

AMOYAL A., BACHER P., LAGO B., MENGIN F.L., PARKER E.

Rapport CEA n° 1398

**RIFIFI** : méthode de calcul analytique de la condition critique et des flux d'une pile à régions variées en théorie à deux groupes et à une dimension programmée pour le calculateur électronique Mercury (Ferranti).

Sommaire. - La méthode de calcul analytique présentée a été programmée pour le calculateur électronique Mercury-Ferranti.

Elle permet de résoudre les équations de la diffusion et les équations de continuité des flux et courants à deux groupes de neutrons et à une dimension, dans les géométries sphérique, cylindrique et linéaire.

On peut tenir compte dans ces deux derniers cas, respectivement, d'une hauteur et d'un rayon extrapolé.

La condition critique peut être réalisée en faisant varier linéairement un ou plusieurs  $k_{00}$ , la frontière d'un milieu, la hauteur ou le rayon extrapolé. Le nombre de milieux est limité à quatorze.

Le programme permet aussi de calculer les flux, les flux adjoints et diverses intégrales.

1960

26 pages

AMOYAL A., BACHER P., LAGO B., MENGIN F.L., PARKER E.

Report CEA n° 1398

**RIFIFI** : analytical method of calculation of the multizone, two groups, one dimensional, critical conditions and fluxes of a reactor. Program for the Ferranti-Mercury digital computer.

Summary. - The analytical calculation method given has been programmed for the Ferranti-Mercury digital computer.

It solves two-group, one-dimensional diffusion equations and equations with continuity of fluxes and currents, in spherical, cylindrical and linear geometries.

In the two latter cases an extrapolated height and radius respectively can be taken into account.

The critical condition can be achieved by a linear variation of one or several  $k_{00}$ , of a boundary between two media, or of the extrapolated height or radius. The number of media is limited to fourteen.

The programme can also calculate fluxes, fluxes and various integrals.

1960

26 pages

*collection*

PREMIER MINISTRE  
COMMISSARIAT A  
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

**RIFI FI : METHODE DE CALCUL ANALYTIQUE  
DE LA CONDITION CRITIQUE ET DES FLUX D'UNE PILE  
A REGIONS VARIEES EN THEORIE A DEUX GROUPE  
ET A UNE DIMENSION PROGRAMMEE  
POUR LE CALCULATEUR ELECTRONIQUE MERCURY (FERRANTI)**

par

A. AMOUYAL, P. BACHER, B. LAGO,  
F.L. MENGIN et E. PARKER

Rapport CEA N° 1398

**1960**

CENTRE D'ÉTUDES  
NUCLÉAIRES DE SACLAY  
SERVICE DE DOCUMENTATION  
Boite postale n° 2 - Gif-sur-Yvette (S.-et-O.)

**- Rapport C.E.A. n° 1398 -**

**Service de Physique Mathématique**

**RIFIFI : METHODE DE CALCUL ANALYTIQUE  
DE LA CONDITION CRITIQUE ET DES FLUX D'UNE PILE  
A REGIONS VARIEES EN THEORIE A DEUX GROUPES  
ET A UNE DIMENSION PROGRAMMEE  
POUR LE CALCULATEUR ELECTRONIQUE MERCURY (FERRANTI)**

**par**

**A. AMOUYAL, P. BACHER, B. LAGO,  
F.L. MENGIN, E. PARKER**

**R. 59.3247**

**RIFIFI : METHODE DE CALCUL ANALYTIQUE  
DE LA CONDITION CRITIQUE ET DES FLUX D'UNE PILE  
A REGIONS VARIEES EN THEORIE A DEUX GROUPES  
ET A UNE DIMENSION PROGRAMMEE  
POUR LE CALCULATEUR ELECTRONIQUE MERCURY (FERRANTI)**

## INTRODUCTION

La méthode de calcul présentée ici a été programmée pour le calculateur électronique Mercury-Ferranti du C.E.N.S.

Elle permet de résoudre les équations de la diffusion et les équations de continuité des flux et courants à deux groupes de neutrons et à une dimension, dans les géométries sphérique, cylindrique et linéaire.

On peut tenir compte dans ces deux derniers cas, respectivement, d'une hauteur et d'un rayon extrapolé.

La condition critique peut être réalisée en faisant varier linéairement un ou plusieurs  $k_{\infty}$ , la frontière d'un milieu, la hauteur ou le rayon extrapolé.

Le programme permet aussi de calculer les flux, les flux adjoints et diverses intégrales.

Le lecteur trouvera d'abord dans une première partie tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour pouvoir utiliser ce programme : présentation des données, possibilités du programme, présentation des résultats, avec des renseignements concernant les limitations, la précision, les temps de calcul.

Une deuxième partie donne la formulation complète du problème.

PREMIERE PARTIE

UTILISATION DU PROGRAMME

I. DONNEES

1. Données physiques

Les formules qui permettent de déduire ces données d'un calcul de réseau préliminaire [1] sont indiquées après leur définition. Ce sont pour chaque milieu :

$D_1$  - coefficient de diffusion du groupe rapide associé à la direction R, défini par la relation  $D_1 = \Sigma_1 L_S^2$  où  $L_S^2$  est l'âge des neutrons associé à cette direction.

$D_{1e}$  - coefficient de diffusion du groupe rapide associé à la direction He, défini de même par  $D_1 = \Sigma_1 L_{Se}^2$ .

$D_2$  - coefficient de diffusion du groupe thermique associé à la direction R, défini par  $D_2 = D_0 T$ , où  $D_0$  est le coefficient de diffusion thermique du modérateur,  $D_0 = \frac{\lambda t}{3}$ , et T la correction de transport associée à la direction R.

$D_{2e}$  - coefficient de diffusion du groupe thermique associé à la direction He, défini de même par  $D_{2e} = D_0 T_e$ .

$\Sigma_1$  - section efficace de "ralentissement" caractérisant le nombre de neutrons passant du groupe rapide au groupe thermique.  $\Sigma_1$  peut être calculé par la relation

$$\Sigma_1 = \frac{\overline{\xi} \Sigma_s}{\text{Log} \frac{E_0}{E_{th}}}$$

$\overline{\xi} \Sigma_s$  - ayant une valeur moyenne sur toutes les énergies pour la cellule,  $E_0$  étant l'énergie de fission,  $E_{th}$  l'énergie thermique et L le logarithme népérien.

$\Sigma_2$  - section efficace de capture thermique moyenne du milieu, définie par la relation

$$\Sigma_2 = \frac{D_2}{L^2} = \frac{D_{2e}}{L_e^2}$$

où  $L^2$  est l'aire de diffusion moyenne des neutrons associée à la direction R,  $L_e^2$  à He.

