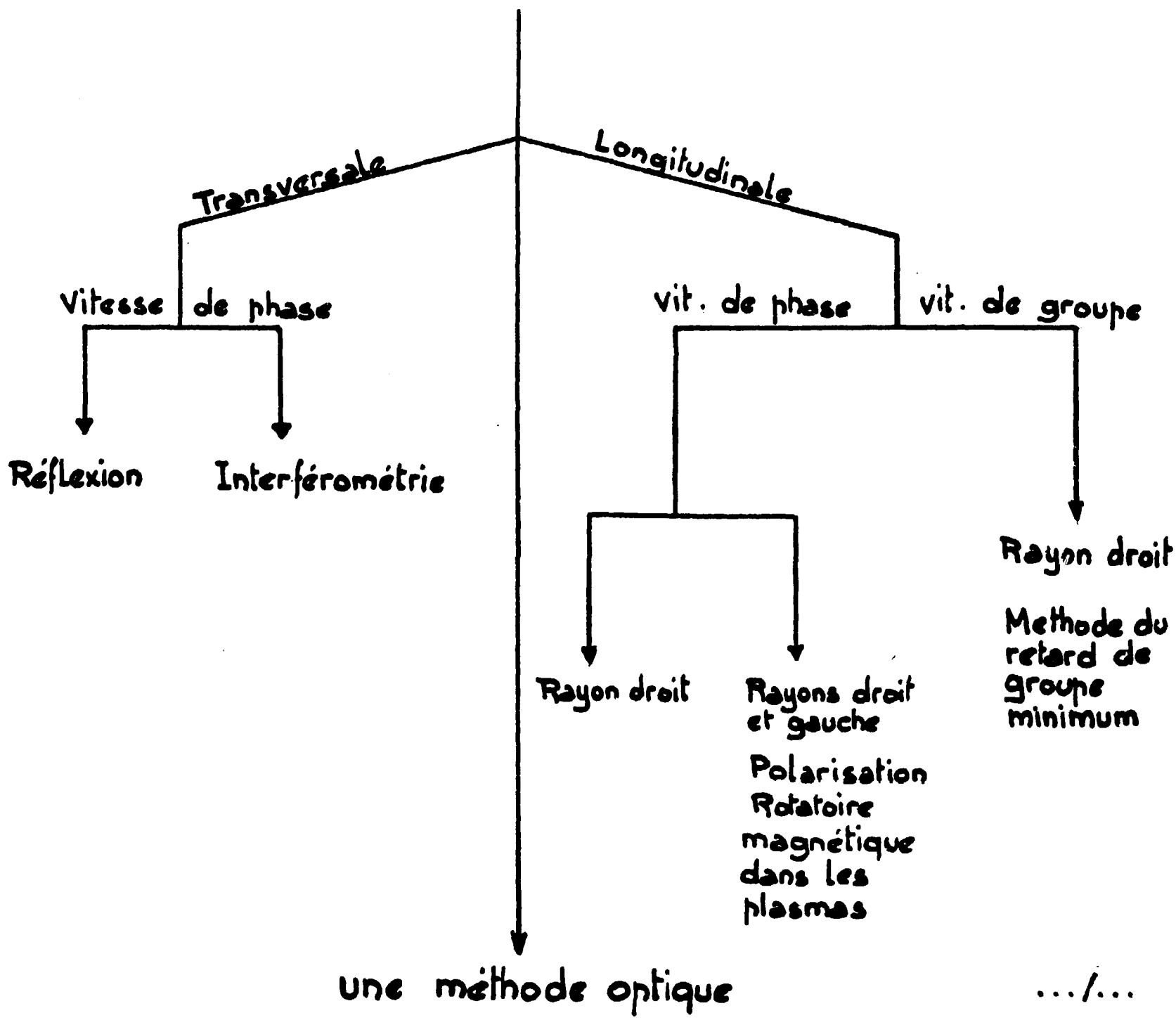
On se propose d'étudier la mesure du premier de ces paramètres. On peut dans ce but donner de l'ensemble des méthodes de

test hyperfréquence, le tableau suivant :

- Méthodes de test U. H. F. -

I - Méthode de cavité résonante

II- Méthodes de propagation




.../...

Cette classification des techniques de propagation en méthodes transversales et longitudinales résulte de l'orientation de la direction de propagation du faisceau électromagnétique de sondage par rapport au champ magnétique de confinement du plasma.

Chacun de ces subdivisions peut également comporter des sous groupes selon que la technique est basée sur la détermination d'une vitesse de phase ou de groupe.

Les milieux dont on se propose de mesurer la densité électronique sont supposés fortement ionisé, ce qui revient à dire que le processus collisionel dominant est l'interaction coulombienne electron-ion.

Dans les rappels théoriques concernant la propagation des ondes électromagnétiques, la théorie des cavités résonantes, le tenseur de conductivité, on s'est placé intentionnellement dans des conditions qui, si elles ne sont pas plus générales, sont les plus utilisées dans l'expérimentation. Les équations de propagations déduites sont donc des approximations des phénomènes qu'elles décrivent.

## I - THEORIE des TECHNIQUES -

### A - Equations de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu fortement ionisé.

- - - - -

.../...

Ces équations pour les milieux faiblement ionisés ont été établies par plusieurs auteurs (1). Des études théoriques récentes (2) les ont étendus aux gaz fortement ionisés en tenant compte des différents paramètres physiques tels que la nature des charges, les champs statiques et variables, les effets de la température et des diverses anisotropies (de champ, densité électronique, pression) des conditions aux limites...

Une conséquence inévitable du traitement mathématique que cela suppose est de rendre difficile l'application des théories établies à l'expérimentation.

On se propose de se placer dansdes conditions simples pour retrouver les équations de propagation qui seront appliquées dans les méthodes de test hyperfréquence.

1. 1 - Hypothèses -

Le milieu est supposé infini, homogène, neutre, fortement ionisé, c'est-à-dire que les procéssus dominants d'interactions entre particules sont les collisions électrons-ions.

Le plasma est supposé dépourvu de tout gradient de densité, et plongé dans un champ magnétique uniforme $B_0$. Les ondes électromagnétiques qui s'y propagent sont supposées planes et transverses les champs E et H, la densité de courant J et la vitesse macroscopique, des fonctions harmoniques en $e^{-j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

..../...

On néglige l'effet du champ magnétique H de l'onde sur les charges.

1. 2. - EQUATION de PROPAGATION -

Cette équation s'obtient en écrivant d'une part les équations du plasma pour chaque type de particules, sous l'influence du passage de l'onde (3), et d'autre part que les champs E et $\mathcal{H}$ de l'onde satisfont aux équations de Maxwell.

1. 2. 1. - EQUATION du PLASMA -

Ce sont :

a) les équations de définition de la densité de masse $\rho$, de la densité de courant $\vec{J}$ et de la vitesse $\dot{\vec{r}}$:

(1) $\rho = n_i m_i + n_e m_e \approx n_i m_i$

avec $n_e = n_i = n$

(2) $\vec{J} = e n (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \approx e n (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_e)$ $\qquad Z = 1$

(3) $\dot{\vec{r}} = \frac{1}{\rho} n (m_i \dot{\vec{r}}_i + m_e \dot{\vec{r}}_e)$

b) la loi d'Ohm généralisée obtenue à partir des équations de conservation de la quantité de mouvements :

(4) $n m_i \ddot{\vec{r}}_i = n e (\vec{E} + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_0) - \nabla p_i - n m_i \nabla \Phi + P_{ie}$

(5) $n m_e \ddot{\vec{r}}_e = n e (\vec{E} + \dot{\vec{r}}_e \times \vec{B}_0) - \nabla p_e - n m_e \nabla \Phi + P_{ei}$

(6) où $P_{ei} = - P_{ie} = - n e \eta \vec{J}$

et $\eta$ est la résistivité du plasma définie par

$\nu$ étant la valeur moyenne de la fréquence de collision électron-ion.

On obtient par addition et soustraction des équations (5) et (6) et en négligeant les gradients de gravitation et de pression.

(8) $$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{j\rho\omega} \vec{J} \times \vec{B}_0$$

(9) $$\frac{j\omega}{\varepsilon_0 \omega_p^2} \vec{J} = \vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\omega_p^2 \varepsilon_0} \vec{J} \times \vec{\omega}_{ce} - \frac{\nu}{\omega_p^2 \varepsilon_0} \vec{J}$$

ou encore

(10) $$\varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E} = j\omega \vec{J} \left(1 - \frac{j\nu}{\omega}\right) + \frac{j}{\omega} \vec{J} \times \vec{\omega}_{ce} \times \vec{\omega}_{ci} - \vec{J} \times \vec{\omega}_{ce}$$

(11) $$\varepsilon_0 \mathcal{X} \vec{E} = \frac{j}{\omega} \vec{J} (1 - jZ) + \frac{j}{\omega} \vec{J} \times \vec{Y}_e \times \vec{Y}_i - \frac{1}{\omega} \vec{J} \times \vec{Y}_e$$

(12) soit $$\| E \| = \frac{1}{\varepsilon_0 \mathcal{X}} \| \sigma^{-1} \| . \| J \|$$

avec

$$\mathcal{X} = \omega_p^2 / \omega^2 , \quad Z = \nu / \omega , \quad \vec{Y}_e = \frac{\vec{\omega}_{ce}}{\omega} , \quad \vec{Y}_i = \frac{\vec{\omega}_{ci}}{\omega}$$

1. 2. 2. - EQUATIONS des CHAMPS -

(13- a) $$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j \mu \omega \vec{H}$$

(14 - b) $$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \overleftrightarrow{\sigma} . \vec{E} + j\omega \varepsilon_0 \vec{E} = j\omega \varepsilon \vec{E} = j \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega \vec{E}$$

$\varepsilon_r$ = constante diélectrique du milieu = $1 + \frac{\overleftrightarrow{\sigma}}{j\omega\varepsilon_0}$

Le second membre de l'équation (14-b) représente le courant total dans le milieu . Il est formé du courant de déplacement dans le vide $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et du courant de conduction $\overleftrightarrow{\sigma} . \vec{E}$ dû aux charges libres.

.../...

Les deux équations de MAXWELL conduisent à :

$$(15) \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\hat{\sigma}}{j\omega\varepsilon_0}\right)\vec{E}$$

Choisissons comme axe de propagation l'axe des $z$, en calculant à partir de (11) la matrice $\| \sigma \|$ définissant le tenseur de conductivité et en portant sa valeur dans (15)

on a le déterminant donnant l'équation de dispersion ;

$$(16) \quad \begin{vmatrix} -(1-jZ)+\frac{X}{1-N^2}+Y_{iz}Y_{ez}+Y_{iy}Y_{ey} & jY_{ez} & jY_{ey} \\ -jY_{ez} & -(1-jZ)+\frac{X}{1-N^2}+Y_{ez}Y_{iz} & Y_{ey}Y_{iz} \\ -jY_{ey} & Y_{iz}Y_{ey} & -(1-jZ)+X+Y_{ey}Y_{iy} \end{vmatrix} = 0$$

$N$ étant l'indice complexe de phase et $Y_{ex}, \ldots Y_{ix} \ldots$ les composantes sur les axes de coordonnées de $\vec{Y}_e$ et $\vec{Y}_i$

## 1. 3. - ETUDE de QUELQUES PARTICULIERS -

### 1. 3. 1 - Cas I - Absence de champ magnétique -

Toutes les pulsations cyclotroniques sont nulles, le déterminant (16) se réduit à :

$$(17) \quad N^2 = \frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{X}{1-jZ} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1-j\,\nu/\omega}$$

.../...

où $V$ est la vitesse de phase

1. 3. 1. - Cas II Propagation longitudinale

$\vec{B} \neq 0$ $\vec{k}$ parallèle à $\vec{B}$

on a alors :

(18) $$N^2 = 1 - \frac{X}{1 \pm Y_e - jZ} \quad \text{si} \quad \frac{\omega_i}{\omega} \simeq 0$$

- pour le rayon gauche, + pour le rayon droit

(19) $$N^2 = 1 - \frac{X}{1 \mp Y_e - \frac{m_i}{m_e}(Y_i)^2} \quad \text{si} \quad V \simeq 0$$

pour les fréquences basses, la vitesse de phase du rayon droit prend la forme

(20) $$V^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{m_e}{m_i}\,\omega_p^2/\omega^2} = \frac{c^2}{1 + \rho\frac{c^2}{B_o^2}}$$

soit si $\rho\frac{c^2}{B_o^2} \gg 1$

(21) $$V = B_o/\rho^{1/2}$$

On retrouve les ondes hydromagnétiques longitudinales ou ondes d'Alfven qui sont donc un cas particulier du mode droit.

1. 3. 3. - Cas III - Propagation transversale -

$\vec{B}$ perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{k}$

le vecteur électrique $\vec{E}$ ayant une direction quelconque

Le déterminant conduit aux deux indices

(22) $$N_o^2 = 1 - \frac{X}{1 - jZ}$$ rayon ordinaire

(23) $$N_{ex}^2 = 1 - \frac{X(1 - X - jZ)}{(1 - jZ)(1 - X - jZ) - Y^2}$$ rayon extraordinaire

ne voyait pas le champ magnétique statique.

1.4. - Résistivité du plasma - Fréquence de collision -

On a vu que dans l'équation de conservation de la quantité de mouvements, le terme $P_{ei}$ dépendait de la résistivité $\eta$ du plasma, et par suite, à cause de l'équation $\eta = \frac{\nu}{\omega_p^2 \varepsilon_0}$, de la fréquence de collision $\nu$, électron-ions. Cette fréquence de collision dépendant de la force Coulombienne en $\frac{1}{r^2}$ est une fonction inversement proportionnelle au cube de la vitesse des électrons $\dot{\vec{r}}_e$.

Des expressions de la résistivité d'un plasma ont été établies par plusieurs auteurs (4), en particulier par Spitzer-Harm et Landshoff en partant de l'équation de Baltzmann et en tenant compte des effets sur la distribution de vitesse du champ électrique appliqué et des interactions electron-electron. En effet en présence d'un champ magnétique les collisions electrons-electrons ont une influence sur la résistivité du plasma au voisinage de la fréquence de résonances,-plasma et de la fréquence cyclotron des electrons.

Il résulte de leur calcul, pour la résistivité en l'absence de champ magnétique et dans le cas d'une distribution Maxwellienne pour la vitesse des electrons, l'expression

$$(24) \quad \eta = \frac{\pi^2 m_e^{1/2} Z e^2 \ln \Lambda}{4 \sqrt{2\pi} (4 \pi \varepsilon_0)^2 (kT_e)^{3/2} \gamma_e(Z)}$$

où $\gamma_e(Z)$ est un facteur correctif voisin de l'unité, dû aux collisions electron-electron.

.../...

et pour la fréquence de collision

(25) $\nu = b \dfrac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m_e^{1/2}} \cdot \dfrac{n Z}{(kT)^{3/2}}$

$b$, étant un facteur dont les valeurs ont été données pour les différentes approximations par M. A. HEALD (5)

| Pulsation de l'onde | Calcul | | Ordre de grandeur |
|---|---|---|---|
| $\omega = 0$ | Conductivité en courant de Spitzer-Harm | $\dfrac{\pi^2 \ln \Lambda}{4\sqrt{2}\pi \gamma_e}$ | 0,17 |
| $\omega \ll \nu$ | de Spitzer à partir du temps de à 90° | $\dfrac{\pi^2 \ln \Lambda}{2\sqrt{2\pi}}$ | 0,19 |
| $\omega \gg \nu$ | même remarque | $\dfrac{8\sqrt{2\pi}}{3} \ln \Lambda$ | 0,63 |
| $\omega \gg \omega_p$ | absorption dans la transition libre-libre | $\dfrac{8\pi\sqrt{2\pi}\, G}{3\sqrt{3}}$ | 0,60 |

$G$ = facteur moyen de Gaunt, dont l'ordre de grandeur pour les fréquence U.H.F. est l'ordre de 5.

Il s'en suit de ce tableau que l'on pourra prendre pour $\nu$ la valeur numérique

(26) $\nu\,[\text{sec}]^{-1} \sim 3 \times 10^{-5} \dfrac{n Z}{(kT)^{3/2}}$

$n$ en $e/cm^3$ , $kT$ en ev

.../...

L'expression de la résistivité $\eta$ établie par Spitzer montre qu'elle dépend faiblement de la densité électronique par le facteur $\ln \Lambda$, mais qu'elle est inversement proportionnelle à $T^{3/2}$

- - - - - - - - - -

1.5. - Discussion des équations -

Importance de la deuxième équation de MAXWELL

La deuxième équation de Maxwell $\nabla \times H = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ détermine le comportement du milieu ionisé relativement à l'onde électromagnétique dans le cas où le champ magnétique statique est absent ou parallèle à la polarisation électrique de l'onde.

En effet cette équation peut alors s'écrire :

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = j\, \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega \vec{E} = j\, \varepsilon_0 \omega \vec{E} . N^2$$

$$\text{mais} \quad N^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2 \quad \text{si} \quad \nu = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\, \varepsilon_0 \omega \left(1 - \omega_p^2/\omega^2\right) \vec{E}$$

Selon que $\omega$ est plus petit ou plus grand de $\omega_p$ le courant de conduction est plus petit ou plus grand que le courant de déplacement. Le plasma se comporte en dielectrique ou en conducteur.

A la transition $\omega_p = \omega$, les deux courants s'annullent

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

Le phénomène est connu sous le terme impropre de résonance plasma. Effectivement ce n'est point une résonance car l'indice $N$ n'est pas infini mais plutôt une coupure, $N = 0$ et la vitesse de phase $V$ infinie. Le même résultat se retrouve évidemment à partir

/

du mouvement des electons dans le champ électrique $E_0\, e^{-j(\omega t - kz)}$

L'équation du mouvement, si l'on néglige en première approximation l'effet du champ magnétique de l'onde, s'écrit :

$$m_e \ddot{r} = -e\, E_0\, e^{-j(\omega t - kz)} \qquad (28)$$

soit pour le courant de conduction $J = -n e \dot{r} = j \frac{\omega_p^2}{\omega} E_0 \varepsilon_0 e^{-j(\omega t - kz)}$

On voit bien que le courant de conduction $J$ annule le courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -j\omega\varepsilon_0 E_0 e^{-j(\omega t - kz)}$ lorsque $\omega_p = \omega$

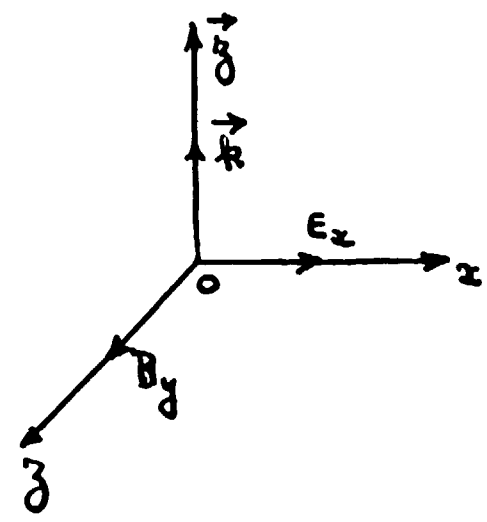
- - - - - -

## 1. 6. - Trajectoire d'un électron isolé dans le champ électromagnétique en l'absence de tout champ magnétique statique

Utilisons le calcul de J. G. LINHART (6)

Ecrivons cette fois l'équation du mouvement en tenant compte des champs électriques et magnétiques de l'onde plane supposée se propager suivant l'axe des $z$

les champs E et H étant orientés suivant les axes ox et oy :




revenons aux variables réelles

$$E_x = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$B_y = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{\vec{r}} = e\,(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \text{ soit } \begin{cases} m\ddot{x} = e E_0 (1 + \dot{z}) \sin(\omega t - kz) \\ m\ddot{z} = e E_0\, \dot{x} \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

mais

$$kz = \frac{\omega}{c} z = \frac{\omega}{c} \int_0^t \dot{z}\, dt$$

.../...

Si l'interaction s'étend sur plusieurs périodes,

$$\frac{\dot{z}}{c} \ll 1 \quad \text{et} \quad kz \ll \omega t$$

ce qui entraîne :

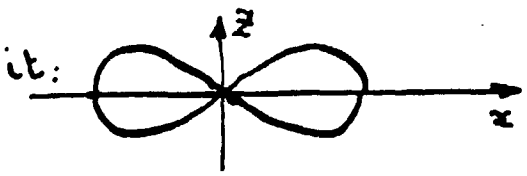
$$m\ddot{x} = eE_0 \sin\omega t \qquad \text{en intégrant} \qquad \dot{x} = -\frac{eE_0}{m\omega}\cos\omega t + \dot{x}_0$$

$$m\ddot{z} = eE_0\dot{x}\sin\omega t \qquad \dot{z} = -\frac{e^2E_0^2}{4\omega^2}\cos 2\omega t + \frac{eE_0}{m\omega}\cos\omega t + \dot{z}$$

soit pour $z$

(30) $$z = \frac{1}{8}\frac{e^2E_0^2}{m^2\omega^3}\sin 2\omega t - \frac{eE_0}{m\omega^2}\sin\omega t + \dot{z}_0 t$$

Si la vitesse de glissement est nulle, la trajectoire de la particule est en forme de huit :




Mais si l'électron ne se meut plus dans le vide mais dans un milieu ionisé tel que le champ magnétique de l'onde soit en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au champ electrique,

on a cette fois : $$\ddot{x} = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t$$

$$\ddot{z} = \frac{eE_0}{m}\dot{x}\sin\omega t$$

soit avec l'hypotèse de $\dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$

(31) $$\ddot{z} = \frac{-eE_0^2}{m\omega}\sin^2\omega t$$

La force moyenne qui s'exerce sur un electron est alors :

(32) $$F_m = \frac{1}{2}\frac{e^2E_0^2}{m\omega}$$

et la vitesse :

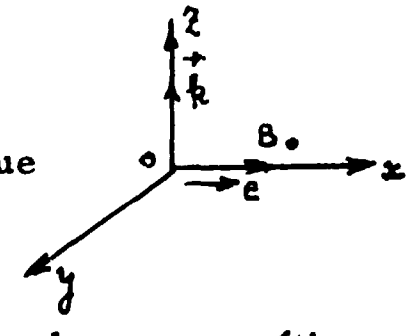
(33) $$\dot{z} = -\frac{e^2E_0^2}{2m\omega}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]$$

contient un terme non oscillant qui peut varier si $\omega$ est grand, lentement en fonction du temps.

## 1. 7. - Retour sur quelques cas particuliers - Présence d'un champ magnétique statique -

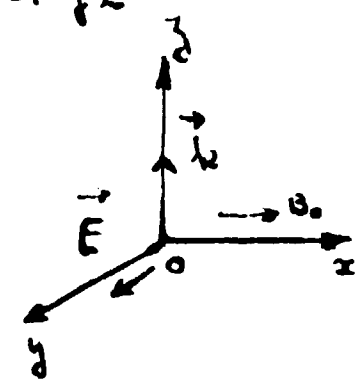
### 1. 7. 1. - Propagation dans la direction transversale au champ magnétique statique -

On a vu que si $B_o$ est perpendiculaire à la direction de propagation, l'onde plane transversale reste transversale si la polarisation du champ électrique est parallèle au champ magnétique statique $B_o$.




En effet alors le courant $\vec{J}$ étant parallèle à $B_o$, le champ magnétique n'a pas d'influence sur la propagation. Ce mode de propagation dit ordinaire conduit au même indice de refraction $N_o^2 = 1 - \frac{X}{1-jZ}$ qu'en l'absence de champ magnétique.

Mais si la polarisation du champ électrique de l'onde est perpendiculaire au champ statique, l'onde plane qui se propage ne reste plus transversale, elle devient par suite de l'action du champ magnétique partiellement longitudinale.




Ce mode dit extraordinaire a pour indice de refraction dans le cas $Z = 0$

$$N_{ex}^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{1-X-Y^2} = 1 - X - \frac{XY}{1-X-Y^2}$$

soit

$$N_{ex}^2 = N_o^2 - \frac{X}{\frac{1}{Y^2} - \frac{X}{Y^2} - 1} = N_o^2 + \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + \omega_p^2/\omega_{ce}^2 - \omega_{ce}^2/\omega^2}$$

..../...

