CEA 1430 - GERBER R.

ETUDE THEORIQUE DE L'INFLUENCE, SUR LA TEMPERATURE DE SURFACE, D'UNE PERTURBATION GEOMETRIQUE DE LA PAROI D'UN CANAL CHAUFFE ELECTRIQUEMENT. (1960).

Sommaire. - Dans les expériences de transfert thermique en convection forcée, dans un canal chauffé électriquement, la température de la face du canal en contact avec le fluide, est généralement calculée à partir de la température mesurée de la face isolée. Un procédé de mesure de cette température conduit à étudier l'influence théorique d'une perturbation locale de l'épaisseur de la paroi. sur la répartition de la température dans cette paroi. Divers problèmes aux limites, posées par cette question de mesure, sont traités

CEA 1430 - GERBER R.

THEORETICAL STUDY OF THE INFLUENCE ON SURFACE TEMPERATURE OF A GEOMETRICAL PERTURBATION OF WALL OF AN ELECTRICALLY HEATED CHANNEL. (1960).

Summary. -In experiments on forced convection heat transfer in an electrically heated channel, the temperature of the channel face in contact with the fluid is generally calculated from the measured temperature of the isolated face. A process for measuring this temperature leads to the study of the theoretical influence of a local perturbation of the wall thickness on the temperature distribution in this wall. Various problems at the limits, posed by this question of measurement, are dealt with.

- Rapport C.E.A. n° 1430 -

Section des Transferts Thermiques
du Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble

ETUDE THEORIQUE DE L'INFLUENCE, SUR LA TEMPERATURE DE SURFACE, D'UNE PERTURBATION GEOMETRIQUE DE LA PAROI D'UN CANAL CHAUFFE ELECTRIQUEMENT

par

R. GERBER

- 1960 -

PREMIER MINISTRE
COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

ÉTUDE THÉORIQUE DE L'INFLUENCE SUR LA TEMPÉRATURE DE SURFACE D'UNE PERTURBATION GÉOMÉTRIQUE DE LA PAROI D'UN CANAL CHAUFFÉ ÉLECTRIQUEMENT

PAR

R. GERBER

RAPPORT CEA N° **1430**

1960

CENTRE D'ÉTUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY
SERVICE DE DOCUMENTATION
Boîte postale n° 2 - Gif-sur-Yvette (S.-et-O.)

INTRODUCTION

Dans les expériences de transfert thermique, en convection forcée, dans un canal chauffé électriquement, on calcule généralement la température de la face du canal en contact avec le fluide, à partir de la température mesurée de la face isolée. Lorsque la géométrie du canal est simple, ce calcul est élémentaire, dans son principe, si l'épaisseur de la paroi est constante.

Or, un procédé de mesure de la température de la face isolée consiste à souder un thermocouple directement sur cette face. Cette méthode, qui demande certaines précautions en courant continu, offre l'avantage de réduire inertie et résistance thermiques du capteur. Mais, par ce procédé, on mesure en fait la température au sommet de la goutte de soudure, dont les dimensions sont comparables à l'épaisseur de la paroi.

On a été ainsi conduit à étudier l'influence théorique d'une perturbation locale de l'épaisseur de la paroi sur la température de cette paroi. Ce problème offre d'ailleurs un intérêt, indépendamment de ce procédé de mesure, car une paroi de canal peut présenter des inégalités d'épaisseur, susceptibles de modifier la répartition de la température, d'une façon appréciable pour le calcul de l'écart de température entre faces.

Nous schématisons le problème en supposant que la paroi chauffante est constituée par une plaque plane, de dimensions transversales très grandes. D'autre part, le gradient longitudinal de la température dans l'écoulement étant faible, devant le gradient dans l'épaisseur de la plaque, nous supposons que l'écoulement en contact est isotherme. Enfin, nous faisons l'hypothèse que la plaque et la perturbation géométrique constituent un milieu homogène de conductivités électrique et thermique constantes. Cette hypothèse, qui donne un schéma mathématique simple, n'est sans doute que grossièrement approchée dans le cas où la perturbation géométrique est constituée par une goutte de soudure.

Nous traitons dans cette note divers problèmes aux limites, posés par la question de mesure exposée ci-dessus. L'étude de ces problèmes d'ordre mathématique, qui présentent un intérêt en eux-mêmes, nous permet d'élucider le rôle de divers paramètres et de donner des résultats intéressants concernant la perturbation de la température de paroi.

Chapitre I

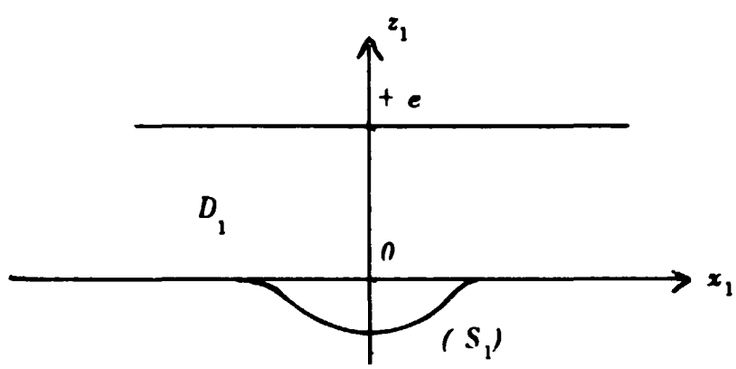
PROBLEMES ETUDIES - EQUATIONS GENERALES

1. PROBLEME

On considère une plaque, de dimensions transversales infinies, dont une face est plane, et dont l'autre face, est plane, parallèle à la première, sauf sur une région où elle présente une bosse. La face plane est en contact avec un écoulement isotherme, et l'autre face est isolée thermiquement. La plaque est chauffée par effet Joule, le courant électrique étant uniforme loin de la bosse. Les conductivités électrique et thermique sont constantes. Cela étant, on se propose de calculer la répartition de la température sur la face isolée.

2. EQUATIONS GENERALES

Nous allons former les équations générales du problème ci-dessus. Nous rapportons la plaque à un système d'axes $Ox_1\ y_1\ z_1$ l'axe Oz_1 étant normal à la plaque, et l'axe Ox_1 coïncidant avec la direction du courant électrique à l'infini.



