CEA 1448 - KRAFFT J.

OPTIQUE D'UN SECTEUR MAGNETIQUE A DOUBLE FOCALISATION PAR EFFET DE FRANGES (1960).

Sommaire.- Etude générale des éléments optiques d'un sélecteur magnétique à double focalisation par effet de franges, en vue de l'application à la monochromation du faisceau de protons, deutons ou tritons de l'accélérateur 1,4 MeV.

CEA 1448 - KRAFFT J.

OPTICS OF A DOUBLE FOCUSSING MAGNETIC SECTOR BY FRINGE EFFECT (1960).

Summary.- General study of the optical elements of a double focussing magnetic selector by fringe effect, with a view to its application to the monochromation of the proton, deuton or triton beam of the 1.4 MeV accelerator

- Rapport C.E.A. n° 1448 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
et Université de Grenoble

Laboratoire de Physique Nucléaire

OPTIQUE D'UN SECTEUR MAGNETIQUE
A DOUBLE FOCALISATION PAR EFFET DE FRANGES

par

J. KRAFFT

R.60.1036

- 1960 -

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

OPTIQUE D'UN SECTEUR MAGNETIQUE A DOUBLE FOCALISATION PAR EFFET DE FRANGES

par

J. KRAFFT

Rapport CEA N° 1448

1960

CENTRE D'ÉTUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY
SERVICE DE DOCUMENTATION
Boîte postale n° 2 - Gif-sur-Yvette (S.-et-O.)

OPTIQUE D'UN SECTEUR MAGNETIQUE

A DOUBLE FOCALISATION PAR EFFET DE FRANGES

1 - EQUATION DES TRAJECTOIRES -

1.1 - Equation générale du mouvement -

Etablissons d'abord l'équation du mouvement d'un faisceau de particules monocinétiques, de faible ouverture, se déplaçant dans l'entrefer d'un aimant à induction constante et uniforme $\vec{B}$.

Choisissons (fig.1) un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) en prenant le centre du monochromateur comme origine des axes.

$\overline{OM_0} = r_0$

$\overline{OM} = r$

$\overline{M_0M} = x$

Oz ⊙

$\vec{B}$ ●

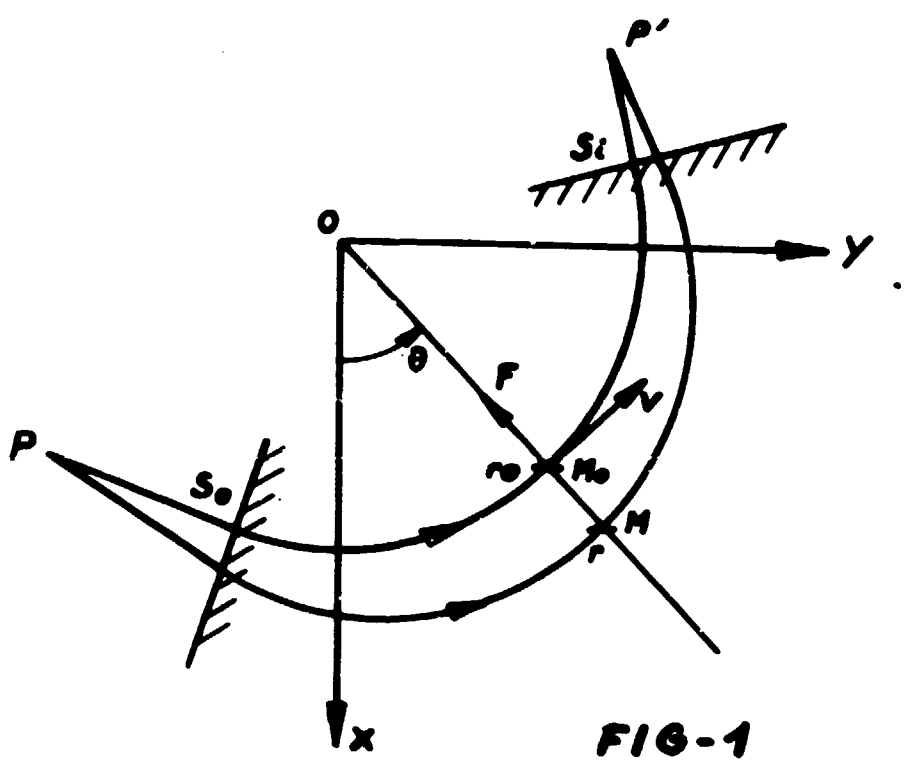

FIG-1

On appelera <u>plan médian</u> o x y le plan passant par le centre du monochromateur et situé à mi-distance des faces polaires.

On appelera <u>trajectoire moyenne</u> le cercle de centre O et de rayon r_0 rayon du monochromateur, situé dans le plan médian.

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad \text{avec} \quad F = ev \quad B$$

$$\text{et} \quad \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad \text{puisque m est constant}$$

$$\text{soit} \quad m \frac{dv}{dt} = ev \quad B \qquad (1)$$

En coordonnées cylindriques (r θ z) B a pour composante (-B) portée par oz. (De façon à avoir une force dirigée vers O pour des particules positives). e v B aura pour composante $-e\ v_0\ B$ portée par le rayon vecteur.

L'équation (1) en coordonnées cylindriques s'écrit donc :

$$m\ \ddot{r} - m\ r\ \theta^{\cdot 2} + e\ v_0\ B = o \qquad (2)$$

L'équation de la trajectoire moyenne est :

$$e\ v_0 B - m\ r_0 O^{\cdot 2} = o \qquad (3)$$

avec $v_0 = v_0 \quad {}_{r=r_0} = r_0 O^{\cdot}$

En remplaçant $\theta^{\cdot}$ par $\frac{v_0}{r_0}$ dans l'équation (3) on obtient l'équation bien connue

$$B\ r_0 = \frac{m\ v_0}{e} \qquad (4)$$

Si la charge de la particule est Z on a :

$$B\ r_0 = \frac{m\ v_0}{Z\ e} \qquad (5)$$

1.2 - Approximation de Gauss -

Equation du mouvement -

Si l'on suppose que l'ouverture du faisceau incident est très faible c'est-à-dire que les trajectoires des particules restent très près de l'axe on peut poser :

$$v_\theta = r\,\theta^{\cdot} \simeq v_o$$

L'équation générale du mouvement (2) s'écrit

$$m\,\ddot{r} + e\,B\,\theta^{\cdot}\,(r - r_o) = o \qquad (6)$$

étant donné que

$$r_o = \frac{mv_o}{eB} \simeq \frac{m\,r\theta^{\cdot}}{e\,B}$$

et $m\,r\,\theta^{\cdot 2} = e\,B\,r_o\theta^{\cdot 2}$

Equation indépendante du temps -

Appelant "s" l'abscisse curviligne mesurée sur la trajectoire moyenne et comptée à partir de la face d'entrée dans l'aimant (positivement dans le sens de propagation) on a :

$$s = r_o\theta \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = r_o\theta^{\cdot} = v_o$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{d}{ds} = v_o\,\frac{d}{ds}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = v_o^{\,2}\,\frac{d^2}{ds^2} \qquad (7)$$

Posons par ailleurs $x = r - r_o$, on obtient l'équation du type pendulaire indépendante du temps

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{e\,B}{m\,v_o\,r_o}\,x = o \qquad (8)$$

Dans le cas où l'induction $\vec{B}$ bien que dirigée suivant o z n'est pas uniforme l'équation (8) reste valable mais B est fonction de s.

L'équation (8) admet pour intégrale générale

$$x = a \cos ks + b \sin ks \qquad (9a)$$

avec $k^2 = \frac{e\,B}{m\,v_o r_o}$ puisque $k^2 s^2 = \frac{e\,B}{m\,v_o r_o} \cdot r_o{}^2 \theta^2 = \theta^2$ car $r_o = \frac{m\,v_o}{e\,B}$

(9a) s'écrit aussi $x = a \cos \theta + b \sin \theta$ (9b)

pour $\theta = o$ $x_{\theta = o} = a = x_o$

$$\left[\frac{dx}{do}\right]_{o = o} = \left[r_o \frac{dx}{ds}\right]_{\theta = o} = b = r_o \alpha_o$$

La solution de (8) est donc :

$$x = x_o \cos \theta + r_o \alpha_o \sin \theta \qquad (9c)$$

2 - FORMALISME MATRICIEL - MATRICE DE TRANSFERT -

2.1 - Emploi des matrices -

Appelons x' la dérivée $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r_o} \frac{dx}{do}$

pour $\theta = o$ $x'_{o = o} = x'_o = \alpha_o$

La solution de (9c) et sa dérivée x'

$$x = x_o \cos \theta + x'_o r_o \sin \theta$$

$$x' = -\frac{x_o}{r_o} \sin \theta + x'_o \cos \theta \qquad (9d)$$

peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & r_o \sin\theta \\ -\frac{1}{r_o}\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_o \\ x'_o \end{vmatrix} \qquad (10)$$

D'une manière générale, B n'étant pas nécessairement uniforme, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x &= a\,\sigma(s) + b\,\tau(s) \\ x' &= a\,\sigma'(s) + b\,\tau'(s) \end{aligned} \qquad (11)$$

$\sigma(s)$ et $\tau(s)$ étant deux solutions linéairement indépendantes de l'équation du mouvement.