Lorsque $Y = \omega_c/\omega = 0$, on retrouve effectivement le cas longitudinal $N_{ex}^2 = N_o^2$

## Diagramme de propagation

- Courbes de propagation $\vec{B} \perp \vec{k}$

cas $Y < 1$ , $Z = 0$

Il y a propagation au-dessus des fréquences caractéristiques

$$\omega_1 , \omega_4 = \pm \omega_{ce}/2 + \sqrt{\omega_{ce}^2/4 + \omega_p^2}$$

$$\omega_2 = \omega_p = \left( \frac{ne^2}{m\varepsilon_o} \right)^{1/2}$$

$$\omega_3 = \left( \omega_p^2 + \omega_{ce}^2 \right)^{1/2}$$

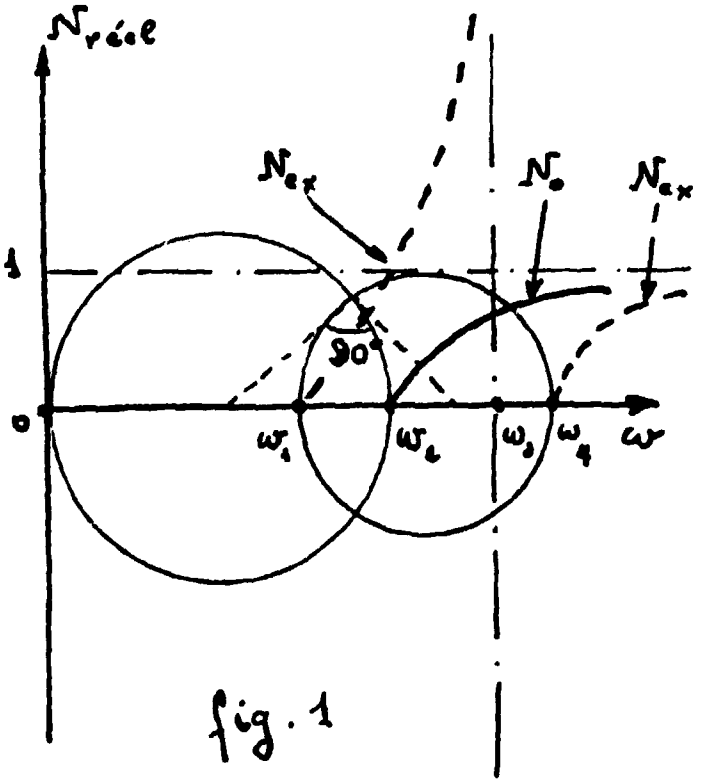



fig. 1

Cas $Y > 1$ , $Z = 0$

Même remarque

$$\omega_1 = -\omega_{ce}/2 + \sqrt{\omega_{ce}^2/4 + \omega_p^2}$$

$$\omega_2 = \omega_p = \left( \frac{ne^2}{m\varepsilon_o} \right)^{1/2}$$

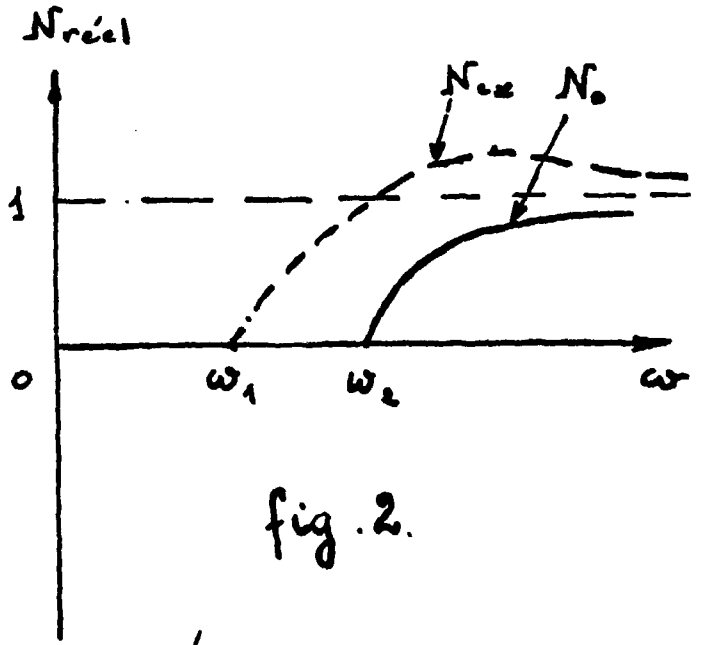



fig. 2.

.../...

L'examen de la fig. 1bis, nous montre les relations existant entre les abcises des points de coupures

$OA = \omega_1$

$OB = \omega_2$

$OD = \omega_3$

et de résonance

$OC = \omega_2$

On a $\overline{OA}\ \overline{OD} = \overline{OB}^2$

$\overline{OC}^2 = OB^2 + \overline{AD}^2$

avec $AD = \omega_2$

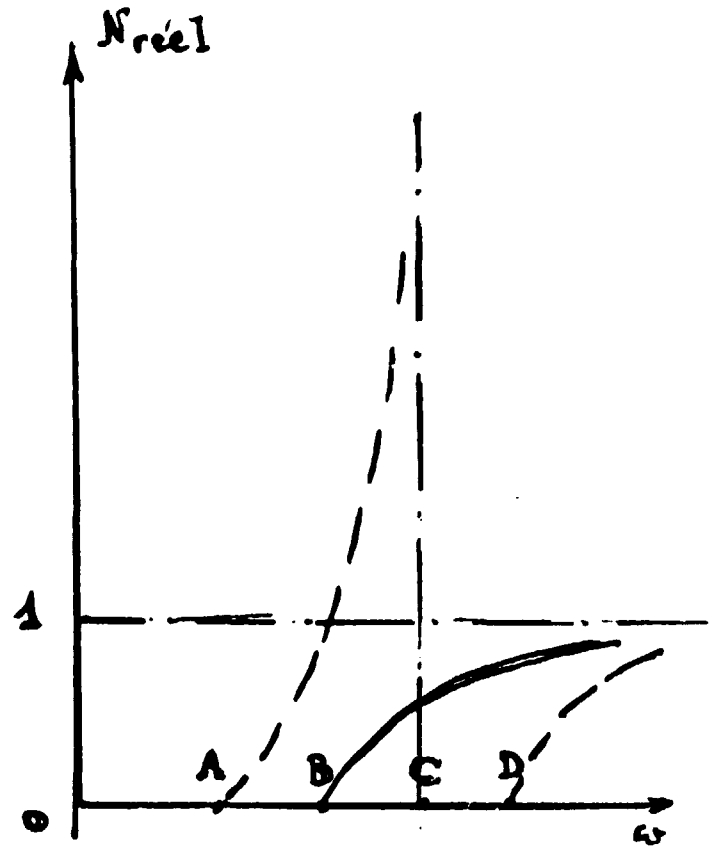



fig 1 bis

Les quatre points A B C D étant situés sur deux cercles orthogonaux de diamètre respectif égal aux pulsations plasmas et cyclotrons.

---

1. 7. 2. - Propagation longitudinale-

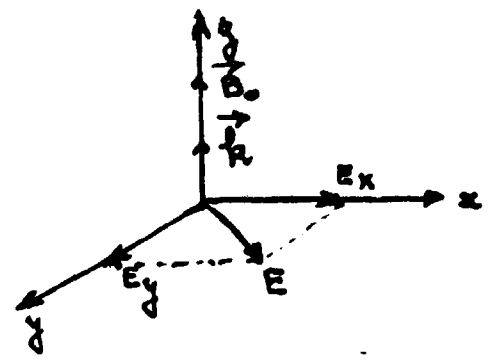
Revenons sur le cas où la propagation $\vec{k}$ se fait parallèlement au champ magnétique statique $B_0$. Le produit $\vec{J} \times \vec{B}_0$ est alors parallèle au front de l'onde, $\nabla . J = 0$ Il n'y a pas d'accumulation de charge dans un milieu illimité. l'Onde demeure transverse.

.../...

On a vu pour $\omega_{ci} \ll \omega_u$ et $Z \approx 0$ que l'indice et la vitesse de phase s'exprimaient par :

$$N_{g,d} = \left(1 - \frac{X}{1 \mp Y}\right)^{1/2} \; ; \quad V_{ph} = \frac{c}{\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ce})}\right]^{1/2}}$$

Le signe - correspond à l'onde gauche ou ordinaire et le signe + à l'onde droite ou extraordinaire.



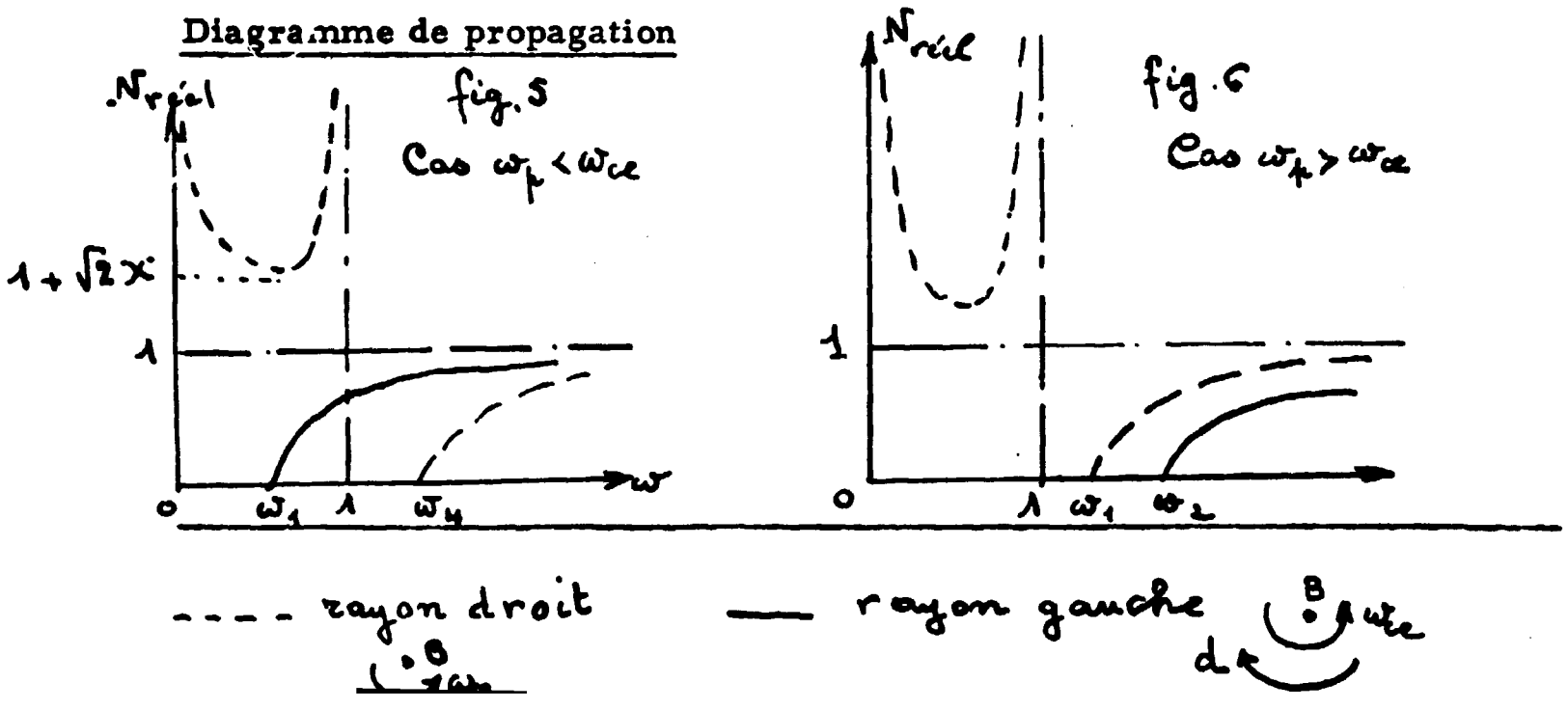

La polarisation du champ électrique résultant de l'équation des ondes (15) est alors :

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm j$$

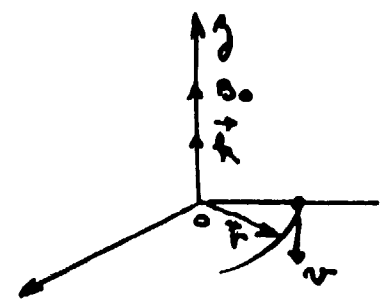
Ce qui correspond à deux ondes polarisées circulairement dont les vecteurs électriques tournent en sens inverse.

L'onde gauche est celle dont le vecteur électrique tourne dans le même sens que les électrons dans leur rotation autour du champ magnétique statique. L'onde droite tournant en sens inverse.

Diagramme de propagation



1. 8. . - Orbites d'un électron dans un champ électromagnétique dont le vecteur électrique est polarisé circulairement et tourne avec la pulsation $\omega$ perpendiculairement au champ magnétique statique $B_o$.




Soit un électron qui tourne avec la vitesse $v = \omega r$, sur une orbite circulaire de rayon $r$, sous l'influence d'un champ électrique tournant avec les électrons. Ce sens de rotation du champ électrique pouvant être soit le même, soit l'inverse du sens de gyration cyclotronique.

En négligeant l'influence des collisions l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$Ee = m\frac{v^2}{r} \pm Bev \quad , \quad E = E_o\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

d'où : $v = \dfrac{Ee}{m(\omega \pm \omega_{ce})}$ pour la vitesse

et $r = \dfrac{Ee}{m\omega(\omega \pm \omega_{ce})}$ pour le rayon de l'orbite

$W_m = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{E_o e}{m\omega(\omega \pm \omega_{ce})}\right]^2$ pour l'énergie cinétique moyenne.

On voit que les électrons pour lesquels la rotation est la même que $\omega$ sont mieux couplés au champ (signe -), $W_m$ est par suite plus grand que pour ceux qui tournent en sens inverse.

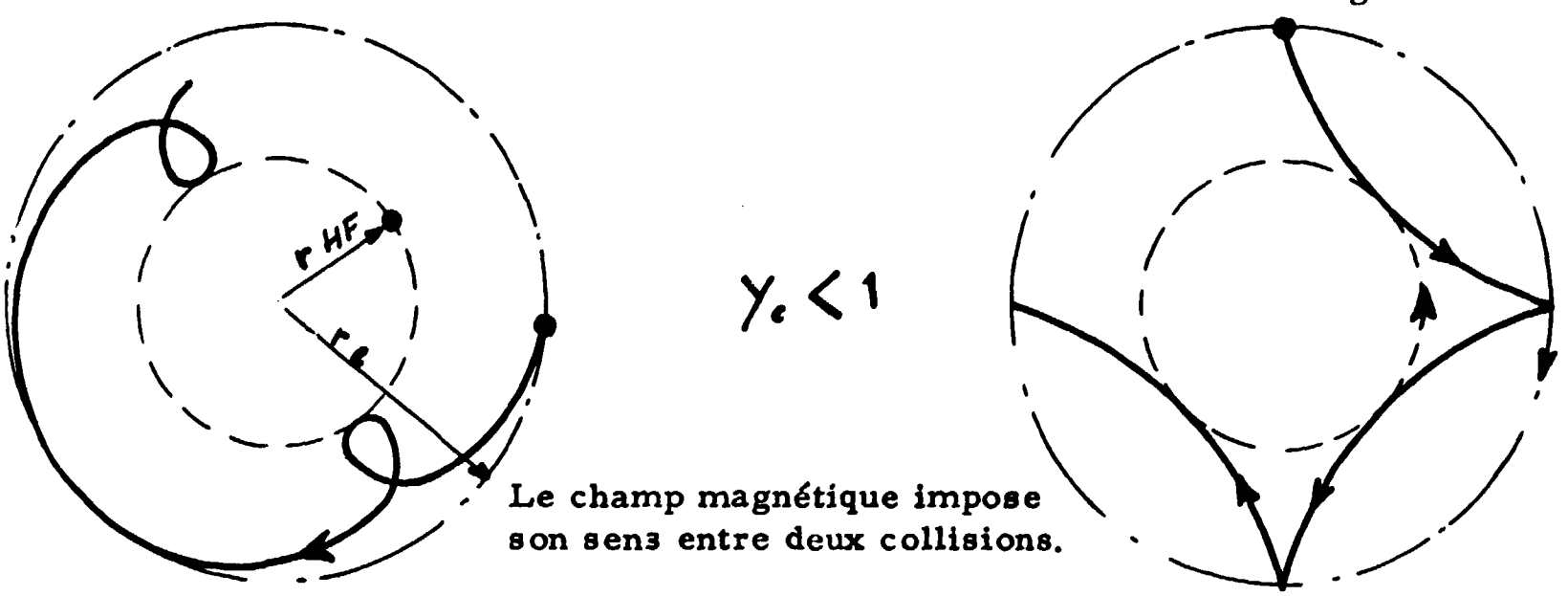
.../...

Les orbites ont en projection sur un plan perpendiculaire à $B_o$ l'allure suivante ; dans le cas d'une vitesse initiale nulle

Exemples d'orbites $\quad Y = \frac{\omega_e}{\omega_{HF}} = \frac{r_{HF}}{r_e}$

Onde droite

Onde gauche



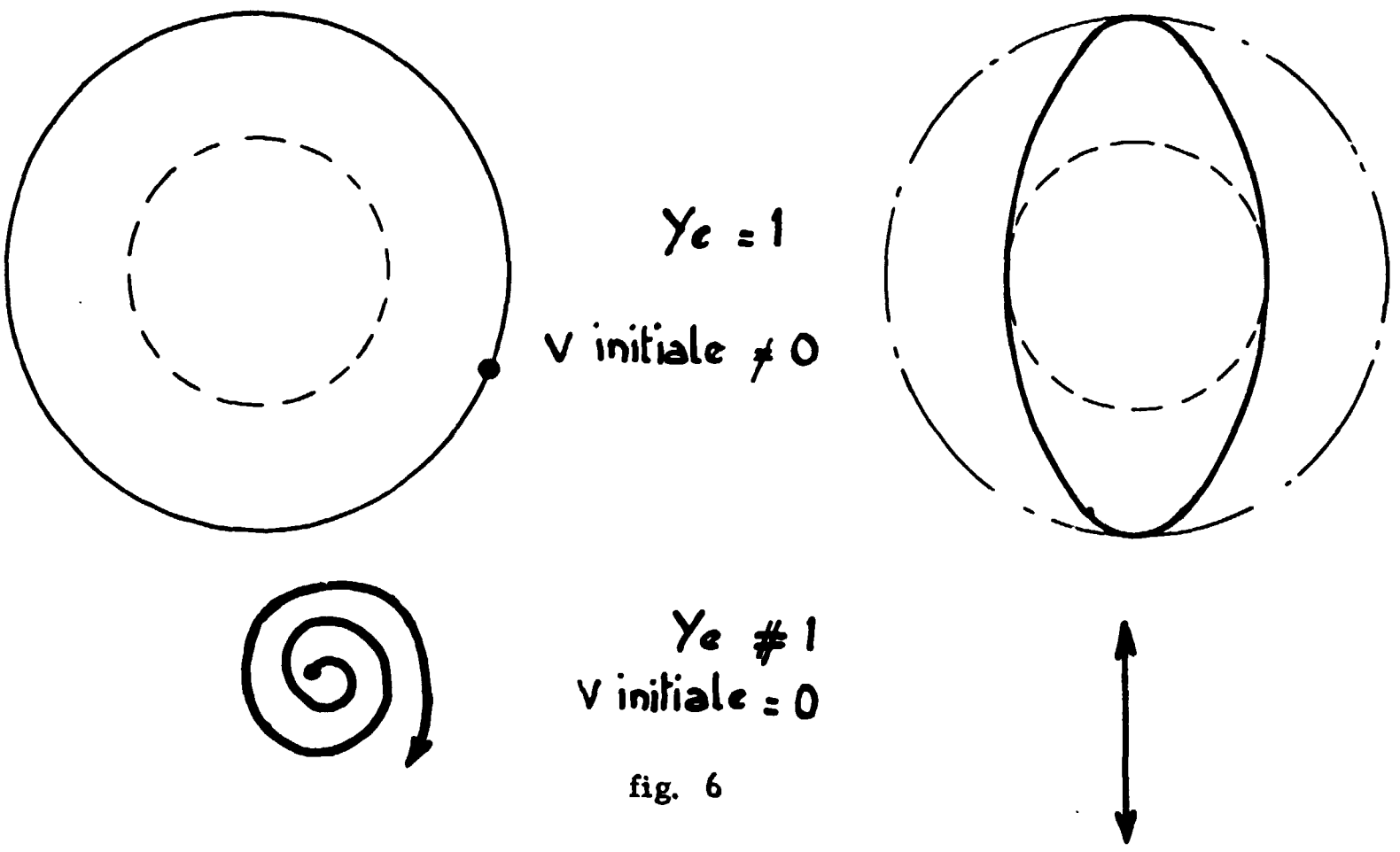




fig. 6

.../...

## 1. 9. - Fréquences caractéristiques - Résonance-coupure -

Connaissant les expressions des indices et des vitesses de phase, on peut pour chaque cas calculer les racines et les pôles de ces expressions. Plaçons-nous dans le cas ou la fréquence de collision est nulle.

Aux pôles, l'indice de phase est infini, la vitesse nulle, on définit ainsi une fréquence de résonance, aux racines correspond une coupure-indice nul vitesse de phase infini. Il y a alors réflexion. Lorsque la vitesse de phase devient imaginaire, il n'y a plus de propagation-l'onde est évanescente.

On dresse un tableau d'ensemble des fréquences de résonance et de coupure - (on a négligé le terme ionique). Sur le graphique de propagation ces fréquences sont situées sur des cercles orthogonaux.

| Cas | Indice | Résonance | Coupure |
|---|---|---|---|
| Absence de champ magnétique statique | $N = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$ | | $\omega = \omega_p$ |
| Prppagation transversale $\vec{B} \perp \vec{k}$ | onde ordinaire $N_o = \left(1 - \omega_p^2/\omega^2\right)^{1/2}$ | | $\omega = \omega_p$ |
| | onde extraordinaire $N_{ex} = \left[\frac{(1-\omega_p^2/\omega^2) - \omega_c^2/\omega^2}{1-\omega_p^2/\omega^2 - \omega_c^2/\omega^2}\right]^{1/2}$ | pour $\omega_{ci} \ll 1$ $\omega = (\omega_p^2 + \omega_{ci}^2)^{1/2}$ résonance plasma | $\omega = \pm \omega_{ci}/2 + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_p^2}$ |
| Propagation longitudinale | rayon droit $N = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right]^{1/2}$ | $\omega = \omega_{ci}$ | $\omega = \omega_c/2 + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_p^2}$ |
| | rayon gauche $N = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}\right]^{1/2}$ | $\omega = \omega_{ci}$ en tenant compte du terme ionique | $\omega = \omega_c/2 + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_p^2}$ |

1. 10. - Coefficients caractéristiques - d'atténuation, de déphasage et de profondeur de pénétration -

- - - - - -

On a supposé que les champs des ondes étaient des fonctions harmoniques et que la propagation avait lieu suivant l'axe des $z$.

$$E = E_0 \, e^{-j(\omega t - kz)}$$

$$k = \frac{\omega N}{c} \qquad N = \alpha - j\beta$$

d'où $$E = E_0 \, e^{j\omega(t - \frac{\alpha}{c} z + j \frac{\beta}{c} z)}$$

(34) $$= E_0 \, e^{-\frac{\omega}{c}\beta z} \, e^{j\omega(t - \frac{\alpha}{c} z)}$$

Le coefficient (35) $K = \frac{\omega\beta}{c}$ est le coefficient d'atténuation ou d'absorption en Neper/m.

Le coefficient (36) $\Phi = \omega \frac{\alpha}{c}$ est le coefficient de déphasage en radian/m

La profondeur de pénétration $d$ est la distance après laquelle l'amplitude du champ électrique est réduite dans le rapport 1/e

(37) $$d = \frac{1}{K} = \frac{C}{\omega\beta}$$

1. 1. 1. - Un exemple

Appliquons ces considérations au calcul de la profondeur de pénétration lorsqu'il n'y a pas de champ magnétique et que la fréquence de collision est différente de zéro.

.../...

On a : $\nu \neq 0 \qquad B = 0$

$$N^2 = 1 - \frac{X}{1-jZ}$$

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)}$$

(38) $$N^2 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2}\right) - j\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2} \cdot \frac{\nu}{\omega}$$

pour $\omega > \omega_p$ et $\nu > \omega$

$$N^2 = 1 \quad \frac{\omega_p^2}{\nu\omega}$$

1. 11. 1 - Calcul de la profondeur de pénétration -

Calcul de $N = \alpha + j\beta$

posons $N^2 = A + jB$

où $A = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2} \qquad B = \frac{\omega_p^2}{\nu^2+\omega^2} \quad \frac{\nu}{\omega}$

$R = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

(39) $$N = \sqrt{\frac{R+A}{2}} + j\sqrt{\frac{R-A}{2}}$$

$$N = \alpha + j\beta \qquad \alpha = \sqrt{\frac{R+A}{2}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{R-A}{2}}$$

(40) $$R = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\nu^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_p^2 \quad \frac{\nu}{\omega}}{\nu^2+\omega^2}\right)^2}$$

(41) $$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\nu^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_p^2\,\nu/\omega}{\nu^2+\omega^2}\right)^2} + 1 - \frac{\omega_p^2}{\nu^2+\omega^2}}{2}}$$

(42) $$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\nu^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_p^2\,\frac{\nu}{\omega}}{}\right)^2} - \left(\frac{1 - \omega_p^2}{\nu^2+\omega^2}\right.}{2}}$$

1. 10. 2. - Examen des diverses approximations -

a) $\nu \neq 0 \qquad \omega < \omega_p$

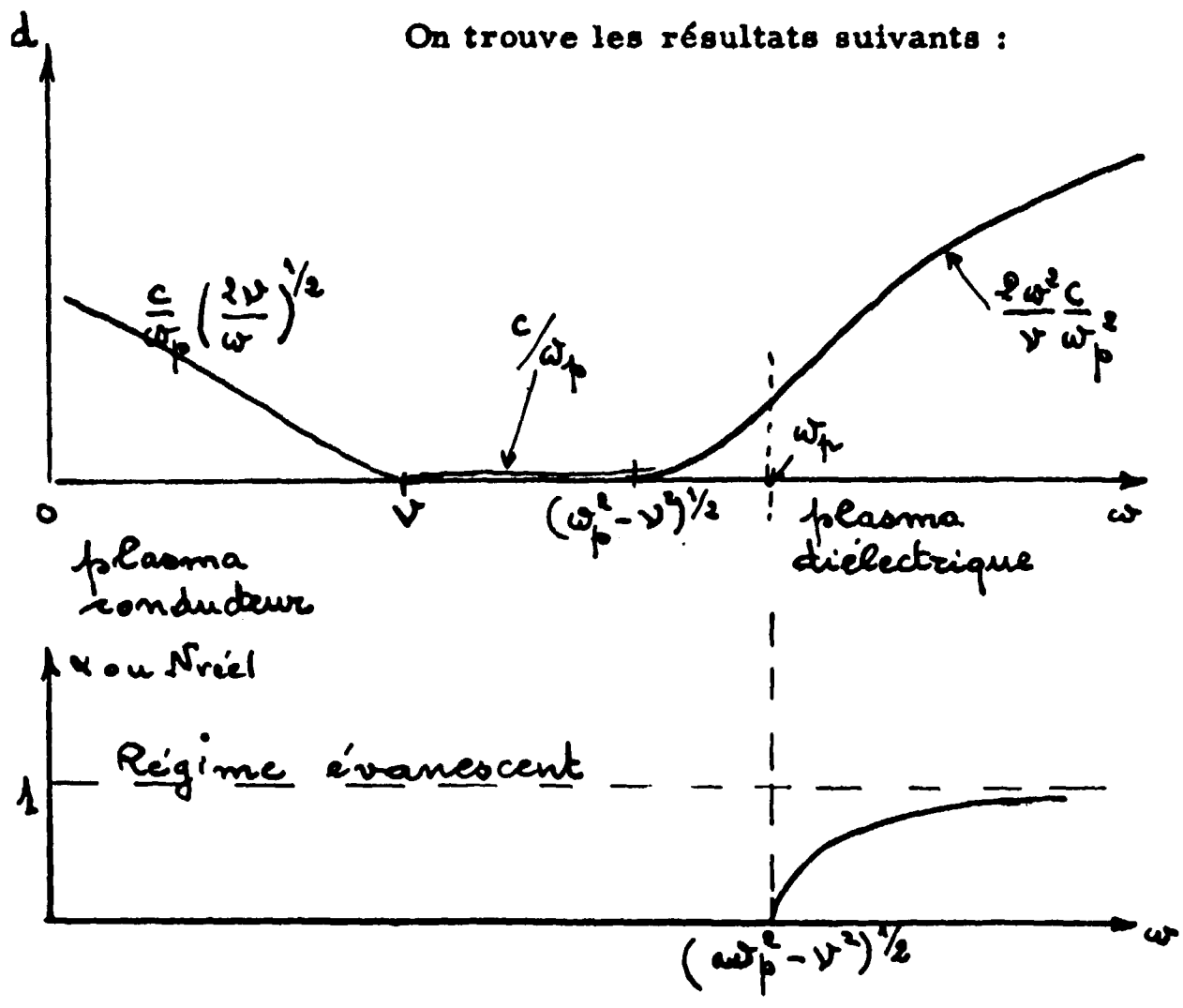
$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \; j\,\omega/\nu \qquad R = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{\omega}{\nu}\right)^2}$$

(43) $$\beta = \sqrt{\frac{R-A}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{\omega}{\nu}} - 1}{2}} \approx \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{\omega}{\nu}}$$

d'où $$d = \frac{c}{\omega\beta} = \frac{c}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega_p}\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

(44) $$d = \frac{c}{\omega_p}\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

On trouve les résultats suivants :




.../...