En appelant e l'épaisseur de la plaque, en dehors de la bosse, le domaine de la plaque, que nous désignons par D_1 est limité par le plan $z_1 = + e$ et par une surface (S_1) représentable par l'équation

(1.1) $$z_1 = f_1\ (x_1,\ y_1)$$

et telle que

(1.2) $$f_1 = 0 \quad \text{en dehors } \Sigma$$
$$f_1 \leq 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

Σ étant la région de la bosse.

Lorsque la surface (S_1) est cylindrique, de génératrices parallèles à Oy_1, f_1 étant alors fonction de x_1 seul, le problème est à deux dimensions, compte tenu des conditions à l'infini.

Nous l'appellerons problème bidimensionnel. Dans le cas général Σ est bornée, et la solution dépend des trois variables. Nous dirons que le problème est tridimensionnel.

Etablissons les équations et les conditions aux limites auxquelles satisfont la température θ_1 et le potentiel électrique $\mathcal{V}_1$, dans le domaine D_1 de la plaque.

La conductivité électrique σ étant constante, et le courant à l'infini uniforme et parallèle à l'axe Ox_1 la fonction $\mathcal{V}_1$ vérifie l'équation et les conditions aux limites

(1.3) $$\Delta \mathcal{V}_1 = 0$$

(1.4) $$\frac{d\mathcal{V}_1}{dn} = 0 \qquad \text{sur } z_1 = e \text{ et } (S_1)$$

(1.5) $$\mathcal{V}_1 = \frac{i_o}{\sigma} x_1 \qquad \text{pour } x_1^2 + y_1^2 = +\infty$$

Δ étant le Laplacien, $\frac{d}{dn}$ la dérivée suivant la normale extérieure du domaine D_1, i_o la densité à l'infini.

Le dégagement local de chaleur dû à l'effet Joule est

$$\sigma \; grad^2 \; \mathcal{V}_1$$

et la conductivité électrique λ étant constante, la température θ_1 et le potentiel électrique $\mathcal{V}_1$ sont liés, dans D_1, par l'équation

(1.6) $$\lambda \; \Delta\theta_1 + \sigma \; grad^2 \mathcal{V}_1 = 0$$

Sur (S_1), où la plaque est isolée thermiquement, on a

(1.7) $$\frac{d\theta_1}{dn} = 0$$

Sur la face $z_1 = e$, la plaque est en contact avec un écoulement, supposé isotherme. Si le coefficient de transfert était infiniment grand, la face en cause serait également isotherme. Mais, dans le cas général, sur la face mouillée $z_1 = e$, on a pour la température, la condition :

(1.8) $$\lambda \frac{d\theta_1}{dn} + h(\theta_1 - \theta_f) = 0$$

où h désigne le coefficient de transfert, θ_f la température constante du fluide, et $\frac{d}{dn}$ la la dérivée suivant la normale extérieure.

Les fonctions $\theta_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\mathcal{V}_1(x_1, y_1, z_1)$, sont donc solution, dans le domaine D_1 du problème aux limites défini par les équations (1.3), (1.6) et les conditions (1.4), (1.5), (1.7), (1.8).

Nous allons écrire ce système en utilisant des variables réduites et, pour cela, nous considérerons d'abord le cas élémentaire où la face (S_1) est plane.

3. CAS DE LA PLAQUE PLANE

Si les deux faces sont planes, c'est-à-dire si $f_1 = 0$ il est facile de voir que la température est donnée par

$$\theta_1 = \theta_f + \frac{i_0^2\, e}{\sigma h} + \frac{i_0^2}{2\sigma\lambda}\,(e^2 - z_1^2) \tag{1.9}$$

Les deux faces sont alors isothermes, l'écart Δp de la température dans la plaque est

$$\Delta_p = \frac{i_0^2\, e^2}{2\lambda\sigma} \tag{1.10}$$

et l'écart Δf entre la température de la face mouillée et celle du fluide est

$$\Delta_f = \frac{2}{c}\,\Delta_p \tag{1.11}$$

en ayant posé

$$c = \frac{e\,h}{\lambda} \tag{1.12}$$

C est un nombre de Nusselt qui jouera un rôle important dans la suite des calculs.

4. EQUATIONS EN VARIABLES REDUITES

Nous supposerons que les températures sont repérées par rapport à la température constante de l'écoulement, ce qui revient à supposer $\theta_f = 0$.

Nous introduirons les coordonnées réduites :

$$x = x_1 / e \qquad y = y_1 / e \qquad z = z_1 / e \tag{1.13}$$

et la température réduite θ définie par

$$\theta = \frac{\theta_1}{\Delta p} \tag{1.14}$$

Enfin, nous remplacerons $\mathcal{U}_1$ par $\mathcal{U}$ avec

$$\mathcal{U} = \frac{\sigma}{i_0\, e}\,\mathcal{U}_1 \tag{1.15}$$

Avec les nouvelles variables, l'épaisseur et l'écart de température entre faces, en l'absence de bosses, sont égaux à l'unité, et le domaine de la plaque, que nous désignerons par D, est limité par le plan $z = +1$ et par la surface (S) d'équation :

$$z = f(x, y) \tag{1.16}$$

qui se déduit de (S_1) par une homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{e}$.

Avec les changements de variables et d'inconnues (1.14), (1.15), (1.16), les équations et les conditions (1.3) à (1.8) conduisent au système :

(1.17) $\Delta \mho = 0$

(1.18) $\Delta \theta + 2 \, \mathrm{grad}^2 \, \mho = 0$

(1.19) $\dfrac{d\mho}{dn} = 0$ sur $z = +1$ et (S)

(1.20) $\dfrac{\partial \mho}{dx} = 1$ pour $x^2 + y^2 = +\infty$

(1.21) $\dfrac{d\theta}{dn} = 0$ sur (S)

(1.22) $\dfrac{d\theta}{dn} + c\,\theta = 0$ sur $z = +1$

5. PROBLEMES ETUDIES

Nous considérerons le problème qui consiste à déterminer les valeurs prises sur (S), par la solution θ du problème ci-dessus, dans les trois cas suivants :

1° - le problème est bidimensionnel et le coefficient de transfert h est infiniment grand,

2° - le problème est bidimensionnel et h est fini, constant,

3° - le problème est tridimensionnel, h infiniment grand.