- $k$  - facteur de multiplication en milieu infini  $k = \xi n p f$ . On sera amené à poser  $k = k_1 + N k_2$  comme il sera précisé en 3.
- $p$  - facteur antitrappe.
- $s, t$  - coefficients de couplage définis en 15.
- $\mu, \nu$  - coefficients qui entrent dans les arguments des solutions des équations de la diffusion, définis en 15.

## 2. Données géométriques

On appelle frontière extérieure d'un milieu celle dont le rayon ou la cote est la plus grande, et frontière intérieure celle dont le rayon ou la cote est la plus faible.

- $H_e$  - hauteur extrapolée de la pile nue équivalente en géométrie cylindrique.
- rayon extrapolé de la pile nue équivalente en géométrie linéaire.
- $R_i$  - rayon ou cote extérieure,  $i$  varie de 1 à  $n$  de l'intérieur vers l'extérieur.
- $R_0$  - rayon ou cote intérieure du milieu 1 qui n'est précisée que dans le cas où on impose une condition dite d'extrapolation intérieure à cette frontière (voir 12, paragraphe 7);  $R_0$  est strictement positif.
- $P_i$  - le nombre de points du milieu où les flux sont calculés est  $2 P_i + 1$ . (voir 4).
- $n$  - nombre de milieux.
- $\xi_1$  - produit de l'épaisseur de la couche mince par la section efficace  $\Sigma_1$  correspondante.
- $\xi_2$  - produit de l'épaisseur de la couche mince par la section efficace  $\Sigma_2$  correspondante.
- $\lambda_1$  - longueur d'extrapolation du flux rapide à la frontière intérieure  $R_0$ . (voir 12, paragraphe 7).

$\lambda_2$  - longueur d'extrapolation du flux lent à la frontière intérieure  $R_0$ .

## II. POSSIBILITES DU PROGRAMME

Le programme permet de prendre pour paramètre critique :

- soit la hauteur ou le rayon extrapolé  $H_e$ ,
- soit le rayon ou la cote  $R_i$  d'une interface.

Il est d'autre part possible de faire varier les facteurs de multiplication  $k$  des différents milieux. Pour répondre aux besoins des différents utilisateurs on a été amené à mettre le  $k$  de chaque milieu sous la forme :

$$k = k_1 + N k_2$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des données pour chaque milieu et où  $N$  est commun à tous les milieux.

Remarque : Ce programme permet de déterminer aussi bien des harmoniques supérieurs que le fondamental, à condition de fixer des bornes convenables.

Dans le cas où on obtient un harmonique alors qu'on cherche le fondamental, le simple examen des flux permet de s'en rendre compte.

### 1er exemple

On prend  $R_i$  ou  $H_e$  comme paramètre critique. Le programme prend automatiquement

$$N = 0$$

et pour chaque milieu on aura

$$k = k_1 \quad \text{et} \quad k_2 = 0$$

### 2ème exemple

On prend  $N$  comme paramètre critique et on veut faire varier le  $k^i$  du milieu  $i$ .

On fera

$$\begin{array}{ll} k^i = N k_2^i & k_1^i = 0 \\ k^j = k_1^j & k_2^j = 0 \quad i \neq j. \end{array}$$

3ème exemple

On prend  $N$  comme paramètre critique et on veut faire varier le  $k$  de tous les milieux, dans les mêmes proportions. On fera

$$k_1^i = 0 \quad i \in n$$

et

$$k^i = N k_2^i$$

4. Calcul des flux

L'utilisateur indique un entier  $P_i$  pour chaque milieu  $i$  ; le programme calcule pour ce milieu le flux en  $(2 P_i + 1)$  points répartis comme suit :

- les deux extrémités de la région ;
- le milieu de la région ;
- puis les milieux des intervalles extrêmes jusqu'à l'obtention des  $(2 P_i + 1)$  points désirés. L'entier  $P_i$  sera pris au moins égal à 1.

Exemple :  $P_i = 4$



Flux adjoints.

Calculés seulement si l'utilisateur le désire, ils sortent sous la même forme que les flux directs, l'indice  $P_i$  servant à la fois aux flux directs et adjoints.

### 5. Calcul des intégrales

Le programme permet de calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_{R_{i-1}}^{R_i} \phi^l z^\delta dz$$

$$I_{21} = \int_{R_{i-1}}^{R_i} \phi^{l+} \phi^l z^\delta dz$$

$$I_{22} = \int_{R_{i-1}}^{R_i} \phi^{2+} \phi^2 z^\delta dz$$

$$I_{23} = \int_{R_{i-1}}^{R_i} \phi^{l+} \phi^l z^\delta dz$$

$$I_{24} = \int_{R_{i-1}}^{R_i} \phi^{l+} \phi^2 z^\delta dz$$

$$I_{31} = + \int_{R_{i-1}}^{R_i} \text{grad } \phi^2 \text{ grad } \phi^{2+} z^\delta dz$$

$$I_{32} = + \int_{R_{i-1}}^{R_i} \text{grad } \phi^l \text{ grad } \phi^{l+} z^\delta dz$$

avec  $\delta = 0$  dans le cas linéaire

$\delta = 1$  dans le cas cylindrique

$\delta = 2$  dans le cas sphérique

### 6. Géométries

Le programme permet de choisir entre les trois géométries cylindrique, sphérique ou linéaire.

Pour la géométrie linéaire on distingue deux cas :

- Le cas linéaire avec plan de symétrie.

On prend comme origine le centre de symétrie et on utilise une géométrie dite **DEMI-AXIALE**.

- Le cas où il n'y a pas de plan de symétrie.

La géométrie utilisée est dite AXIALE. L'une des faces extrêmes est prise comme origine, les cotes des autres interfaces étant comptées positivement à partir de cette origine.

### 7. Conditions aux limites

On a, à la frontière extérieure :

$$\frac{D \Phi'}{\Phi} = - \frac{1}{2,13}$$

$\Phi'$  étant la dérivée du flux  $\Phi$ .

A la frontière intérieure on peut imposer comme on le verra en 12, paragraphe 7 les conditions :

$$\frac{\Phi'^r}{\Phi^r} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\Phi'^l}{\Phi^l} = \frac{1}{\lambda_2}$$

### 8. Limitations

Le nombre des milieux est limité à 14.

Le nombre maximum de points où l'on peut calculer le flux est 96, on doit donc avoir :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (2 p_{i+1}) \leq 96$$

D'autre part, le rayon (ou la cote) du dernier milieu ne peut être infini. Sa limitation dépend du milieu considéré, les quantités  $\mu R$  et  $\nu R$  ne pouvant en aucun cas atteindre 177. Il est toutefois recommandé de se limiter à des valeurs nettement plus faibles.

### 9. Précision

Le calcul est arrêté lorsque l'écart relatif entre les deux dernières valeurs essayées du paramètre critique est inférieure à  $10^{-4}$ , ce qui donne en fait, dans le cas général, une précision au moins égale à  $10^{-5}$  sur le paramètre critique. Cette précision peut être augmentée ou diminuée au gré de l'utilisateur, comme nous le verrons en 12, paragraphe 5.