Calcul de d pour $\omega > \omega_p$ $\frac{\nu}{\omega} \approx 0$

$$(45)\quad \beta = \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\nu}{\omega}\right)^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{\nu}{\omega}$$

$$d = \frac{c}{\omega\beta} = \frac{2c}{\nu}\frac{\omega^2}{\omega_p^2}$$

Atténuation et déphasage d'un onde plane se propageant dans un plasma uniforme et infini.

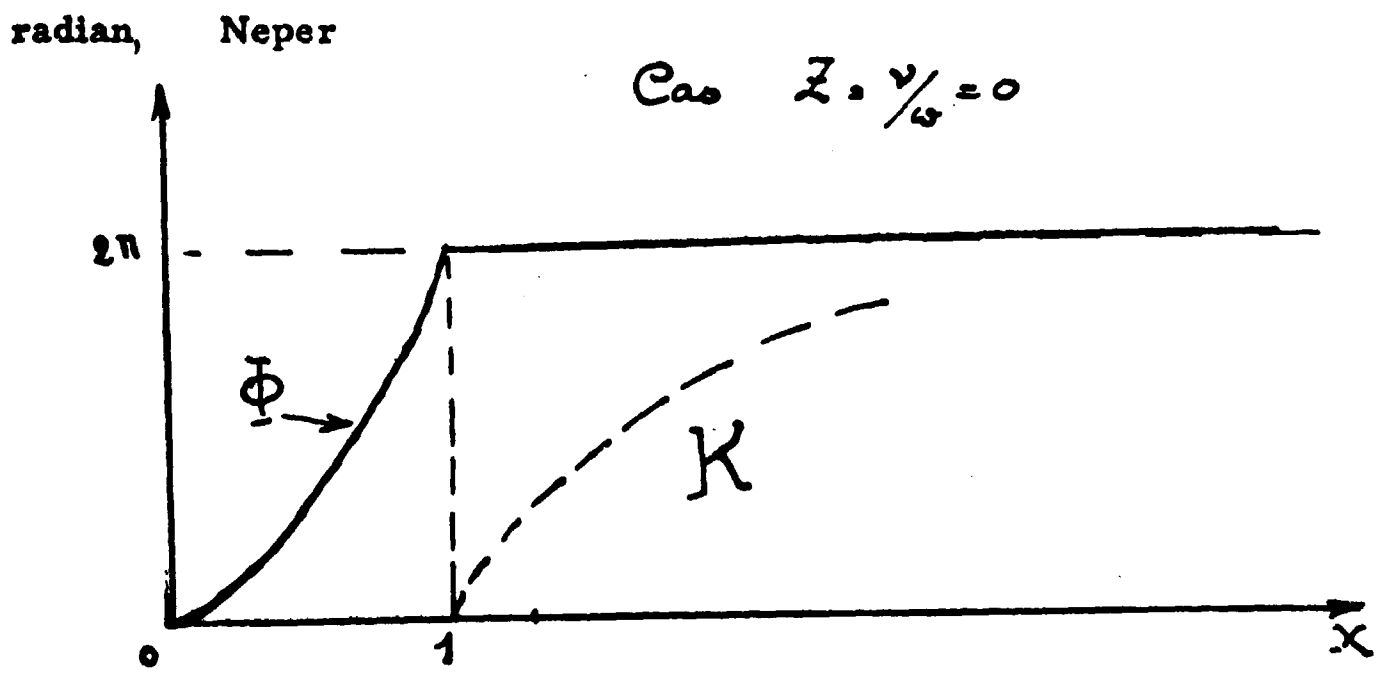



fig. 8

Le plasma se comporte comme une ligne à retard, il apporte un déphasage de $2\pi$, un pour tout parcours $\lambda$.

On voit donc que le calcul des coefficients $\Phi$ et $K$ suppose la séparation de l'indice complexe $N$ en ses parties réelle et imaginaire $\alpha$ et $\beta$. En posant $N^2 = A + jB$, on calculera $\alpha$ et $\beta$ par les

... /...

relations obtenues par identification :

$$\alpha = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$$

1. 12 - Influence de la température électronique, et des limites sur les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma. Validité des approximations utilisées.

Dans l'équationde propagation (15) il a été tenu compte partiellement de la température électronique dans l'expression de la résistivité et de la fréquence de collision J. E. DRUMMOND dans une étude récente (7) a signalé d'autres effetsde cette température qui se manifestent lorsque le rayon de gyration des électrons $r_a = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\omega_a}$ devient comparable à la longueur d'onde du champ électrique de l'onde. Le tenseur de conductivité est alors modifié d'une façon importante. Il apparaît alors des atténuations qui sont dues à des effets de brouillage des phases.

Les ondes peuvent se propager dans des régions où normalement il y a coupure.

Notons que ces effets ne sont appréciables qu'à partir de températures électroniques supérieures à 100 eV

Un deuxième point discutable est l'application aux plasmas limités des laboratoires dans les techniques de test basées sur la

.../...

propagation des ondes électromagnétiques, des relations de dispersion valable au milieu illimité.

De nombreux auteurs dont en particulier S. J. BUCHSBAUM et M. MOWER ont étudié la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu anisotrope limité (8)

Il n'en demeure pas moins que l'utilisation des équations en milieu infini est justifiée si la longueur d'onde $\lambda$ de l'onde se propageant est petite relativement aux dimensions du plasma. Les effets des limites sont alors minimisés. On aurait intérêt à travailler avec des longueurs d'onde submillimétrique si la technique de production de ces ondes était rendue possible.

L'utilisation des ondes lumineuses peut sous certaines conditions présenter un intérêt.

Elle sera examinée un peu plus loin.

- - - - - - - -

B - Ondes électromagnétiques stationnaires dans une cavité résonnante contenant du plasma.

---

2. 1. - Théorie du phénomène - Relation fondamentale -

Dans une cavité résonnante excitée, l'action du champ électromagnétique sur le gaz raréfié qu'il ionise, se traduit par l'apparition d'une conductivité complexe.

.../...

En effet, les électrons libres du milieu ionisé oscillent et par suite ont des collisions avec les molécules neutres.

L'oscillation modifie le champ électromagnétique dans la cavité, ce qui entraîne une variation de la fréquence de résonance. Les collisions entraînent une diminution du coefficient de surtension $Q$ de la cavité.

Ces deux phénomènes peuvent être utilisés pour mesurer la densité électronique et la fréquence de collision, ou bien, si la fréquence de collision est connue par ailleurs, pour deux déterminations de la densité.

Cette méthode a été particulièrement étudiée par le groupe de chercheurs de l'M. I. T. (9).

Relations fondamentales

Soit une cavité de forme quelconque, à parois conductrices excitée suivant un mode TE ou TM et soient :

(2. 1) - $\vec{E}_0 = E_0 \, e^{j\omega_0 t}$, $\vec{H}_0 = \vec{H}_0 \, e^{j\omega_0 t}$

(2. 2.) - $\vec{E}_1 = E_1 \, e^{j\omega_1 t}$, $\vec{H}_1 = H_1 \, e^{j\omega_1 t}$

les champs électromagnétiques dans la cavité sans et avec plasma.

Ecrivons les équations de MAXWELL pour les champs :

(2. 3) - $\left.\begin{array}{l} \nabla \times \vec{H}_0 = j\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \\ \nabla \times \vec{E}_0 = -j\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0 \end{array}\right\}$ pour la cavité vide

.../...

$$(2.4) - \left.\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}_1 &= j\,\omega_1\,\varepsilon_0\,\vec{E}_1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{E}_1 \\ \nabla \times \vec{E}_1 &= j\,\omega_1\,\mu_0\,\vec{H}_1 \end{aligned}\right\} \text{ pour la cavité avec plasma}$$

En multipliant les équations (3) et (4) par $E_1$, $H_1$, $E_0$, $H_0$ on a après addition :

$$(2.5.) - \vec{E}_1 \cdot \nabla\times\vec{H}_0 + \vec{H}_1 \cdot \nabla\times\vec{E}_0 = j\,\omega_0 (\varepsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_1 - \mu_0 \vec{H}_0 \vec{H}_1$$

$$(2.6.) - E_0 \cdot \nabla\times\vec{H}_1 + \vec{H}_0 \cdot \nabla\times\vec{E}_1 = j\,\omega_1 (\varepsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_1 - \mu_0 \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_1) + (\vec{\sigma}\cdot\vec{E}_1) E_0$$

en retranchant (6) et de (5) en utilisant l'identité

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla\times\vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla\times\vec{B}$$

et en intégrant sur le volume de la cavité, on a :

$$(2.7.) - \int_{V\ \text{cavité}} \nabla \cdot (\vec{H}_0 \times \vec{E}_1 + \vec{E}_0 \times \vec{H}_1)\, dV = j(\omega_0 - \omega_1) \int_{V\ \text{cavité}} (\varepsilon_0 \vec{E}_0 \vec{E}_1 - \mu_0 \vec{H}_0 \vec{H}_1)\, dV - \int_{V\ \text{plasma}} (\vec{\sigma}\cdot\vec{E}_1) \cdot \vec{E}_0\, dV$$

Si les parois sont conductrices, les conditions aux limites entraînent l'annulation du premier membre, d'où la relation fondamentale :

$$(2.8.) - \quad \omega_1 - \omega_0 = \frac{j \int_{V\ \text{plasma}} (\vec{\sigma}\cdot\vec{E}_1)\, \vec{E}_0\, dV}{\int_{V\ \text{plasma}} (\varepsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_0 - \mu_0 \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_0)\, dV}$$

qui définit la variation du pulsation complexe, produite par la présence du plasma dans la cavité.

Pour utiliser cette relation, il faudra étudier chaque cas isolément :

.../...

a) les conditions physiques donneront $\vec{\sigma}$ , et à ce propos on aura recours aux équations et relations établies dans 1 - 4.

b) les conditions géométriques liées aux modes excitées dans la cavité donneront les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

Les conditions aux limites enfin, donneront la fréquence de résonance.

2. 2. - Approximation des plasmas peu denses -

Si les plasmas sont supposés peu denses, on admet que les configurations des champs dans la cavité sont peu perturbées par la présence du plasma, c'est-à-dire si 4 $\vec{E}_o$ $\vec{E}_1$ $\vec{H}_o$ $\vec{H}_1$

D'autre part à la résonance, les énergies électriques et magnétiques emmagasinées dans la cavité sont égales :

$$(2.9.) \quad \varepsilon_0 \int_V E_0^2 \, dV = \mu_0 \int_V H_0^2 \, dV$$

d'où

$$(2.10.) \quad \omega - \omega_0 = \frac{j \int_{V\,\text{plasma}} (\vec{\sigma}, \vec{E}_0) . \vec{E}_0 \, dV}{2 \varepsilon_0 \int_{V\,\text{cavité}} E_0^2 \, dV}$$

La partie réelle de la variation de la pulsation complexe définit le glissement de fréquence et la partie imaginaire la fréquence de collision.

.../...

## 2. 3. - Cas d'un gradient de densité normal au champ électrique, en l'absence de champ magnétique -

La relation linéaire entre $n$ et $\Delta F$ reste valable si $n$ n'est pas constant dans tout le volume du plasma, pourvu que le champ électrique dans l'enceinte reste normal au gradient de la densité en tout point du plasma.

Il résulte en effet de l'équation de continuité

(2. 11.) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \vec{J} = 0$$

et des équations :

(2. 12.) $$\vec{J} = \vec{\sigma} . \vec{E} \quad \text{et} \quad \nabla . \vec{E} = -\rho / \varepsilon_0$$

l'équation

(2. 13.) $$j \rho \omega + \vec{E} . \nabla \vec{\sigma} + \vec{\sigma} \nabla . \vec{E} = 0$$

ou $\rho$ désigne la charge due au champ H. F.

soit :

(2. 14.) $$\left( j\omega - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) \rho = - \vec{E} . \nabla \sigma \simeq \vec{E} . \nabla n$$

Si $\vec{E}$ est normal à $\nabla n$, on a $\vec{E} . \nabla n = 0$, donc $\rho$ est nul.

Il n'y a pas d'effet de charge d'espace. Les champs peuvent être supposés non perturbés.

- - - - -

.../...

On opère de la manière suivante :

En l'absence de plasma, on règle les deux bras de manière que la différence de marche soit nulle ou $\pi$. L'interposition du plasma entraîne soit une réflexion métallique si sa densité est plus élevée que celle nécessaire à la coupure (densité critique) ou un déphasage si elle est plus faible. Un déphasage de $K2\pi$ donnera $K$ franges. Ces franges pourront être inégales en amplitude si les amplitudes dans les deux bras sont inégales et variables dans le temps.

3. 1. 2. - Calcul de la densité -

Elle se calcule à partir de la mesure du déphasage subit par le faisceau électromagnétique de sondage, par la traversée d'une lame de plasma.

Les plasmas expérimentaux sontgénéralement à symétrie de révolution comme leur champ magnétique de confinement. On assimile la colonne de plasma si $\lambda$ sondage $<$ Dimension transversale de la colonne, à une lame, en négligeant les effets à la surface de séparation du plasma et du gaz neutre.

Le déphasage subit par le faisceau est donné par (10)

$$3.1.\quad \Phi = \int_0^d \frac{2\pi}{\lambda}(1-N)\,dx = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^d 1-\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} dx$$

en introduisant la densité électronique critique

$$n_c = \omega^2 \frac{m\varepsilon_0}{e^2} \qquad \Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^d \left[1-\left(1-\frac{n(x)}{n_c}\right)^{1/2}\right] dx$$

soit en prenant le premier terme du développement de la racine carrée

$$\Phi \approx \frac{\pi}{\lambda n_c}\int_0^d n(x)\,dx$$

soit encore pour la densité moyenne :

$$(3.2)\quad n \text{ moyenne} \approx \frac{2\,\varepsilon_0\, m c}{e^2}\;\frac{\omega}{d}\;\Phi$$

ou

$$\text{moyenne}\left(\text{en } e/\text{cm}^3\right) \approx \frac{118\, f\,(\text{Mc/s})}{d\,(\text{cm})}\;\varphi\,(\text{radians})$$

Si l'on tient compte de la fréquence de collision

$$(3.3)\quad N_{eff} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + Z^2\left[\frac{1}{8}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{3}{16}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^3\right]$$

$$\text{pour}\quad \nu/\omega_p < 0{,}01 \qquad \frac{\omega_p}{\omega} < 0{,}6$$

le déphasage est d'autant plus grand que $Z = \nu/\omega$ est élevé.

Calcul de la fréquence de collision -

Elle résulte de la mesure de l'atténuation

$$(3.4)\quad K \approx \frac{\pi}{\lambda}\int_0^d \frac{\nu(x)}{\nu_c}\;\frac{Z}{\sqrt{1-\frac{\nu(x)}{\nu_c}}}\,dx \qquad \frac{\nu}{\omega_p} < 0{,}01 \quad \frac{\omega_p}{\omega} < 0{,}6$$

elle suppose comme par une première mesure la densité électronique.

- - - - - - - - - - - - -

3. 2. - Détermination des profils de densité -

Le calcul précédent était basé sur l'hypothèse d'une distribution uniforme de la densité électronique. Cette hypothèse est peu conforme à la réalité physique.

.../...

C. B. WHARTON et D. M. SLAGER (11) ont calculé la densité en considérant des distributions en cosinus, cosinus carré, en fonction parabolique, Gaussienne, de Bessel et triangulaire, selon que ces modèles s'adaptaient mieux au type de décharge étudié .

Ils ont utilisé la méthode de la détermination des profils de distribution par l'emploi simultané de plusieurs fréquences que l'on peut résumer de la manière suivante :

Si l'on opère avec deux fréquences, la première est choisie de telle sorte que la coupure dans la propagation se produise au maximum de la densité. On a ainsi $n_{max}$.

On utilise ensuite une deuxième fréquence plus élevée et l'on calcul la densité à partir du nombre de franges obtenu au moment où la densité passe par son maximum, en attribuant à la distribution les modèles énumérés précédemment. La distribution retenue est celle qui donne une densité la plus voisine de la première détermination.

On fait donc l'hypothèse que la coincidence en un point de la distribution théorique choisie et de la distribution réelle reste valable pour toutes les valeurs de la densité. Une meilleure détermination pourra être obtenue en utilisant simultanément plusieurs fréquences. On atteint ainsi la coupure à des temps différents et l'on réalise la coincidence des distributions théorique et expérimentale en plusieurs points des courbes théoriques et expérimentales.

.../...

Emploi de plusieurs fréquences -

On peut aussi déterminer le profil de la densité électronique en calculant les moments de différents ordres de la distribution.

Si l'on développe en effet $1-\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} = 1-\left[1-\frac{n(x)e^2}{m\varepsilon_0\omega^2}\right]^{1/2}$

suivant les puissances de $\omega$

on a pour la déphasage :

$$(3.5.)\quad \phi = \frac{\omega}{c}\int_0^d \left[\frac{1}{2}\, a\, \frac{n(x)}{\omega^2} + \frac{1}{8}\, a^2\, \frac{n^2(x)}{\omega^4} + \quad + \frac{1}{2^{p+1}}\, a^p\, \frac{n^p(x)}{\omega^{2p}} \ldots\right] dx$$

où $a = \frac{e^2}{m\varepsilon_0}$

mesurons ce déphasage pour des fréquences

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - - - - - -

$$(.3.6)\quad \Phi_1 = \frac{\omega_1}{c}\int_0^d \left[\frac{1}{2}\, a\, \frac{n(x)}{\omega_1^2} + \quad\right] dx$$

$$\Phi_2 = \frac{\omega_2}{c}\int_0^d \left[\frac{1}{2}\, a\, \frac{n(x)}{\omega_2^2} + \quad\right] dx$$

$$\Phi_e = \frac{\omega_e}{c}\int_0^d \left[\frac{1}{2}\, a\, \frac{n(x)}{\omega_e^2} + \quad\right] dx$$

soit encore :

$$\Phi_1 = \int_0^d \left[a_{11}\, n(x) + \quad\right] dx$$

$$\Phi_e = \frac{\omega_e}{c}\int_0^d \left[a_{e1}\, n(x) + \quad\right] dx$$

où : $a_{11} = \frac{a}{c\,\omega_1}$ $\qquad a_{ep} = \frac{1}{c}\,\frac{a}{\omega_e^{2p-1}}$

soit pour le moment d'ordre p :

$$(3.7.)\quad \int_0^d n^p(x)\, dx = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \Phi_1 & a_{1e} \\ a_{e1} & \Phi_e & a_{ee} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1e} \\ a_{e1} & a_{ee} \end{vmatrix}}$$

.../...

WHARTON et SLAGER ont appliqué cette méthode en utilisant le cas de propagation transversale avec polarisation du champ électrique parallèle au champ magnétique.

MOTLEY et HEALD (12) n'ont utilisé qu'un seul sondage à une même fréquence mais en faisant varier la polarisation. Ils se sont placés dans le cas de la propagation transversale avec polarisation électrique quelconque par rapport au champ magnétique.

3. 3. - Limitations des méthodes transversales -

On vient de voir que ces méthodes exigent des fréquences au-dessus de la fréquence plasma en vue de pouvoir pénétrer et se propager dans le milieu ce qui suppose pour des plasmas denses des ondes submillimétriques pour lesquelles il n'existe pas ni d'équipement ni de générateur convenable. Ces ondes sont à la limite des hyperfréquences et de l'extrême de l'infra rouge, dans une région où il n'existe pas encore de technique .

D'autre part les dispositifs transversaux sont aussi limités dans les bandes qu'ils couvrent.

Des interféromètres construits avec des équipements de 2, 4, 8 mm peuvent mesurer pour un plasma de 3 cm d'épaisseur, des densités variant respectivement de :

.../...

$\lambda$ = 2 mm $2,2 \times 10^{12} < n_e < 2,8 \times 10^{14}$ e/cm$^3$

4 mm $10^{12} < n_e < 6 \times 10^{13}$

8 mm $5,2 \times 10^{12} < n_e < 1,5 \times 10^{13}$

On voit que la bande couverte par un même dispositif est plutôt étroite. Il semble intéressant de pouvoir élargir ces intervalles et repousser les limites supérieures des densités mesurables

Ce sont les objectifs recherchés par les méthodes des longitudinales récentes, actuellement en cours d'études.

- - - - - - - -

## 4 - METHODES LONGITUDINALES -

On a vu dans l'étude des propagations longitudinales que le rayon droit (extraordinaire) se propageait dans les plasmas denses, même au-dessous de la fréquence plasma pourvu que sa fréquence soit comprise entre 0 et la fréquence cyclotron des électrons Les deux méthodes exposées dans ce qui suit sont basées sur cette propriété. La première sur la vitesse de phase et la seconde sur la vitesse de groupe.

### 4. 1. - Méthode de R. M. GALLET et ALL basée sur la mesure de la vitesse de phase du rayon droit (13) -

La méthode ne diffère de la méthode interférométrique transversale que par la fréquence utilisée par le sondage.

$0 < f < f_c$

.../...

Cette fréquence étant plutôt basse pour les champs magnétiques de confinement usuels.

$0 < B < 10\,K$ Gauss

Les antennes d'émissions et de réception sont de petits dipoles protégés par des tubes de quartz plongeant dans le plasma. Elles sont donc soumises aux défauts des sondes, c'est-à-dire, elles créent des gaines, perturbent et refroidissent le plasma et ne sauraient être utilisées dansun plasma thermonucléaire.

A ces inconvénients près, pour les plasmas non thermonucléaires actuellement créés dans les dispositifs expérimentaux, la méthode doit permettre la mesure de densité élevée.

L'indice de phase du rayon droit étant

$$(3.8)\quad N_d = \left(1 - \frac{X}{1+Y-jZ}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_a)-j\nu}\right)^2$$

on peut écrire pour le déphasage dans un dispositif interféromètrique, dans une relation semblable à (3 - 1), soit

$$(3.9)\quad \Phi_d = \frac{\omega}{c}\int_0^d \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_a)}\right)\right]^{1/2} dx \qquad \nu \simeq 0$$

en développant jusqu'au premier ordre

$$(3.10)\quad \Phi_d \approx \frac{1}{2c\omega}\int_0^d \frac{\omega_p^2}{1+\frac{\omega_a}{\omega}}\, dx$$

.../...

Si $\omega \ll \omega_{ce}$

(3. 11) $$\Phi_d \approx \frac{e^2}{2 \varepsilon_0 m c \omega \omega_{ce}} \int_0^d n(x)\,dx$$

en supposant une distribution de densité uniforme

(3. 12) $$\bar{n}_e = \frac{f\,(cps),\ B\ \text{gauss} \times \Phi\,(\text{radians})}{d\ (cm)}$$
$e/cm^3$

Un calcul plus précis doit tenir compte de la fonction de distribution et de l'expression correcte de l'indice.

-Autres mesures déduites -

L'emploi de deux fréquences, permet en se limitant au premier terme du développement de calculer le champ magnétique interne, et la mesure du coefficient d'atténuation $K = \frac{\omega \alpha}{c}$

(3. 13) $$K = \frac{D \omega N}{2c\,(\omega_{ce} - \omega)}$$

permet une mesure approchée de la température électronique puisque la fréquence de collision en est fonction.