Chapitre II

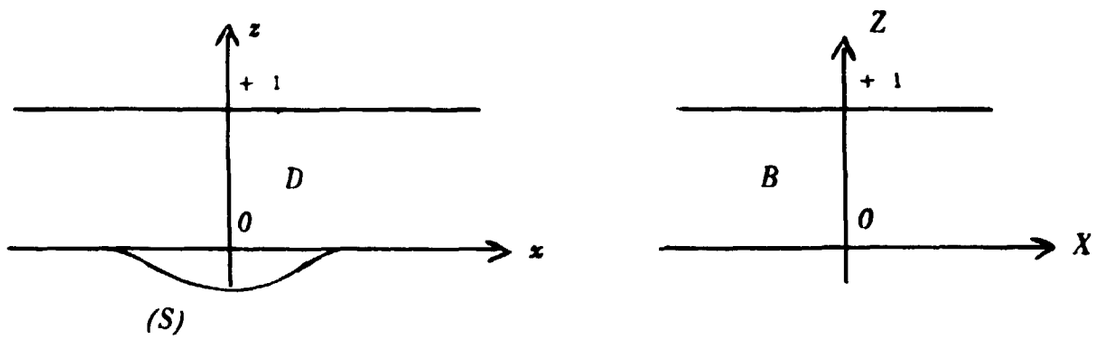
PROBLEME BIDIMENSIONNEL, LORSQUE LA FACE MOUILLEE EST ISOTHERME

6. Lorsque la surface (S) est cylindrique, de génératrices parallèles à Oy, la température et le potentiel ne dépendent que des deux variables x et z. Le problème aux limites est alors défini dans le domaine D du plan Oxz limité par $z = +1$ et par le profil (S) intersection de la surface (S), avec ce plan.

Si le coefficient de transfert h est très grand, on peut supposer que la face mouillée est à même température que l'écoulement, et par suite est isotherme. Dans ce cas, la condition (1.22) se réduit à

(2.1) $\qquad \theta = 0 \qquad$ sur $\qquad z = +1$

La résolution du problème repose alors sur la représentation conforme, avec correspondance des points à l'infini, de D sur la bande rectiligne B, d'un plan OXZ d'équation $0 < Z < 1$, $-\infty < X < +\infty$.



Compte tenu de ce que pour F quelconque, on a

$$\Delta F^2 = 2F\,\Delta F + 2\,grad^2\,F$$

le système des équations (1.17), (1.18), est équivalent au système

(2.2) $\qquad \Delta\,\mathcal{U} = 0$

(2.3) $\qquad \Delta\,(\theta + \mathcal{U}^2) = 0$

qui se conserve dans une transformation conforme.

D'autre part, les conditions à la frontière, qui sont de la forme $\theta = \dfrac{d\theta}{dn} = \dfrac{d\mathcal{U}}{dn} = 0$,

se conservent également dans l'application de D sur B. Enfin, compte tenu de l'allure de D,

le module de la transformation est égal à un, à l'infini, et il s'ensuit que la condition (1.20) à l'infini se conserve aussi. En résumé, l'application de D sur B conserve l'ensemble des équations du problème.

Or, dans la bande rectiligne B, la solution du problème est

$$\theta = 1 - Z^2 \tag{2.4}$$

et par suite, θ est constante et égale à l'unité sur $Z = 0$ image du profil (S).

En conclusion, dans les hypothèses faites, la température sur la face isolée (S) est constante, et égale à la valeur qu'elle aurait si cette face était plane.

★

Chapitre III

PROBLEME BIDIMENSIONNEL, DANS LE CAS GENERAL

7. EQUATIONS GENERALES

Nous allons rappeler les équations du problème bidimensionnel, dans le cas général, en variables réduites.

Dans le domaine D, du plan Oxz, limité par $z = +1$ et par la courbe (S), d'équation

(3.1) $$z = f(x)$$

où f est négative, bornée, et nulle pour $|x|$ assez grande, les fonctions $\theta(x, z)$ et $\mathcal{U}(x, z)$ sont solution du système des équations et conditions aux limites ci-après :

(3.2) $$\Delta \mathcal{U} = 0$$

(3.3) $$\Delta\theta + 2\, grad^2\, \mathcal{U} = 0$$

(3.4) $$\frac{d\mathcal{U}}{dn} = 0 \qquad \text{sur } z = +1 \text{ et } (S)$$

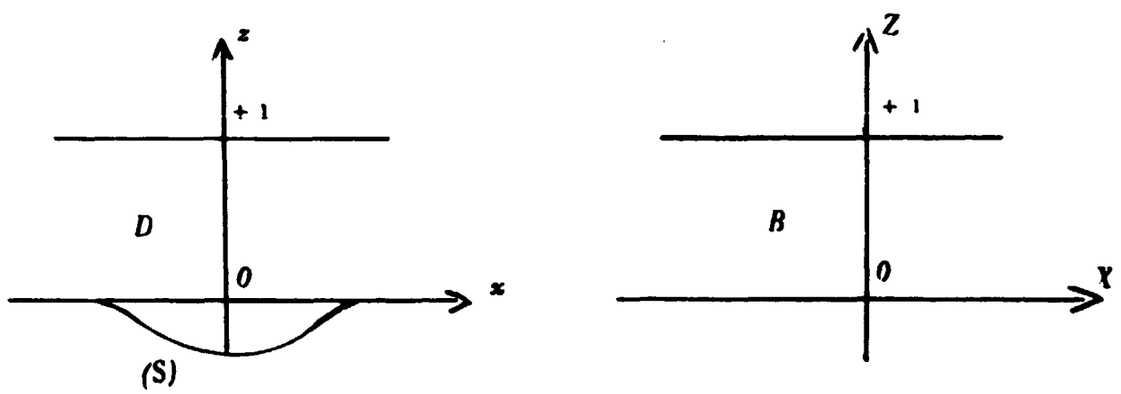
(3.5) $$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 1 \qquad \text{pour } x = \pm\infty$$

(3.6) $$\frac{d\theta}{dn} = 0 \qquad \text{sur } (S)$$

(3.7) $$\frac{\partial\theta}{\partial z} + c\,\theta = 0 \qquad \text{sur } z = +1$$

Rappelons qu'avec les variables réduites, l'épaisseur de la plaque, dans la région plane, et l'écart de température entre faces, loin de la bosse, sont égaux à l'unité. La température du fluide étant prise égale à zéro, celle de la face mouillée loin de la perturbation est alors égale à $2/c$, c étant le nombre de Nusselt défini par (1.12).