#### 10. Temps de calcul

Il est environ d'une minute pour la recherche de la condition critique dans une pile à 4 milieux, en géométrie cylindrique. Ce temps est plus court en géométrie linéaire ou sphérique.

Le temps de calcul et de sortie des flux dépend du nombre de points demandés. Pour une trentaine de points il est d'environ une minute.

### III. UTILISATION DU PROGRAMME

#### A. Présentation des données

Sur la bande des données doivent être perforées un certain nombre de directives.

#### 11. Directives obligatoires

1. CYLINDRIQUE pour la géométrie cylindrique

SPHERIQUE pour la géométrie sphérique

AXIAL pour la géométrie linéaire

ou DEMI-AXIAL pour la géométrie linéaire avec plan de symétrie

2. H CRITIQUE, N CRITIQUE ou R CRITIQUE suivant que l'on veut faire varier  $H_e$ , N ou  $R_i$ .

La directive R CRITIQUE doit être suivie, une ligne plus bas, des deux bornes entre lesquelles doit se faire l'interpolation et de l'indice i.

Les deux autres directives sont suivies seulement des deux bornes de l'interpolation, toujours placées une ligne plus bas.

3. LISTE

Cette directive doit être suivie des données suivantes, placées dans l'ordre indiqué, une ligne plus bas :

$$n, H_e, R_1, R_2 \dots R_n$$

Dans le cas où on a pris pour paramètre critique  $H_e$  ou  $R_i$ , on mettra dans cette liste, à la place de  $H_e$  ou de  $R_i$ , la première borne de l'interpolation.

#### 4. MILIEU i

i variant de 1 à n.

Ces directives sont placées obligatoirement à la fin. Chacune d'entre elles est suivie, une ligne après, des données caractérisant le milieu i, dans l'ordre :

$$D_1, D_2, D_{1e}, D_{2e}, \Sigma_1, \Sigma_2, k_1, k_2, p, \varepsilon_1, \varepsilon_2, P_i$$

Toutes ces données doivent figurer.

Une couche mince est toujours rattachée au milieu qui précède. Elle est caractérisée par  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

Si cette couche mince n'existe pas, on fera :  $\varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = 0$ .

Si les quantités  $\mu, \nu, s, t$  sont données par l'utilisateur (voir la directive VARIANTE définie en 12 paragraphe 4), les directives MILIEU i seront suivies de :

$$D_1, D_2, \mu, \nu, s, t, \pm 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, P_i$$

+ 1 si le milieu est réflecteur,

- 1 s'il est multiplicateur.

(voir en 16 pour les définitions de milieux multiplicateur et réflecteur).

#### 12. Directives facultatives

1. TITRE - suivie de caractères quelconques, placés sur la même ligne, qui seront perforés en tête des résultats.

2. FLUX ADJOINT pour le cas où on désire calculer les flux adjoints.

3. INTEGRALES pour le calcul des intégrales.

4. VARIANTE si on donne les constantes  $\mu, \nu, s, t$  de chaque milieu. Remarque : dans ce cas seul  $R_i$  peut être pris comme inconnue.

5. PRECISION suivie, une ligne après, d'une quantité  $\varepsilon$ . Cette directive permet de remplacer par  $\varepsilon$  le critère de précision qui avait été choisi égal à  $10^{-4}$ .

#### 6. QUANTITES COMPLEMENTAIRES

Cette directive permet de sortir certaines données et certains résultats dont l'énumération sera faite en 14 paragraphe 4.

7. **EXTRAPOLATION** suivie, une ligne plus bas, de trois quantités :

$$R_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2$$

On utilise cette directive lorsqu'on impose en  $R_0$  les conditions d'extrapolation intérieure :

$$\frac{\phi^r}{\phi^r} = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \frac{\phi^l}{\phi^l} = \frac{1}{\lambda_2}$$

8. **GARANTIE**. Cette directive permet, en général, d'obtenir un résultat correct alors même que le programme normal donne des résultats aberrants (voir paragraphe 20). Le temps de calcul est en moyenne doublé lorsqu'on emploie cette directive.

9. **BLOCAGE**, suivie, une ligne plus bas, de trois quantités :

$$\alpha \quad \beta \quad j$$

Cette directive doit suivre ou précéder la directive

**R - CRITIQUE**

$$X_1 \quad X_2 \quad i$$

Elle a pour but d'imposer aux rayons des milieux d'indice :

$$i+1, i+2, \dots, i+j$$

la relation :

$$R_{k+1} = \alpha R_k + \beta e$$

où  $e$  est l'épaisseur du milieu d'indice  $k+1$  ( $i+1 \leq k+1 \leq i+j$ )

$R_k$  et  $R_{k+1}$  les rayons extérieurs des milieux d'indice  $k$  et  $k+1$

Exemple 1 -

**R - CRITIQUE**

$$X_1 \quad X_2 \quad i$$

**BLOCAGE**

$$1 \quad 1 \quad 3$$

l'épaisseur des milieux  $i+1, i+2, i+3$  sera conservée.

Exemple 2 -

**R - CRITIQUE**

$$X_1 \quad X_2 \quad i$$

**BLOCAGE**

$$\alpha \quad 0 \quad 1$$

Le rapport des rayons extérieurs et intérieurs du milieu  $i + 1$  restera égal à  $\alpha$ .

Remarque. Les nombres seront perforés selon le mode point décimal fixe ou flottant. Dans une liste de nombres, chacun d'eux doit être séparé du suivant par un double espace ou par un retour du chariot suivi d'un ou deux passages à la ligne.

### 13. Utilisation du programme

Le programme est perforé en binaire sur une seule bande. Pour le faire lire, il suffit d'appuyer sur le bouton "Initial transfert", clé 2 levée.

Une fois le programme lu, le calculateur s'arrête. On introduit alors, sous le lecteur, la bande des constantes et on appuie sur le bouton "prepulse".

Le programme se déroule et traite autant de cas que la bande de constantes en contient, en passant automatiquement d'un cas au suivant.

Si la bande de constantes comporte une directive non admise, le calculateur imprime "ERREUR" et passe automatiquement au cas suivant.

### B. Présentation des résultats.

14. On trouve successivement sur la bande résultat :

1. Le titre : RIFIFI, qui n'est perforé qu'une fois.
2. Le titre du cas considéré, s'il existe.
3. Deux colonnes de nombres, la première représentant les valeurs essayées du paramètre jusqu'à la valeur critique, la seconde celles de la fonction que l'on cherche à annuler.
4. Seulement dans le cas où on a mis la directive RESULTATS COMPLEMENTAIRES, des quantités relatives à chaque milieu et disposées comme suit :

MILIEU $i$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
	a	b	c	d
	$\mu$	$\nu$	s	t
	$D_1$	$D_2$	$D_1 e$	$D_2 e$
	$\Sigma_1$	$\Sigma_2$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$
	$k_1$	$k_2$	p	$R_i$

Les quantités  $a$   $b$   $c$   $d$ ,  $\bar{a}$   $\bar{b}$   $\bar{c}$   $\bar{d}$  sont définies en 16.