## 4. 2 - METHODE DE DETERMINATION de la DENSITE (14) (15) ELECTRONIQUE d'un PLASMA par la VITESSE de GROUPE -

### 4. 2. 1 - Principe de la méthode -

On sait que les fréquences inférieures à la fréquence plasma $f_p$ peuvent se propager dans un plasma placé dans un champ magnétique, selon le mode droit.

.../...

Comme on l'a montré récemment, c'est grâce à ce mode de propagation que les sifflements radioélectriques naturels à très basses fréquences se propagent à très grande distance le long des lignes du champ magnétique terrestre (16).

L'étude de la vitesse de groupe de l'onde droite montre que cette vitesse passe par un maximum situé au voisinage du quart de la fréquence cyclotron $f_c$ des électrons. Ce maximum relativement plat, est très inférieur à la vitesse de la lumière.

Il semble intéressant d'utiliser cette propriété pour la mesure de la densité électronique Ne des plasmas confinés par des champs magnétiques. On mesure dans ce but le "retard de groupe" subi par des impulsions de fréquences voisines de $f_c/4$ se propageant dans les plasmas dans la direction du champ magnétique par une technique analogue à celle utilisée couramment dans les sondages ionosphériques verticaux.

Expression de la vitesse de groupe.

En négligeant les chocs, l'effet des ions, de la température (ce qui est justifié pour des températures inférieures à 1KeV) et en supposant le champ magnétique de confinement constant la vitesse de groupe du rayondroit, pour une onde de fréquence f, est donnée par la loi de Rayleigh :

$$v_g = \frac{c}{\bar{n} + f\frac{dn}{df}}$$ où n est l'indice de phase

.../...

défini par :

$$n^2 \simeq 1 - \frac{X}{1-Y} = 1 - \frac{f_p^2}{f(f-f_c)}$$

$$(3.14) \quad V_g = C \frac{f^{1/2}(f - f_c)^{1/2}(f^2 - ff_c - f_p^2)^{1/2}}{f(f - f_c)^2 + 1/2\, f_c f_p^2}$$

où c = vitesse de la lumière dans le vide, $f_p = \frac{N_e e^2}{4\pi \varepsilon_0 m}$ la fréquence plasma -

$f_c = \frac{B e}{2\pi m}$ la fréquence cyclotron des électrons.

Il existe trois intervalles de fréquences bien distincts, déterminés par les racines de $v_g$ :

a) de 0 à $f_c$, avec un maximum de $v_g$ pour f voisin et inférieur à $f_c/4$,

b) de $f_c$ à $1/2\,(f_c + \sqrt{f_c^2 + 4 f_p^2})$ où il n'y a pas de propagation,

c) de la limite précédente à l'infini, où $v_g$ croît à partir de zéro d'une façon monotone, jusqu'à la valeur C.

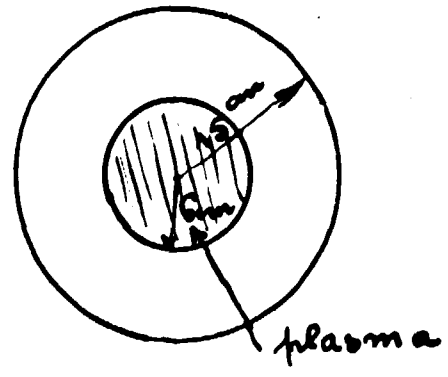
D'autre part l'abscisse $f_m$ de son maximum est liée aux fréquences $f_p^2$ et $f_c$ par la relation :

$$(3.15) \quad f_p^2 = \frac{4 f_m^3 (f_c - f_m)}{f_c (f_c - 4f_m)}$$

.../...

## 2.4. - Deux exemples -

### 2.4.1. - Exemple 1 - Cavité sphérique -




On se propose de calculer le glissement de la fréquence de résonance qui se produit dans une cavité sphérique de 30 cm de diamètre, lorsqu'on inclu dans cette sphère une sphère de plasma de 12 cm de diamètre et de densité $10^7 p/cm^3$ la fréquence de résonance de la cavité vide excitée suivant le mode $H_{101}$ est :

$$f\ 101 = \frac{4,49 \times 3 \times 10^{10}}{2\pi \times 15} = 1430\ Mc$$

Le champ électrique dans la cavité est :

$$E_\theta = 0 \quad E_r = 0 \quad E_\varphi = -\frac{j\omega}{c\sqrt{r}}\, J_{1/2}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sin\theta\, e^{j\omega t}$$

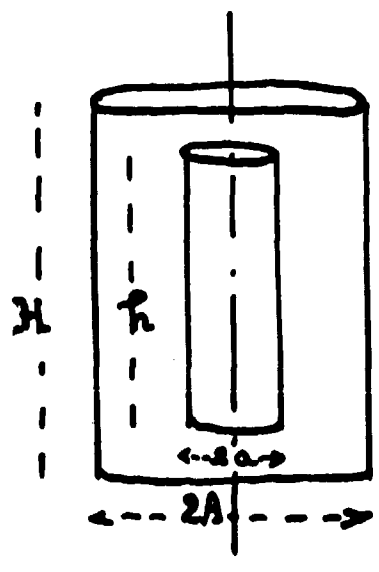
d'où pour une distribution uniforme de densité

$$\frac{\Delta F}{F_0} = \frac{e^2 n}{2m\, \varepsilon_0\, \omega_0^2} \quad \frac{\int_{plasma} \frac{\omega_0^2 \mu^2}{c^2 r^2} J^2_{1/2}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sin^2\theta\, e^{2j\omega t}\, r^2 dr\, d\varphi\, d\theta}{\int_{cavité} \text{même expression}}$$

on trouve pour le glissement de fréquence

$$\Delta F \simeq 190\ Mc$$

### Exemple II -




On veut calculer le glissement de fréquence qui se produit dans une cavité cylindrique excitée suivant le mode TM 010, lorsqu'elle contient un amas de plasma cylindrique et coaxial, mais dont la distribution de densité est une fonction de Bessel :

$$n = n_0 \left[ J_0\left(2,405 \frac{r}{a}\right) \cos \frac{\pi}{h} z \right]$$

.../...

Le champ dans la cavité est alors :

$$E_o = E_m \; J_o \left(2,405 \frac{r}{A}\right)$$

soit en développant :

$$E_o = E_m \left[1 - \left(\frac{2,405\, r}{2\, A}\right)^2\right]$$

d'où

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{n_o e^2}{2m\,\omega^3 \varepsilon_o} \; \frac{2h}{\pi H} \int^R \left[ r\, J_o\left(2,405 \frac{r}{A}\right) - 2\left(\frac{2,405}{2A}\right)^2 r^3\, J_o\left(\frac{2,4}{A}\right) + \left(\frac{2,405}{2A}\right)^4 r^5 \; J_o\left(2,405 \frac{r}{A}\right)\right] dr$$

On trouve

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{n_o e^2}{m\,\omega^2 \varepsilon_o} \left(\frac{h}{\pi H}\right)\left[1,6\left(\frac{a}{A}\right)^2 - 1,42\left(\frac{a}{A}\right)^4 + 2,6\left(\frac{a}{A}\right)^6\right]$$

si $A = 140$ cm $\quad a = 70$ cm $\quad n_o = 10^{12}$ p/cm$^3$

$h = 12$ m $\quad H = 20$ mètres

on trouve $f_{010} = \dfrac{2,4 \times 3 \times 10^{10}}{2\pi A} \simeq 82$ Mcps et $\Delta F \simeq 3$ Mcs

## II - LES TECHNIQUES de MESURES -

### A - Techniques de propagation

#### 3. 1. - Méthode transversale -

Le faisceau de sondage est orienté perpendiculairement au champ magnétique statique. Le champ électrique E est parallèle à ce champ.

#### 3. 1. 1. - Principe de la mesure interféromètrique U. H.F.

Il est semblable au principe de l'interféromètrie optique. Prenons à titre d'exemple le dispositif des trous d'Young.

.../...

Ne retenant que le domaine de fréquences (a), on peut tracer d'après l'équation (3. 14) les réseaux de courbes $v_g = F(f, N_e, B)$ à $N_e$ et B constants, réseaux dont un exemple est donné plus loin.

Ces courbes montrent que pour une fréquence très voisine de $f_m$ la vitesse de groupe est très sensible aux variations de $N_e$ et de B, et pratiquement insensible à un écart même appréciable de la fréquence de travail f par rapport à $f_m$.

La technique de mesure de $N_e$ proposée consiste donc à choisir une fréquence de travail f aussi voisine que possible de $f_m$, compte tenu de la valeur du champ magnétique appliqué le long de la propagation du faisceau de sondage, et d'émettre des implusions brèves sur cette fréquence en leur faisant traverser le plasma étudié, parallèlement au champ B. De la mesure sur un oscillographe du retard subi par ces impulsions par rapport à celles se propageant dans l'air, dans un bras de référence à balayage approprié, on déduit la valeur de $v_g$, et par suite si B est connu, à l'aide des réseaux de courbes, celle de $N_e$.

L'examen des résultats théoriques obtenus sous les hypothèses énumérées plus haut, montre que la méthode est applicable aussi bien aux plasmas peu denses que très denses placés dans des champs magnétiques faibles ou intenses. Elle est particulièrement

.../...

intéressante dans le cas des champs forts, car alors la fréquence de sondage étant élevée, il est possible d'attaquer le plasma avec un dispositif focalisant extérieur formés de cornets et de lentilles.

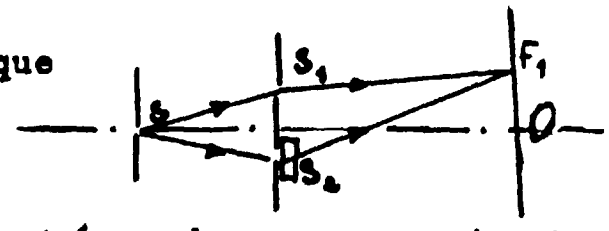
Dans le cas de champs magnétiques faibles, la fréquence de travail basse impose une attaque par antenne, soit introduite dans le plasma ce qui donne évidemment lieu à une légère perturbation de celui-ci, soit extérieure au plasma, ce qui nécessite une interprétation appropriée du résultat fourni par l'oscillographe.

Cette méthode est également applicable à des plasmas confinés par des champs à configuration toroïdale, puisque la propagation envisagée se trouve toujours guidée le long des lignes de force du champ.

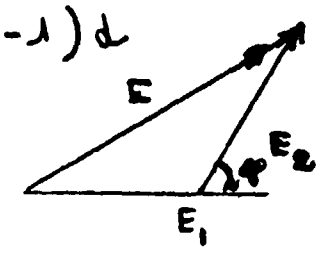
Le réseau de courbes ci-joint donne les variations de la vitesse de groupe pour un domaine restreint de densité électronique et de champ magnétique.

.../...

Les deux sources $S_1$, $S_2$ éclairées par une même source $S$ monochromatique sont synchrones et en phase.




Si les chemins optiques sont égaux les rayons arrivent en phase en O. Toute interposition d'une lame d'indice N et d'épaisseur d, entraîne un retard de phase $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_{vide}} (N-1) d$




L'amplitude résultante est :

$$E^2 = E_\lambda^2 + E_2^2 + 2 E_\lambda E_2$$

si $E_\lambda = E_2$

$E = 0$ pour $\varphi = (2p+1)\pi$

$E = 2E_1$ pour $\varphi = 2p\pi$

si $E_1 \neq E_2$ et $E_1 > E_2$

l'amplitude résultante est :

$E_1 - E_2$ pour $\varphi = (2p+1)\pi$

$E_1 + E_2$ pour $\varphi = 2p\pi$

Il en est de même en hyperfréquence.

Le diagramme fonctionnel a la composition indiquée sur la figure (9) :

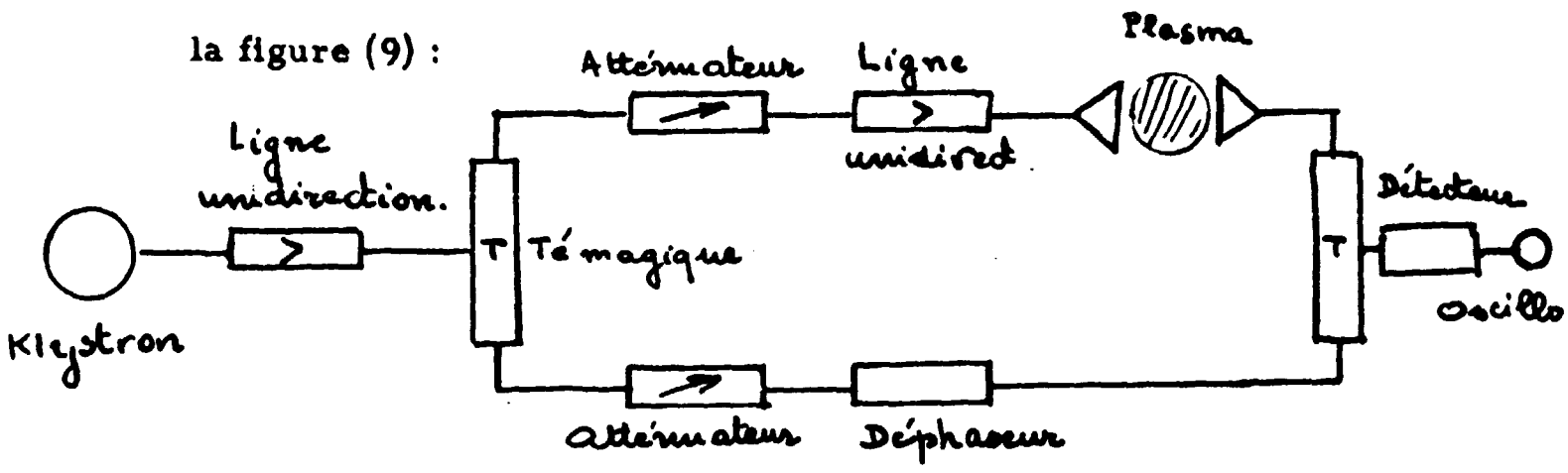



fig. 9

.../...

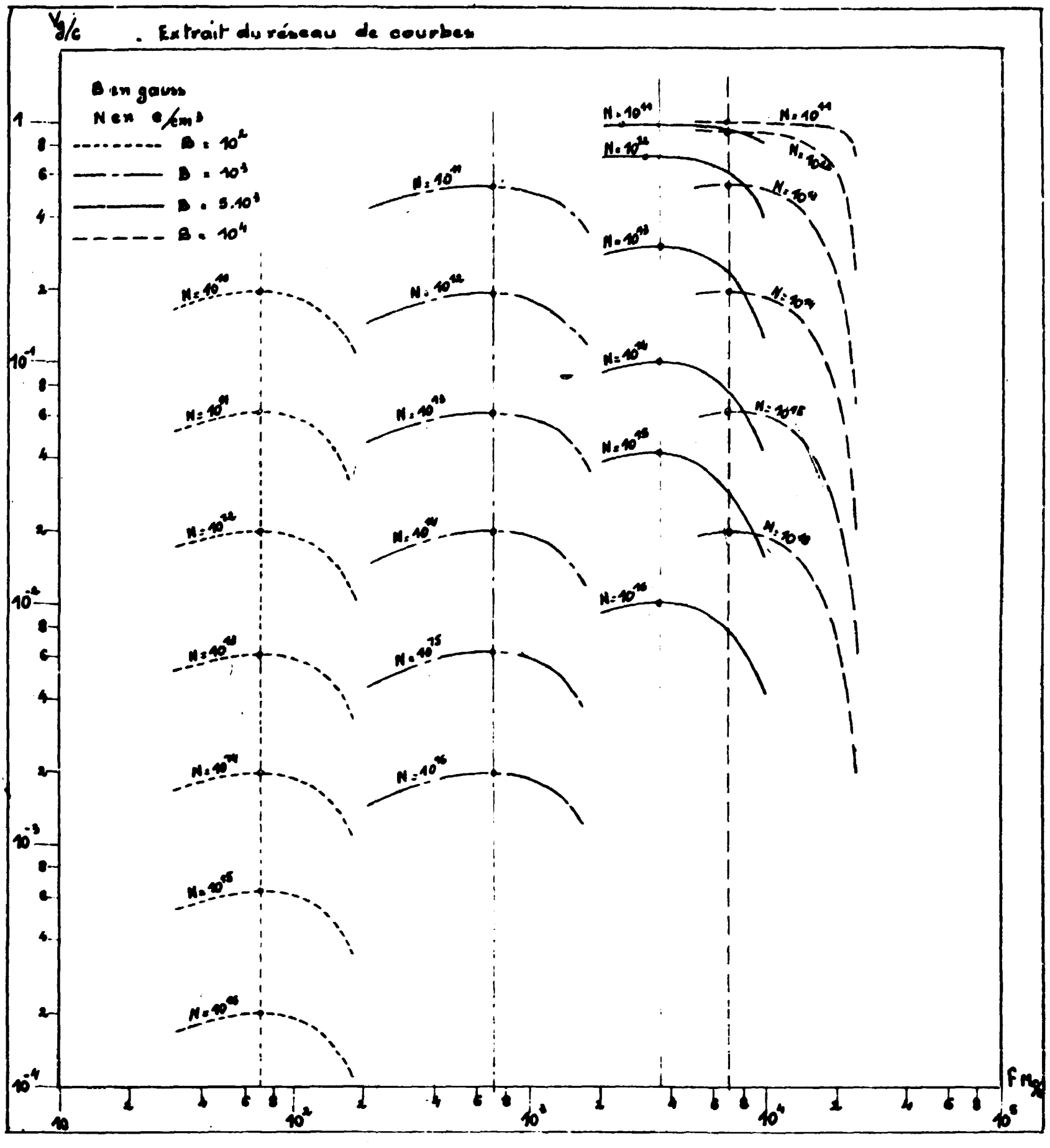

Vd/c
. Extrait du réseau de courbes
B en gauss
N en e/cm³
B = 10²
B = 10³
B = 5.10³
B = 10⁴
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10
10²
10³
10⁴
10⁵
f Mc/s

fig 10

4. 2. 2. - Discussion de la méthode -

Le dispositif expérimental est en cours d'étude. Il est sujet aux mêmes critiques que celui de la méthode précédente, s'il doit être utilisé dans des champs magnétiques moyens $B < 5000$ Gauss, c'est-à-dire que si son système d'émission et de réceptiondoit être constitué par des antennes il perturbe le plasma.

Mais dans les champs magnétiques intenses des appareils à compressions,

$$B \approx 100.000 \text{ Gauss}$$

on peut s'affranchir des antennes et utiliser des cornets extérieurs puisque

$$\lambda c/_4 \approx 70.000 \text{ M } \varphi$$

L'emploi jumelé de deux méthodes longitudinales (rotation du plan de polarisation et retard de groupe) permet en outre, la mesure du champ magnétique emprisonné dans le plasma durant la compression.

- - - - - -

4. 2. 3. - FORMULE APPROCHEE pour le CALCUL de la VITESSE de GROUPE -

En remplaçant les fréquences caractéristiques $f_c$ et $f_p$ par leur définition :

| | | |
|---|---|---|
| $f_c = 2,80\ B$ | B en gauss, | $f_c$ en M c/s |
| $f_p^2 = 81.\ 10^{-6}\ Ne$ | $N_e$ e. , cm3 | $f_p$ en M c/s |

. . /. . .

On peut écrire l'équation (3. 14) sous la forme :

$$(3.16)\quad V_g = C\,\frac{f^{1/2}\,(f^2 - 2,8f - 81.\,10^{-6}Ne)^{1/2}\,(f - 2,8\,B)^{3/2}}{f\,(f - 2,8\,B)^2 + 1,4 \times 81.\,10^{-6}\,Ne\,B}$$

On a vu d'autre part que le maximum de la vitesse de groupe avait lieu pour une valeur de f voisine et un peu inférieure à $f_c/4$.

$$f \approx f_c/4 = 0,7\,B.$$

On peut par suite écrire :

$$(3.17)\quad Vg \approx C\,\frac{2,52\,B\,(1,47\,B^2 + 81.\,10^{-6}\,Ne)^{1/2}}{3,087\,B^2 + 1,134.\,10^{-4}\,Ne}$$

$$\text{Si}\quad \frac{B}{N^{1/2}} < 3,5\,.\,10^{-3}$$

On a pour $V_g$ l'approximation :

$$(3.18)\quad V_g \approx C.\ 204\,\frac{B}{N^{1/2}}$$

On voit que la vitesse de groupe est directement proportionnelle au champ magnétique et inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité électronique.

Il s'ensuit la possibilité de déterminer la densité électronique d'un plasma ou de son champ magnétique de confinement, par la mesure du retard de groupe d'une impulsion se propageant le long des lignes de force du champ magnétique.

.../...

Ces deux mesures, comme il résulte de l'expression approchée de la vitesse de groupe, ne sont pas d'égale sensibilité.

Le retard de groupe subi par l'impulsion est plus sensible aux variations du champ magnétique.

On appréciera le degré d'approximation de la formule (3. 18) en comparant les deux tableaux des valeurs de $V_g$ calculées avec une précision de cinq décimales à partir de (3. 14) et à partir de (3. 18).

TABLEAU I - (valeurs calculées de $V_{g/c}$ à partir de (3. 14)

| e/cm3 N / gauss B | $10^{12}$ | $10^{13}$ | $10^{14}$ | $10^{15}$ | $10^{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^2$ | 0,02 | 0,006 | 0,002 | 0,0006 | 0,0002 |
| $10^3$ | 0,2 | 0,06 | 0,02 | 0,006 | 0,002 |
| $5.10^3$ | 0,7 | 0,3 | 0,1 | 0,04 | 0,008 |
| $10^4$ | 0,8 | 0,45 | 0,18 | 0,05 | 0,18 |

TABLEAU II - (valeurs calculées de $V_{g/c}$ à partir de (3. 18)

| en cm3 N / gauss B | $10^{12}$ | $10^{13}$ | $10^{14}$ | $10^{15}$ | $10^{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^2$ | 0,02 | 0,006 | 0,002 | 0,0006 | 0,0002 |
| $10^3$ | 0,2 | 0,06 | 0,02 | 0,06 | 0,002 |
| $5.10^3$ | 1 | 0,33 | 0,1 | 0,03 | 0,01 |
| $10^4$ | 2 | 0,66 | 0,20 | 0,06 | 0.02 |

.../...

Diagramme des vitesses de phase et de groupe du rayon droit

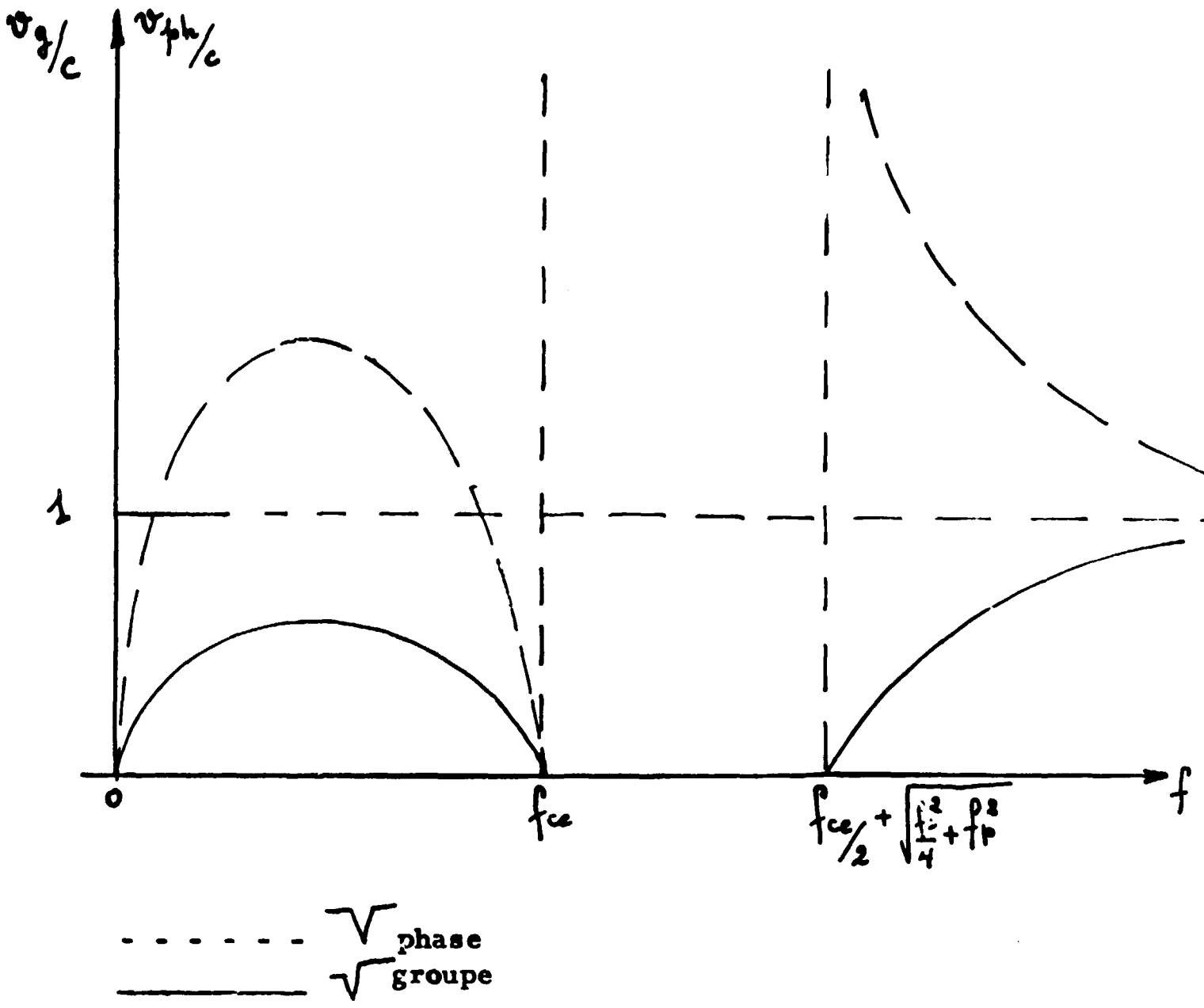



fig. 11

.../...