Dans la représentation conforme, utilisée au chapitre II, les équations et conditions aux limites du système se conservent à l'exception de la condition (3.7).



Sur l'axe $Z = +1$, le module de la transformation qui applique B sur D est une fonction analytique de X, que nous désignerons par $1 + \phi(X)$ et il résulte de l'allure à l'infini de D, que ϕ ainsi que ses dérivées successives, sont des éléments de l'ensemble L des fonctions de valeur absolue intégrable sur $-\infty, +\infty$. La propriété pour ϕ d'appartenir à L sera importante pour la suite des raisonnements. Le domaine D étant connu, ϕ est déterminée.

Par définition de ϕ, on a sur $Z = +1$

$$\frac{\partial z}{\partial Z} = 1 + \phi \tag{3.8}$$

et par suite, la condition (3.7) devient dans le plan X, Z

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} + c\,(1 + \phi)\,\theta = 0 \tag{3.9}$$

Dans la bande rectiligne B, la solution $U(X, Z)$ de l'équation (3.2) et des conditions (3.4), (3.5), est

$$U = X \tag{3.10}$$

de sorte que l'équation (3.3) s'écrit dans le plan X, Z

$$\Delta\theta + 2 = 0 \tag{3.11}$$

La fonction

$$T_0 = 1 - Z^2 + \frac{2}{c} \tag{3.12}$$

est une solution de (3.11) qui vérifie la condition (3.6) sur $Z = 0$.

Nous poserons

$$\theta = T_0 + T \tag{3.13}$$

Il résulte de ce qui précède, que $T(X, Z)$ est harmonique, dans B et vérifie la condition $\frac{\partial T}{\partial Z} = 0$ sur $Z = 0$.

Sur $Z = +1$, θ satisfaisant à (3.9), et T_0 ayant l'expression (3.12), la fonction T vérifie la condition

$$\frac{\partial T}{\partial Z} + c\,(1 + \phi)\,T + 2\phi = 0 \tag{3.14}$$

La fonction T_0, qui a l'expression (3.12), est constante et égale à $1 + 2/c$ sur $Z = 0$. La détermination de la température, sur la face isolée, se ramène donc à la détermination des valeurs prises sur $Z = 0$ par la fonction $T(X, Z)$, harmonique dans la bande rectiligne B, ayant une dérivée normale nulle sur le côté $Z = 0$ et qui, sur le côté $Z = +1$, vérifie la condition frontière (3.14).

Nous rechercherons les solutions de ce problème, qui s'annulent à l'infini. Cette condition exprime que la température loin de la bosse n'est pas modifiée; ou encore que T représente la perturbation de la température, due à la bosse.

8. PROBLEME POUR T .

Le problème posé par la détermination de T peut s'énoncer, sous sa forme générale, comme suit :

Trouver les valeurs prises sur $Z = 0$, par $T(X, Z)$ harmonique dans la bande rectiligne B , $0 < Z < 1$, nulle à l'infini, et qui vérifie les conditions frontières

$$\frac{\partial T}{\partial Z} = 0 \qquad \text{sur } Z = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial Z} + c\,(1 + \phi)\,T + \psi = 0 \qquad \text{sur } Z = +1 \tag{3.16}$$

où c est une constante positive, ϕ et ψ des fonctions de X qui sont des éléments de L ayant une dérivée bornée.

Dans le cas que l'on considère, on a d'ailleurs

$$\psi = 2\phi \tag{3.17}$$

Nous définissons la solution T du problème ci-dessus comme limite d'une suite de fonctions T_n , $1 \leqslant n < +\infty$ qui se déterminent par récurrence, comme solution du problème linéaire à coefficient constant ci après :

Les T_n sont des fonctions harmoniques dans B , nulles à l'infini, ayant une dérivée normale nulle sur $Z = 0$ et qui sur $Z = +1$ vérifient

$$\frac{\partial T_1}{\delta Z} + c\,T_1 + \psi = 0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial Z} + c\,T_n + \psi + c\,\phi\,T_{n-1} = 0 \tag{3.19}$$

Si l'on pose

$$T_1 = t_1 \tag{3.20}$$

$$T_n - T_{n-1} = t_n \tag{3.21}$$

les t_n sont des fonctions harmoniques dans B , nulles à l'infini, ayant une dérivée normale nulle sur $Z = 0$, et qui sont définies par récurrence par la condition de vérifier sur $Z = +1$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t_1}{\partial Z} + c\,t_1 + \psi = 0 \\ &\frac{\partial t_n}{\partial Z} + c\,t_n + c\,\phi\,t_{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Si les t_n existent, et si la série $\sum_1^\infty t_n$ converge uniformément sur B et sa frontière, la série

$$T = \sum_1^\infty t_n \tag{3.23}$$

sera solution du problème posé.

Les fonctions ϕ et ψ sont des éléments de L, doués d'une dérivée bornée. Si les t_n sont bornées, et ont une dérivée bornée, les fonctions $\phi t_n(X, 1)$ appartiennent aussi à L et ont une dérivée bornée. La détermination des t_n, par récurrence, et l'étude de la convergence et de l'erreur commise en n'utilisant qu'un nombre fini de termes de la série (3.23) conduisent donc à former la solution du problème linéaire, à coefficient constant, énoncé ci-après, et à construire, a priori, une majoration de cette solution.

9. UN PROBLEME LINEAIRE A COEFFICIENT CONSTANT

Etant donnés une constante positive c, et un élément $\Phi(X)$ de L, ayant une dérivée bornée, soit à déterminer, et à majorer a priori, $F(X, Z)$, harmonique dans la bande B, $0 < Z < 1$, bornée sur B et sa frontière, ainsi que sa dérivée $\frac{\partial F}{\partial X}$, et qui satisfait aux conditions aux limites

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \qquad \text{sur } Z = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z} + cF = \Phi \qquad \text{sur } Z = +1 \tag{3.25}$$

Pour construire la solution $F(X, Z)$ du problème ci-dessus, nous utiliserons la transformation de Fourier. Nous supposerons que les différentes opérations effectuées sont légitimes, et nous vérifierons, a posteriori, que la fonction $F(X, Z)$, ainsi formée, est bien solution du problème.