5. Le flux rapide et le flux lent perforés sous une forme qui permet de tracer directement les courbes à l'aide de la traceuse.

On trouvera successivement :

- des indications concernant les unités employées, les minima et maxima des différents abscisses et flux qui permettent de choisir des échelles convenables pour la traceuse.
- trois colonnes : la première étant la suite des abscisses, la seconde et la troisième, la suite correspondante des flux rapides et lents.

6. Les flux adjoints éventuellement.

Même disposition que les flux directs avec inversion du flux rapide et du flux lent.

7. Les intégrales éventuellement.

C. Exemple de calcul.

Données : TITRETEST C. M.  
CYLINDRIQUE  
N - CRITIQUE  
1.065 1.08

LISTE

3 293

119.9 128.5 208.5

MILIEU 1

1.25 0.867 1.25 0.867 0.0092407 0.01072

0 1 0.8791 0 0 2

MILIEU 2

1.25 0.8529 1.25 0.8529 0.010416 0.00007497

0 0 1 0 0.011 2

MILIEU 3

1.22 0.85 1.22 0.85 0.003352 0.0003172

0 0 1 0 0 2

Résultats : RIFIFI

TEST C. M.

CYLINDRIQUE

1.06500, + 0	- 4.75828, + 3
1.08000, + 0	2.13074, + 3
1.07536, + 0	7.79904, + 2
1.07268, + 0	- 8.18915, + 1
1.07294, + 0	3.50449, + 0
1.07293, + 0	- 1.04670, + 1

FLUX DIRECT

Y <sub>0</sub> UNITE 1, - 01	MIN + 0001	MAX + 2085
Y <sub>1</sub> UNITE 1, - 01	MIN + 0001	MAX + 1622
Y <sub>2</sub> UNITE 1, - 01	MIN + 0010	MAX + 1197

Y <sub>0</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>
X + 0001 →	+ 1622 →	= + 1197 →
X + 0301 →	+ 1543 →	= + 1139 →
X + 0600 →	+ 1320 →	= + 0975 →
X + 0900 →	+ 0982 →	= + 0730 →
X + 1199 →	+ 0421 →	= + 0628 →
X + 1199 →	+ 0421 →	= + 0628 →
X + 1221 →	+ 0352 →	= + 0654 →
X + 1242 →	+ 0297 →	= + 0660 →
X + 1263 →	+ 0255 →	= + 0650 →
X + 1285 →	+ 0223 →	= + 0627 →
X + 1285 →	+ 0223 →	= + 0627 →
X + 1485 →	+ 0071 →	= + 0457 →
X + 1685 →	+ 0023 →	= + 0276 →
X + 1885 →	+ 0007 →	= + 0129 →
X + 2085 →	+ 0001 →	= + 0010 →

## DEUXIEME PARTIE

### FORMULATION DU PROBLEME

#### I. INTRODUCTION

14. La recherche de la condition critique et la détermination des flux en théorie de la diffusion à deux groupes, dans le cas d'une géométrie à une dimension et d'un nombre quelconque de milieux, est un problème dont on peut donner facilement une formulation analytique mais dont l'application numérique soulève certaines difficultés, dès que le nombre  $n$  des milieux est supérieur à deux. Pour la résolution d'un tel problème, on peut penser à des méthodes de deux types :

Examinons d'abord le cas des méthodes d'intégration numérique. Elles consistent à appliquer à ce problème un traitement valable pour tout système d'équations différentielles avec conditions aux limites et paramètres critiques. Les équations sont traduites par des équations aux différences, c'est-à-dire des relations linéaires liant les valeurs des fonctions en un certain nombre de points. Si on adopte une méthode de résolution directe du système ainsi obtenu, des effets de différence se manifestent alors et amènent à faire le calcul en double longueur. La double longueur peut même devenir insuffisante pour un nombre de milieux supérieur à 5. Les méthodes de résolution par itérations du système linéaire se sont révélées d'une bonne efficacité dans le cas de géométries à deux ou trois dimensions, mais elles semblent moins s'imposer ici.

Le second type de méthode est de nature analytique. On sait expliciter, dans chaque milieu, l'expression analytique des flux avec des fonctions simples : exponentielles, lignes trigonométriques, fonctions de Bessel. Dans ces expressions, quatre coefficients inconnus entrent linéairement, soient  $4N$  inconnus. Les relations qui expriment la continuité des flux et des courants et les conditions aux limites fournissent  $4N$  équations homogènes. La condition critique s'obtient en annulant le déterminant correspondant. La méthode analytique la plus simple consiste à calculer ce déterminant pour différentes valeurs du paramètre et à obtenir la valeur critique de ce paramètre par interpolation. Dès que  $n > 2$ , la

double longueur s'impose car les effets de différence sont importants. La masse du calcul semble lourde et on peut craindre que la précision devienne faible dès que  $n$  est de l'ordre de 6.

Il a été possible d'améliorer cette méthode et d'éviter le calcul du déterminant dans deux méthodes mises au point en même temps au Service de Physique Mathématique.

La première consiste à mettre le problème sous forme matricielle et à conduire le calcul en évitant tout effet de différence [2]. Pour aboutir à ce résultat, la méthode utilise la propriété suivante : la matrice compound d'un produit de matrices est le produit des matrices compounds. Cette méthode rapide et précise pour le calcul de la condition critique ne donne pas directement les coefficients nécessaires au calcul des flux. Un programme supplémentaire permet de calculer les constantes et les flux avec de bons résultats mais au prix d'un temps de calcul assez grand.

La deuxième méthode consiste à obtenir les coefficients par approximations successives, en utilisant  $4n-1$  des relations ; la dernière étant vérifiée lorsque la condition critique est atteinte. Les effets de différence sont évités par un regrouperment judicieux des termes et une discussion de l'ordre de grandeur des quantités.

Les deux méthodes ont été programmées sur I. B. M. 650 (référence [3] pour la première, [4] pour la seconde). La dernière qui réalise un bon compromis entre la rapidité et la précision a été choisie pour être programmée pour le calculateur électronique Mercury (Ferranti). Le formalisme complet va en être détaillé dans les paragraphes suivants.

Il peut être intéressant de signaler que, utilisée telle quelle, cette méthode se prête fort bien aux calculs à la main en raison de sa simplicité.