Sous forme matricielle

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma & \tau \\ \sigma' & \tau' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \qquad (12)$$

et d'après les conditions initiales

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma(s_o) & \tau(s_o) \\ \sigma'(s_o) & \tau'(s_o) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} x_o \\ x'_o \end{vmatrix} \qquad (13)$$

l'équation (12) s'écrira donc :

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma & \tau \\ \sigma' & \tau' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma(s_o) & \tau(s_o) \\ \sigma'(s_o) & \tau'(s_o) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} x_o \\ x'_o \end{vmatrix} \qquad (14a)$$

et sous forme plus condensée

$$\Psi_i = T\,\Psi_o \qquad \begin{aligned} i &= \text{espace image} \\ o &= \text{espace objet} \end{aligned} \qquad (14b)$$

Ψ étant la fonction à deux composantes caractérisant la particule et T l'opérateur de transfert.

Plus généralement encore on peut caractériser en chaque point la particule par sa position $\vec{r}$ et son impulsion $\vec{p}$ $\Psi = \begin{vmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{vmatrix}$ $\vec{r}$ et $\vec{p}$ pouvant dépendre du temps.

Appelant S_o et S_i les points où la trajectoire moyenne coupe les frontières de la région où règne l'induction B et s_o et s_i les abscisses curvilignes de ces points (fig.1)

$$\Psi_i = \begin{vmatrix} x_i \\ x'_i \end{vmatrix} = T\,(s_o\ s_i) \begin{vmatrix} x_o \\ x'_o \end{vmatrix}$$

Ψ_i caractérise la trajectoire à la sortie du monochromateur.

La matrice T permet donc de déterminer les caractéristiques d'une trajectoire à la sortie de l'aimant connaissant les caractéristiques de cette trajectoire à l'entrée.

2.2 - <u>Matrice d'un espace sans champ magnétique</u>.

Plaçons nous dans l'espace objet (fig.2)

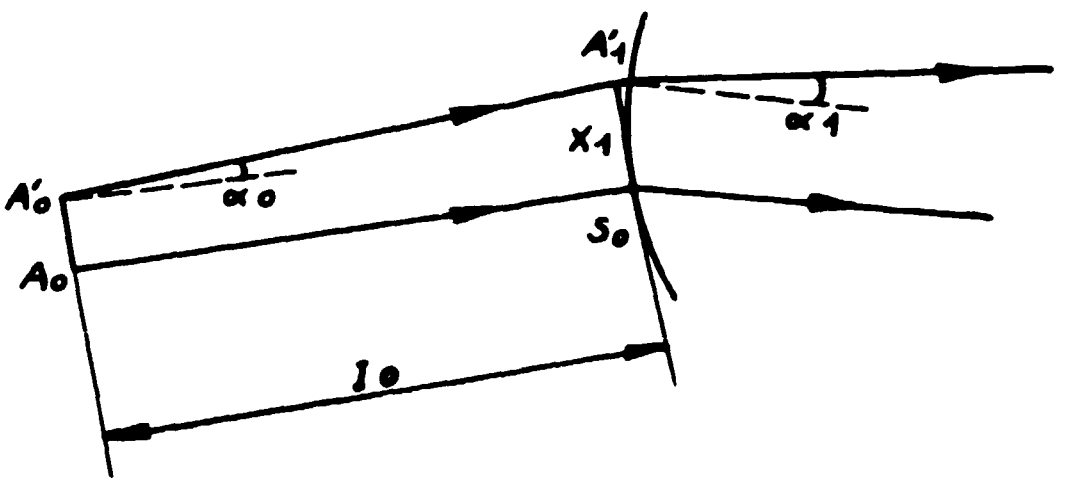

Fig. 2 - Espace objet.

Soit un point A_o situé sur l'axe à une distance l_o de S_o. L'abscisse curviligne de A_o est $(-l_o)$ si l'on prend S_o comme origine et le sens de propagation comme sens positif. Un rayon issu de A'_o, situé sur la perpendiculaire à l'axe en A_o a pour caractéristique x_o et $x'_o = \alpha_o$.

A l'entrée du monochromateur on aura :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_o - l_o x'_o \\ x'_1 &= o + x'_o \end{aligned} \qquad (15a)$$

et la matrice de l'espace sans champ est :

$$T_o = \begin{vmatrix} 1 & -l_o \\ o & 1 \end{vmatrix} \qquad (15b)$$

Dans l'espace image on aurait de même

$$T_i = \begin{vmatrix} 1 & l_i \\ o & 1 \end{vmatrix} \qquad (16)$$

3 - RELATIONS OPTIQUES GENERALES -

Un monochromateur est composé (fig.3) d'un aimant de déflexion précédé et suivi en général d'un espace sans champ.

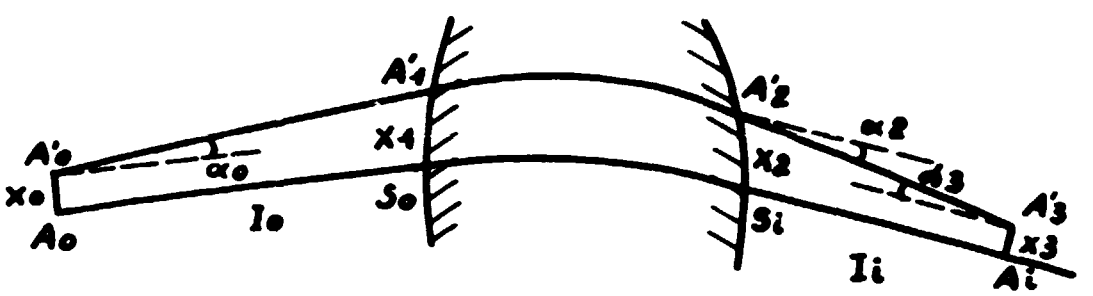

Fig. 3 - Schéma d'un monochromateur.

Utilisant le formalisme matriciel on peut écrire :

$$\Psi_3 = T_i . T . T_o . \Psi_o \tag{17}$$

En effectuant le produit $T_i . T . T_o$ on obtient pour la matrice totale M

$$M = \begin{vmatrix} T_{11} + l_i T_{21} & T_{12} + l_i T_{22} - l_o (T_{11} + l_i T_{21}) \\ T_{21} & T_{22} - l_o T_{21} \end{vmatrix} \tag{18}$$

En caractérisant l'espace où règne le champ magnétique par la matrice

$$T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \tag{19}$$

<u>Pour que le point A'_3 $(l_i x_3)$ soit l'image du point A'_o $(-l_o, x_o)$ il faut et il suffit que x_3 soit indépendant de $x'_o = \alpha_o$; c'est-à-dire que $M_{12} = o$, soit :</u>

$$T_{12} + l_i T_{22} - l_o (T_{11} + l_i T_{21} = o \tag{20a}$$

ce qui donne la relation devant exister entre l_o et l_i pour que $A_3A'_3$ soit l'image de $A_oA'_o$.

Cette relation (20a) permet de déterminer les principaux éléments optiques du monochromateur.

3.1 - <u>Position des foyers</u> -

La relation (20a) s'écrit :

$$\frac{T_{22}}{l_o} - \frac{T_{11}}{l_i} + \frac{T_{12}}{l_o l_i} - T_{21} = o \tag{20b}$$

Si l_i est infini on a alors l'abscisse du foyer objet

$$g_o = \frac{T_{22}}{T_{21}} \tag{21}$$

la position du foyer image est déterminée de la même façon.

on obtient :

$$g_i = - \frac{T_{11}}{T_{21}} \tag{22}$$

Il faut remarquer que g_o et g_i sont mesurés sur des axes différents faisant entre eux un angle θ. (Angle de déflexion).

