LEROUGE B., RAIEVSKI V.

Rapport C.E.A. n° 668

Effet d'une perturbation dans le réflecteur d'une pile. Cas d'un canal radial.

Sommaire.- Le calcul des perturbations en théorie à deux groupes est appliqué au cas d'une perturbation dans le réflecteur d'une pile. La variation de réactivité qui en résulte est mise sous une forme générale, dépendant des conditions aux limites à la surface du volume perturbé. On traite en détail le cas d'une perturbation constituée par l'introduction d'une cavité vide, où les conditions aux limites sont imposées par le processus de transport des neutrons. C'est en particulier le cas d'un canal radial traversant le réflecteur de la pile.

1957 15 pages

LEROUGE B., RAIEVSKI V.

Rapport C.E.A. n° 668

A perturbation effect in the reflector of a pile. The case of a radial canal.

Summary. - The calculation of perturbations by the two group theory is applied to the case of a perturbation in a pile reflector. The resulting reactivity variation is put in a general form, dependant on the limiting conditions at the surface of the volume perturbed. A detailed account is given of the case of a perturbation consisting of the introduction of an empty cavity, where the limiting conditions are imposed by the neutron transport process. This is especially the case of a radial canal passing through the reflector of a pile.

1957 15 pages

# ÉNERGIE ATOMIQUE

# PROTÉGER LA POPULATION
# EFFET D'UNE PILE
# NUCLÉAIRE RADIOLÉSIÉ

par V. RAJEVSKI

Mir

- Rapport C.E.A. n° 668 -

Service de Physique Mathématique

# EFFET D'UNE PERTURBATION DANS LE REFLECTEUR D'UNE PILE

## CAS D'UN CANAL RADIAL

par

B. LEROUGE et V. RAIEVSKI

R.57-1077/SR

- Novembre 1957 -

# EFFET D'UNE PERTURBATION DANS LE REFLECTEUR D'UNE PILE

## CAS D'UN CANAL RADIAL

## I - INTRODUCTION

La théorie des perturbations appliquée aux piles a été exposée par différents auteurs [1][2]; nous utiliserons ici les notations de H.L. Mc MURRY. Ce dernier donne les expressions très générales permettant de calculer la perte de réactivité due à la perturbation de différents paramètres. Il est commode, dans certains cas de considérer que la perturbation affecte les conditions aux limites et de faire apparaître celles-ci d'une façon explicite sous forme de longueurs d'extrapolation. On a traité ainsi en théorie à un groupe l'effet de coins dans un réflecteur [3], puis l'effet de l'absorption équivalente à un canal [4], de l'absorption et de l'effet de transport dans un canal placé dans le réflecteur d'une pile [5].

Nous envisageons ici le calcul de ce dernier cas, dans une théorie à deux groupes.

## II - VARIATION DE REACTIVITE DUE A UNE PERTURBATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Les notations matricielles sont celles de l'ouvrage de MARGENAU et MURPHY [6].

En théorie à deux groupes, on décrit la distribution des neutrons dans la pile, par la valeur de deux fonctions représentant respectivement les flux de neutrons rapides et thermiques $S_f$ et $S_s$. Ces deux fonctions sont couplées par les équations de la diffusion qui s'écrivent, en régime stationnaire :

coeur
$$\begin{cases} \nabla . D_f \nabla S_f - \dfrac{D_f}{L_r^2} S_f + \dfrac{k_\infty \Sigma_a}{P} S_s = 0 \\ \nabla . D_s \nabla S_s - \Sigma_a S_s + P \dfrac{D_f}{L_r^2} S_f = 0 \end{cases}$$

réflecteur
$$\begin{cases} \nabla . D_f \nabla S_f - \dfrac{D_f}{L_r^2} S_f = 0 \\ \nabla . D_s \nabla S_s - \Sigma_a S_s + \dfrac{D_f}{L_r^2} S_f = 0 \end{cases}$$