## II. FORMULATION DU PROBLEME

### 15. Equations de la théorie à deux groupes

Le flux de neutrons en ralentissement et le flux de neutrons thermalisés sont donnés par la résolution du système des équations de la diffusion suivant,

dans lequel on a séparé les variables :

$$\begin{pmatrix} -D_1 e \alpha^2 + D_1 \nabla^2 - \Sigma_1 & \frac{k}{p} \Sigma_2 \\ p \Sigma_1 & -D_2 e \alpha^2 + D_2 \nabla^2 - \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^z \\ \phi^l \end{pmatrix} = 0 \quad 15-1$$

avec  $\alpha^2 = \frac{\pi^2}{H_e^2}$  en géométrie cylindrique  
 $= 0$  en géométrie sphérique  
 $= \frac{2,405}{H_e^2}$  en géométrie plane

On résoud ce système en recherchant quatre solutions indépendantes des équations homogènes

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 - B^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^z \\ \phi^l \end{pmatrix} = 0 \quad 15-2$$

Le système 15-1 dans lequel on pose :

$$E = \Sigma_1 + D_1 e \alpha^2$$

$$F = - \frac{k}{p} \Sigma_2$$

$$G = - p \Sigma_1$$

$$H = \Sigma_2 + D_2 e \alpha^2$$

s'écrit alors, compte tenu de 15-2 :

$$\begin{pmatrix} E - D_1 B^2 & F \\ G & H - D_2 B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^z \\ \phi^l \end{pmatrix} = 0$$

$B^2$  racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} E - D_1 B^2 & F \\ G & H - D_2 B^2 \end{vmatrix} = 0$$

peut prendre les valeurs

$$B_1^2 = \frac{ED_2 + HD_1 - \sqrt{\Delta}}{2 D_1 D_2} \quad \text{racine positive ou négative,}$$

$$B_2^2 = \frac{ED_2 + HD_1 + \sqrt{\Delta}}{2 D_1 D_2} \quad \text{racine toujours positive}$$

avec

$$\Delta = (ED_2 + HD_1)^2 - 4 D_2 D_1 (EH - FG)$$

Les valeurs de  $B_1^2$  et  $B_2^2$  dépendent par  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_{1e}$ ,  $D_{2e}$ ,  $k$ ,  $p$ ,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  des propriétés physiques du milieu considéré. On dira que le milieu est multiplicateur si  $B_1^2 < 0$  et réflecteur si  $B_1^2 > 0$ .

On définit encore les quantités suivantes :

$$\nu = |B_1|$$

$$\nu = B_2$$

$$s = \frac{D_2 B_1^2 - H}{G}$$

$$t = \frac{D_2 B_2^2 - H}{G}$$

$\nu$  et  $\nu$  interviennent dans les arguments des solutions de 15-2,  $s$  et  $t$  sont les coefficients de couplage des solutions de la première et de la deuxième équation 15-2.

#### 16. Principe de la méthode utilisée

La forme des solutions des équations de la diffusion dépend à la fois de la géométrie et des propriétés physiques du milieu, mais la racine positive fournit toujours deux solutions à allure exponentielle variant en sens inverse. Sous réserve que le milieu soit suffisamment épais, la contribution au flux de chacune de ces solutions est donc importante à une frontière et faible à l'autre. Ainsi en géométrie cylindrique le terme en  $K_0(\nu r)$  décroît exponentiellement lorsque le rayon augmente et devient négligeable en première approximation à la frontière externe d'un milieu. Ce fait est mis à profit pour transformer le système linéaire homogène des  $4N$  équations de continuité en une série de  $N$  systèmes de quatre équations à quatre inconnues avec second membre de résolution immédiate. Partant

des conditions aux limites à la frontière extérieure du N<sup>ième</sup> milieu, on calcule les flux et courants dans les milieux N, N-1, etc... La condition critique est réalisée lorsque flux et courants satisfont les conditions à la limite extrême du milieu 1. Les termes négligés au cours du premier calcul aux frontières où ils interviennent peu sont calculés avec précision à la frontière suivante où ils sont plus négligeables, puis introduits dans les itérations suivantes dont ils améliorent la précision.

Les milieux de faible épaisseur font l'objet d'un traitement spécial.

### III. EXPLICITATION DETAILLÉE DES CALCULS

#### 17. Expression des flux

On peut dans tous les cas mettre les flux sous la forme :

$$\phi^e = s \left[ a \frac{U(z)}{U(R)} + b \left( U(z) V_1(R) - V(z) U_1(R) \right) \right] + t \left[ c \frac{W(z)}{W(R)} + d \frac{T(z)}{T(R)} \right]$$

$$\phi^i = a \frac{U(z)}{U(R)} + b \left( U(z) V_1(R) - V(z) U_1(R) \right) + c \frac{W(z)}{W(R)} + d \frac{T(z)}{T(R)}$$

Les expressions de  $U, U_1, V, V_1, W, W_1, T, T_1$  sont données par le tableau 17 dans les différentes géométries. Sous cette forme, les flux à la frontière R s'expriment simplement en fonction de a, b, c, d. Si l'on appelle  $\bar{R}$  le rayon de la frontière intérieure du même milieu, on peut mettre les flux sous une forme analogue en remplaçant R par  $\bar{R}$  et a, b, c, d par  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ . Ces constantes sont reliées entre elles par les relations

$$\bar{a} = a \frac{U(\bar{R})}{U(R)} + b \frac{U(\bar{R})}{U_1(R)} \left( U_1(\bar{R}) V_1(R) - U_1(R) V_1(\bar{R}) \right)$$

$$\bar{b} = b \frac{U_1(R)}{U_1(\bar{R})}$$

$$\bar{c} = c \frac{W(\bar{R})}{W(R)}$$

$$\bar{d} = d \frac{T(\bar{R})}{T(R)}$$

La dernière équation est du reste employée dans le sens

$$d = \bar{d} \frac{T(\bar{R})}{T(R)}$$

comme on le verra plus loin.