3.2 - <u>Plans principaux</u> -

La relation (20) peut se simplifier en utilisant pour nouvelles origines des abscisses curvilignes, les points principaux H_o et H_i d'abscisses h_o et h_i.

on a : $\overline{S_oA_o} = \overline{S_oH_o} + \overline{H_oA_o} = h_o + p_o$

$\overline{S_iA_i} = \overline{S_iH_i} + \overline{H_iA_i} = h_i + p_i$

la relation (20) s'écrit alors :

$$\frac{1}{p_o} - \frac{1}{p_i} = \frac{T_{21}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{f_o} \tag{23}$$

étant le déterminant de la matrice T

(23) est la relation de Descartes pour les systèmes centrés (origines aux points principaux). Cette relation peut encore s'écrire (fig. 4).

$$(l_o - g_o)\,(l_i - g_i) = F_oF_i \tag{24}$$

C'est la relation de Newton pour les systèmes centrés (origines aux foyers).

on trouve aussi :

$$h_o = \frac{T_{22} - \sqrt{\Delta}}{T_{21}}$$

$$h_i = \frac{- T_{11} - \sqrt{\Delta}}{T_{21}} \qquad (25)$$

3.3 - <u>Grandissement</u> -

D'après $x_i = x_o M_{11} + x' M_{12} = x_o M_{11}$ puisque $M_{12} = o$

on voit que : $G = \frac{x_i}{x_o} = M_{11}$ (26a)

$$G = T_{11} + T_{21}\, l_i = \frac{-\Delta}{T_{21} l_o - T_{22}} \qquad (26b)$$

<u>Remarque</u> - Aux points H_o et H_i d'abcisse h_o et h_i on obtient $G = + \Delta$ dans le cas qui nous intéresse $\Delta = 1$ et les points H_o et H_i sont bien les points principaux au sens de l'optique géométrique.

3.4 - <u>Résumé des formules</u> -

En résumé, pour tout système, admettant dans le cadre de l'approximation de Gauss, une équation différentielle des trajectoires en x et s dont les solutions sont linéairement indépendantes on pourra appliquer le formalisme matriciel, c'est-à-dire que l'on pourra le réduire à un système centré de l'optique géométrique.

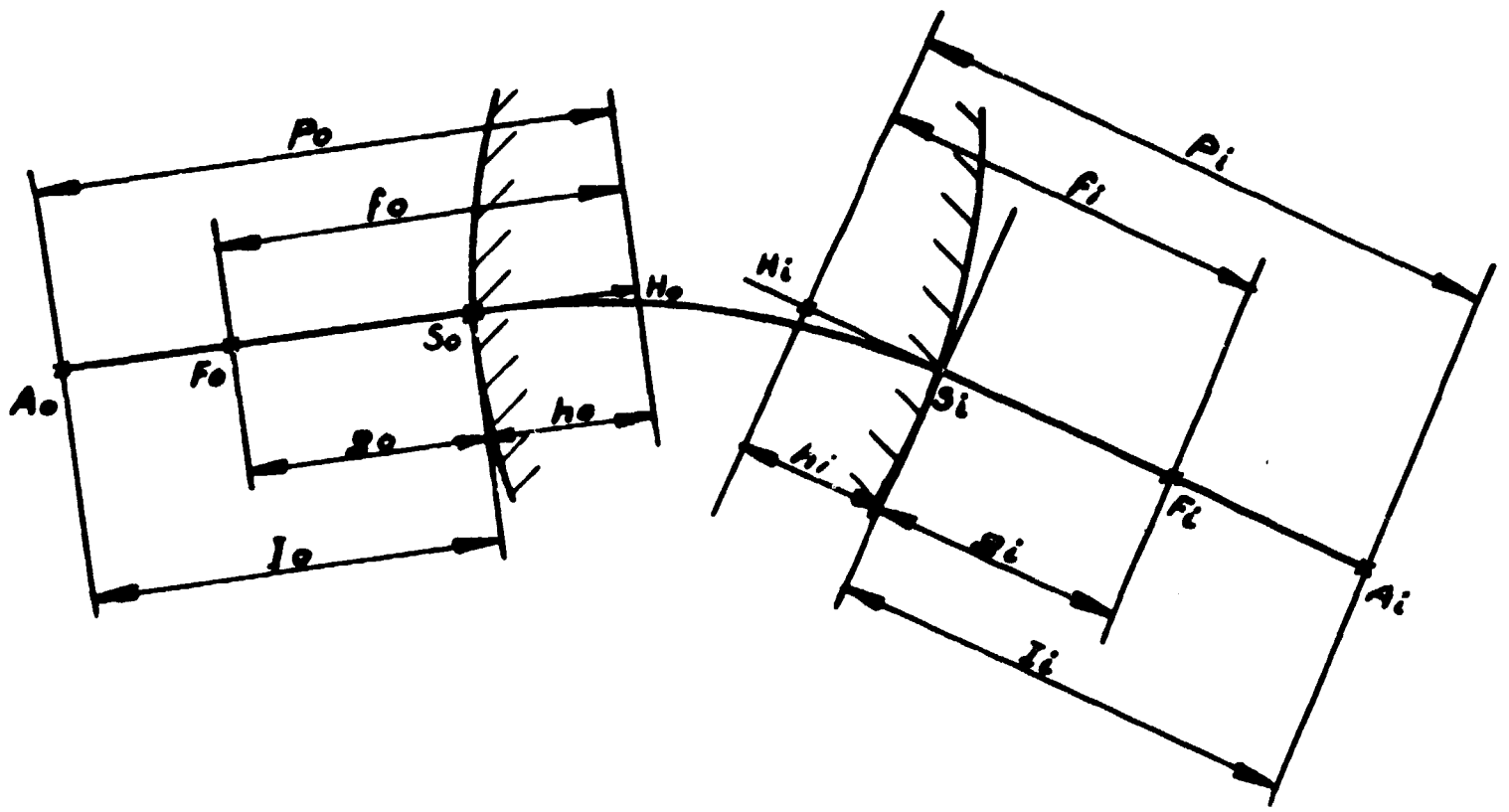

Fig. 4 - Caractéristiques optiques d'un sélecteur magnétique.

Les formules obtenues, suivant les origines choisies, donnant les éléments optiques sont les suivantes

a) origines en S_o et S_i

$$l_o = \frac{T_{12} + T_{22}\, l_i}{T_{11} + T_{21}\, l_i} \qquad l_i = \frac{T_{12} - T_{11}\, l_o}{T_{21} l_o - T_{22}}$$

$$G = T_{11} + T_{21}\, l_i = \frac{-\Delta}{T_{21} l_o - T_{22}}$$

$$g_o = \frac{T_{22}}{T_{21}} \qquad g_i = \frac{-T_{11}}{T_{21}}$$

$$h_o = \frac{T_{22} - \sqrt{\Delta}}{T_{21}} \qquad h_i = \frac{-T_{11} - \sqrt{\Delta}}{T_{21}}$$

b) origines en H_o et H_i

$$\frac{1}{p_o} - \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_o}$$

$$f_o = \frac{\sqrt{\Delta}}{T_{21}} \qquad f_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{T_{21}} = - f_o$$

c) origines en F_o et F_i

$$(l_o - g_o)\,(l_i - g_i) = f_o f_i$$

4 - SECTEUR MAGNETIQUE AVEC EFFETS DE FRANGES -
Cas du plan médian -

Lorsqu'on désire obtenir une focalisation à la fois axiale et azimutale (double focalisation) on peut la réaliser aisément en utilisant les effets de franges aux frontières du champ magnétique (Heyn 1958). Pratiquement on fait varier la distribution du champ de franges en inclinant les faces d'entrée et de sortie de l'analyseur.

Dans ce cas il y a deux matrices supplémentaires pour chacun des plans médian et azimutal, représentant la traversée des zones de franges.