Cette transformation, et les propriétés du produit de composition, conduisent facilement à l'expression suivante de F :

$$F(X, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u, Z)\Phi(X-u)\,du \tag{3.26}$$

avec

$$K(X, Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi X}\,\overline{K}(\xi, Z)\,d\xi \tag{3.27}$$

et

$$\overline{K}(\xi, Z) = \frac{ch\,\xi Z}{\xi\,sh\,\xi + c\,ch\,\xi} \tag{3.28}$$

Un calcul de résidus pour l'intégrale (3.27) donne pour le noyau K de la formule (3.26), le développement ci-après

$$K(X, Z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos\mu_n \quad \cos\mu_n Z}{\mu_n + \frac{1}{2}\sin 2\mu_n}\, e^{-\mu_n |X|} \tag{3.29}$$

les μ_n étant les racines positives de l'équation

(3.30) $$\mu \, tg \, \mu = c$$

Nous allons maintenant vérifier que la fonction $F(X, Z)$ donnée par les formules (3.26) et (3.29), est bien solution du problème étudié.

On établit facilement les propriétés suivantes du noyau K :

1°) K est harmonique dans B. 2°) il a une dérivée normale nulle sur $Z = 0$. 3°) K et sa dérivée $\frac{\partial K}{\partial X}$ ont une singularité logarithmique sur $Z = 1$, pour $X = 0$, et ces deux fonctions tendent exponentiellement vers zéro, lorsque $|X|$ tend vers l'infini, et cela sur B et sa frontière. 4°) sur $Z = 1$, pour $X \neq 0$, K satisfait à la condition

(3.31) $$\frac{\partial K}{\partial Z} + c K = 0$$

La fonction Φ étant continue et appartenant à L, il résulte des propriétés ci-dessus de K, que F, qui est donnée par (3.26), satisfait, à l'exclusion peut être de la relation (3.25), aux conditions imposées à la solution. Reste à vérifier que la condition (3.25) est bien satisfaite.

A l'intérieur de la bande, on a

(3.32) $$\frac{\partial F}{\partial Z} + c F = \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, Z) \, \Phi(u - Z) \, du$$

avec

(3.33) $$H = \frac{\partial K}{\partial Z} + c K$$

La formule (3.32) peut s'écrire

(3.34) $$\frac{\partial F}{\partial Z} + c F = \Phi(X) \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, Z) \, du + \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, Z) [\Phi(X - u) - \Phi(X)] \, du$$

La fonction $H(u, Z)$ a une singularité polaire sur $Z = +1$, pour $u = 0$, et elle est nulle, d'après (3.31), sur $Z = +1$, en dehors du point $u = 0$. Il s'ensuit que si Φ a une dérivée première bornée, ou plus généralement si Φ est höldérienne, la dernière intégrale de (3.34) tend vers zéro lorsque Z tend vers 1.

D'autre part, pour $0 \leqslant Z < 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi X} H(X, Z) \, dX = \overline{K}(\xi, Z) + \frac{\partial}{\partial Z} \overline{K}(\xi, Z)$$

d'où

(3.35) $$\int_{-\infty}^{+\infty} H(X, Z) \, dX = \overline{K}(0, Z) + \frac{\partial}{\partial Z} \overline{K}(0, Z)$$

et, compte tenu de (3.28), cette dernière quantité est égale à 1 .

Il résulte de ce qui précède que l'on a bien

$$\lim_{Z \to +1} \quad cF + \frac{\partial F}{\partial Z} = \Phi(X)$$

Construisons maintenant une majoration du nombre

$$(3.36) \qquad \| F \| = \operatorname*{Max}_{0 \leq Z \leq 1,\ -\infty < X < +\infty} | F(X, Z) |$$

Le développement (3.29) montre que le noyau K est positif pour $Z = 1$. Comme K a une dérivée normale nulle sur $Z = 0$ il s'ensuit que K est partout positif. On a donc d'après (3.26)

$$(3.37) \qquad \| F \| \leq \operatorname{Max} | \Phi | \int_{-\infty}^{+\infty} K(X, Z)\, dX$$

Mais on a

$$(3.38) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K(X, Z)\, dX = \overline{K}(0, Z)$$

et d'après (3.28)

$$(3.39) \qquad \overline{K}(0, Z) = \frac{1}{c}$$

Des formules qui précèdent, il résulte la majoration ci-après

$$(3.40) \qquad \| F \| \leq \frac{1}{c} \operatorname{Max} | \Phi |$$

10. EXPRESSION DE T.

Revenons au problème exposé au paragraphe 8. Les fonctions ψ et ϕ sont, par hypothèse, des éléments de L, ayant une dérivée bornée, et d'après les résultats qui précèdent, les fonctions t_n qui satisfont aux conditions (3.21) et (3.22) sont données par récurrence, par les formules

$$(3.41) \qquad t_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} K(X-u, Z)\, \psi(u)\, du$$

$$(3.42) \qquad t_n = -c \int_{-\infty}^{+\infty} K(X-u, Z)\, \phi(u)\, t_{n-1}(u)\, du$$

et elles admettent sur B et sa frontière, les majorations suivantes :

(3.43) $$|t_1| \leq \frac{1}{c} \; Max \; |\psi|$$

$$|t_n| \leq Max \; |\psi| \, . \, Max \, |t_{n-1}|$$

d'où

(3.44) $$|t_n| \leq \frac{1}{c} \; Max \; |\psi| \; [\, Max \, |\psi| \,]^{n-1}$$

Si donc on a

(3.35) $$Max \; |\phi| < 1$$

la série (3.23) sera uniformément convergente sur B et sa frontière, et elle sera solution du problème considéré.