### 18. Conditions de continuité

Les équations suivantes représentent les conditions de continuité des flux et des courants entre le milieu  $i$  dont l'indice a été supprimé et  $i + 1$  dont l'indice est remplacé par la notation' :

$$s(a + \alpha b) + t(c + d) = s'(\bar{a}' + \bar{b}'\bar{\alpha}') + t'(\bar{c}' + \bar{d}')$$

$$a + \alpha b + c + d = \bar{a}' + \bar{b}'\bar{\alpha}' + \bar{c}' + \bar{d}'$$

$$a s D_1 \frac{u_1}{U} + c t D_1 \frac{w_1}{W} + d t D_1 \frac{T_1}{T} =$$

$$\bar{a}' s' \left[ D_1' \frac{\bar{u}_1'}{U'} - \epsilon_1 \right] - \bar{b}' s' \bar{\alpha}' \epsilon_1$$

$$+ \bar{c}' t' \left[ D_1' \frac{\bar{w}_1'}{W'} - \epsilon_1 \right] + \bar{d}' t' \left[ D_1' \frac{\bar{T}_1'}{T'} - \epsilon_1 \right]$$

$$a D_2 \frac{u_1}{U} + c D_2 \frac{w_1}{W} + d D_2 \frac{T_1}{T} =$$

$$\bar{a}' \left[ D_2' \frac{\bar{u}_1'}{U'} - \epsilon_2 \right] - \bar{b}' s' \bar{\alpha}' \epsilon_2$$

$$+ \bar{c}' \left[ D_2' \frac{\bar{w}_1'}{W'} - \epsilon_2 \right] + \bar{d}' \left[ D_2' \frac{\bar{T}_1'}{T'} - \epsilon_2 \right]$$

On a posé : .

$$\alpha = U(R) v_1(R) - u_1(R) v(R)$$

$$\bar{W} = W(\bar{R})$$

$$W' = W(R')$$

etc...

et de plus

$$\varepsilon_1 = e \Sigma_1$$

$$\varepsilon_2 = e \Sigma_2$$

Ces dernières quantités permettent de tenir compte de la présence d'un milieu mince, absorbant, d'épaisseur  $e$ , situé entre les milieux  $i$  et  $i + 1$ . On peut mettre le système précédent sous la forme suivante :

$$s a + s \alpha b + t c - t' \bar{d}' = f_1$$

$$a + \alpha b + c - \rho \bar{d}' = f_2$$

$$l a + m e + n \bar{d}' = f_3$$

$$\bar{l} a + \bar{m} c + \bar{n} \bar{d}' = f_4$$

en posant :

$$l = s D_1 \frac{U_1}{U}$$

$$\bar{l} = D_2 \frac{U_1}{U}$$

$$m = t D_1 \frac{W_1}{W}$$

$$\bar{m} = D_2 \frac{W_1}{W}$$

$$n = - t' \left[ D_1' \frac{\bar{T}_1'}{\bar{T}'} - \varepsilon_1 \right]$$

$$\bar{n} = - \left[ D_2' \frac{\bar{T}_1'}{\bar{T}'} - \varepsilon_2 \right]$$

$$f_1 = s' (\bar{\alpha}' + \bar{\beta}' \alpha') + t' \bar{c}' - t d$$

$$f_2 = \bar{\alpha}' + \bar{\beta}' \alpha' + \bar{c}' - d$$

$$f_3 = \bar{\alpha}' s' \left[ D_1' \frac{\bar{U}_1'}{U} - \epsilon_1 \right] - \bar{\beta}' \bar{\alpha}' s' \epsilon_1$$

$$+ \bar{c}' t' \left[ D_1' \frac{\bar{W}_1'}{W} - \epsilon_1 \right] - D_1' \frac{T_1}{T} t d$$

$$f_4 = \bar{\alpha}' \left[ D_2' \frac{\bar{U}_1'}{U} - \epsilon_2 \right] - \bar{\beta}' \bar{\alpha}' \epsilon_2$$

$$+ \bar{c}' \left[ D_2' \frac{\bar{W}_1'}{W} - \epsilon_2 \right] - D_2' \frac{T_1}{T} d$$

$\rho$  est un paramètre introduit pour permettre de conserver le même formalisme à toutes les frontières :  $\rho = 0$  à la frontière extérieure du milieu  $n$ ,  $\rho = 1$  ailleurs. On utilise le même système pour écrire les conditions aux limites à la frontière extérieure  $R_n$ , en posant :

$$t' = 1$$

$$n = -q^{-1}$$

$$\bar{n} = 0$$

$$f_1 = -t d$$

$$f_2 = 1 - d$$

$$f_3 = -D_1 t \frac{T_1}{T} d$$

$$f_4 = q^{-1} - d D_2 \frac{T_1}{T}$$

Ce qui revient à poser à cette frontière :

$$\phi^l = 1$$

$$\frac{J^l}{\phi^l} = \frac{J^r}{\phi^r} = q^{-1}$$

$J^r$  et  $J^l$  étant les courants de neutrons rapides et thermiques,  $q^{-1}$  valant  $-2,13$ , ces équations traduisent le fait que les flux s'annulent à une distance extrapolée de  $0,71 \lambda t$  et sont normalisés à  $\phi^l(R_n) = 1$ .

On peut remarquer qu'avec les notations utilisées, on a :

$$d' = \frac{\phi^r}{\phi^l}$$

19. Condition critique

La méthode consiste à calculer les constantes a b c d des milieux n, n-1, ..., 1 à partir des conditions aux limites en R<sub>n</sub> et à faire varier le paramètre critique X de façon à satisfaire les conditions aux limites en R<sub>0</sub>. On donne deux bornes X<sub>1</sub> X<sub>2</sub> de X à partir desquelles l'interpolation se poursuit.

Avec le formalisme adopté, la condition à réaliser est l'annulation du coefficient b<sub>1</sub> dans le cas général et du déterminant

$$b_0 = \begin{vmatrix} s \left[ \lambda_1 \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}} - 1 \right] \bar{a} - s \bar{\alpha} \bar{t} + t \left[ \lambda_1 \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}} - 1 \right] \bar{c} & \lambda_1 \bar{t} \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}} \\ \left[ \lambda_2 \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}} - 1 \right] \bar{a} - \bar{\alpha} \bar{b} + \left[ \lambda_2 \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}} - 1 \right] \bar{c} & \lambda_2 \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}} \end{vmatrix}$$

dans le cas "EXTRAPOLATION". L'annulation de ce déterminant exprime que les conditions

$$\phi^z = \lambda_1 \phi'^z$$

$$\phi^l = \lambda_2 \phi'^l$$

sont compatibles.

20. Mode de calcul

On définit les opérations suivantes :

P<sub>0</sub><sup>i</sup> = calcul de a<sub>i</sub> b<sub>i</sub> c<sub>i</sub> d' = d̄<sub>i+1</sub> à la frontière R<sub>i</sub> = R̄<sub>i</sub> + 1 avec les équations 18 et l'approximation d<sub>i</sub> = 0

T<sup>i</sup> = calcul de ā<sub>i</sub> b̄<sub>i</sub> c̄<sub>i</sub> d<sub>i</sub> + 1 avec les équations 17 sauf pour i = n où T<sub>n</sub> = calcul de ā<sub>n</sub> b̄<sub>n</sub> c̄<sub>n</sub>  
i = 1 où T<sub>i</sub> = calcul de d<sub>2</sub>

P<sub>1</sub><sup>i</sup> = calcul de a<sub>i</sub> b<sub>i</sub> c<sub>i</sub> d' = d̄<sub>i</sub> + 1, à la frontière R<sub>i</sub> = R̄<sub>i</sub> + 1 avec les équations 18 en prenant pour d<sub>i</sub> la dernière valeur calculée par T<sup>i-1</sup>.