4.1 - <u>Détermination des matrices de franges du plan médian R_o et R_i</u> -

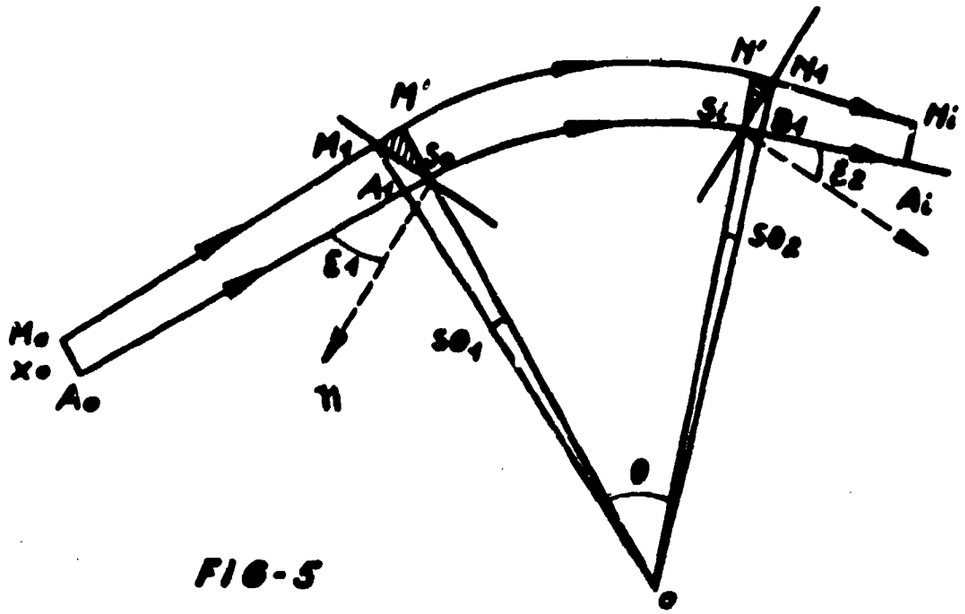

Fig. 5 - Schéma d'un monochromateur magnétique avec effets de franges (plan médian).

La matrice totale représentant la trajectoire des particules de M_0 à N_i est :

$$M = T_i \; R_i \; T' \; R_0 \; T_0 \tag{27}$$

R_0 et R_i étant les deux matrices des zones de franges.

D'après la figure 5 $\overline{A_1S_0}$ étant petit devant $\overline{A_0S_0}$ on peut écrire que $\overline{A_0S_0} = l_0 \simeq \overline{A_0A_1}$

cherchons la matrice R_0 de la petite région (S_0, M, M')

la distance M_1M' étant petite on peut écrire que

$$x_2 = \overline{S_0M'} = \overline{A_1M_1} = x_1 \tag{28a}$$

$$x'_2 = x'_1 + \delta\theta_1 \tag{28b}$$

En appelant $\delta\theta_1$, l'angle des trajectoires à l'entrée et à la sortie de cette petite région. La trajectoire moyenne A_oS_o fait un angle ε_1, avec la normale à la face d'entrée orientée vers l'extérieur du champ.

on a $\varepsilon_1 = \widehat{n\ S_o\ A_o} = \widehat{M_1\ S_o\ M'}$

ε_1 sera choisi positif si la normale $\overrightarrow{S_on}$ est placée de l'autre côté de la trajectoire par rapport au centre du monochromateur (sur la figure 5 ε_1 est négatif).

On peut ainsi déterminer $\delta\theta_1$ et écrire :

$$tg\ \varepsilon_1 = \frac{\overline{M'M_1}}{\overline{A'M'}} \simeq \frac{r_o\,\delta\theta_1}{x_1}$$

$$\delta\theta_1 = x_1\ \frac{tg\ \varepsilon_1}{r_o} \qquad (29)$$

On a choisi comme sens positif pour $\delta\theta_1$ le sens de rotation du rayon vecteur correspondant à un déplacement positif sur la trajectoire.

Sur la figure 5 $\overline{M'M_1}$ est négatif et $\delta\theta_1$ est négatif d'où :

$$R_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{tg\ \varepsilon_1}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \qquad (30)$$

Si l'on considère cette petite région séparément et si on lui applique les formules générales précédentes on trouve qu'elle est équivalente à une lentille mince (car pendant la traversée de cette région x reste constant et seul x' varie). La distance focale de cette lentille est $f = \dfrac{r_o}{tg\ \varepsilon_1}$.

La matrice R_1 de la petite région $(S_1N'N_1)$ s'écrira de la même façon

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{tg\varepsilon_2}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \qquad (31)$$

en prenant pour $_2$ et la normale à la face de sortie les mêmes conventions de signe.

4.2 - <u>Matrice totale</u> -

La matrice totale M est donc d'après (27) et (10)

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{tg\varepsilon_2}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & r_o \sin\theta \\ -\dfrac{1}{r_o}\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{tg\varepsilon_1}{} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -l_o \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Pour l'aimant seul la matrice $T = R_1T'R_o$ s'écrit :

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{tg\varepsilon_2}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & r_o \sin\theta \\ -\dfrac{1}{r_o}\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{tg\varepsilon_1}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \qquad (33)$$

$$T_{11} = \cos\theta + tg\varepsilon_1 \sin\theta$$

$$T_{12} = r_o \sin\theta$$

$$T_{21} = \frac{tg\varepsilon_1 + tg\varepsilon_2}{r_o}\cos\theta + \frac{1}{r_o}\left[tg\varepsilon_1\, tg\varepsilon_2 - 1\right]\sin\theta$$

$$T_{22} = \cos\theta + tg\varepsilon_2 \sin\theta$$

le déterminant est égal à l'unité.

<u>Eléments optiques</u> -

Foyers objet $g_o = \dfrac{r_o\,(1+tg\,\varepsilon_2\ tg\,\theta)}{tg\,\varepsilon_1 + tg\,\varepsilon_2 + (tg\,\varepsilon_1\ tg\,\varepsilon_2 - 1)\,tg\,\theta}$

image $g_i = \dfrac{-r_o\,(1+tg\,\varepsilon_1\ tg\,\theta)}{tg\,\varepsilon_1 + tg\,\varepsilon_2 + (tg\,\varepsilon_1\ tg\,\varepsilon_2 - 1)\,tg\,\theta}$

Plans principaux

objet $h_o = \dfrac{r_o\,(1-\cos\theta - tg\,\varepsilon_2\ \sin\theta)}{tg\,\varepsilon_1 + tg\,\varepsilon_2 + (tg\,\varepsilon_1\ tg\,\varepsilon_2 - 1)\,tg\,\theta}$

image $h_i = \dfrac{r_o\,(1-\cos\theta - tg\,\varepsilon_1\ \sin\theta)}{tg\,\varepsilon_1 + tg\,\varepsilon_2 + (tg\,\varepsilon_1\ tg\,\varepsilon_2 - 1)\,tg\,\theta}$

Distances focales objet $f_o = \dfrac{r_o}{\cos\theta\,(tg\,\varepsilon_1 + tg\,\varepsilon_2) + (tg\,\varepsilon_1\ tg\,\varepsilon_2 - 1)\,tg\,\theta}$

image $f_i = -\,f_o$

5 - DETERMINATION DE L'IMAGE PAR LA CONSTRUCTION DE CARTAN (Plan médian) -

Cette construction est fondée sur le principe suivant : la position de l'image <u>ne dépend pas de l'angle d'ouverture du faisceau dans le cas de l'approximation de Gauss</u> et on néglige les termes du second ordre. Il est donc inutile de préciser au second ordre la trajectoire d'une particule à l'intérieur de l'aimant. On peut donc remplacer la projection des faces d'entrée et de sortie sur le plan médian par des courbes tangentes à ces projections aux points d'intersection avec la trajectoire moyenne.

5.1 - <u>Faces d'entrée et de sortie perpendiculaires à la trajectoire moyenne</u> -

La construction revient à remplacer les droites projections des faces d'entrée et de sortie par des arcs de cercle centrés en A_o et A_i et tangents à ces droites en A_1 et A_2 (fig.6).