## 5 - TROISIEME METHODE LONGITUDINALE -

### - Polarisation rotatoire magnétique dans les plasmas -

### 5. 1. - Historique de l'effet Faraday :

Le phénomène de polarisation rotatoire magnétique découvert en 1845 par Faraday est bien connu en optique.

On sait d'après ce phénomène que tout corps isotrope placé dans un champ magnétique fait tourner le plan de polarisation d'un faisceau lumineux plan polarisé se propageant parallèlement à la direction du champ magnétique.

La relation de proportionalité entre l'angle de rotation du plan de polarisation et les deux paramètres fondamentaux : champ magnétique et longueur du trajet parcouru dans le milieu a été établi en 1854 par Verdet, Elle s'écrit :

$$\varphi = V.\,H.\,l.\,\cos\theta$$

où :

$\varphi$ est l'angle de rotation du plan de polarisation,

V la constante dite de Verdet, caractéristique du milieu

H l'intensité du champ magnétique

l la longueur de la trajectoire de l'onde dans le milieu

$\theta$ l'angle entre la direction de propagation et celle du champ magnétique.

.../...

Cet effet Faraday a été depuis amplement étudié par les opticiens et les électroniciens et appliqué dans de nombreux domaines. Citons pour la mémoire les obturateurs rapides magnéto optique en photographie, le dosage des sucres en saccharimétrie, les gyrateurs à ferrite et les lignes unidirectionnelles dans la propagation guidée en hyperfréquences etc. . . . . .

On retrouve une propriété analogue dans lesgaz ionisés dont la constante diélectrique est aussi modifiée par un champ magnétique. Ainsi dans le cas d'une onde plane transversale se propageant dans le sens du champ magnétique, on constate la biréfringence circulaire.

Le phénomène de polarisation rotatoire magnétique dans les gaz ionisés existe aussi dans la nature. Il est réalisé dans l'ionosphère qui devient anisotrope sous l'influence du champ magnétique terrestre.

Il a été mis en évidence par Appleton en 1931.

En 1956 de C. Browne, J. V. Evans et J. K. Hargreaves spécialistes de l'ionosphère ont utilisés l'effet Faraday pour déduire de leurs expériences "d'Echos Radar sur la lune" une mesure de la densité électronique globale de l'ionosphère.

Des mesures semblables ont été réalisées à partir des ondes électromagnétiques plan polarisé émises par des fusées ou des satellites artificiels (1958).

.. /...

La même méthode peut être étendue aux plasmas de laboratoire (17)

## 5. 2. - PRINCIPE de la METHODE -

### 5. 2. 1. - Hypothèses -

On considère une lame de plasma d'épaisseur l, placée dans un champ magnétique uniforme et constant, orienté suivant la direction z.

On suppose que la fonction de distribution de la densité est à symétrie de révolution : $n = f(z, r)$ où $r^2 = x^2 + y^2$ et s'annule aux limites pour $z = 0$ et $z = l$.

L'onde incidente polarisée linéairement est normale à la surface de séparation du plasma et du milieu extérieur.

La fréquence de collision, l'effet des ions et de la température, seront considérés dans la première approximation présentée, comme étant négligeables.

Le mouve ment d'agitation thermique affecte particulièrement les ondes lentes dont la vitesse de phase est comparable à la vitesse thermique. Il n'en est pas tenu compte dans les résultats présentés sous forme de courbes;

La longueur d'onde de sondage sera supposée très petite relativement aux dimensions transversales de la lame de plasma.

.. /...

5. 2. 2. - EXPRESSION de la ROTATION --

La rotation du vecteur champ électrique de l'onde émergeant de la lame de plasma est donnée par :

(3. 19) $$\varphi \text{ (tour/m)} = \frac{f}{2c} \int_0^1 F(z)\, dz$$

où :

(3. 20) $$F(z) = n_g - n_d = \left(1 - \frac{X}{1+Y}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{X}{1-Y}\right)^{1/2}$$

Avec

$$X = \frac{f_p^2}{f^2} \quad \text{et } Y = \frac{f_c}{f}$$

Si l'on tient compte des collisions, F(z) est une fonction complexe

$$F(z) = F_r(z) + j\, F_j(z)$$

La rotation dépend alors de la partie réelle et l'ellipticité de l'onde résultante de la partie imaginaire.

Tableau de trois approximations :

5. 2. 3. $$n_g - n_d = \left\{\left(1 - \frac{X}{1-y}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{X}{1+y}\right)^{1/2}\right\} \quad \text{où } X = \omega_p^2/\omega^2 \quad y = \omega_c/\omega$$

| Cas | Conditions | Conditions physiques | F(z) | Expression de l'angle de rotation |
|---|---|---|---|---|
| I | $\omega_p \ll \omega \ll \omega_c$ | Plasma peu dense dans un champ magnétique intense | $\frac{X}{Y}$ | $2,4 \times 10^{-11} \int_0^e \frac{n(z)dz}{H(z)}$ |
| II | $\omega_c \ll \omega_p \ll \omega$ | Plasma dense dans champ magnétique intense. | X. Y. | $2,9 \times 10^{-2} f^{-2} \int_0^e n(z)H(z)dz$ |
| III | $\omega_p \ll \omega_c \ll \omega$ | Plasma peu dense dans un champ magnétique faible | X. Y | $2,9 \times 10^{-2} f^{-2} \int_0^e n(z)H(z)dz$ |

$f$ en c/sec. n en e/m$^3$
H en Amp-tours/sec
$\ell$ en mètre $\varphi$ en tour/mètre

5. 2. 4. Régions des propagations. Formules approchées -

Les régions où il y a propagation dans le cas $Z = \nu/\omega = 0$ ($\nu$ étant la fréquence de collision) sont représentées sur la figure (1). Il y a propagation des deux rayons dans les parties non hachurées, qui fixent les limites du calcul. Dans ces régions, on peut exprimer F(z) par des expressions (voir fig. 1) qui permettent un calcul très approché de la rotation.

Une tabulation permet un calcul précis qu'on peut représenter par un réseau de courbes universelles $\varphi = f(X, Y, Z)$ d'où l'on déduit les réseaux $\varphi = f(N, B)$ N et B étant la densité électronique en e/m$^3$ et le champ en gauss.

On a représenté sur la figure 2, le réseau correspondant à une longueur d'onde de sondage de 4 mm.

5. 3. - Application de la méthode et des courbes -

Par son principe même, la méthode ne peut servir que pour la mesure de la densité globale longitudinale. Elle constitue une méthode complémentaire aux procédés transversaux : mais elle présente sur ces derniers l'important avantage de pouvoir suivre dans un très large intervalle la variation de densité d'un plasma en évolution.

.../..

L'usage des tableaux et des courbes dont un seul réseau est donné guide l'expérimentation.

Il permet, connaissant les limites approximatives de variation de la densité électronique d'un plasma, de choisir la fréquence optima de travail et de prévoir la valeur de la rotation qui en résulte.

La précision est d'autant meilleure, que l'on se rapproche des hypothèses sous lesquelles ces tables ont été établies.

L'examen des courbes nous montre enfin que les rotations en tours par mètre sont très faibles pour les plasmas peu denses pour des fréquences de sondage de quelque Mcs ; elles interviennent quand même en ionosphère à cause des grandes longueurs de parcours.

Pour les plasmas de laboratoire, les fréquences supérieures à 1 KMcs semblent les plus intéressantes, car elles peuvent être utilisées dans un large intervalle de densité.

## 5.4. PRINCIPE des DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX - (17) -

Nous pourrons atteindre la mesure de la rotation du plan de polarisation par la mesure du déphasage que prennent les deux vibrations circulaires incidentes l'une par rapport à l'autre à la traversée du milieu.

Deux cas peuvent se présenter :

- le milieu possède un pouvoir rotatoire indépendant ou qui varie lentement en fonction du temps
- le milieu possède un pouvoir rotatoire qui varie rapidement en fonction du temps.

Le montage décrit peut être utilisé pour l'un ou l'autre de ces deux cas. Il est représenté sur le schéma 1.

Le montage est constitué par deux groupes fonctionnels : un groupe hyperfréquence et un groupe changeur de fréquence.

Le groupe hyperfréquence fonctionne sur une longueur d'onde de 4 mm. Un oscillateur délivre une onde entretenue qui attaque un système émetteur constitué par un ensemble cornet-lentille électromagnatique définissant un faisceau électromagnétique de 5 ° d'ouverture. La lentille, à indice constant est formée de plaques parallèles équidistantes.

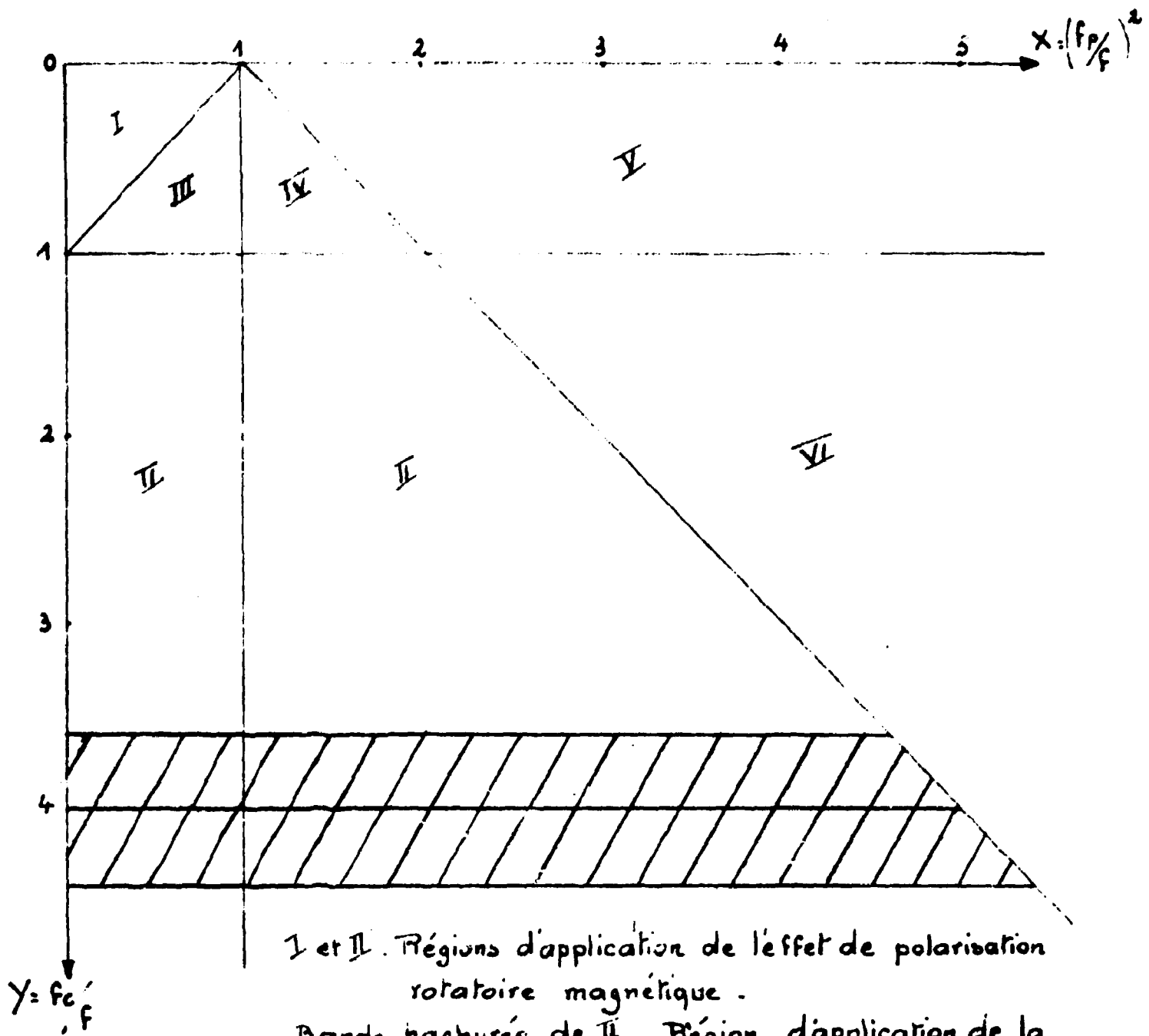
Le système récepteur est à symétrie axiale. Il est formé d'une lentille électromagnétique à trous cylindriques (indice constant) d'un cornet de section carrée ou cylindrique et d'un élément séparateur, qui permet la décomposition de l'onde en deux composantes perpendiculaires.

Le groupe changeur de fréquence transmet l'information constituée par la valeur du déphasage des deux composantes, tout en abaissant la fréquence porteuse de cette information, ce qui permet d'appliquer facilement aux plaques verticales et horizontales d'un oscilloscope des tensions qui sont les images des composantes mesurées. On peut ainsi soit étudier ces composantesen fonction du temps, soit reconstituer l'éllipse de polarisation.

Le montage expérimental représenté (schéma 11) permet d'étudier séparément la propagation des deux vibrations privilégiées droite au gauche et de mesurer leurs indices soient $n_g$ et $n_d$ - Une onde plane de polarisation

..../...

circulaire gauche ou droite attaque le milieu doué de pouvoir rotatoire. Le système récepteur à symétrie axiale déjà décrit sépare l'onde en ses deux composantes $E_x$ et $E_y$ - Une des deux composantes est utilisée pour constituer un montage interféromètrique classique avec le bras de référence R.




I et II . Régions d'application de l'effet de polarisation rotatoire magnétique .

Bande hachurée de II . Région d'application de la méthode du minimum de retard de groupe .

- fig. 1 Diagramme des régions -

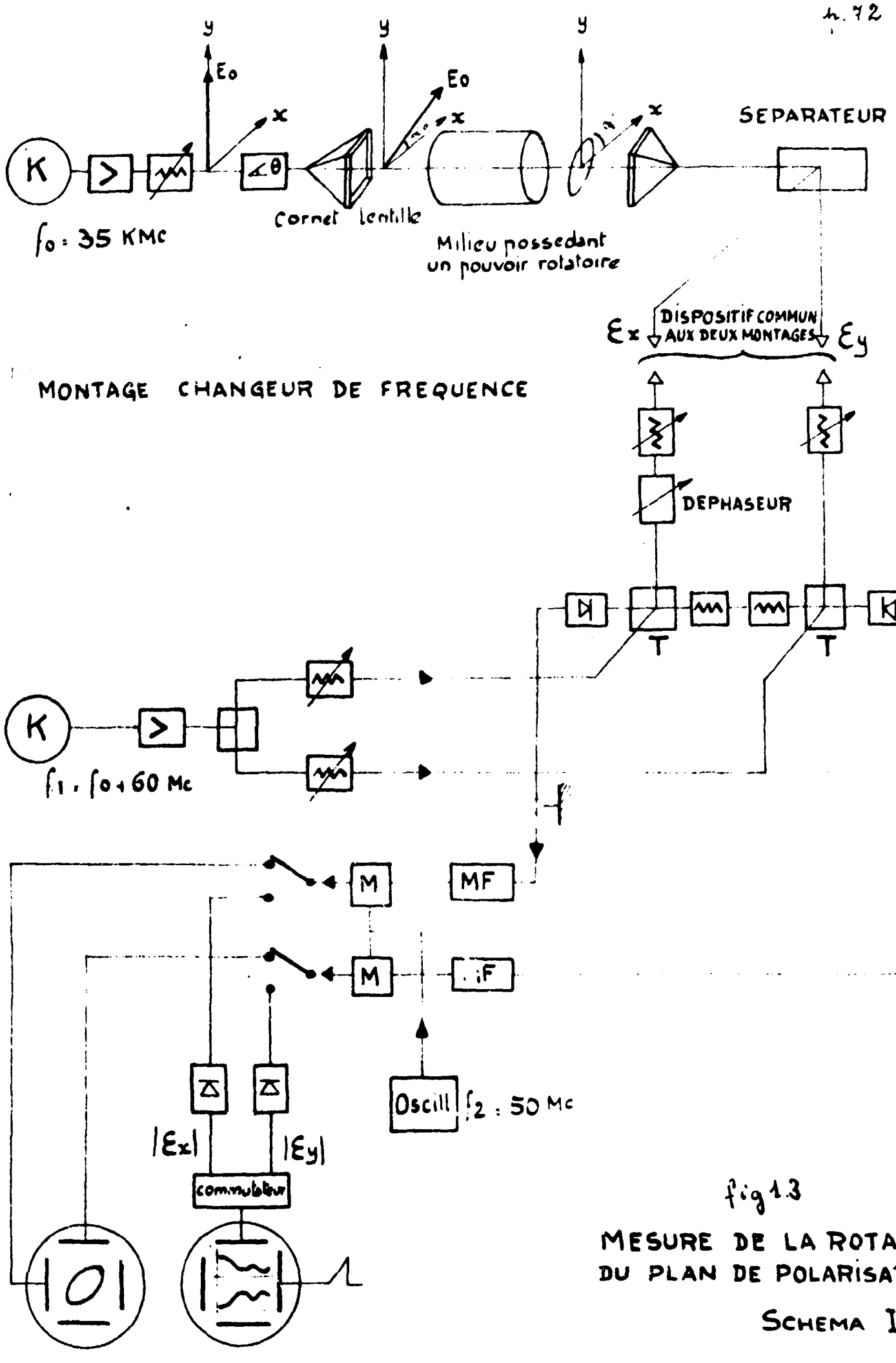



fig 1.3

MESURE DE LA ROTATION
DU PLAN DE POLARISATION

SCHEMA I

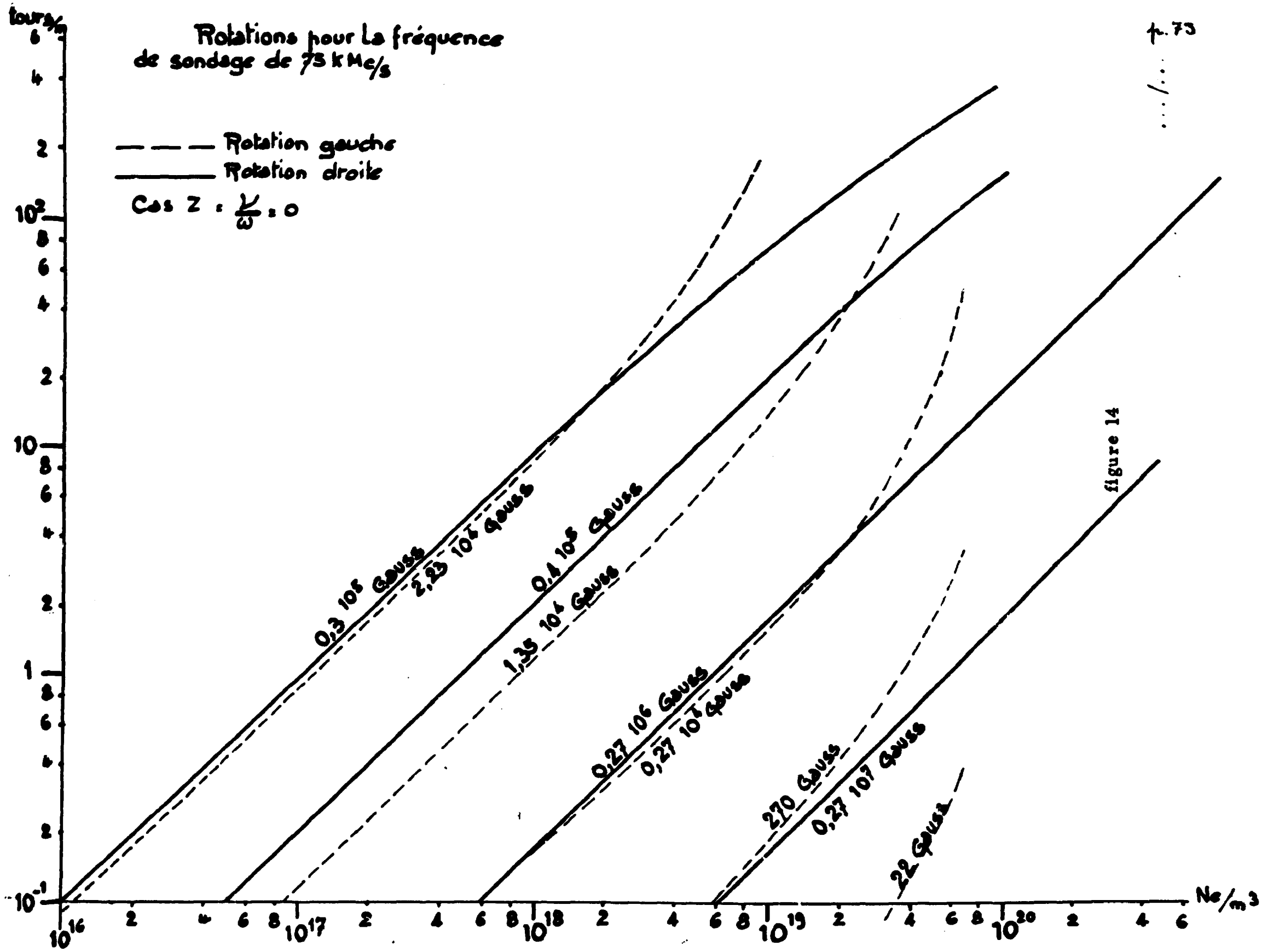

tours/s
Rotations pour la fréquence de sondage de 75 kMc/s
Rotation gauche
Rotation droite
Cas Z = ν/ω = 0
0,3 10⁵ Gauss
2,23 10⁴ Gauss
0,1 10⁵ Gauss
1,35 10⁴ Gauss
0,27 10⁶ Gauss
0,27 10⁵ Gauss
270 Gauss
0,27 10⁷ Gauss
22 Gauss
Ne/m³

figure 14

## 6 - ETAT des TROIS METHODES LONGITUDINALES -

Il est prématuré de porter un jugement sur l'efficacité de ces trois méthodes Rappelons seulement que la première de ces méthodes vient d'etre expérimentée sur le dispositif toroïdal de striction Zeta que la deuxième et troisième utilisées couramment en ionosphère sont encore au stade détude et d'éxpérimentation.

La méthode basée sur l'effet Faraday offre l'avantage indiscutable d'un dispositif d'attaque et de réception extérieure non perturbateur à focalisation électromagnétique. S'il permet de suivre l'évolution de la densité, il reste toutefois limité par la fréquence de coupure à des densités inférieures à $3 \times 10^{14}$ e/m$^3$ pour un équipement fonctionnant sur 2 mm.

Une extension semble se dessiner pour cette troisième méthode L'emploi d'onde submillimétrique dans la région de l'extrême infra-rouge doit permettre une meilleure focalisation et la mesure de densités élevées de l'ordre de $10^{17}$ e/m$^3$.

### 7. 1. Mesure de la densité par une méthode optique -

Deux groupes (18) ont publié de brèves communications sur ce sujet.

L'origine de la méthode réside dans le soucis de se rendre indépendant du mode de propagation, des fréquences de collision, des fréquences cyclotrons.

On peut résumer le principe dans la remarque suivante :

.../...

Si l'on opère avec une fréquence de sondage très élevée, pour certaine valeur du champ magnétique de confinement, les inégalités sont satisfaites. $\frac{\nu}{\omega} < \frac{\omega_H}{\omega} < \frac{\omega_p}{\omega}$

Quel que soit le mode de propagation, transversal ou longitudinal, l'expression de l'indice se réduit alors à :

$$N \approx \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

(3. 21) $$N \approx 1 - \frac{e^2}{2 m \varepsilon_0 \omega^2} n_e$$

soit pour le déphasage

(3. 22) $$\phi \approx \frac{e^2}{2 m \varepsilon_0 \omega c} \int_0^d n(x)\, dx \approx \frac{e^2}{2 m \varepsilon_0 \omega c} \bar{n}\, d$$

et pour la densité moyenne dans l'hypothèse d'une distribution uniforme :

(3. 23) $$\bar{n} = \frac{4\pi m \varepsilon_0 c}{e^2 d} f \bar{\phi}$$ $f(c)$, $\bar{\phi}$ radian, c, d mètre

(3. 24) $$\bar{n}(e/m^3) = 7 \times 10^2 f(c/s) \frac{p}{d(cm)}$$

p déplacement des franges exprimés en fraction de longueur d'onde de la radiation utilisée.

Ce déplacement est mesuré par un microphotomètre

. . . /. . .

7. 2. - Limites de la méthode - Discussion -

On suppose que le déplacement de frange, aisément mesurable soit de 1/10 de $\lambda$ , que les dimensions du plasma soient de 70 cm, et les densités que l'on se propose de mesurer, situées entre $10^{14}$ e/cm3 et $10^{17}$ e/cm3 puisque les mesures jusqu'à $10^{14}$ e/cm3 sont assurées par les équipements millimétriques.

Les fréquences de sondages nécessaires à cette fin, calculées à partir de la formule (3. 24) sont comprises entre

$$10^{14} \text{ c/s et } 10^{17} \text{ c/s}$$

soit pour la longueur d'onde

$$3 \text{ Å} < \lambda < 3 \mu$$

Les radiations vont de l'infra-rouge à l'extrême ultra-violet.

Du point de vue de la technique, certaines difficultés apparaissent ; le problème de la production et de la détection de franges dans ces domaines se pose.

L'utilisation des radiations du spectre visible et de son voisinage immédiat permet par contre, sans grande difficulté, la mesure des densités électroniques situées dans la gamme de $10^{14}$ à $10^{15}$ e/cm3.