Q<sub>0</sub><sup>1</sup> = T<sup>1</sup> P<sub>0</sub><sup>1</sup> ... T<sup>n-2</sup> P<sub>0</sub><sup>n-2</sup> T<sup>n-1</sup> P<sub>0</sub><sup>n-1</sup> T<sup>n</sup> P<sub>0</sub><sup>n</sup> T<sup>n-1</sup> P<sub>0</sub><sup>n-1</sup> T<sup>n</sup> P<sub>0</sub><sup>n</sup> calculé pour la valeur X = X<sub>1</sub>.

$$Q_1^j = T^1 P_1^1 \dots T^{n-2} P_1^{n-2} T^{n-1} P_1^{n-1} T^n P_1^n T^{n-1} P_1^{n-1} T^n P_1^n$$

calculé pour la valeur  $X = X_j$ .

Le calcul de la condition critique est fait par la succession des opérations suivantes :

$$Q_0^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4, \dots, Q_1^m$$

$X_m$  étant la valeur finale du paramètre critique.

En fait, le calcul  $Q_1^2$  est fait en prenant pour  $d_i$  les valeurs calculées au cours de  $Q_0^1$ . Dans certains cas, ceci conduit à des résultats aberrants. On peut éviter cette difficulté en donnant au paramètre critique successivement les valeurs  $X_1, X_1 + \Delta, X_1 + 2\Delta, \dots$ , avec  $\Delta = \frac{X_2 - X_1}{10}$  jusqu'à obtention de deux valeurs successives de signes contraires, le programme se déroulant normalement à partir de ce moment. Ce procédé est assez long, chaque valeur de la fonction  $Y_n$  étant le résultat d'une itération qui est arrêtée lorsque  $\frac{Y_n - Y_{n-1}}{Y_{n-1}} \leq 10^{-1}$ . C'est pourquoi il n'est employé que lorsqu'on fixe la directive  $Y_{n-1}$  GARANTIE.

On voit qu'on dispose, une fois la condition critique réalisée, des constantes a b c d de tous les milieux, ce qui permet de calculer les flux à l'aide des formules du tableau 17.

## 21. Calcul des flux adjoints

Ils sont solutions du système d'équations

$$\begin{pmatrix} E - D_1 B^2 & G \\ F & H - D_2 B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{z+} \\ \phi^{l+} \end{pmatrix} = 0$$

qu'on traite de la même façon que précédemment, les conditions aux limites étant les mêmes. La condition critique n'est évidemment plus à chercher. Afin d'avoir une bonne précision sur les coefficients  $a^+ b^+ c^+ d^+$  on fait trois itérations complètes avec la valeur connue du paramètre critique.

22. Intégrales

1.  $I_1 = \int \phi^{\ell} e^{\delta} dr$

Calculée pour chaque milieu elle se met sous la forme :

$$I_1^i = R_i^{\delta} \left[ \frac{\gamma}{\mu^2} a \frac{u_1}{U} + \frac{1}{\gamma^2} \left( c \frac{w_1}{W} + d \frac{T_1}{T} \right) \right]_i$$

$$- \bar{R}_i^{\delta} \left[ \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\mu}^2} \bar{a} \frac{\bar{u}_1}{\bar{U}} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left( \bar{c} \frac{\bar{w}_1}{\bar{W}} + \bar{d} \frac{\bar{T}_1}{\bar{T}} \right) \right]_i$$

avec

$\delta = 0$  en géométrie linéaire

$\delta = 1$  en géométrie cylindrique

$\delta = 2$  en géométrie sphérique

$\gamma = + 1$  pour un milieu réflecteur

$\gamma = - 1$  pour un milieu multiplicateur.

2.  $I_{21} = \int \phi^{\ell} \phi^{\ell_2} e^{2\delta} dr$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{a}{U(R)} + b V_1(R) \\ B = -b U_1(R) \\ C = \frac{c}{W(R)} \\ D = \frac{d}{T(R)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^+ = \frac{a^+}{U(R)} + b^+ V_1(R) \\ B^+ = -b^+ U_1(R) \\ C^+ = \frac{c^+}{W(R)} \\ D^+ = \frac{d^+}{T(R)} \end{array} \right.$$

La valeur de l'intégrale pour le milieu  $i$  est alors :

$$\begin{aligned}
 I_{21}^i = & A A^+ \int_{R_{i-1}}^{R_i} U^2(z) z^\delta dz + B B^+ \int_{R_{i-1}}^{R_i} V^2(z) z^\delta dz + C C^+ \int_{R_{i-1}}^{R_i} W^2(z) z^\delta dz + D D^+ \int_{R_{i-1}}^{R_i} T^2(z) z^\delta dz \\
 & + (A B^+ + B A^+) \int_{R_{i-1}}^{R_i} U(z) V(z) z^\delta dz + (A C^+ + C A^+) \int_{R_{i-1}}^{R_i} U(z) W(z) z^\delta dz \\
 & + (A D^+ + D A^+) \int_{R_{i-1}}^{R_i} U(z) T(z) z^\delta dz + (B C^+ + C B^+) \int_{R_{i-1}}^{R_i} V(z) W(z) z^\delta dz \\
 & + (B D^+ + D B^+) \int_{R_{i-1}}^{R_i} V(z) T(z) z^\delta dz + (C D^+ + D C^+) \int_{R_{i-1}}^{R_i} W(z) T(z) z^\delta dz
 \end{aligned}$$

On calcule de même

$$I_{22} = \int \phi^z \phi^{z^+} z^\delta dz$$

en remplaçant :

A	par	sA
B	,	sB
C	,	tC
D	,	tD

$$I_{23} = \int \phi^l \phi^{l^+} z^\delta dz$$

en remplaçant :

A <sup>+</sup>	par	s <sup>+</sup> A <sup>+</sup>
B <sup>+</sup>	,	s <sup>+</sup> B <sup>+</sup>
C <sup>+</sup>	,	t <sup>+</sup> C <sup>+</sup>
D <sup>+</sup>	,	t <sup>+</sup> D <sup>+</sup>

$$I_{24} = \int \phi^z \phi^{z^+} z^\delta dz$$

en remplaçant :

A et A <sup>+</sup>	par	sA et s <sup>+</sup> A <sup>+</sup>
B , B <sup>+</sup>	,	sB , s <sup>+</sup> B <sup>+</sup>
C , C <sup>+</sup>	,	tC , t <sup>+</sup> C <sup>+</sup>
D , D <sup>+</sup>	,	tD , t <sup>+</sup> D <sup>+</sup>

$$\begin{aligned} \S. \quad I_{31} &= \int \text{grad } \phi^v \text{ grad } \phi^{v+} z^{\delta} dr \\ I_{32} &= \int \text{grad } \phi^l \text{ grad } \phi^{l+} z^{\delta} dr \end{aligned}$$

Ces deux intégrales s'obtiennent en remplaçant dans les expressions de  $I_{22}$  et  $I_{23}$  les  $U V W T$  par  $U_1 V_1 W_1 T_1$ .