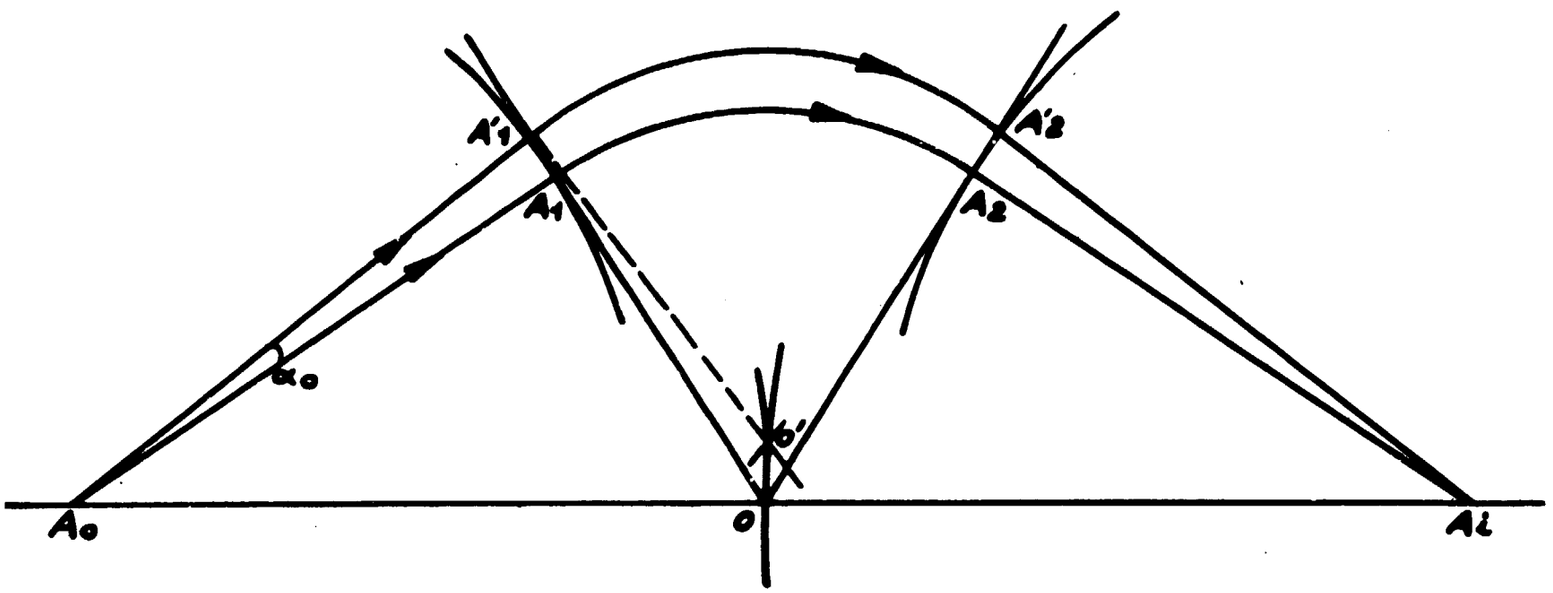

Fig. 6 - Construction de Cartan. Cas des faces perpendiculaires -

La trajectoire moyenne est $A_oA_1A_2A_i$. Une particule émise en A_o avec l'angle α_o décrira à l'intérieur de l'aimant un arc de cercle de rayon r_o.

A'_1 se trouve sur cet arc de cercle de rayon r_o et sur l'arc de cercle de centre A_o et de rayon A_oA_1. Le centre de l'arc de cercle $A'_1A'_2$ se trouve sur la perpendiculaire à $A_oA'_1$ en A'_1.

En appelant O' ce centre, $\overline{A_oA'_1}$ étant constant puisqu'égal à $\overline{A_oA_1}$ et $\overline{A'_1O'}$ étant aussi constant puisqu'égal à r_o,

en outre le triangle $A_oA'_1O'$ étant rectangle, la distance $\overline{A_oO'}$ est constante, et le lieu des centres des arcs de cercle de rayon r_o est donc un arc de cercle de centre A_o et de rayon A_oO.

En raisonnant de même pour la face de sortie on démontre que le lieu des centres des arcs de cercle de rayon r_o se trouve aussi sur un arc de cercle de centre A_i et de rayon A_io. Pour que ces deux lieux coïncident au second ordre près ils doivent être tangents en O et A_o, O et A_i sont alignés.

5.2 - <u>Faces d'entrée et de sortie non perpendiculaires à la trajectoire moyenne</u> -

Supposons tout d'abord la face d'entrée perpendiculaire à la trajectoire moyenne et la face de sortie faisant un angle ε_2 avec la trajectoire moyenne. Soit A_o le point objet situé sur la trajectoire moyenne $A_oA_1A_2A_i$ et soit $\overline{A_oA'_1}$ faisant l'angle α avec la trajectoire moyenne. Le lieu des centres des cercles, trajectoires des particules à l'intérieur de l'aimant, est encore un arc de cercle centré sur A_o et passant par O.

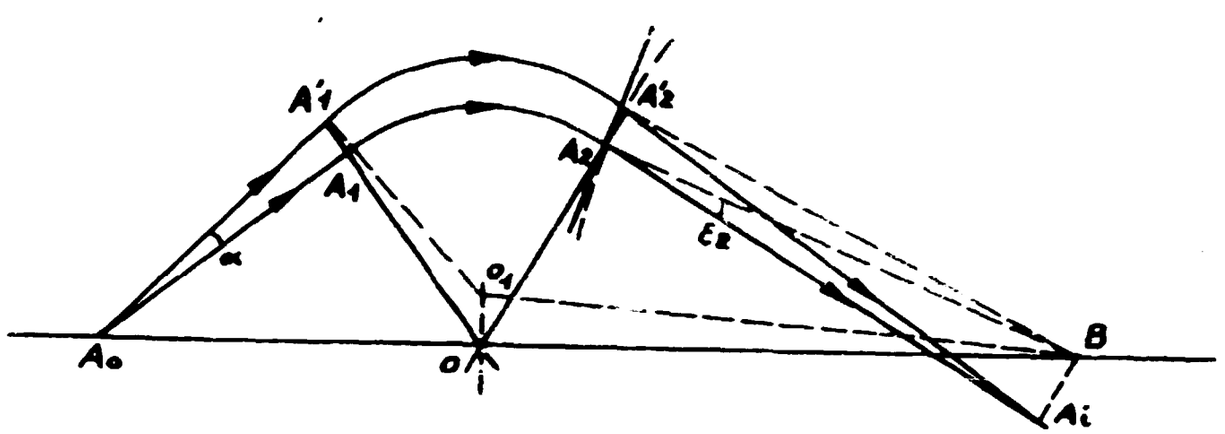

Fig.7a - Construction de Cartan -
Face de sortie non perpendiculaire à la trajectoire moyenne -

Remplaçons la projection de la face de sortie par un arc de cercle centré en B et tangent à la face de sortie en A_2 ; B étant l'intersection de la normale en A_2 à la face de sortie avec la droite A_oC.

Le point O_1 étant le centre du cercle de rayon r_o passant par A'_1, l'arc de cercle OO_1 est petit et au deuxième ordre près $\overline{BO} = \overline{BO_1}$. Par ailleurs $\overline{BA'_2} = \overline{BA_2}$ et $\overline{OA_2} = \overline{O_1A'_2}$ par construction.

Les deux triangles OBA_2 et $O_1BA'_2$ sont égaux et dans ces triangles les angles en A_2 et A'_2 sont égaux. Donc $A_1A'_2B = \varepsilon_2$

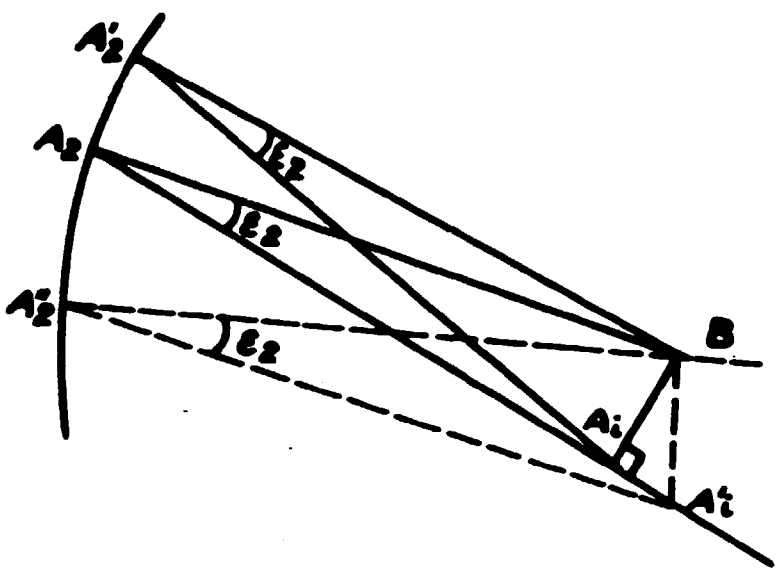

Figure 7b - Détail de la figure 7a -

Considérons la figure 7b, A_2 et A'_2 étant deux points voisins sur un même cercle de centre B. Par A_2 et A'_2 on mène des droites faisant l'angle ε_2 respectivement avec $\overline{BA_2}$ et $\overline{BA'_2}$. Ces droites se coupent en A_1.

Prenons un troisième point A''_2. La demie droite passant par A''_2 et faisant l'angle ε_2 avec BA''_2 coupe la trajectoire moyenne en A'_i.