Les avantages de la méthodes sont évidents; les conditions $\frac{\nu}{\omega}$ et $\frac{\omega_{ie}}{\omega} < \frac{\omega_{pe}}{\omega}$ sont facilement satisfaites. Il n'y a pas de difficulté de focalisation, enfin le sondage ne perturbe en

## B) LES TECHNIQUES de CAVITE -

### 8. 1. - Principe de la méthode -

On a vu que le glissement de la fréquence d'accord $f_o$ d'une cavité hyperfréquence renfermant un plasma peu dense est donné par la formule

$$\frac{\Delta f_o}{f_o} = \frac{e^2}{2 m \varepsilon_o \omega_o^2} \frac{\int_{v\,plasma} n E_o^2 \, dv}{\int_{v\,cavité} E_o^2 \, dv}$$

$f_o$ : fréquence d'accord de la cavité vide

$\Delta f_o$ : glissement de fréquence dû au plasma

e : charge de l'électron

m : masse de l'électron

$E_o$ : amplitude du champ électrique local dans la cavité vide

n : densité électronique du plasma.

Supposons que le plasma soit homogène, l'équation (2) s'écrit :

$$(3.26) \quad \frac{\Delta f_o}{f_o} = \frac{n e^2}{2 m \varepsilon_o \omega_o^2} \frac{\int_{v\,plasma} E_o^2 \, dv}{\int_{v\,cavité} E_o^2 \, dv}$$

ou

$$(3.27) \quad \frac{\Delta f_o}{f_o} = K \frac{\omega_p^2}{2 \omega_o^2}$$

.../...

et (3. 28) $K = \dfrac{\int_{V\,plasma} E_0^2\, dV}{\int_{V\,cavité} E_0^2\, dV}$ est un facteur sans dimension dépendant du volume occupé par le plasma dans la cavité, de la forme et du mode d'excitation de cette dernière.

Conditions de validité -

Les formules (3-25), (3-26) et (3-27) ne sont valables que si :

1°) la fréquence de collision $\nu$ des électrons avec les particules neutres est très petite devant $\omega_0$

(3. 29) $\nu \ll \omega_0$

2°) La présence du plasma ne pertube pas la configuration géométrique du champ électromagnétique dans la cavité, ce qui suppose que l'amplitude du courant de polarisation est très petite devant le courant de déplacement soit

(3. 30) $|\sigma_c| = (\sigma_r^2 + \sigma_i^2)^{1/2} \ll \omega \varepsilon_0$

$\sigma_c$ est la conductivité complexe du plasma, $\sigma_r$ sa partie réelle, $\sigma_i$ sa partie imaginaire.

D'après (3. 29) $\nu \ll \omega_0$ $|\sigma_r| \ll |\sigma_i|$ l'inégalité (3. 30) peut s'écrire

$$|\sigma_i| \ll \omega \varepsilon_0$$

soit numériquement :

$$n_e/cm^3 \ll 10^{-8} f_0^2$$

.../...

La présence du plasma dans une cavité provoque également une diminution de son coefficient de qualité (19)

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{e^2}{m\,\varepsilon_0\,\omega_0^3}\;\frac{\int_{v\,\text{plasma}} \nu\, n\, E_0^2\, dv}{\int_{v\,\text{cavité}} E_0^2\, dv} \qquad \text{soit}$$

$$\Delta\,\frac{1}{Q} = \frac{\nu}{\omega_0}\,K\,\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \qquad (8)$$

Si $\nu$ est très faible devant $\omega_0$ et cette diminution du coefficient de qualité n'est pas décelable.

8. 2. - UN EXEMPLE de DISPOSITIF EXPERIMENTAL (20)

8. 2. 1. Cavité hyperfréquence : Soit une cavité cylindrique fonctionnant suivant le mode TM 010 à 1 470 MHz. Deux pièges quartz d'onde ( $\lambda$ /4) permettent d'isoler les deux couvercles du corps de la cavité tout en gardant un coefficient de qualité suffisante pour la précision de la mesure. (fig. 15)

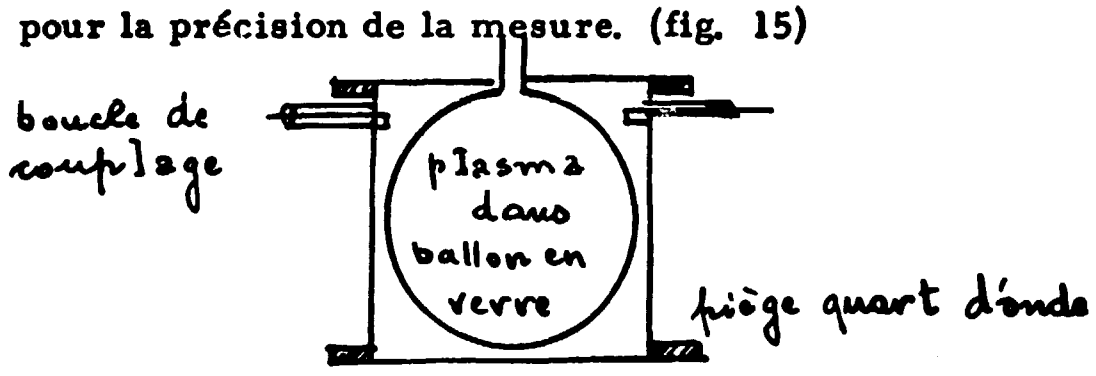


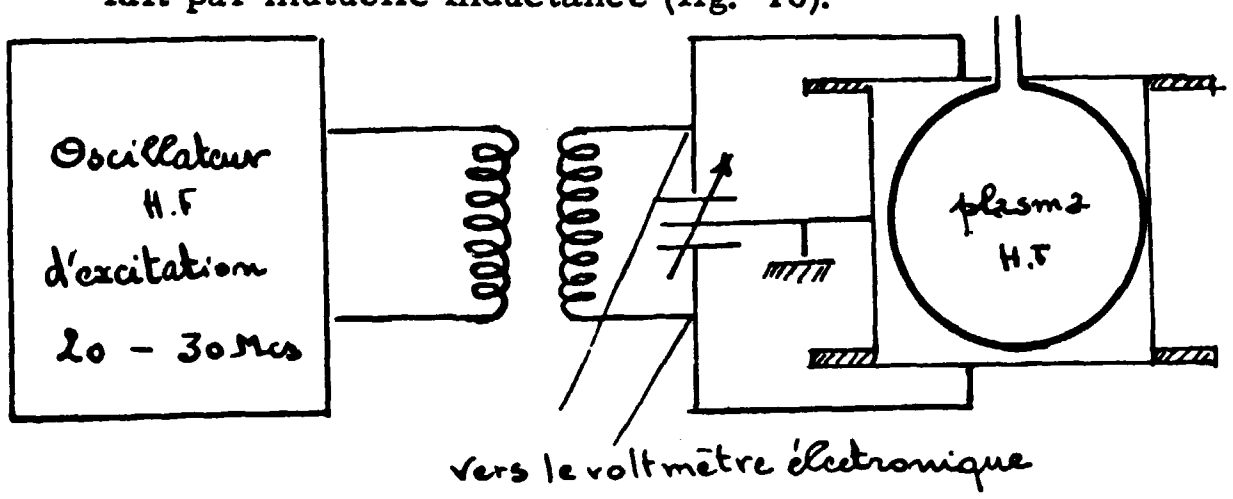

Fig. 15

- Cavité hyperfréquence -

.../...

A l'intérieur de la cavité se trouve un ballon sphérique de pyrex dont le diamètre est sensiblement égal à celui de la cavité. Les mesures préliminaires en hyperfréquence donnent pour la cavité munie de ses pièges et du ballon de verre un coefficient de qualité en charge de l'ordre de 1500.

2°) Formation du plasma : Entre les deux couvercles de la cavité formant capacité on applique la tension de sortie d'un oscillateur HF fonctionnant en régime continu, délivrant une tension crête à crête de l'ordre de 200 à 300 volts et dont la fréquence ne peut varier dans une gamme de 20 MHz à 30 MHz. Le couplage se fait par mutuelle inductance (fig. 16).




- fig. 16 -

Dispositif pour exciter un plasma HF dans la cavité

.../...

Sous l'effet de cette tension HF un plasma diffus se forme si la pression est suffisamment élevée, sa densité électronique est sensiblement uniforme.

3°) Choix du mode de résonance de la cavité : le mode TM010 a été préféré au mode fondamental TE 011, car le champ électrique électrique TM 010 est maximum dans l'axe de la cavité et diminue vers les bords, le plasma se trouve à l'endroit de la cavité où le champ électrique a une amplitude maximum et sa contribution au glissement de fréquence de la cavité est prépondérante.

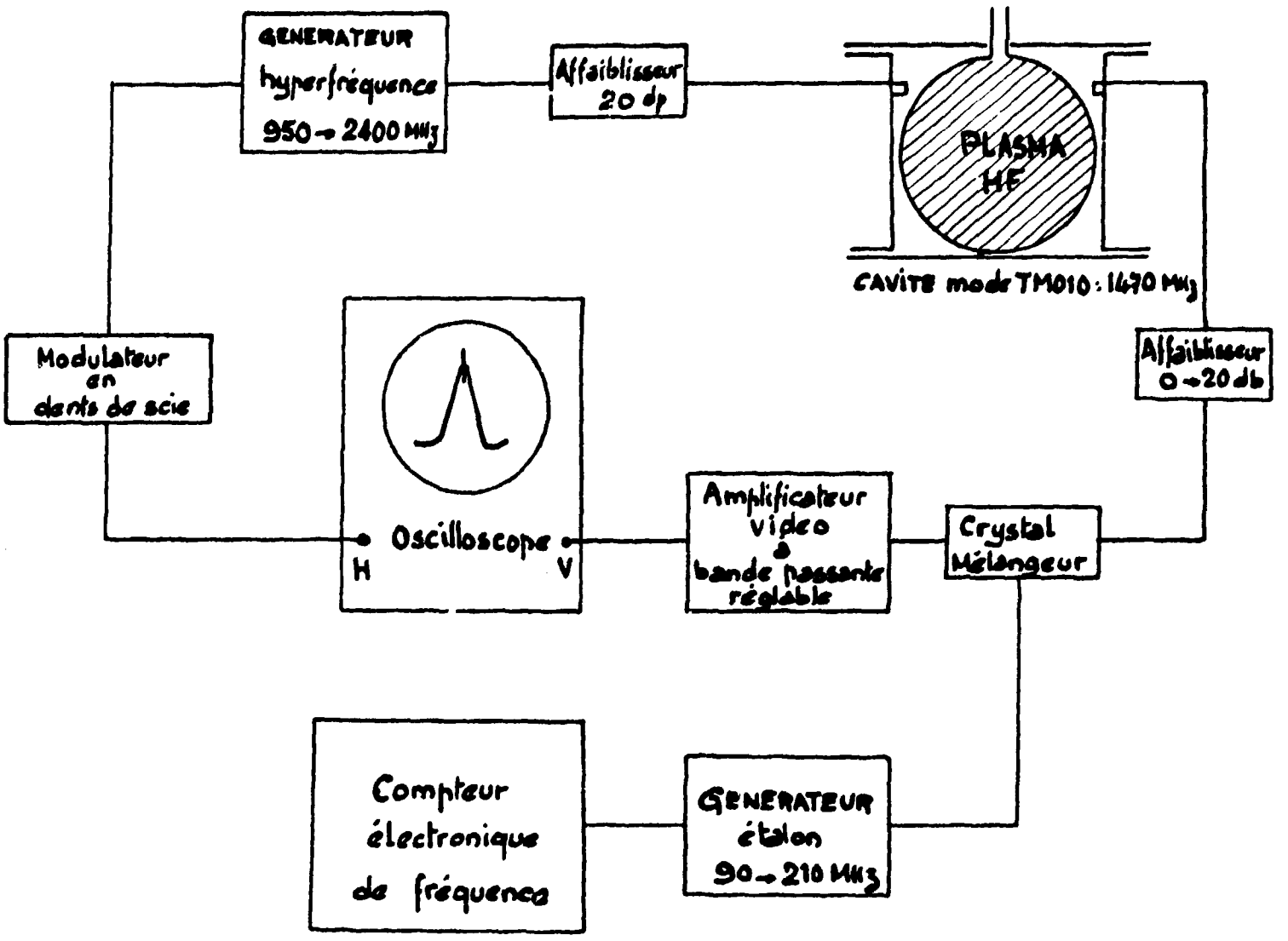
Ces raisons qui motivent le choix du mode TM 010 ne sont bien entendu plus valables dans le cas d'un plasma de diffusion occupant la totalité du volume du ballon.

Le rapport K pour le mode TM 010

$$K = \frac{\int_{v\ plasma} E_0^2\, dv}{\int_{v\ cavité} E_0^2\, dv} \quad \text{avec} \quad E_0 = 0.38\, \frac{\Delta\omega}{R}\, J_1\left(2.42\, \frac{r}{R}\right) V/m$$

Le calcul de K obtenu par un calcul d'intégration graphique simple donne K = 0, 87.

.../...




- fig. 17 -

Dispositif hyperfréquence pour mesurer
le glissement de fréquence d'une cavité en présence
d'un plasma.

.../...

Un générateur hyperfréquence, balayé en fréquence par modulation de la tension réflecteur du klystron avec une tension en dents de scie, attaque de la cavité à travers un affaiblissement tampon d'environ 20 db. La puissance hyperfréquence admise dans la cavité est ainsi très faible de l'ordre de 0,2 à O,5 mW et ne perturbe pratiquement pas le plasma. Une boucle recueille la puissance transmise qui est détectée amplifiée et appliquée aux plaques verticales d'un oscilloscope. Un affaiblisseur variable de 0 à 20 dbs est placé entre la cavité et le détecteur afin de minimiser l'effet de ce dernier sur la fréquence de résonance de la cavité. Le balayage horizontal de l'oscilloscope se fait avec la même tension en dents de scie servant à moduler la tension réflecteur du klystron générateur. Sur l'écran de l'oscilloscope nous observons la courbe de transmission de la cavité. Pour pointer avec précision la fréquence de résonance $f_o$ de la cavité (Sommet de la courbe de transmission) on effectue avant détection un battement de la fréquence variable du klystron avec une fréquence fixe mais réglable d'un générateur étalon de grande stabilité. On réalise sur la courbe de transmission un pic marqueur dont l'axe de symétrie constitue le battement zéro (fréquence instantannée du klystron = fréquence d'un harmonique connu du générateur étalon). Pour mesurer $f_o$ il faut régler la fréquence du générateur étalon pour placer le pic

.../...

marqueur de telle manière que son axe de symétrie coïncide avec le sommet de la courbe de transmission de la cavité. Il suffit de lire la fréquence du générateur étalon et de la multiplier par le rang d'harmonique convenable. La précision du pointage est d'autant meilleure que la cavité a un coefficient de qualité plus grande.

Dans l'exemple la cavité cylindrique résonant à 1 500 MHz et $Q_c = 1500$ $\Delta f_0 / f_0 \doteq 7\ 10^{-6}$ soit :

$$\Delta f_0 = 10 \text{ KHz}$$

Pour rétrécir la largeur du pic marqueur et augmenter ainsi la précision de la mesure, on est amené à réduire l'amplitude de balayage en fréquence du klystron ainsi que la partie supérieure de la bande passante de l'amplificateur Video. Le dispositif ainsi décrit est d'une grande sensibilité et des glissements de fréquence très faibles de l'ordre de 70 KHz ont pu être décelés.

8. 2. 6. - Les erreurs de mesures -

a) Erreur due au pointage du sommet de la courbe de transmission :

On a vu précédemment que l'erreur absolue sur le pointage est $\Delta f_0$ = 10 KHz pour une cavité cylindrique résonant à

.../...

1. 500 MHz et dont le coefficient de qualité est de l'ordre de L 500.

L'erreur sur la mesure de densité qui en résulte est donné par l'équation

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{S(\Delta f_0)}{\Delta f_0} \text{ avec } \quad S(\Delta f_0) = 10 \text{ KHz} \qquad (7)$$

$\Delta f_0$ = glissement de fréquence

du à la présence du plasma.

L'erreur est d'autant plus faible que n est plus grand.

b) Erreur due à la dérive du générateur étalon :

elle est absolument insignifiante vu la grande stabilité $10^{-6}$ de ce dernier.

c) Erreur due à la dérive de la fréquence d'accord de la cavité par suite des variations de température.

## 8. 3. LIMITATIONS dans la TECHNIQUE de CAVITE -

La relation fondamentale (2. 8) définissant le glissement de pulsation complexe d'une cavité chargée par du plasma peut aussi s'écrire :

$$\omega_1 - \omega_1 = \frac{1}{2} \; \frac{j \int_{V_{plasma}} (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}_1) \, \vec{E}_0 \, dV}{\varepsilon_0 \int_{V_{cavité}} \vec{E} \cdot \vec{E}_0 \, dV}$$

soit encore dans l'hypothèse des champs peu perturbés et de l'absence

.../...

de champ magnétique statique :

$$\frac{\Delta F}{F_0} = \frac{1}{2} \frac{\int \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \Big/ 1 + \frac{\nu^2}{\omega_0^2} E_0^2 \, dv}{\int E_0^2 \, dv}$$ pour le glissement de fréquence

$$\frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_0} = \frac{\int \frac{\nu}{\omega_0} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \Big/ 1 + \frac{\nu^2}{\omega_0^2} \; E_0^2 \, dv}{\int E_0^2 \, dv}$$ pour la variation de l'inverse du coefficient de surtension.

On peut écrire des relations semblables lorsqu'un champ magnétique est présent, en partant des expressions du tenseur de conductivité correspondant au cas étudié.

Les équations écrites sont des relations approchées dont les approximations sont excellentes lorsque le plasma est peu dense, $X = \frac{\omega_p^2}{\omega_2} \ll 1$ , il ne perturbe pas le champ électrique dans la cavité $E_0 \# E_1$.

Mais lorsque la densité électrique augmente, $E_1$ champ électrique en présence du plasma diffère de plus en plus du champ Eo dans la cavité vide.

.../...

Cet écart peut être dû à trois causes :

a) l'effet de charge d'espace, qui devient important à mesure que l'on s'approche de la résonance plasma pour X = 1

b) l'effet d'écran ou de non pénétration du champ électromagnétique, pour les fortes densités et pour des valeurs de $X \gtrsim 1$

c) l'effet d'excitation des modes supérieurs, qui se manifeste lorsque la densité électronique et la pression du gaz neutre sont élevées $X > 1$ et $Z = \frac{\nu}{\omega}$ grand.

La diminution du coefficient de surtension Q qui en résulte, entraîne l'excitation des modes supérieurs, du mode excitation.

Le champ dans la cavité est alors la résultante de champ Eo du fondamental et des champs Ei des modes supérieurs.

Ces effets ont été établis et étudiés systématiquement dans une étude théorique par K. B. PERSON (22).

On peut éliminer l'effet de charge d'espace en choisissant comme mode fondamental excité, un mode dont le champ électrique Eo soit normal au gradient de densité (par. 2 - 3). Le mode TE 011 satisfait à cette condition.

Il est utilisé pour les fortes densités, et donne un glissement de fréquence $\frac{\Delta F}{F_o}$ faible. Dans le cas des densités faibles, les modes convenables sont les modes TM 011 et TM 111 parce que plus sensibles

.../...

Il semble par contre impossible de s'opposer à l'effet d'écran.

Une limite très approchée pour cet effet peut être obtenue écrivant que la profondeur de pénétration $\delta$ du champ dans le plasma doit être plus grande que ses dimensions, soit :

$$\delta \gg 2\pi L$$

(L = diamètre du plasma supposé de révolution).

$$\frac{c}{\omega_p} \gg 2\pi L$$

$$\frac{c^2}{\frac{n e^2}{m_e \varepsilon_0}} \gg 4\pi^2 L^2 \quad \text{ou} \quad L^2 n \ll \frac{m_e}{e^2} \frac{\varepsilon_0 c^2}{4\pi^2}$$

ou numériquement $\qquad n L^2 \ll 10^{15}$

n étant en e/m3 et L en m.

Des mesures expérimentales (9) avec le mode TE 011 ont permis effectivement de vérifier la linéarité de la méthode jusqu'à des densités élevées de $10^{18}$ e/m3 pour une colonne de plasma de $10^{-2}$ m de diamètre.

Quant à la limite inférieure des densités mesurables, elle se situe aux environs de $10^{12}$ e/m3 à cause de limitations liées à la stabilité du générateur U. H. F. utilisé et à la précision dans la détermination du glissement de la fréquence de résonance

.../...

## Conclusions générales -

Dans les discussions des techniques de mesures, on a essayé de dégager les demandes d'application de chaque méthode et les limitations.

Il semble utile de conclure par une comparaison de ces techniques U. H. F. entre elles et aux mesures par sondes de Laugmuir.

## 10 - TABLEAU des TECHNIQUES de MESURES de la DENSITE ELECTRONIQUE -

| Nature de la Technique | | | | Principe de la méthode | Autre paramètre mesuré |
|---|---|---|---|---|---|
| Méthode électrique | | | | Détermination de la densité électronique à partir du courant collecté par une électrode polarisée placée dans le milieu ionisé | Te |
| Techniques Hyperfréquence | de propagation | transversale | en transmission et réflexion | Mesure du déphasage par interférométrie U. H. F. | $\nu$ |
| | | | | Détermination de la coupure dans la transmission | |
| | | longitudinale | propagation du rayon droit | Mesure du déphasage par interférométrie | $\nu$ T, B |
| | | | propagation du rayon droit | Mesure du retard de groupe subit par les composantes d'un spectre d'une impulsion | T, B |
| | | | propagation des rayons droit et gauche | Mesure de la rotation du plan de polarisation d'une onde polarisée linéairement. | $\frac{dn}{dt}$ |
| | de cavité | | | Mesure du glissement de la fréquence de résonance d'une cavité hyperfréquence | $\nu$ |
| Interférométrie optique | | | | Mesure du déplacement des franges par interposition d'une lame de plasma. | |

.../...

(suite du tableau)

| | Dispositif d'attaque ou de mesure. | Effet du champ magnétique de confinement | Limites de densité mesurable | Remarques | Types de décharge où la technique est applicable |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sonde | perturbe la mesure | pas de limite supérieure | destruction de la sonde par le plasma chaud. La sonde perturbe le milieu | forme quelconque continue ou pulsée temps d'analyse jusqu'à 1 pulsée |
| 2 | Antenne intérieure au milieu ou cornet et lentilles électromagnétiques extérieures. | Perturbation pour certaines orientations | Pratiquement $n_e < 3 \times 10^{14}$ e/m³ | Ne perturbe pas la décharge. La limite supérieure peut être difficilement reculée. Limitations guide et générateur | Toroïdale ou cyclindrique |
| 3 | Antenne dans le plasma | La mesure est basée sur l'existence du champ | Pas de limite | Les antennes d'emission et de réception perturbent la décharge - ne pourra être utilisé sur un plasma très chaud. | Toroïdale ou cylindrique |
| 4 | Antenne intérieure et cornet extérieur | " | Pas de limite | Même remarque pour l'antenne | Toroïdale ou cylindrique |
| 5 | Cornet et lentille e. m. extérieure | " | Pratiquement $n_e < 6 \times 10^{14}$ e/m³ | La limite supérieure pour ne pourra être repoussée en travaillant avec l'infrarouge | cylindrique |

.../...

(suite des colonnes)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 Pas d'électrode en contact avec le milieu | Perturbe la mesure | $n_e D^2 < 10^{13} e/m^3$ D : dimension en cm du plasma | Les plasmas denses perturbent la mesure (effet de non linéarité). | Quelconque pourvu que la forme soit définie. |
| 7 Faisceau e. m U. H. F. | Pas de perturbation | Pas de limite théorique en pratique $< 10^5 e/m^3$ | Pas de perturbation, difficulté dans les radiations à utiliser pour l'interféromètre | Quelconque |

Il semble donc que les méthodes U. H. F. sont à l'état actuel les seules méthodes satisfaisantes pour la mesure des densités électroniques des plasmas chauds et denses.

Les méthodes optique et quasi optique (onde submillimétrique) constituent un groupe de méthodes concurrentes, appelées à un développement rapide.

Sur le plan théorique, elles ont sur les premières une supériorité incontestable, focalisation aisée, pas de problème de limites, indépendance des fréquences de collisions et cyclotrons.

Elles présentent un grand intérêt pour les plasmas très denses $n_e \simeq 10^{14} e/cm^3$ et faiblement ionisés 1 % , tels que ceux qui seront crées dans les dispositifs de conversion directe de chaleur en électricité, pour lesquels aucun dispositif U. H. F. ne saurait être utilisé

.../...

à cause de l'impossibilité de créer des guides et générateur pour ces fréquences.

Les dispositifs optiques présentent de plus l'indiscutable avantage d'être moins coûteux. La gamme à étudier se situe dans les ondes submillimétriques mm $10\mu < \lambda < 0,1$ mm

Les techniques de la génération et détection de telles ondes sont à explorer minutieusement. Dans cette exploration, à l'autre extrêmité des fréquences dans le domaine acoustique, les ultra-sons ne devraient pas être oubliés.

# - APPENDICE I -

- - - - - -

## 1. 1. - Rappel de la théorie magnéto-ionique. (26)

Propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu faiblement ionisé.

- - - - -

### 11. 1 - Hypothèses

On suppose toujours que le milieu faiblement ionisé contient un nombre égal d'ion et d'électron. Les valeurs moyennes des fréquences $v_i$ et $v_e$ de collision de ces charges avec les particules neutres sont supposées indépendantes de la vitesse de ces particules et constantes.

Le milieu illimité est plongé dans un champ magnétique $B_o$ supposé uniforme.

Il n'y a pas de gradient de densité et l'on néglige l'effet de l'agitation thermique.

On considère que les courants dans le milieu sont constitués par le courant de déplacement $j\,\omega\,\varepsilon_0\vec{E}$ qui dans l'hypothèse de Maxwell, traduit l'influence des retards de potentiels de Lorentz et des courants de conduction $\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{E}$ que l'on confond avec les courants de polarisation, en leur attribuant comme cause unique le déplacement des charges.