*Manuscrit reçu le 17 décembre 1959.*

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] **The elements of nuclear reactor theory, Glasstone et Edlund.**
- [2] **MERCIER C. - Service de Physique Mathématique, non publié.**
- [3] **DUFFOURT et LAGO - Rapports internes du Service de Physique Mathématique, n° 393 du 10.1.1958 et 400 du 30.1.1958.**
- [4] **BACHER et PARKER - Rapports internes du Service de Physique Mathématique, n° 268 du 15.4.1957, 268 bis du 2.9.1957, 418 du 18.2.1958.**

TABLEAU 17

	Géométrie CYLINDRIQUE		Géométrie SPHERIQUE				Géométrie AXIALE				Géométrie DEMI-AXIALE			
	M	R	M <sub>1</sub>	M <sub>i</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>i</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>i</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>i</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>i</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>i</sub>
U(r)	$J_0(\mu r)$	$I_0(\mu r)$	$r^{-1} \sin \mu r$	$r^{-1} \sin \mu r$	$r^{-1} \operatorname{sh} \mu r$	$r^{-1} e^{\mu r}$	$\sin \mu r$	$\sin \mu r$	$\operatorname{sh} \mu r$	$e^{\mu r}$	$\cos \mu r$	$\cos \mu r$	$\operatorname{ch} \mu r$	$e^{\mu r}$
U <sub>1</sub> (r)	$-\mu J_1(\mu r)$	$\mu I_1(\mu r)$	$\mu r^{-1} \cos \mu r$ $r^{-2} \sin \mu r$	$\mu r^{-1} \cos \mu r$ $-r^{-2} \sin \mu r$	$\mu r^{-1} \operatorname{ch} \mu r$ $-r^{-2} \operatorname{sh} \mu r$	$\mu r^{-1} e^{\mu r}$ $-r^{-2} e^{\mu r}$	$\mu \cos \mu r$	$\mu \cos \mu r$	$\mu \operatorname{ch} \mu r$	$\mu e^{\mu r}$	$-\mu \sin \mu r$	$-\mu \sin \mu r$	$\mu \operatorname{sh} \mu r$	$\mu e^{\mu r}$
V(r)	$Y_0(\mu r)$	$K_0(\mu r)$	$r^{-1} \cos \mu r$	$r^{-1} \cos \mu r$	$r^{-1} \operatorname{ch} \mu r$	$r^{-1} e^{-\mu r}$	$\cos \mu r$	$\cos \mu r$	$\operatorname{ch} \mu r$	$e^{-\mu r}$	$\sin \mu r$	$\sin \mu r$	$\operatorname{sh} \mu r$	$e^{-\mu r}$
V <sub>1</sub> (r)	$-\mu Y_1(\mu r)$	$-\mu K_1(\mu r)$	$-\mu r^{-1} \sin \mu r$ $-r^{-2} \cos \mu r$	$-\mu r^{-1} \sin \mu r$ $-r^{-2} \cos \mu r$	$\mu r^{-1} \operatorname{sh} \mu r$ $-r^{-2} \operatorname{ch} \mu r$	$-\mu r^{-1} e^{-\mu r}$ $-r^{-2} e^{-\mu r}$	$-\mu \sin \mu r$	$-\mu \sin \mu r$	$\mu \operatorname{sh} \mu r$	$-\mu e^{-\mu r}$	$\mu \cos \mu r$	$\mu \cos \mu r$	$\mu \operatorname{ch} \mu r$	$-\mu e^{-\mu r}$
$\alpha$	$\frac{2}{\pi} r^{-1}$	$-r^{-1}$	$-\mu r^{-2}$	$-\mu r^{-2}$	$-\mu r^{-2}$	$-2\mu r^{-2}$	$-\mu$	$-\mu$	$-\mu$	$-2\mu$	$\mu$	$\mu$	$\mu$	$-2\mu$
W(r)	$I_0(\nu r)$	$I_0(\nu r)$	$r^{-1} \operatorname{sh} \nu r$	$\operatorname{sh} \nu r$	$\operatorname{sh} \nu r$	$\operatorname{sh} \nu r$	$\operatorname{sh} \nu r$	$\operatorname{ch} \nu r$	$\operatorname{ch} \nu r$	$\operatorname{ch} \nu r$	$\operatorname{ch} \nu r$			
W <sub>1</sub> (r)	$\nu I_1(\nu r)$	$\nu I_1(\nu r)$	$\nu r^{-1} \operatorname{ch} \nu r$ $-r^{-2} \operatorname{sh} \nu r$	$\nu r^{-1} \operatorname{ch} \nu r$ $-r^{-2} \operatorname{sh} \nu r$	$\nu r^{-1} \operatorname{ch} \nu r$ $-r^{-2} \operatorname{sh} \nu r$	$\nu r^{-1} \operatorname{ch} \nu r$ $-r^{-2} \operatorname{sh} \nu r$	$\nu \operatorname{ch} \nu r$	$\nu \operatorname{sh} \nu r$						
T(r)	$K_0(\nu r)$	$K_0(\nu r)$	$r^{-1} \operatorname{ch} \nu r$	$r^{-1} e^{-\nu r}$	$r^{-1} \operatorname{ch} \nu r$	$r^{-1} e^{-\nu r}$	$\operatorname{ch} \nu r$	$e^{-\nu r}$	$\operatorname{ch} \nu r$	$e^{-\nu r}$	$\operatorname{sh} \nu r$	$e^{-\nu r}$	$\operatorname{sh} \nu r$	$e^{-\nu r}$
T <sub>1</sub> (r)	$-\nu K_1(\nu r)$	$-\nu K_1(\nu r)$	$\nu r^{-1} \operatorname{sh} \nu r$ $-r^{-2} \operatorname{ch} \nu r$	$-\nu r^{-1} e^{-\nu r}$ $-r^{-2} e^{-\nu r}$	$\nu r^{-1} \operatorname{sh} \nu r$ $-r^{-2} \operatorname{ch} \nu r$	$-\nu r^{-1} e^{-\nu r}$ $-r^{-2} e^{-\nu r}$	$\nu \operatorname{sh} \nu r$	$-\nu e^{-\nu r}$	$\nu \operatorname{sh} \nu r$	$-\nu e^{-\nu r}$	$\nu \operatorname{ch} \nu r$	$-\nu e^{-\nu r}$	$\nu \operatorname{ch} \nu r$	$-\nu e^{-\nu r}$

M<sub>1</sub> = milieu 1 multiplicateur

M<sub>i</sub> = " i "

R<sub>1</sub> = milieu 1 réflecteur

R<sub>i</sub> = " i "

**FIN**