L'angle d'ouverture du faisceau étant petit, $\overline{A_iA_2} = \overline{A_iA'_2}$ de même $\overline{A'_iA_2} = \overline{A'_iA''_2} \simeq \overline{A_iA_2}$.

On en déduit que les triangles $A''_2BA'_i$, $A'_2B\,A_i$ et $A_2B\,A_i$ sont égaux et que $\overline{B\,A_i} = \overline{B\,A'_i}$.

Lorsque A'_2 se déplace sur le cercle de centre B, A_i se déplace sur le cercle de centre B passant par A_i et au deuxième ordre près sur la tangente en A_i à ce cercle ; donc BA_i est perpendiculaire à la trajectoire moyenne.

On généralise au cas où la face d'entrée est elle aussi inclinée sur la trajectoire moyenne.

La construction de Cartan est ainsi la suivante : soit un objet A_o sur la trajectoire moyenne. Par A_o on élève la perpendiculaire à la trajectoire moyenne. Elle coupe la normale à la face d'entrée en H. On joint H et O centre du monochromateur. Cette droite coupe la normale à la face de sortie en K. De K on abaisse la perpendiculaire sur la trajectoire moyenne en A_i. A_i est l'image de A_o.

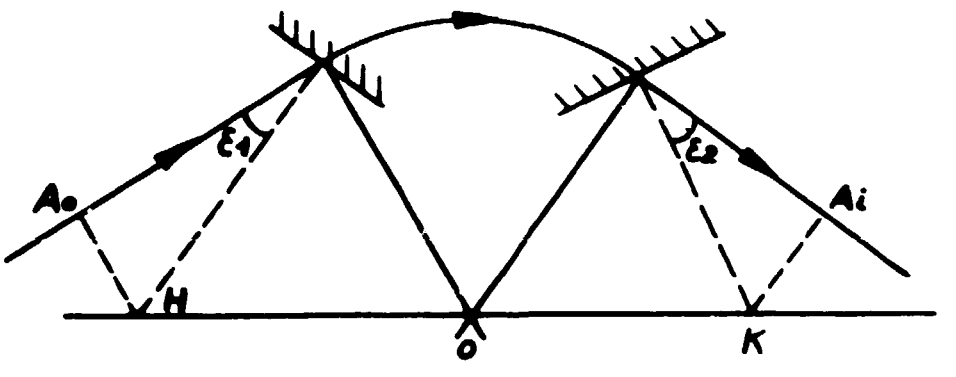

Figure 8 - Construction générale de Cartan -

6 - SECTEUR MAGNETIQUE AVEC EFFETS DE FRANGES - CAS DU PLAN AZIMUTAL -

Nous appelons plan azimutal le plan perpendiculaire au plan médian et coupant celui-ci suivant la trajectoire moyenne. Ce plan comprend une portion formée par la développée du cylindre ayant comme directrice l'arc de cercle portion de la trajectoire moyenne dans le champ magnétique.

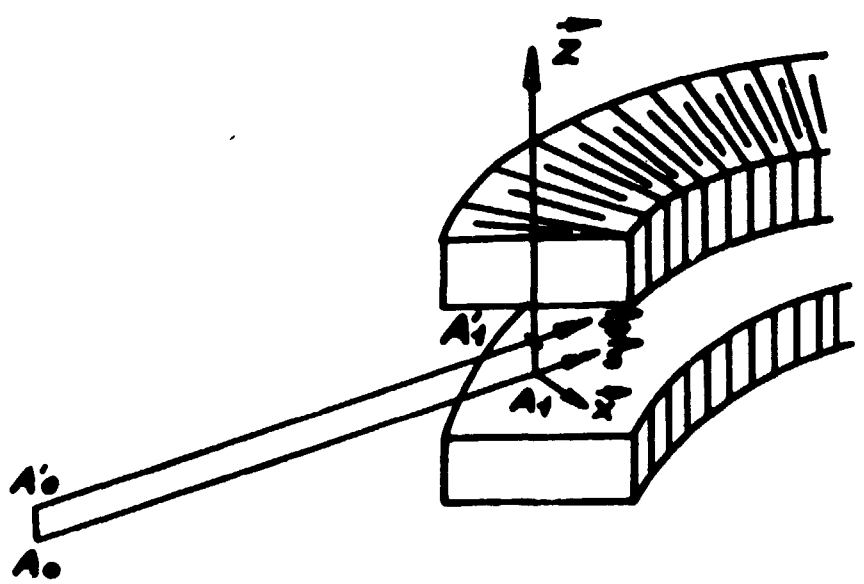

Fig. 9 - Focalisation azimutale

$\overrightarrow{A_1s}$ est la tangente à la trajectoire.

$\overrightarrow{A_1x}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{A_1s}$.

Soit A'_o un point objet émettant des particules suivant $A'_oA'_1$ parallèle à la trajectoire moyenne A_oA_1. Aux extrêmités des pièces polaires le champ magnétique ne s'annule pas brutalement. Il existe un champ de fuite ou "champ de frange".

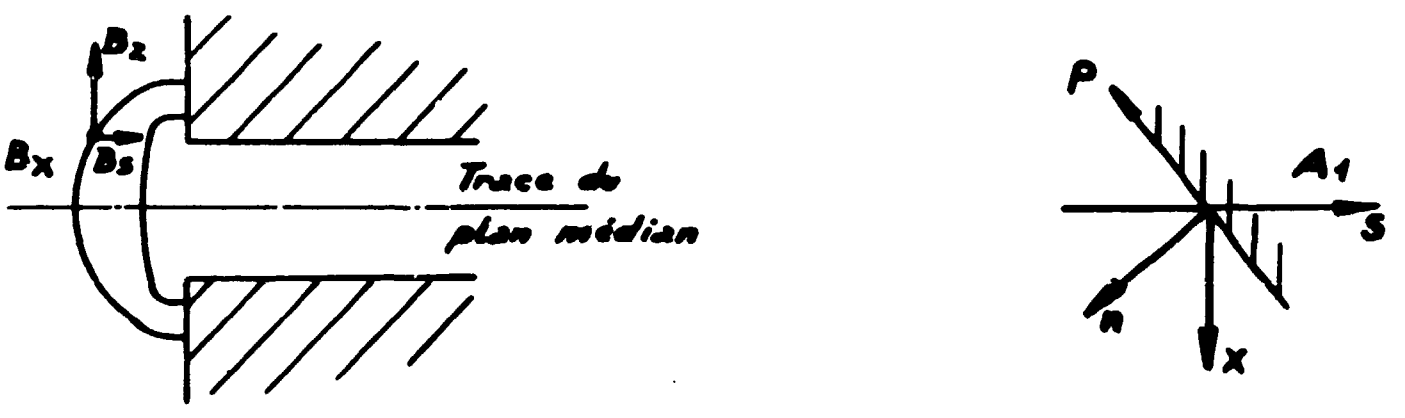

Fig. 10 - Champ magnétique de frange -

Pour raison de symétrie, les lignes de force du champ de frange traversent le plan médian normalement. En chaque point extérieur au plan médian l'induction possède une composante $\vec{B_n}$ parallèle à $\vec{A_1 n}$, normale à la face polaire. Cette composante produit une force de déviation suivant $\vec{A_1 z}$ sur une particule ne se déplaçant pas dans le plan médian et dont la vitesse n'est pas dirigée suivant $\vec{A_1 n}$, donc n'entrant pas ou ne sortant pas normalement aux faces d'entrée ou de sortie du monochromateur. C'est ce qu'on appelle l'effet de frange. Cette force est égale à la projection sur $\vec{A_1 z}$ de $\vec{F} = e\,(\vec{v} \wedge \vec{B})$.

Dans le trièdre A_1, x, s, z l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\,\ddot{z} = e\,(v_x B_s - v_s B_x) \tag{37a}$$

v_x étant sensiblement égal à zéro on a :

$$m\,\ddot{z} = -e\,v_s B_x \tag{37b}$$

Intégrons cette équation d'un point A situé à l'extérieur de l'entrefer à un point B situé à l'intérieur où B_x est nul (fig. 10).

$$\Delta z^{\bullet} = z^{\bullet}_B - z^{\bullet}_A = \int_A^B \ddot{z}\,dt \tag{38a}$$

$$\Delta z^{\bullet} = -\frac{e}{m} \int_A^B B_x ds \tag{38b}$$

Par ailleurs d'après la figure (10b) on a :

$$B_x = B_p \cos(\pi - \varepsilon_1) + B_n \cos(\pi/2 - \varepsilon_1) = B_n \sin\varepsilon_1 \tag{39}$$

puisque $B_p = o$. La relation (38) s'écrit donc avec (39), et en remarquant que $\vec{dn} = -\vec{ds}\cos\varepsilon_1$

$$\Delta \dot{z} = \frac{e}{m}\, tg\,\varepsilon_1 \int_A^B B_n\,dn \tag{40}$$

Il reste à évaluer l'intégrale $\int_A^B B_n \, dn$ en utilisant la propriété que l'intégrale curviligne $\oint B ds$ le long d'un contour fermé est nulle.