Tout déplacement de charge positive ou négative, sera équivalent à mécanisme suivant :

.../...

Considérons la charge immobile en ajoutant un dipôle qui annule la charge.

On définit ainsi en considérant l'effet d'une distribution continue de charge sur une onde électromagnétique, une grandeur importante : la polarisation volumique $\vec{P}$, du milieu égale à la somme des moments des dipôles induits dans le volume :

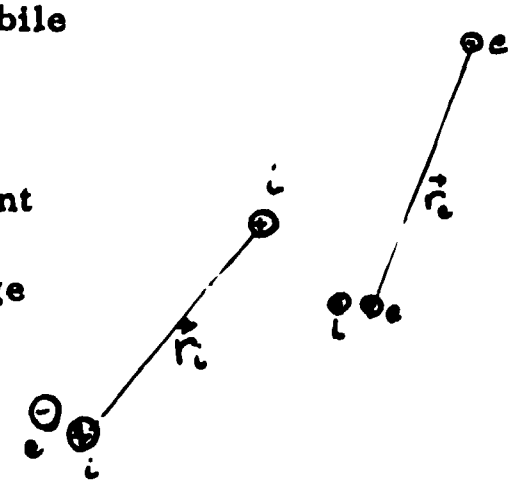


fig. 18

$$\vec{P} = \vec{P}e + \vec{P}i = -n_e\ e\ \vec{r}_e + n_i\ e\ \vec{r}_i = ne\ (\vec{r}i - \vec{r}_e)$$

ou $n_e$ et $n_i$ sont les densités électroniques et ioniques supposées égales dans le milieu.

Les ondes électromagnétiques sont supposées planes et transverses et leur champ des fonctions harmoniques en $e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

11. 2 - Equation de propagation -

En l'absence de champ magnétique $\vec{P}$ est parallèle à $\vec{E}$ le milieu est isotrope.

On peut écrire $\vec{P} = \chi.\vec{E} = (\chi_e + \chi_i)\ \vec{E}$ où $\chi$ est dans ce cas un scalaire : la susceptibilité électrique ou encore facteur de polarisabilité.

En présence d'un champ magnétique de direction quelconque,

.../...

les électrons ne se meuvent plus le long du champ électrique, $\vec{E}$ et $\vec{P}$ ne sont plus parallèles, le milieu est anisotrope $\chi$ est un tenseur.

Les équations de propagations s'obtiennent dans le cas général en écrivant d'une part les équations de la conservation de la quantité de mouvement et de l'autre que les champs électromagnétiques de l'onde satisfont aux équations de Maxwell.

Dans les premières équations, on fait apparaître le fait que l'absorption ou ralentissement d'une onde électromagnétique dans le milieu ionisé à deux causes : les forces de rappels conséquence de la polarisation du milieu, et les collisions.

Les premières expliquent que des absorbtions intenses puissent se manifester au voisinage des fréquences propres du plasma en l'absence de toute collision, et les secondes une diperdition d'énergie due aux collisions, analogue à l'effet joule.

11. 3. - Equations du milieu -

(4. 1) $- n e \vec{E} = m_e n \ddot{\vec{r}}_e + n m_e \nu_e \dot{\vec{r}}_e - n e \dot{\vec{r}}_e \times \vec{B}_o$

(4. 2) $n e \vec{E} = m_i n \ddot{\vec{r}}_i + n m_i \nu_i \dot{\vec{r}}_i - n e \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}_o$

ou encore :

(4. 3) $\varepsilon_o \chi \vec{E} = - \vec{P}e (1 - j Z_e) + j \vec{P}_e \times \vec{Y}_e$

(4. 4.) $\varepsilon_o \chi \vec{E} = - P_i (1 - j Z_i) + j \vec{P}_i \times \vec{Y}_i$

.../...

En posant :

$$(4.5) \qquad X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \vec{Y}_e = \frac{\vec{\omega}_{ce}}{\omega}, \quad \vec{Y}_i \frac{\omega_{ci}}{\omega}, \quad Z_e = \frac{\nu_e}{\omega}, \quad Z_i = \frac{\nu_i}{\omega}$$

avec

$$(4.6) \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m_e \varepsilon_0}, \quad \vec{\omega}_{ce} = \frac{-e\vec{B}_0}{m_e}, \quad \vec{\omega}_{ci} = \frac{e\vec{B}_0}{m_i}$$

Les équations de couplages entre les deux gaz d'électrons et d'ions donnent :

$$(4.7) \qquad J = ne(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_e) = j\omega(\vec{P}_i + \vec{P}_e) = j\omega\vec{P} = j\omega \overleftrightarrow{X}\, \vec{E}$$

mais

$$(4.8) \quad \vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}$$

d'où la relation liant le tenseur de conductibilité au tenseur de susceptibilité

$$(4.9) \quad \overleftrightarrow{\sigma} = j\omega \overleftrightarrow{X}$$

11.4. - <u>Equations des champs</u> -

$$(4.10) \quad \nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$(4.11) \quad \nabla \times H = \vec{\sigma} E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

soit encore :

$$(4.12) \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\overleftrightarrow{X}}{\varepsilon_0}\right)\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\overleftrightarrow{\sigma}}{j\omega\varepsilon_0}\right)\vec{E}$$

.../...

## 11. 5 - Le tenseur de conductivité -

Il résulte des équations (4. 7) et (4. 12)

En effet :

(4. 13)

$$\left\| \chi_e \right\|^{-1} = \frac{\Lambda}{\varepsilon_0 X} \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & a_1 & d_1 \\ -c_1 & -d_1 & a_1 \end{Vmatrix}$$

(4. 14) $a_1 = -(\lambda - j Z_e)$, $b_1 = \pm j Y_{ez}$, $c_1 = + Y_e y$, $d_1 = - j Y_{ex}$

et de même pour $a_2$

(4. 15)

$$\left\| \chi_i \right\|^{-1} = \frac{g}{\varepsilon_0 X} \begin{Vmatrix} a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix}$$

(4. 16) où $g = \dfrac{m_i}{m_e}$ et l'indice 2 se rapportant aux mêmes expressions écrites pour les ions.

En inversant les matrices on a enfin pour la matrice définissant le tenseur de susceptibilité du milieu

(4. 17)

$$\left\| \chi \right\| = \left\| \chi_e \right\| + \left\| \chi_i \right\|$$

.../...

(4. 18)

$$\|\chi\| = \varepsilon_0 \chi$$

$$\begin{Vmatrix} \frac{A_1}{\Delta 1} + \frac{A_2}{\Delta 2} & -\left(\frac{D_1}{\Delta 1} + \frac{D_2}{\Delta 2}\right) & \frac{E_1'}{\Delta 1} + \frac{E_2'}{\Delta 2} \\ \frac{D_1}{\Delta 1} + \frac{D_2}{\Delta 2} & \frac{B_1}{\Delta 1} + \frac{B_2}{\Delta 2} & \frac{F_1}{\Delta 1} + \frac{F_2}{\Delta 2} \\ \frac{E_1}{\Delta 1} + \frac{E_2}{\Delta 2} & \frac{F_1'}{\Delta 1} + \frac{F_2'}{\Delta 2} & \frac{C_1}{\Delta 1} + \frac{C_2}{\Delta 2} \end{Vmatrix}$$

L

(4. 19)

$$\begin{cases} \frac{A_1}{\Delta 1} + \frac{A_2}{\Delta 2} = \frac{(1-jZ_e)^2 - Y_{ex}}{\Delta 1} + \frac{(1-jZ_i)^2 - Y^2_{ix}}{\Delta 2} \\ \frac{D_1}{\Delta_1} \quad \frac{D_2}{\Delta_2} = + \frac{j\,Y_{ez}\,(1-jZ_e) + Y_{ex}\,Y_{ez}}{\Delta_1} + \frac{j\,Y_{iz}\,(1-jZ_i) + Y_{ix}\,Y_{iz}}{2} \\ \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} = \frac{(1-j\,Z_e)^2 - Y^2_{ey}}{\Delta_1} + \frac{(1-j\,Z_i)^2 - Y^2_{iy}}{2} \\ \frac{C_1}{\Delta_1} + \frac{C_2}{\Delta_2} = \frac{(1-jZ_e)^2 - Y^2_{ez}}{\Delta_1} + \frac{(1-j\,Z_i)^2 - Y_{iz}}{\Delta_2} \\ \frac{E_1}{\Delta_1} + \frac{E_2}{\Delta_2} = \frac{-\,Y_{ex}Y_{ey} - j\,Y_{ex}\,(1-jZ_e)}{\Delta_1} + \frac{-\,Y_{ix}\,Y_{iz} - j\,Y_{iy}\,(1-jZ_i)}{\Delta_2} \\ \frac{E_1'}{\Delta_1} + \frac{E_2'}{\Delta_2} = \frac{Y_{ex}\,Y_{ez} + j\,Y_{ey}\,(1-jZ_e)}{\Delta_1} + \frac{-Y_{ix}\,Y_{iz} + j\,Y_{iy}\,(1-jZ_i)}{\Delta_2} \end{cases}$$

.../...

$$\begin{cases} \dfrac{F_1}{\Delta_1} + \dfrac{F_2}{\Delta_2} = \dfrac{jY_{ex}(1-jZ_e) + Y_{ey}\,Y_{ez}}{\Delta_1} + \dfrac{j\,Y_{ix}(1-jZ_i) + Y_{iy}\,Y_{iz}}{\Delta_2} \\[2ex] \dfrac{F'_1}{\Delta_1} + \dfrac{F'_2}{\Delta_2} = \dfrac{j\,Y_{ex}(1-jZ_e) - Y_{ey}\,Y_{ez}}{\Delta_1} + \dfrac{j\,Y_{ix}(-jZ_i) - Y_{iy}\,Y_{iz}}{\Delta_2} \end{cases}$$

$$(4.20)\begin{cases} Y_e^2 = Y_{ex}^2 + Y^2_{ey} + Y^2_{ez} \qquad Y_i^2 = Y_{ix}^2 + Y_{iy}^2 + Y^2_{iz} \\[1ex] \Delta_1 = -(1-jZ_e)\left[(1-jZ_e)^2 - Y_e^2\right] \\[1ex] \Delta_2 = \dfrac{m_i}{m_e}(1-jZ_i)\left[(1-jZ_i)^2 - Y_i^2\right] \end{cases}$$

d'où pour le tenseur de conductivité :

$$(4.21)\quad \| \sigma \| = j\,\omega\,\varepsilon_0\,X \,\| \quad \text{même matrice que 14} \| \qquad (15)$$

Calcul de l'indice de réfraction

L'équation (8) donne :

$$(4.22)\quad \begin{Vmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \omega = \frac{\omega^2}{c^2}\,(1 + X\,\|\,L\,\|) \qquad (16)$$

soit :

$$(4.23)\quad \begin{Vmatrix} \dfrac{n^2-1}{X} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n^2-1}{X} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{X} \end{Vmatrix} - \|\,L\,\| = 0 \qquad (17)$$

.../...

Soit enfin le déterminant général définissant l'indice

$$(4.24)\quad \begin{vmatrix} \frac{n^2-1}{X} & -\left(\frac{A_1}{\Delta_1}+\frac{A_2}{\Delta_2}\right) & -\left(\frac{D_1}{\Delta_1}+\frac{D_2}{\Delta_2}\right) & -\left(\frac{E_1}{\Delta_1}+\frac{E_2}{\Delta_2}\right) \\ \frac{D_1}{\Delta_1}+\frac{D_2}{\Delta_2} & \frac{n^2-1}{X} & -\left(\frac{B_1}{\Delta_1}+\frac{B_2}{\Delta_2}\right) & -\left(\frac{F_1}{\Delta_1}\ \frac{F_2}{\Delta_2}\right) \\ \frac{E_1}{\Delta_1}+\frac{E_2}{\Delta_2} & \frac{F_1}{\Delta_1}+\frac{F_2}{\Delta_2} & -\frac{1}{X} & -\left(\frac{C_1}{\Delta_1}+\frac{C_2}{\Delta_2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Les relations (15) et (18) sont les relations générales que l'on se proposait d'établir ; elles donnent $\sigma$ et n, dans tous les cas possibles, en supposant les hypothèses de départ valables et l'effet de la température négligeable.

11. 6. - Un exemple -

On suppose une onde plane transversale se propageant parallèlement au champ magnétique $B_o$ orienté suivant l'axe des

On aalors : $B = B_z$

a) - Cas où il n'y a pas de collision :

$$Z_e = Z_i = 0$$

$$(4.27)\quad \begin{cases} a_1 = -1 & b_1 = -j\,Y_e & c_1 = 0 & d_1 = 0 \\ a_2 = -1 & b_2 = -j\,Y_i & c_2 = 0 & d_2 = 0 \end{cases}$$

.. /...

$$(4.27)\quad \begin{cases} A_1 = 1 & B_1 = 1 & C_1 = -Y_e^2 & D_1 = j\,Y_e & E_1 = 0 & E_1' = 0 \\ F_1 = 0 & F_1' = 0 & \Delta_1 = -(1 - Y_e^2) & & & \\ A_2 = 1 & B_2 = 1 & C_2 = -Y_i^2 & D_2 = j\,Y_i & E_2 = 0 & E_2' = 0 \\ F_2 = 0 & F_2' = 0 & \Delta_2 = -g\,(1 - Y_i^2) & & & \end{cases}$$

$$(4.28)\quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[\frac{1}{1 \pm Y_e} + \frac{1}{g}\;\frac{1}{1 \mp Y_i}\right]$$

ou

$$(4.29)\quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega}\left[\frac{1}{\omega \pm \omega_{ce}} + \frac{m_e}{m_i}\;\frac{1}{\omega \mp \omega_{ci}}\right]$$

b) si l'on tient compte des collisions on a :

$$(4.30)\quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[\frac{1}{\omega \pm \omega_{ce} - j\nu_e} + \frac{m_e}{m_i}\;\frac{1}{\omega \mp \omega_{ci} - j\nu_i}\right]$$

Cas où l'effet des ions est négligeable :

On supprime alors dans toutes les équations les termes portant l'indice (2). On trouve alors :

$$(4.31)\quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[\frac{1}{\omega \pm \omega_{ce} - j\nu}\right]$$

.../...

**Expression du tenseur de conductivité :**

Il s'écrit si l'on néglige le terme ionique :

$$(11.8)\quad \overleftrightarrow{\sigma} = \frac{-j\,\varepsilon_0\,\omega_p^2}{(j\omega+\nu)\left[(j\omega+\nu)^2+\omega_c\right]} \begin{Vmatrix} (j\omega+\nu)^2+\omega_{cx} & (j\omega+\nu)\omega_{cy}+\omega_{cx}\omega_{cy} & \omega_{cy}\omega_{cx}-\omega_{cy}(j\omega+\nu) \\ -(j\omega+\nu)\omega_{cy}+\omega_{cx}\omega_{cy} & (j\omega+\nu)^2+\omega_{cy}^2 & -(j\omega+\nu)\omega_{cx}-\omega_{cy}\omega_{cy} \\ \omega_{cy}\omega_{cx}+\omega_{cy}(j\omega+\nu) & -(j\omega+\nu)\omega_{cx}+\omega_{cy}\omega_{cy} & (j\omega+\nu)^2+\omega_{cy}^2 \end{Vmatrix}$$

Si le champ B est perpendiculaire à la direction de propagation, on retrouve l'expression

$$B_x = 0$$

et $$B_y = 0$$

$$(11.9)\quad \overleftrightarrow{\sigma} = -j\,\frac{\varepsilon_0\,\omega_p^2}{l} \begin{Vmatrix} 1+r & -j(1-r) & 0 \\ j(1-r) & (1+r) & 0 \\ 0 & 0 & 2p \end{Vmatrix}$$

ou :

$$l = \frac{1}{\nu + j(\omega+\omega_{ce})} \qquad r = \frac{1}{\nu + j(\omega-\omega_{ce})} \qquad p = \frac{1}{\nu + j\omega}$$

et si $\nu = 0$, on a :

.../...

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \begin{Vmatrix} \dfrac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & \dfrac{j\,\omega\omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & 0 \\ \dfrac{-j\,\omega\omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & \dfrac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{ce}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (11.20)$$

11. 9. - Tableau des cas -

En négligeant le terme ionique, il est possible enfin de dresser le tableau d'ensemble suivant des cas particuliers :

a) - absence de champ magnétique

b) - absence de collision négligeable

c) $B_o$ parallèle à la direction de propagation

d) $B_o$ perpendiculaire à la direction de propagation, ce cas se subdivisant lui-même en deux autres : celui où la polarisation du champ électrique est parallèle ou perpendiculaire au champ magnétique statique.

.../...

## 11. 9 - TABLEAU des CAS -

| B \ ν | | 0 | ≠ 0 |
|---|---|---|---|
| B=0 | | $n^2 = 1 - X$ | $n^2 = 1 - \frac{X}{1-jZ}$ |
| $B=B_\ell$ | | $n^2 = 1 - \frac{X}{1 \pm Y}$ | $n^2 = 1 - \frac{X}{1-jZ \pm Y}$ |
| $B=B_t$ | E//B | $n_0^2 = 1 - X$ | $n_0^2 = 1 - \frac{X}{1-jZ}$ |
| | E⊥B | $n^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{1-X-Y^2}$ | $n^2 = 1 - \frac{X(1-X-jZ)}{(1-jZ)(1-X-jZ)-Y^2}$ |

.../...

## 11 - DISCUSSION -

On retrouve les mêmes expressions déjà rencontrées mais ici $\nu$ désigne la fréquence de collision supposée constante des électrons avec les particules lourdes, atomes neutres ou ions.

Cowling, en 1945, a donné pour $\nu_e$ l'expression

$$\nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ei}$$

$$= 1,8 \times 10^{-8} \left(T/300\right)^{1/2} n_a + 6,1 \times 10^{-3} \left(T/300\right)^{-3/2} n_i$$

En utilisant l' expression de la fréquence de collision $\nu_{ei}$ électron-ion donnée par Spitzer, Delcroix (22) en déduit les limites du domaine des gaz faiblement ionisés.

Il écrit :

$$\nu_{ei} \sim 2,6 \frac{n_e}{T^{3/2}} \ln \Lambda$$

$$\nu_{ea} \sim n_a \bar{v} \sigma_a$$

$\sigma_a$ étant la section efficace de collision élastique e - i pour des électrons d'énergie $\frac{3}{2} k T_e$

soit pour

$$\frac{\nu_{ei}}{\nu_{ea}} \sim 2,6 \frac{n_e}{n_a} \frac{\ln \Lambda}{\bar{v} \sigma_a T^{3/2}}$$

.../...

et dans le cas de l'hydrogène moléculaire ce rapport est égal à l'unité pour

$$\frac{n_e}{n_a} = 3,5 \times 10^{-10} \frac{Te^{3/2}}{\ln \Lambda}$$ pour des électrons d'énergie $< 4$ ev

$$\frac{n_e}{n_a} = 0,76 \times 10^{-7} \frac{Te^{3/2}}{\ln \Lambda}$$ pour des électrons d'énergie de quelques dizaines d'électrons volt.

Dans le cas d'un gaz fortement ionisé, les collisions dominantes sont les collisions coulombiennes e - i, on a alors comme on l'a vu -(24) pour une distribution maxwellienne des électrons

$$\nu_{eff} = K \frac{e^4}{(4\pi \varepsilon_0)^2} m^{1/2} \frac{nZ}{(kT)^{3/2}}$$

où b est un coefficient variant de 0,17 à 0,60.

Soit encore :

$$\nu_{eff} (sec)^{-1} \sim 3 \times 10^{-5} \frac{n (e/cm^3) Z}{(kT \text{ en ev})^{3/2}}$$

On tiendra compte de cette fréquence de collision selon que son rapport $\nu/\omega$ à la pulsation de l'onde électromagnétique sera négligeable ou voisin de l'unité.

- - - - - - - - - - -

# - APPENDICE II -

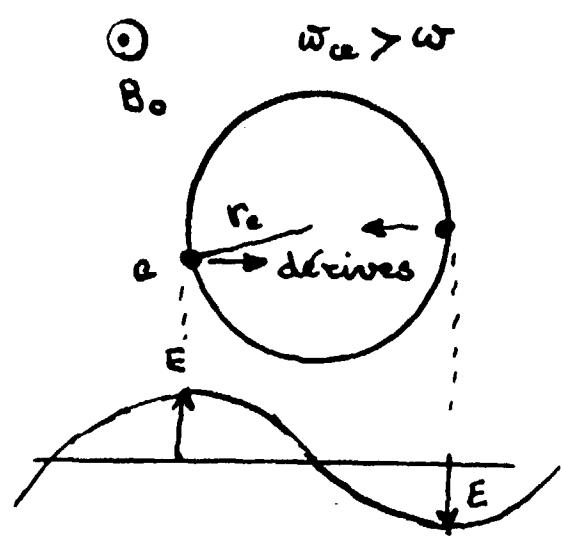
## - Bref aperçu -

### Effets de la température électronique signalés Drummond(25) sur la propagation des ondes électromagnétiques -

Rappelons ces effets signalés et calculés par Drummond.

L'aspect qualitatif de l'effet du mouvement thermique dans un plasma, peut être vu en superposant les orbites des électrons sur certaines configurations de champs oscillants.

On a représenté ci-contre les orbites thermiques de deux électrons et les dérives orbitales dues au champ électrique HF de fréquence plus petite que la fréquence cyclotron.




Les flèches autour des deux orbites indiquent l'expansion des orbites, due à la circulation du champ électrique autour de l'orbite.

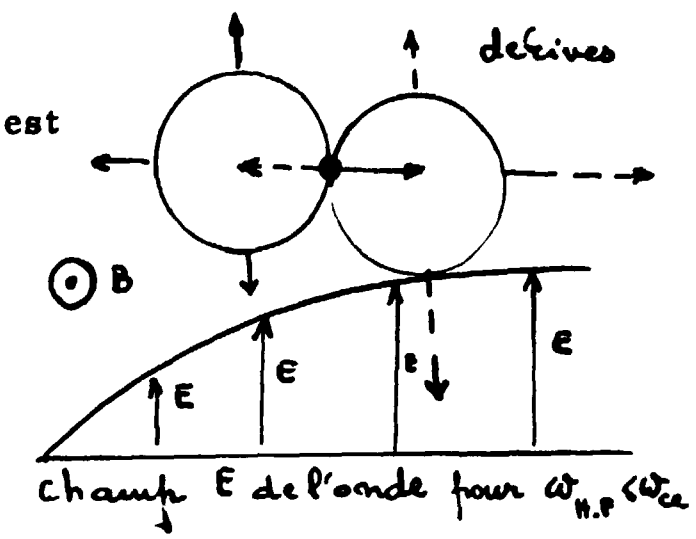
Dans la région où les orbites se touchent, l'expansion radiale de l'orbite de gauche augmente le courant due à la dérive de l'orbite, quant à l'orbite de droite, elle a un effet inverse, de diminution.

Ainsi la configuration du champ électrique donne naissance à une contribution complémentaire au courant de conduction dans le plasma, plongé dans un champ magnétique.

.../...

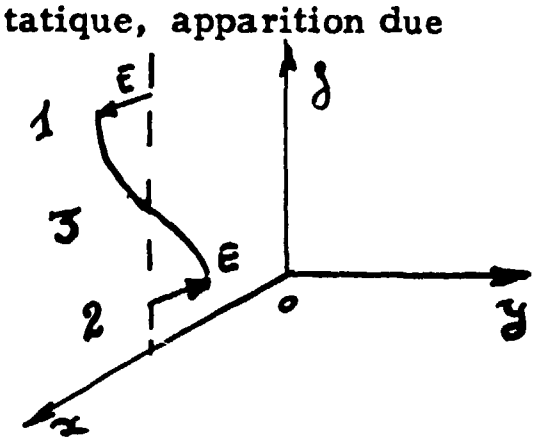
Il s'ensuit que dans une mesure de densité par sondage par une onde électromagnétique, ce co urant a pour résultat de réduire apparemment le courant de conduction et de donner une mesure erronée de la densité électronique.

Un deuxième effet thermique est celui qui se produit si le diamètre de l'orbite est plus petit que la demi longueur d'onde. Alors les dérives dues au champ électrique HF se compensent.




Cet effet aussi a pour résultat de donner pour la densité du plasma une densité apparente plus faible.

Un troisième effet thermique est celui non signalé jusqu' ici de l'apparition d'une composante du courant HF dans le cas de la propagation, le long du champ. magnétique statique, apparition due à un effet du champ électrique transverse.




Supposons qu'en 1 et 2 les champs E locaux soient en opposition de phase. Il se produit en ces régions respectivement un groupement et dégroupement des électrons.

Dans le plan médian 3 la compens ation des courants arrivant de 1 à 2 est partielle, il y a donc production d'impulsion. de courant.

.../...

Il doit donc exister dans le tenseur de conductivité des termes en zx et zy.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

.../...