Dans le cas particulier où T est la perturbation de la température, ψ est donnée par (3.17). Sur l'image $Z = 0$ du profil (S), l'écart entre la température réduite et sa valeur à l'infini sera égale à

(3.46) $$T\,(X, 0) = \sum_1^{\infty} t_n \,(X, 0)$$

les $t_n \,(X, 0)$ étant données par

(3.47) $$t_1 \,(X, 0) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} K\,(X-u, 0)\; \phi\,(u)\; du$$

$$t_n \,(X, 0) = -c \int_{-\infty}^{+\infty} K(X-u, 0)\,\phi(u)\; t_{n-1}(u)\; du$$

avec $K\,(X, 0)$, ayant d'après (3.29) l'expression

(3.48) $$K\,(X, 0) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos \mu_n \;\; e^{-\mu_n |X|}}{\mu_n + \frac{1}{2} \sin 2\mu_n}$$

Enfin, les t_n auront sur $X = 0$, d'après (3.17), (3.44), les majorations ci-après :

(3.49) $$|t_n \,(X, 0)| \leq \frac{2}{c} \; (Max \, |\phi|)^n$$

11. FONCTION ϕ

La fonction ϕ qui intervient dans les formules résolutives est caractéristique du profil (S); mais elle ne pourra être explicitée que pour les types particuliers de domaine D pour lesquels on sait effectuer, d'une manière explicite, l'application conforme sur la bande rectiligne.

On va indiquer quelques propriétés de la fonction ϕ qui seront utiles pour étudier qualitativement la perturbation de température T, et pour en calculer des approximations.

1°) Si le profil (S) est tout entier en dessous de la droite $z = 0$, on a

(3.50) $$\phi \geq 0$$

Ceci résulte immédiatement de la considération dans la représentation conforme, de la fonction $z(Y, Z) - Z$ qui est harmonique, nulle sur $Z = +1$, négative sur $Z = 0$ et par conséquent négative à l'intérieur de B. Il s'ensuit que $\frac{\partial}{\partial Z}(z - Z)\Big|_{Z=+1} \geq 0$; D'où (3.50).

2°) Soient D_1 et D_2 deux domaines du type D, ϕ_1 et ϕ_2, les fonctions ϕ correspondantes. Si D_2 contient D_1, on a

(3.51) $$Max\ |\phi_2| \geq Max\ |\phi_1|$$

Pour établir (3.51) on considère la fonction $Z_2(x, z) - Z_1(x, z)$; Z_1 et Z_2 étant relatives aux représentations conformes de D_1 et D_2 sur B. On a $Z_2 - Z_1 = 0$ sur $z = 1$, $Z_2 - Z_1 \leq 0$ sur (S_1), d'où $Z_2 - Z_1 \geq 0$ dans D_1, et $\frac{\partial}{\partial z}(Z_2 - Z_1) \leq 0$ sur $z = 1$. D'où $(1 + \phi_1)^{-1} \geq (1 + \phi_2)^{-1}$ et compte tenu de (3.50), on en déduit (3.51).

Pour calculer une majoration de $|\phi|$, nécessaire à l'étude de la convergence des approximations, on pourra alors considérer le profil S^*, de forme rectangulaire, qui contient (S), et pour lequel la fonction ϕ peut s'expliciter.

12. CONCLUSION

Lorsque la condition (3.45) est vérifiée, ce qui a lieu si les dimensions relatives de la bosse ne sont pas trop grandes, la perturbation $\theta - \theta_\infty$ de la température sur la face isolée est donnée par

(3.52) $$\theta - \theta_\infty = \Delta_f\ (t_1 + \ldots + t_n + \ldots)$$

Δ_f désignant l'écart de température, loin de la bosse, entre la face mouillée et l'écoulement, et les t_n étant données, par les formules (3.47), (3.48) dans lesquelles le nombre c est lui-même donné par les expressions (1.11) ou (1.12).

On a, de plus, les majorations ci-après

$$(3.53) \qquad |t_n| \leq (Max\ |\phi|)^n$$

$$(3.54) \qquad \frac{|\theta - \theta_\infty|}{\Delta_f} \leq \frac{Max\ |\phi|}{1 - Max\ |\phi|}$$

$$(3.55) \qquad \left| \frac{\theta - \theta_\infty}{\Delta_f} - \sum_1^n t_n \right| \leq \frac{(Max\ |\phi|)^n}{1 - Max\ |\phi|}$$

Enfin, de ce que ϕ et le noyau K sont positifs, il résulte que les différents termes de la série (3.52) sont négatifs. La perturbation de la température due à la bosse est donc négative.

★

Chapitre IV

PROBLEME TRIDIMENSIONNEL

13. INTRODUCTION

Nous allons étudier le problème tridimensionnel, lorsque l'on fait l'hypothèse que la face mouillée est isotherme. Nous montrerons que, dans cette hypothèse, la bosse a pour effet de perturber la température de la face isolée, contrairement à ce qui se passe dans le cas bidimensionnel étudié au chapitre II. En supposant que les dimensions relatives de la bosse sont petites, nous calculerons la première approximation de la perturbation de la température.

14. EQUATIONS D'UNE PETITE PERTURBATION DE LA TEMPERATURE

Si les dimensions de la perturbation géométrique sont petites, il s'ensuit que la perturbation de la température est également petite. Le problème sera alors, en première approximation, un problème linéaire, posé dans un domaine limité par deux plans parallèles, et dont nous allons établir les équations générales, en variables sans dimensions.

En l'absence de bosse, les fonctions $\mathcal{U}$ et θ, que nous désignerons par $\mathcal{U}_0$ et θ_0, sont

$$\mathcal{U}_0 = x \tag{4.1}$$

$$\theta_0 = 1 - z^2$$

Ces fonctions sont prolongeables dans le domaine D et les perturbations V et T des fonctions $\mathcal{U}$ et θ y sont définies par

$$V = \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 \tag{4.2}$$

$$T = \theta - \theta_0$$

Les fonctions $\mathcal{U}$ et θ satisfont aux équations (1.17) et (1.18) d'où il suit que, compte tenu de (4.1) et (4.2), les perturbations V et T vérifient les équations

$$\Delta V = 0 \tag{4.3}$$

$$\Delta T + 4 \frac{\partial V}{\partial x} + 2\, grad^2\, V = 0 \tag{4.4}$$

cette dernière se réduisant, en première approximation, à

$$\Delta T + 4 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{4.5}$$

En dehors de la surface (S), les perturbations V et T satisfont aux conditions à la frontière

$$(4.6) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = T = 0 \qquad (Z = 1)$$