On prend pour contour fermé un rectangle dont les petits côtés sont parallèles à oz et dont les grand côtés sont constitués par la trajectoire moyenne et une parallèle à cette trajectoire d'ordonnée z. Les petits côtés sont perpendiculaires au plan médian aux points C et D.

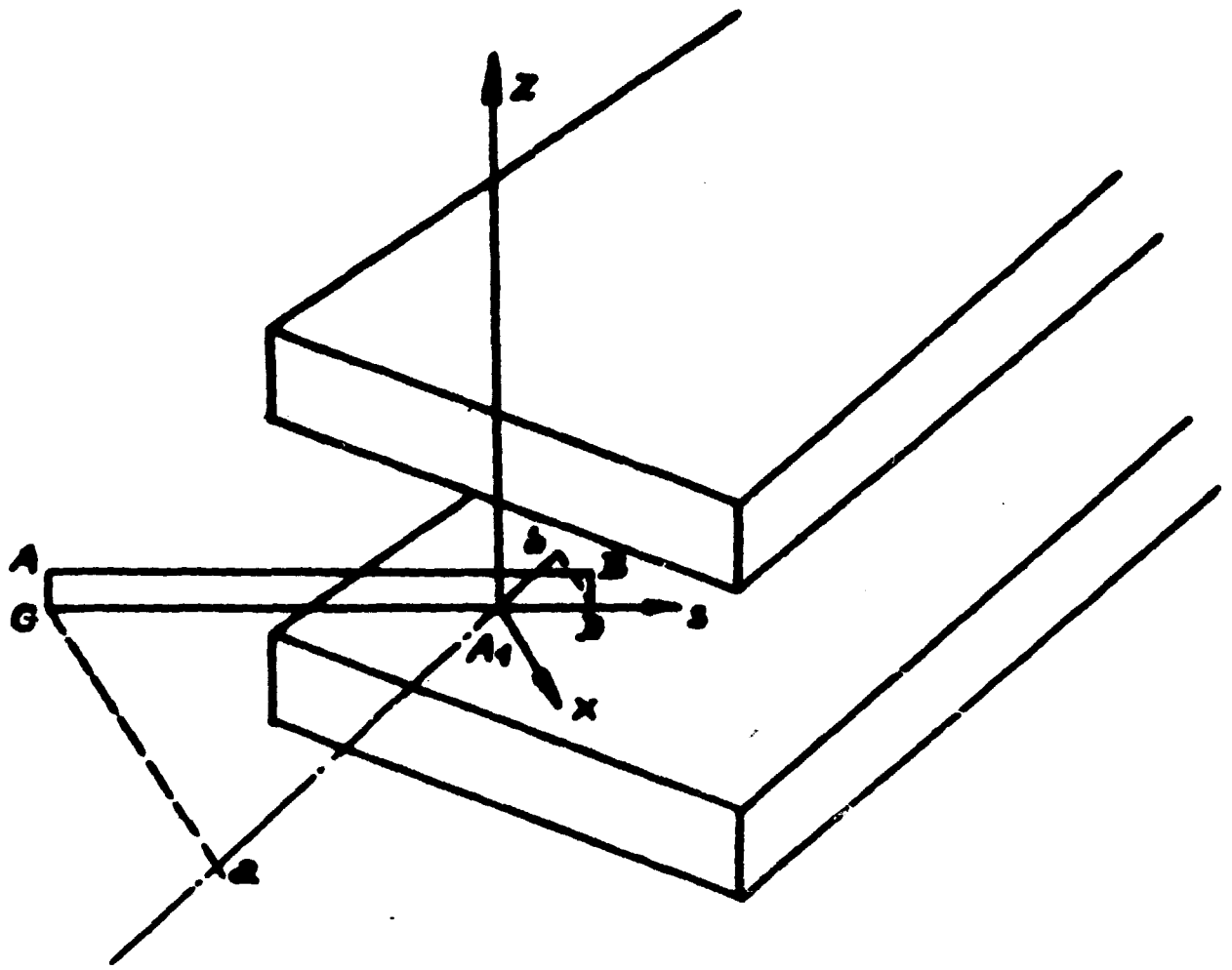

Figure 11 - Effet de franges -

$$\oint B ds = \int_C^D B_n \, dn + \int_D^B B_z \, dz + \int_B^A B_n \, dn + \int_A^C B_z \, dz = 0 \qquad (41a)$$

Sur l'axe $\overrightarrow{A_1 n}$ les abscisses sont : a pour les points A et C et b pour les points B et D. L'ordonnée sur oz est z pour A et B et zéro pour C et D dans le plan médian

or $B_n = o$ pour $z = o$ donc $\int_C^D B_n \, dn = o$

d'autre part B_z en A et C $\simeq o$ si A et C sont suffisamment loin.

$$\text{Il reste} \quad \int_A^B B_n \, dn + \int_D^B B_z \, dz = o \qquad (41b)$$

$$\text{d'où} \quad \int_A^B B_n \, dn = - \int_o^z B_o \, dz = - B_o z \qquad (41c)$$

l'induction dans l'entrefer étant, avec nos conventions de signe $B_z = - B_o$

La relation (40) s'écrit donc :

$$\Delta z' = - \frac{e}{m} \, tg \, \varepsilon_1 \, B_o z \qquad (42a)$$

et en fonction de la variable s

$$\Delta z' = - tg \varepsilon_1 \frac{eB_o}{m \, v} z = - \frac{z}{r_o} \, tg \, \varepsilon_1 \qquad (42b)$$

<u>Le champ de frange agit donc pour les trajectoires du plan azimutal comme une lentille mince de distance focale</u> $- \frac{r_o}{tg \varepsilon_1}$; et cette lentille sera convergente si ε_1 est positif.

Les matrices des lentilles minces équivalentes aux faces d'entrée et de sortie sont donc :

$$S_o \equiv \begin{vmatrix} 1 & o \\ - \frac{tg \, \varepsilon_1}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \qquad (43) \qquad\qquad S_i \equiv \begin{vmatrix} 1 & o \\ - \frac{tg \, \varepsilon_2}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \qquad (44)$$

Enfin la matrice T' pour l'aimant lui-même est :

$$T' \equiv \begin{vmatrix} 1 & r_0\,\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (45)$$

La matrice totale du monochromateur $T = S_1 T' S_0$ pour le plan azimutal est finalement :

$$T \equiv \begin{vmatrix} 1 - \theta\, tg\, \varepsilon_1 & r_0\,\theta \\ -\frac{1}{r_0}\left(tg\,\varepsilon_1 + tg\,\varepsilon_2 + \theta\, tg\,\varepsilon_1\, tg\,\varepsilon_2\right) & 1 - \theta\, tg\,\varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

7 - DOUBLE FOCALISATION -

On dit qu'il y a double focalisation lorsque les plans images d'un même objet dans les plans médian et azimutal sont confondus.

On dit qu'il y a focalisation du second ordre lorsqu'en plus les deux images ont la même grandeur. Le système est alors stigmatique.