Expressions des indices de réfraction compte-tenu des effets de température -

En se plaçant dans le cas où la fréquence de collision et l'effet dû au mouvement des ions sont négligeables, les expressions des indices donnés par J. E. Drummond(25) pour les mêmes cas particuliers étudiés aux par. (1. 3. 2. , 1. 3. 3. ) sont les suivantes :

CAS II' - Propagation longitudinale -

On a alors pour les indices des rayons droit et gauche

$$N'^2 = \frac{1 \pm Ye - X - 2\,\gamma^2 \dfrac{X}{1 \mp Ye}}{1 \pm Ye + \gamma^2 \dfrac{X}{(1 \pm Ye)^2}}$$

au lieu de (pour $\gamma \simeq 0$ ou Te)

$$N^2 = \frac{1 \pm Ye - X}{1 \pm Ye}$$

avec les mêmes conventions pour X, $Y_e$ et pour l'indice $\gamma$ de température :

$$\gamma = \frac{\dfrac{(KTe)}{me}^{1/2}}{C}$$

CAS III - Propagation transversale -

a) Indice de réfraction du rayon ordinaire (polarisation électrique parallèle au champ magnétique)

$$N_o'^2 = \frac{1 - X}{1 + \gamma^2 \; X\left(1 + \dfrac{Ye^2}{1 - Ye^2}\right)}$$

.../...

au lieu de (pour $\gamma = 0$)

$$N_o^2 = 1 - X$$

b) Indice du rayon extraordinaire (polarisation électrique perpendiculaire au champ magnétique)

$$N_{ex}^2 = \frac{-b \pm (b^2 - 4\,ac)^{1/2}}{2\,a}$$

$$b = 1 - X' + \frac{6\,X'\,\gamma^2}{1 - 4\,Ye}\,(1 - X' + 2\,X'\,Ye^2)$$

$$a = -\frac{3\,\gamma^2\,X'\,(1 + 3\,\gamma^2\,X')}{1 - 4\,Y_e^2}$$

$$C = 1 - 2\,X' - X'^2 + Ye^2\,X'^2$$

et $$X' = \frac{X}{1 - Ye^2 - 2\,\gamma^2\,X}$$

au lieu de

$$N_{ex}^2 = 1 - \frac{X\,(1 - X)}{(1 - X) - Y^2}$$

- ----------

.../...

Les termes correctifs dûs à l'effet de la température électronique apparaissent dans la comparaison.

Ils ont pour résultat de déplacer les fréquences de coupures, de permettre la propagation dans des domaines de fréquences où elle était impossible, de modifier enfin les déphasages par traversée de colonne de plasma, et par suite l'interprétation des mesures hyperfréquence de la densité.

Ces effets commencent à être appréciables à partir d'une température électronique de l'ordre du $kw$.

-:-:-:-:-:-:-:-

/JZ

## - APPENDICE III -

Représentation dans l'espace indice, densité, champ magnétique des propagations longitudinales (modes droit et gauche). Comparaison au cas transversal à polarisation électrique parallèle au champ magnétique (mode ordinaire).

- - - - - - - - - - -

Nous avons vu que les déphasages correspondant à ces cas étaient donnés par les expressions :

$$\Delta \Phi = \frac{\omega}{c} \int_0^d \left[ 1 - (1 - X)^{1/2} \right] dz$$

pour le mode transversal ordinaire

$$\Delta \Phi = \frac{\omega}{c} \int_0^L \left[ \left(1 - \frac{X}{1-Y}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{X}{1+Y}\right)^{1/2} \right] dz$$

pour le déphasage exprimant la rotation du vecteur champ électrique.

Ces deux déphasages expérimentalement se mesuraient par une interférométrie entre les ondes se propageant dans le premier cas dans l'air et le plasma perpendiculairement au champ magnétique, et dans le deuxième cas entre les ondes droite et gauche se propageant le long des lignes du champ magnétique.

.../...

On peut les représenter sur un même diagramme (X, N) ou ($n_e$, N) en distinguant les cas $Y < 1$ (fig. 1) et $Y > 1$ (fig. 2).

Les déphasages sont représentés par les segments AB et CD.

Il apparaît que pour $Y < 1$ $AB > CD$ c'est-à-dire que l'interférométrie transversale conduit à un déphasage plus grand que celui donnant les rotations, et que pour une fréquence de sondage donnée, l'intervalle de densité explorable dans le cas transversal est plus grand que celui du cas longitudinal ,

Mais la situation est renversée pour $Y > 1$, CD étant plus grand que AB. Une représentation meilleure est obtenue dans l'espace (N, X, Y) ou (N, $n_e$, B) - (fig. 3).

On a représenté un plan parallèle au plan (X, Y) définissant l'indice unité, ainsi que les droites $P_1$ $P_2$ $S_1$ $S_2$ limitant les régions de propagation et de rotation.

Il apparaît d'une façon évidente pour deux valeurs de Y, soient $Y_1$ et $Y_2$, définissant deux cas caractéristiques au-dessous et au-dessus de la fréquence cyclotron des électrons, que les indices des rayons ordinaires sont les courbes $M_1$ $R_1$, $M_2$ $R_2$ : et pour les rayons droit et gauche $M_1$ $P_1$ , $M_1$ $S_1$ et $M_2$ $P_2$ $M_2$ $S_2$.

.../...

L'intervalle constant de densité pour le rayon ordinaire est celui défini par $X = 1$ ou $\omega_p = \omega_{sondage}$ alors que l'intervalle de densité pour les rotations est $Y_1$ $P_1$ et $Y_2$ $S_2$.

Il tend vers zéro quand $Y \rightarrow 1$ et vers l'infini quant $Y \rightarrow \infty$

Ces courbes de variations $M_1$ $S_1$ $R_1$ $P_1$ et $M_2$ $S_2$ $P_2$ $R_2$ sont bien celles représentées sur les fig. 1 et 2.

Manuscrit reçu le 27 septembre 1960

---

fig 1. Représentation des indices des rayons droit, gauche et ordinaire (propagations longitudinale et transversale cas $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$)

Cas $Y < 1$ soit $Y = 1/4$

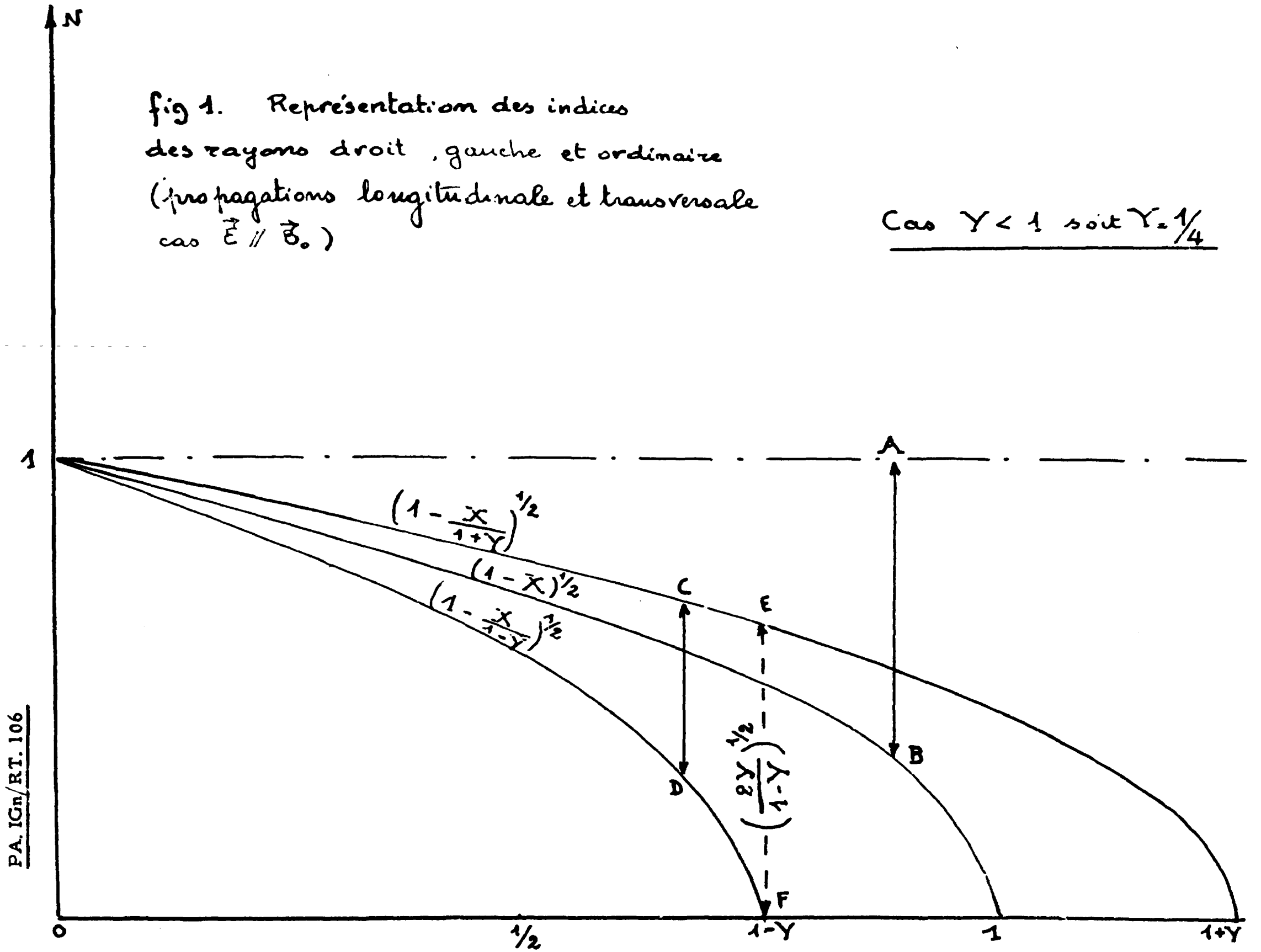
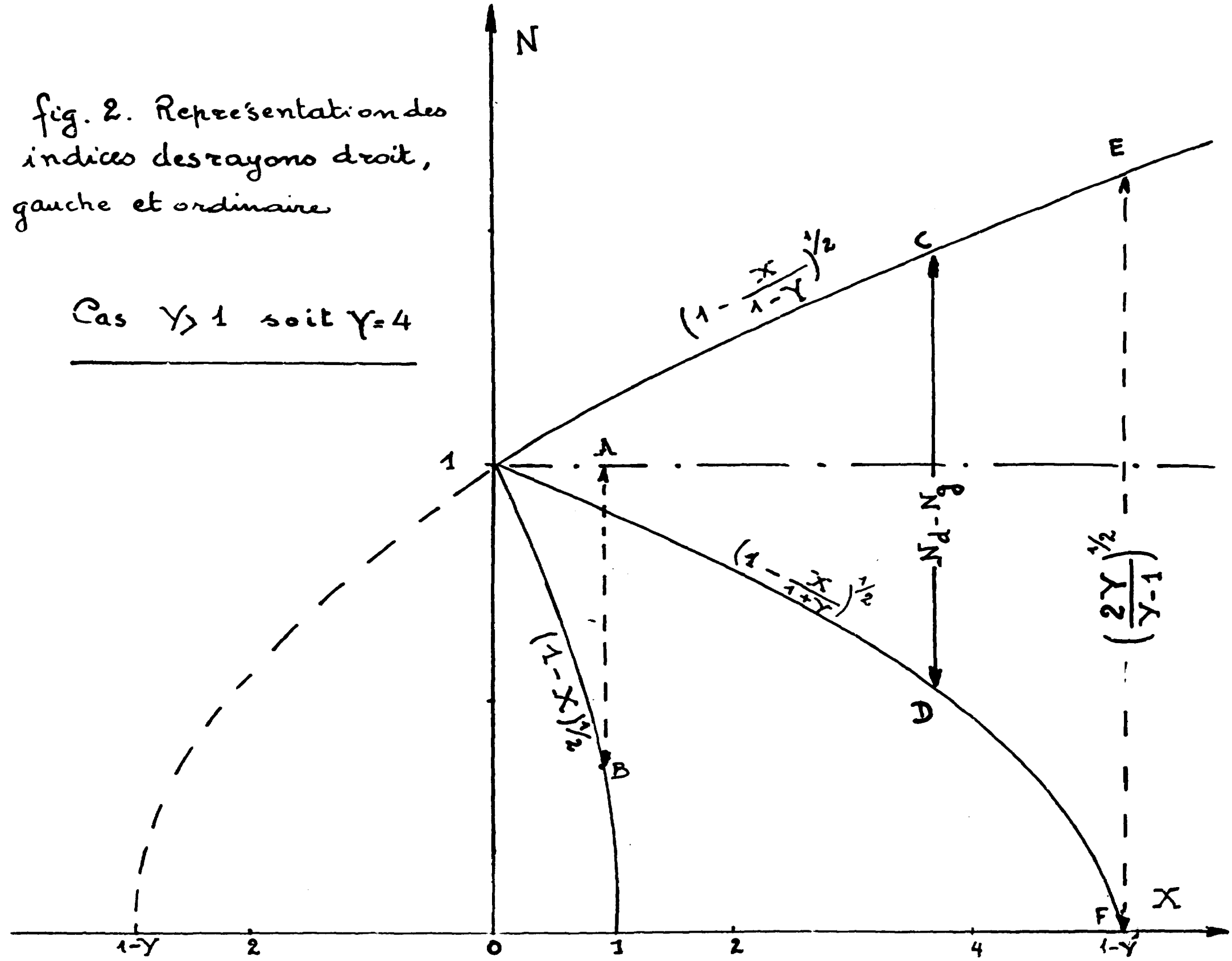


fig. 2. Représentation des indices des rayons droit, gauche et ordinaire

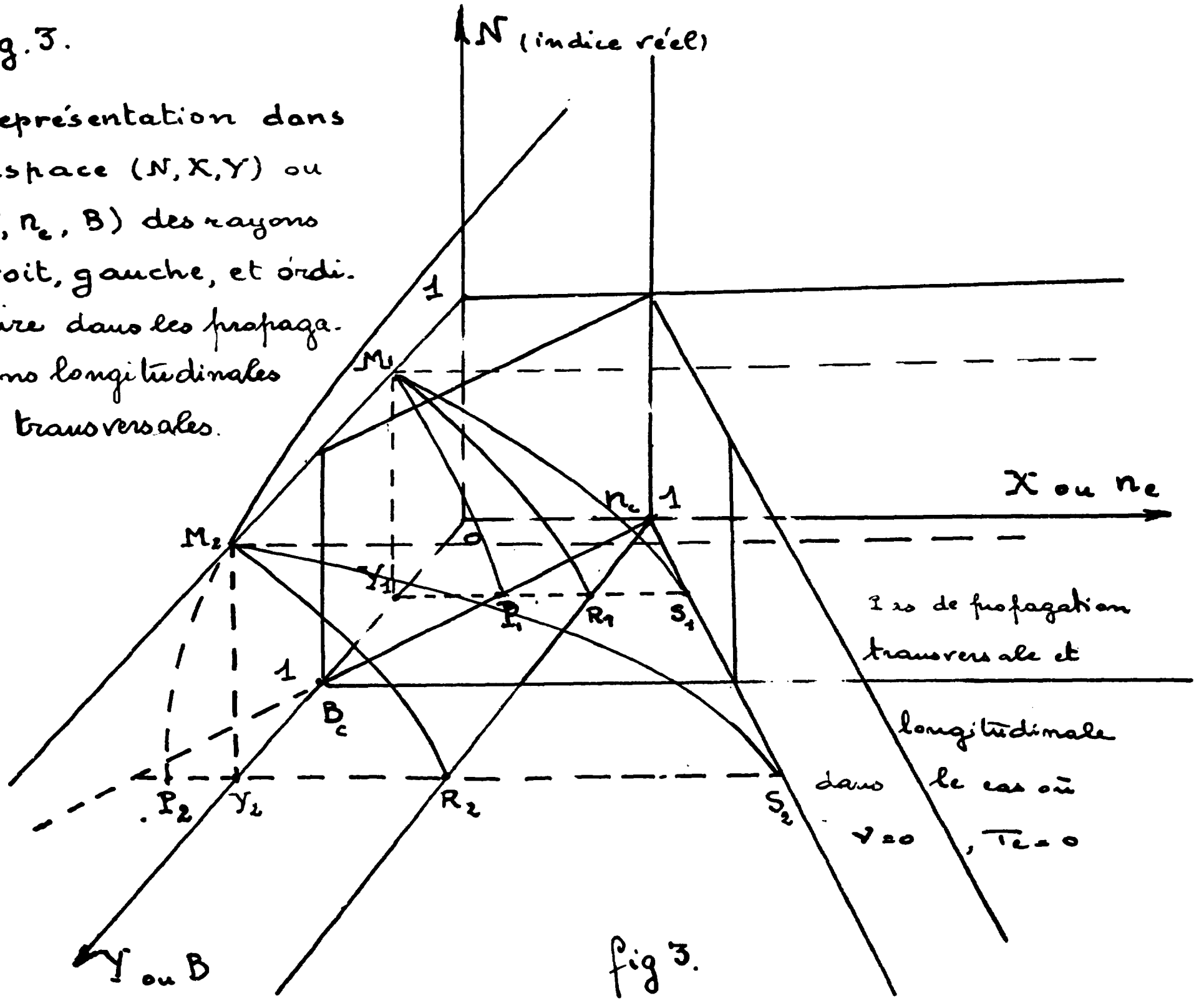
Cas $Y > 1$ soit $Y = 4$




PA. IGn/RT. 106

fig. 3.

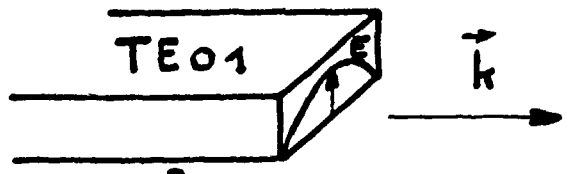
Représentation dans l'espace (N, X, Y) ou (N, $n_e$, B) des rayons droit, gauche, et ordinaire dans les propagations longitudinales et transversales.




I ro de propagation transversale et longitudinale dans le cas où $\nu = 0$, $T_e = 0$

fig 3.

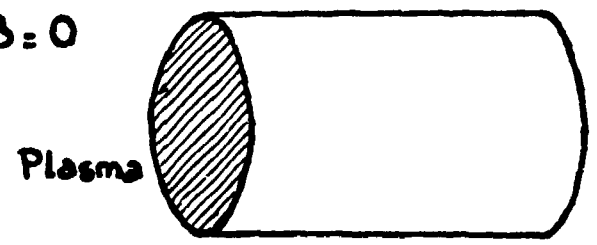
# Positionnement des dispositifs de test U.H.F




direction de propagation

$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ $\quad Y_c = \frac{\omega_{ce}}{\omega}$ $\quad Z = \nu/\omega$

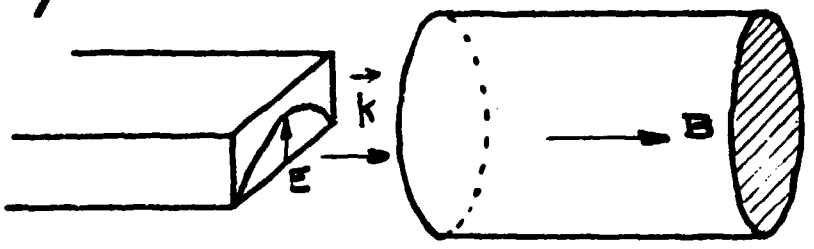
Cas B=0



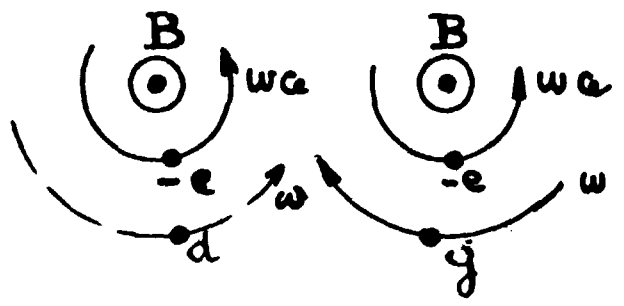

$$N^2 = 1 - \frac{X}{1 - jZ}$$

Cas $B \neq 0$

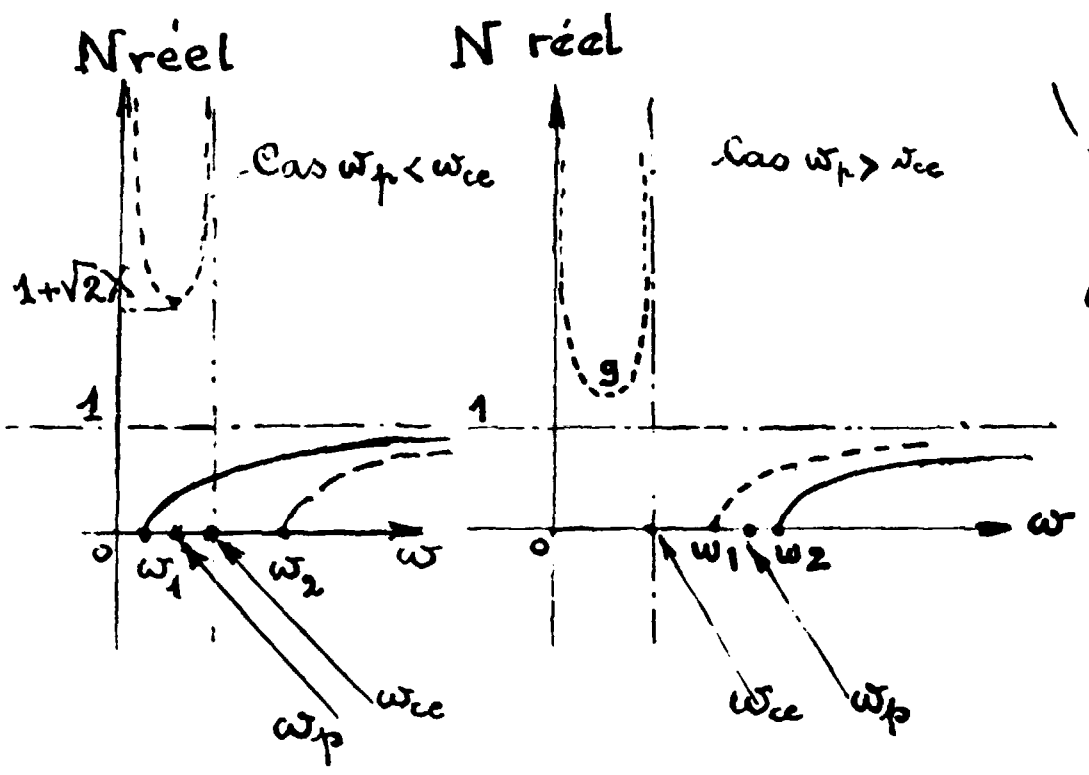
## I. Cas longitudinal

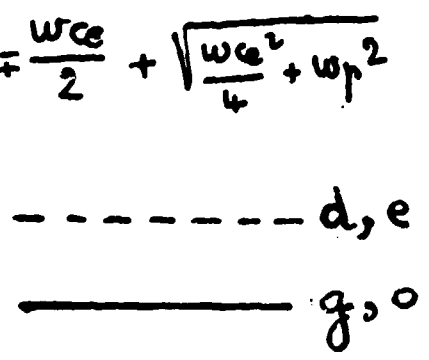



$$N^2_{g,d} = 1 - \frac{X}{1 \pm Y_c - jZ}$$

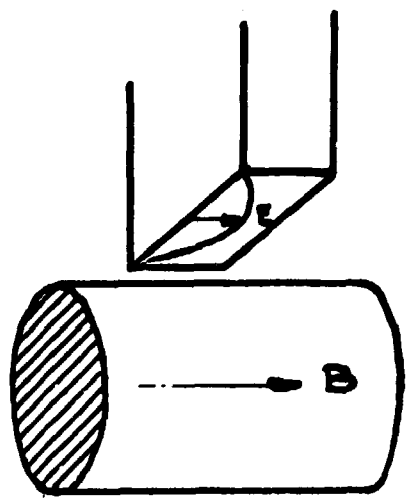


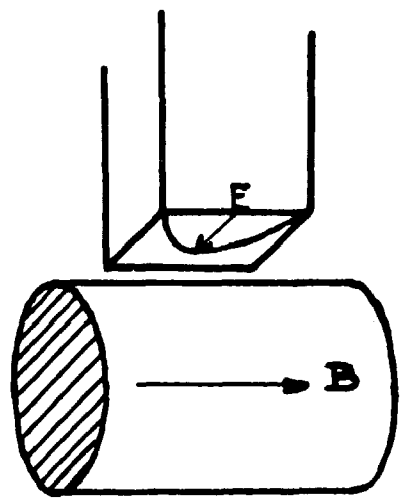

$$\omega_{1,2} = \mp \frac{\omega_{ce}}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_p^2}$$



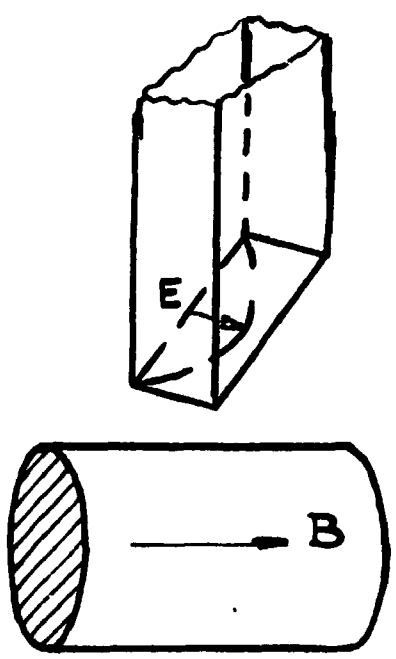
# II Cas Transversaux

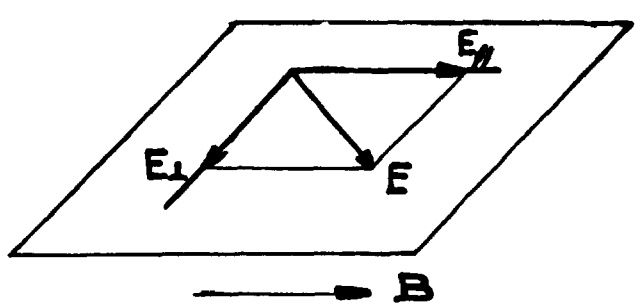



$$N_o^2 = 1 - \frac{X}{1-jZ}$$

$$N_{ex}^2 = 1 - \frac{X(1-X-jZ)}{(1-jZ)(1-X-jZ)-Y^2}$$




No et Nex

FIN