$$(4.7) \qquad T = V = 0 \qquad (x^2 + y^2 = +\infty)$$

Sur la surface (S), d'équation $z = f(x, y)$ et dont nous désignerons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure, les fonctions U_0 et θ_0, qui ont les expressions (4.2), vérifient

$$(4.7) \qquad \frac{\partial U_0}{\partial n} = \alpha$$

$$(4.8) \qquad \frac{\partial \theta_0}{\partial n} = -2\gamma f$$

Sur (S), on a $\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} = 0$ et il s'ensuit que les perturbations V et T satisfont aux conditions à la frontière

$$(4.9) \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = -\alpha \qquad (z = f)$$

$$(4.10) \qquad \frac{\partial T}{\partial n} = 2\gamma f \qquad (z = f)$$

Si l'on suppose que f est petite ainsi que ses dérivées premières et secondes, les inconnues jouissent alors des mêmes propriétés sur D, frontière comprise, et on a, au second ordre près,

$$(4.11) \qquad [V]_{z=o} = [V]_{z=f}$$

$$[T]_{z=o} = [T]_{z=f}$$

et aussi

$$
(4.12) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial V}{\partial Z} \right]_{z=o} = \left[- \dfrac{\partial V}{\partial n} \right]_{z=f} \\[2ex] \left[\dfrac{\partial T}{\partial Z} \right]_{z=o} = \left[- \dfrac{\partial T}{\partial n} \right]_{z=f} \\[2ex] a = \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad a = 1 \end{cases}
$$

d'où, compte tenu de (4.9) et (4.10), on a, toujours au second ordre près

$$
(4.13) \qquad \left[\frac{\partial V}{\partial Z} \right]_{z=o} = \frac{\partial f}{\partial x}
$$

$$
\left[\frac{\partial T}{\partial Z} \right]_{z=o} = 2 f
$$

Il résulte de ce qui précède, que dans les hypothèses que l'on a désignées, les perturbations V et T du potentiel et de la température, sont égales, au second ordre près, à la solution du problème linéaire aux limites ci-après, posé dans la bande rectiligne :

$$
(4.14) \qquad \Delta V = 0
$$

$$
(4.15) \qquad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \qquad (z = + 1)
$$

$$
(4.16) \qquad \frac{\partial f}{\partial Z} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (z = o)
$$

$$
(4.17) \qquad \Delta T + 4 \frac{\partial V}{\partial x} = 0
$$

$$
(4.18) \qquad T = 0 \qquad (z = + 1)
$$

(4.19) $$\frac{\partial T}{\partial z} = 2 f \qquad (z = o)$$

(4.20) $$T = V = o \qquad (x^2 + y^2 = +\infty)$$

15. METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME LINEARISE

Nous allons former l'expression de la solution $T(x, y, z)$ du problème défini par le système (4.14) à (4.20). Nous utiliserons la transformation double de Fourier. Si $\phi(x, y, z)$ est une fonction définie pour $-\infty < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} < +\infty$ et si la transformation est légitime, nous poserons :

(4.21) $$\overline{\phi}(\xi, \eta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} \phi(x, y, z)\, dx\, dy$$

Les hypothèses faites sur f justifient la transformation des équations et conditions aux limites (4.14) à (4.19).

Tenant compte de ce que

(4.22) $$\overline{\Delta \phi} = -(\xi^2 + \eta^2)\, \overline{\phi} + \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x} = + i\, \xi\, \overline{\phi}$$

le système transformé, et dont les inconnues sont $\overline{V}(\xi, \eta, z)$ et $\overline{T}(\xi, \eta, z)$, s'écrit :

(4.23) $$-(\xi^2 + \eta^2)\, \overline{V} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial z^2} = 0 \qquad (o < z < 1)$$

(4.24) $$\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} = 0 \qquad (z = 1)$$

(4.25) $$\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} = +i\, \xi\, \overline{T} \qquad (z = 0)$$

(4.26) $$-(\xi^2 + \eta^2)\, \overline{T} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} + 4\, i\, \xi\, \overline{V} = 0 \qquad (o < z < 1)$$

(4.27) $$\overline{T} = 0 \qquad (z = 1)$$

(4.28) $$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = 2 f \qquad (z = o)$$

La résolution de ce système est élémentaire. En posant

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 \tag{4.29}$$

On trouve

$$\overline{V} = - i \, \xi \, \overline{f} \, \frac{ch \, \rho \, (1 - z)}{\rho \, sh \, \rho} \tag{4.30}$$

puis

$$\overline{T} = \overline{f} \left[\frac{2 \, \xi^2 \, Z \, sh\rho \, (1 - z)}{\rho^2 \, sh \, \rho} - \frac{2 \, \eta^2 \, sh\rho \, (1 - z)}{\rho^3 \, sh \, \rho} \right] \tag{4.31}$$

soit, sur $z = o$:

$$\overline{T} \, (\xi, \eta, o) = - \frac{2 \, \eta^2 \, th \, \rho}{\rho^3} \, \overline{f} \, (\xi, \eta) \tag{4.32}$$

En particulier, dans le cas bidimensionnel, la variable η disparait, on a $\xi = \rho$, et la formule (4.31) s'écrit

$$\overline{T} \, (\xi, z) = \overline{f} \, \frac{2 \, z \, sh \, \xi \, (1 - z)}{sh \, \xi} \tag{4.33}$$

Il s'ensuit que $\overline{T}$, et par conséquence T, sont nulles pour $z = o$. On retrouve là, dans le cas particulier des petites perturbations, le résultat établi au chapitre II.

Revenons au cas tridimensionnel; si l'on pose

$$\overline{K} \, (\xi, \eta) = - \frac{2 \, \eta^2 \, th \, \rho}{\rho^3} \tag{4.34}$$

la formule (4.32) s'écrit

$$\overline{T} \, (\xi, \eta, o) = \overline{K} \, . \, \overline{f} \tag{4.35}$$

et par suite, la fonction T est donnée, sur $z = o$ par

$$T \, (x, y, o) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K \, (x - u, y - v) \, f \, (u \, v) \, du \, dv \tag{4.36}$$

le noyau K étant la transformée inverse de $\overline{K}$ soit

$$(4.37) \qquad K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x + \eta y)} \overline{K}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

Nous allons chercher à expliciter le noyau $K(x, y)$ de la formule (4.35) qui donne $T(x, y, o)$.