Il est commode de considérer les fonctions $S_f$ et $S_s$ , comme les composantes d'un vecteur $S$ dans un espace à deux dimensions. Dans ces conditions, les équations de la diffusion peuvent être condensées sous la forme

$$|M| \; S = 0 \tag{2.1}$$

où la matrice $|M|$ à pour expression :

coeur
$$|M| = \begin{vmatrix} \nabla . D_f \nabla - \dfrac{D_f}{L_r^2} & \dfrac{K_\infty \Sigma_a}{P} \\ P \dfrac{D_f}{L_r^2} & \nabla . D_s \nabla - \Sigma_a \end{vmatrix}$$

réflecteur
$$|M| = \begin{vmatrix} \nabla . D_f \nabla - \dfrac{D_f}{L_r^2} & 0 \\ \dfrac{D_f}{L_r^2} & \nabla . D_s \nabla - \Sigma_a \end{vmatrix}$$

Si nous considérons la matrice associée $|\tilde{M}|$ obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de la matrice $|M|$ dont tous les termes sont réels, il existe une solution $S^+$ correspondant à la valeur propre fondamentale de l'opérateur $|\tilde{M}|$

$$|\tilde{M}| \, S^+ = 0 \tag{2.2}$$

Envisageons une pile critique et isolons un élément de volume du réflecteur.

On peut définir en tout point de la surface limitant cet élément de volume, deux longueurs d'extrapolation correspondant aux flux des groupes rapide et thermique :

$$\begin{cases} \lambda_{of}(\vec{r}) = \dfrac{S_f(\vec{r})}{\vec{n}\cdot \operatorname{grad} S_f(\vec{r})} \\ \lambda_{os}(\vec{r}) = \dfrac{S_s(\vec{r})}{\vec{n}\cdot \operatorname{grad} S_s(\vec{r})} \end{cases} \qquad (2.3)$$

On peut alors considérer la pile approximative, critique, comprenant cette cavité.

Si on impose au vecteur $S$ de la pile approximative les conditions aux limites (2.3) à la surface de la cavité, l'opérateur $|M|$ et le vecteur $S$ coïncident partout avec les grandeurs correspondantes de la pile réelle, sauf dans le volume de la cavité.

Perturbons maintenant les conditions aux limites (2.3) et calculons la variation $\delta k_\infty$ du facteur de multiplication $\delta k_\infty$ qui rendrait de nouveau la pile critique. La perturbation n'intéressant que le coeur de la pile, la matrice de perturbation P s'écrit :

coeur $\qquad |P| = \begin{vmatrix} 0 & \delta k_\infty \dfrac{\Sigma_a}{P} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

réflecteur $\qquad |P| = 0$

Le vecteur propre de la matrice perturbée s'écrit $S + \delta S$ :

$$|M + P|\,(S + \delta S) = 0 \qquad (2.4)$$

Multiplions scalairement par $S^\dagger$ l'équation (2.4), par $S + \delta S$ l'équation (2.2) et retranchons ces deux égalités ; après intégration dans tout l'espace, il vient :

$$\langle (S + \delta S)\,|\tilde{M}|\,S^\dagger \rangle - \langle S^\dagger\,|M + P|(S + \delta S)\rangle = 0$$

Négligeons le terme du second ordre et utilisons la relation

$$\langle S|\tilde{M}|S^\dagger\rangle - \langle S^\dagger|M|S\rangle = 0$$

on obtient :

$$\langle S^\dagger|P|S\rangle = \langle \delta S|\tilde{M}|S^\dagger\rangle - \langle S^\dagger|M|\delta S\rangle$$

Le membre de gauche de cette égalité a pour expression :

$$\langle S^{+}|P|S\rangle = \iiint_{coeur} \left[S_f^{+} \;,\; S_s^{+}\right]\Big|_{0}^{0} \begin{vmatrix} \frac{\Sigma_a}{P}\,\delta k_\infty & \\ & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} S_f \\ S_s \end{Bmatrix} d\vec{r}$$

$$\langle S^{+}|P|S\rangle = \delta k_\infty \iiint_{coeur} \frac{\Sigma_a}{P}\, S_f^{+}\, S_s \, d\vec{r}$$

Le membre de droite s'écrit :

$$\langle \delta S|\tilde{M}|S^{+}\rangle - \langle S^{+}|M|\delta S\rangle =$$

$$\iiint (\delta S_f\, m_{11}\, S_f^{+} - S_f^{+}\, m_{11}\, \delta S_f)\, d\vec{r} + \iiint (\delta S_s\, m_{22}\, S_s^{+} - S_s^{+}\, m_{22}\, \delta S_s)\, d\vec{r}$$