D'après la relation générale (20) on peut écrire :

$$l_i = \frac{T_{12} - l_0\, T_{11}}{l_0 T_{21} - T_{22}} \qquad (20)$$

Dans le plan médian on aura en posant $\Omega = \theta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$$\frac{l_i}{r_0} = \cos\varepsilon_2 \, \frac{\sin\theta + \frac{l_0}{r_0}\,\frac{\cos(\theta - \varepsilon_1)}{\cos\varepsilon_1}}{\cos(\theta - \varepsilon_2) - \frac{l_0}{r_0}\,\frac{\sin\Omega}{\cos\varepsilon_1}} \qquad (47a)$$

Dans le plan azimutal on aura de même à partir de (46)

$$\frac{l'_i}{r_o} = \frac{\theta + \frac{l_o}{r_o}(1 - \theta\, tg\varepsilon_1)}{1-\theta tg\varepsilon_2 - \frac{l_o}{r_o}\left[tg\varepsilon_1 + (1-\theta tg\varepsilon_1)tg\varepsilon_2\right]} \qquad (48a)$$

on peut écrire les relations (47) et (48)

$$\frac{r_o}{l_i} = tg\,(\theta - \psi) - tg\varepsilon_2 \quad \text{avec} \quad tg\psi = tg\varepsilon_1 + \frac{r_o}{l_o}$$

$$\frac{r_o}{l'_i} = tg\varepsilon_2 - \frac{1}{\theta - Ctg\eta} \quad \text{avec} \quad tg\,\eta = tg\varepsilon_1 - \frac{r_o}{l_o}$$

En écrivant $l_i = l'_i = l_{id}$ on obtient :

$$tg\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left[\; tg\,(\theta - \psi) + \frac{1}{\theta - ctg\eta}\right] \qquad (49)$$

en portant $tg\varepsilon_2$ dans $\frac{r_o}{l'_i}$ on aura :

$$\frac{r_o}{l_{id}} = \frac{1}{2}\left[\; tg\,(\theta - \psi) - \frac{1}{\theta - ctg\eta}\right] \qquad (50)$$

Pour un l_o donné on trace donc les courbes de l_{id} en fonction de ε_1 et les courbes de ε_2 en fonction de ε_1.

8 - ABERRATION DE MASSE -

8.1 - Equation des trajectoires des particules d'énergie $V_o + \Delta V$ -

Etudions la marche d'un faisceau de particules, émises par le poi t A_o suivant l'axe A_oS_o, d'énergie comprise entre V_o et $V_o + \Delta V$ (fig. 12).

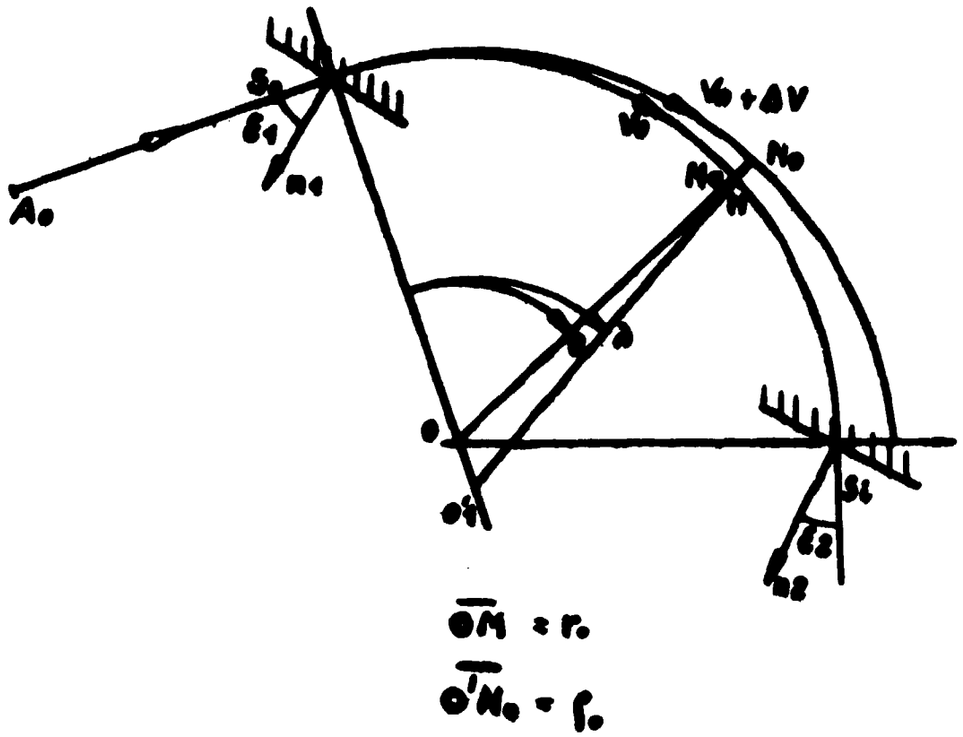

Figure 12 - Aberration chromatique -

D'après (8) l'équation des trajectoires des particules d'énergie V_0, autour du centre 0 est :

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + r = r_0 \tag{51}$$

Pour les particules d'énergie $V_0 + \Delta V$ cette équation s'écrit par rapport au centre 0'

$$\frac{d^2 \rho}{d\lambda^2} + \rho = r_0 \left[1 + \frac{\Delta V}{2V_0} \right] \tag{52}$$

On peut écrire au premier ordre $\theta = \lambda$ (fig. 12). L'augmentation de la dimension du faisceau due à l'aberration de masse est alors $M_0N_0 = \rho - r = \Delta r$.

Soustrayant membre à membre les équations (51) et (52) on obtient ainsi :

$$\frac{d^2(\rho - r)}{ds^2} + \frac{1}{r_o^2}\left[\rho - r - r_o \frac{\Delta V}{2V_o}\right] = 0 \qquad (53)$$

Posant $\omega = \rho - r - r_o \frac{\Delta V}{2V_o}$ (54) on arrive à une équation analogue à (8)

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{1}{r_o^2}\omega = 0 \qquad (55)$$

C'est l'équation des particules d'énergie $V_o + \Delta V$ <u>par rapport à celles d'énergie V_o</u> .

La lentille mince équivalente à la face d'entrée dans le monochromateur n'agit ni sur (Δr) ni sur $(\Delta r')$ qui restent nuls (hypothèse de départ).

A la sortie de l'aimant lui-même nous aurons d'après

(14b)

$$\begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & r_o \sin\theta \\ -\frac{1}{r_o}\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_o \\ \omega'_o \end{vmatrix} \qquad (56a)$$

Soient, puisque $(\Delta r)_o$ et $(\Delta r)'_o$ sont nuls

$$\begin{aligned} (\Delta r)_1 &= (1 - \cos\theta) r_o \frac{\Delta V}{2V_o} \\ (\Delta r)'_1 &= \sin\theta \frac{\Delta V}{2V_o} \end{aligned} \qquad (56b)$$

Enfin à la sortie du monochromateur

$$\begin{vmatrix} (\Delta r)_2 \\ (\Delta r)'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{tg\varepsilon_2}{r_o} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\Delta r)_1 \\ (\Delta r)'_1 \end{vmatrix} \qquad (57a)$$

Soient $(\Delta r)_2 = r_o\ (1 - \cos\theta)\ \frac{\Delta V}{2 V_o}$

$$(\Delta r)'_2 = \left[(1 - \cos\theta)\ tg\varepsilon_2 + \sin\theta\right] \frac{\Delta V}{2 V_o} \qquad (57b)$$

Au plan image

$$(\Delta r)_i = \left\{r_o\ (1 - \cos\theta) + l_i\ \left[(1 - \cos\theta) tg\varepsilon_2 + \sin\theta\right]\right\} \frac{\Delta V}{2 V_o}$$

$$(\Delta r)'_i = \left[(1 - \cos\theta)\ tg\varepsilon_2 + \sin\theta\right] \frac{\Delta V}{2 V_o} \qquad (58)$$

8.2 - <u>Dispersion</u> - <u>Résolution</u> -

La dispersion est le déplacement Δr de l'image, rapporté à une variation relative d'énergie $\frac{\Delta V}{V_o}$

$$D = \Delta r / \frac{\Delta V}{V_o} \qquad (59)$$

Si pour une variation relative d'énergie $\frac{\Delta V}{V_o}$ le déplacement Δr est égal à la largeur de l'image, l'inverse de cette variation relative d'énergie est appelée pouvoir de résolution.

$$R = 1 / \frac{\Delta V}{V_o} \qquad (60)$$

Dans ce cas la dispersion est $D = R\Delta r$ (61).

Le déplacement (Δr) dû à la variation d'énergie $\frac{\Delta V}{V_o}$ doit être comparé à la grandeur transversale de l'image.

Si x_o est la grandeur transversale de l'objet et G le grandissement du monochromateur, il faut que le rapport $\frac{(\Delta r)_i}{G x_o}$ soit le plus grand possible. Donc que x_o et G soient aussi faibles que possible.

Manuscrit reçu le 14 mars 1960.

- B I B L I O G R A P H I E -

BAINBRIDGE - SEGRE
Expérimental Nucléar Physics

CARTAN L.
Jl Phys. et Rad 11, 453 - 1937

CROSS W.G.
R.S.I. 22, 717 - 1951

GENDREAU G. et SALVAT M.
Note C.E.A. 96 - 1955
Note OC 10 - 1956

HEYN F.A.
Cours Université Delft - 1958.

FIN