16. CALCUL DU NOYAU K

Le noyau K a l'expression

$$(4.38) \qquad K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x + \eta y)} \frac{2\eta^2 th\rho}{\rho^3}$$

et par le changement de variables

$$x = r\cos\theta \qquad \xi = \rho\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta \qquad \eta = \rho\sin\phi$$

on a

$$(4.39) \qquad K(x, y) = \Pi(r, \theta)$$

avec

$$(4.40) \qquad \Pi(r, \theta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} th\rho \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos[\rho r \cos(\theta - \phi)] \sin^2\phi \, d\phi$$

Un calcul facile montre que

$$2 \int_0^{2\pi} \cos[r\rho \cos(\theta - \phi)] \sin^2\phi \, d\phi =$$

(4.41)

$$\int_0^{2\pi} \cos(r\rho\cos u) \, du - \cos 2\theta \int_0^{2\pi} \cos(r\rho\cos u) \cos 2u \, du$$

et, en utilisant les relations

$$(4.42) \qquad \int_0^{2\pi} \cos(r\rho \cos u)\, du = 2\pi \; J_0 \; (r\rho)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(r\rho \cos u) \cos 2u \, du = 2\pi \; J_2(r\rho)$$

on obtient

$$(4.43) \qquad H(r,\theta) = - F_0 \; (r) + \cos 2\theta \; F_2 \; (r)$$

avec

$$(4.44) \qquad \begin{aligned} F_0 \; (r) &= \int_0^{+\infty} th\rho \, . \; J_0 \; (\rho r) \, d\rho \\ F_2 \; (r) &= \int_0^{+\infty} th\rho \, . \; J_2 \; (\rho r) \; d\rho \end{aligned}$$

On peut développer $F_0 \; (r)$ et $F_2 \; (r)$ en série.

Pour $\rho > 0$ on a

$$(4.45) \qquad th\rho = 1 - 2e^{-2\rho} + 2e^{-4\rho} + \dots + (-1)^n \; 2 \; e^{-2n\rho} + \dots$$

d'où, pour ϵ positif

$$(4.46) \qquad \int_\epsilon^{+\infty} th\rho \; J_0 \; (r\rho) \, d\rho = \int_\epsilon^{+\infty} J_0 \; (r\rho) \, d\rho$$

$$+ 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n \int_\epsilon^{+\infty} e^{-2n\rho} \, J_0 \; (r\rho) \, d\rho$$

La série du second membre de (4.45) est uniformément convergente pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$. Il s'ensuit que (4.46) est encore valable pour $\epsilon = 0$.

Or,

$$\int_0^{+\infty} J_0 (r\rho)\, d\rho = \frac{1}{r}$$

(4.47)

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\rho} J_0 (r\rho)\, d\rho = (a^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et l'on a donc

(4.48) $$F_0 (r) = \frac{1}{r} - (4 + r^2)^{-\frac{1}{2}} + \dots (-1)^n [(2n)^2 + r^2]^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

Des raisonnements analogues et les relations

(4.49) $$\int_0^{+\infty} J_2 (\rho r)\, d\rho = \frac{1}{r}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\rho} J_2 (\rho r)\, d\rho = r^{-2} [(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} - a]^2 (a^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}$$

conduisent à la formule

(4.50) $$F_2 (r) = \frac{1}{r} - (4 + r^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(4 + r^2)^{\frac{1}{2}} - 2}{r} \right]^2 + (-1)^n [(2n)^2 + r^2]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{((2n)^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} - 2n}{r} \right]^2 + \dots$$

17. EXPRESSION DE LA PERTURBATION T

De la formule (4.36) et des calculs du paragraphe 16, il résulte que la perturbation $T(M)$, au point M de coordonnées x et y, de plan $z = o$, est donnée par l'intégrale ci-après, étendue au plan $-\infty < y < +\infty$

$$(4.51) \qquad T(M) = \frac{1}{2\pi} \int K(\overrightarrow{PM})\, f(P)\, d\sigma_P$$

dans laquelle $d\sigma_P$ est l'élément d'aire en P, et avec

$$(4.52) \qquad K(\overrightarrow{PM}) = -F_o(r) + \cos 2\theta\, F_2(r)$$

$$r = |\overrightarrow{MP}|, \quad \theta = \arg \overrightarrow{PM}$$

Les fonctions F_o et F_2 ont les expressions (4.44) dont on a formé les développements (4.47) et (4.48).

Nous allons préciser l'expression de T dans le cas où la bosse est de révolution. La fonction f est alors de la forme $f = f(\rho)$ avec $\rho^2 = x^2 + y^2$

Dans ce cas, les formules (4.51) et (4.52) donnent pour la perturbation $T(R, \psi)$ au point M de coordonnées polaires R, ψ

$$(4.53) \qquad T(R, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{+\infty} r\, dr \int_o^{2\pi} [-F_o(r) + \cos 2\theta\, F_2(r)] \times f(\sqrt{R^2 + r^2 + 2rR\cos(\theta - \psi)})\, d\theta$$

ou encore, en passant $\theta - \psi = u$:

$$(4.54) \qquad T(R, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{+\infty} r\, dr \int_o^{2\pi} [-F_o(r) + \cos 2(u + \psi)\, F_2(r)] \times f(\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos u})\, du$$

ce qui réduit à

$$T(R, \psi) = T_1(R) + \cos 2\psi \; T_2(R) \tag{4.55}$$

avec

$$T_1(R) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F_0(r)\, r\, dr \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos u}\right) du$$

(4.56)

$$T_2(R) = +\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F_2(r)\, r\, dr \int_0^{2\pi} \cos 2u\, f\left(\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos u}\right) du$$

Par exemple, calculons la perturbation au sommet de la bosse, où $R = 0$.

Le terme $T_2(0)$ est nul et la perturbation a pour valeur en ce point

$$T(0) = -\int_0^{+\infty} r\, F_0(r)\, f(r)\, dr \tag{4.57}$$

et le développement (4.48) montrant que

$$0 < F_0(r) < \frac{1}{r}$$

on en déduit les inégalités

$$0 < T(0) < \int_0^{+\infty} |f(r)|\, dr \tag{4.58}$$

Manuscrit reçu le 18 janvier 1960

★★

FIN