La relation de Green et les conditions de continuité des fonctions et de leurs dérivées à la surface de séparation du coeur et du réflecteur, permettent de transformer cette intégrale en une intégrale étendue à la surface extérieure de la pile où les fonctions prennent la valeur zéro, et à la surface du volume perturbé. Ce qui s'écrit :

$$\iint_{cavité} D_f\, (\delta S_f \cdot \mathrm{grad}\; S_f^{+} - S_f^{+}\; \mathrm{grad}\; \delta S_f)\; d\vec{A}$$

$$+ \iint_{cavité} D_s\, (\delta S_s \cdot \mathrm{grad}\; S_s^{+} - S_s^{+} \cdot \mathrm{grad}\; \delta S_s) \cdot d\vec{A}$$

On remarquera la symétrie pour les deux groupes. Transformons ces expressions de façon à faire apparaître les longueurs d'extrapolation à la surface du canal :

$$\delta S \cdot \mathrm{grad}\; S^{+} - S^{+} \cdot \mathrm{grad}\; \delta S = S S^{+} \left[ \frac{\mathrm{grad}\, S^{+}}{S^{+}}\; \frac{\delta S}{S} - \frac{\mathrm{grad}\,(S+\delta S)}{S} + \frac{\mathrm{grad}\, S}{S} \right]$$

Les longueurs d'extrapolation s'écrivent :

$$\frac{\bar{n}.\,\mathrm{grad}\,S^{+}}{S^{+}} = \frac{1}{\lambda_{0}^{+}}$$

$$\frac{\bar{n}.\,\mathrm{grad}\,(S+\delta S)}{S+\delta S} = \frac{1}{\lambda}$$

d'où :

$$(\delta S.\,\mathrm{grad}\,S^{+} - S^{+}.\,\mathrm{grad}\,\delta S).\,\bar{n} = \delta S^{+}\left(\frac{1}{\lambda_{0}^{+}}\,\frac{\delta S}{S} - \frac{1}{\lambda}\,\frac{S+\delta S}{S} + \frac{1}{\lambda_{0}}\right)$$

Si la perturbation est faible, cette expression se simplifie et devient :

$$\delta S^{+}\left(\frac{1}{\lambda_{0}} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

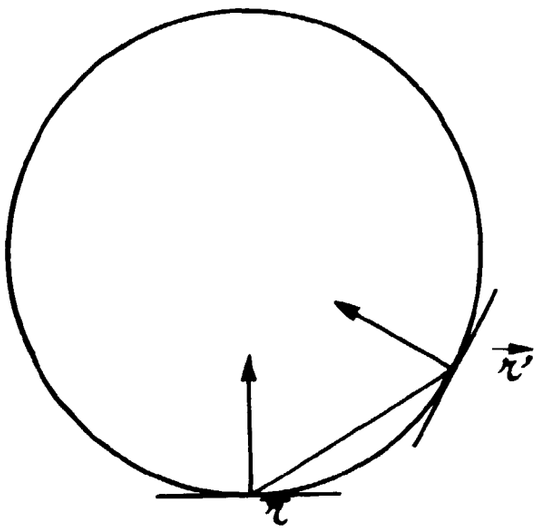
La perte de réactivité $\rho = \frac{\delta k_{\infty}}{k_{\infty}}$ due à la perturbation des conditions aux limites à la surface de la cavité se met donc sous la forme :

$$\rho = \frac{\iint_{\text{cavité}} D_{f}\left(\frac{1}{\lambda_{0f}} - \frac{1}{\lambda_{f}}\right) S_{f}\, S_{f}^{+}\, dA + \iint_{\text{cavité}} D_{s}\left(\frac{1}{\lambda_{0s}} - \frac{1}{\lambda_{s}}\right) S_{s}\, S_{s}^{+}\, dA}{k_{\infty} \iiint_{\text{coeur}} \frac{\Sigma_{a}}{P}\, S_{f}^{+}\, S_{s}\, d\vec{r}} \qquad (2.5)$$

## III - APPLICATION A L'EFFET D'UN CANAL RADIAL SITUE DANS LE REFLECTEUR D'UNE PILE. EFFET DE TRANSPORT DES NEUTRONS

L'existence d'une cavité vide permet la propagation en ligne droite des neutrons, à l'intérieur de la cavité. Il en résulte que la densité en phase des neutrons en un point de la cavité dépend de la valeur de cette densité en tout point de sa surface. Le calcul correct de cet effet de transport nécessite, en toute rigueur, la connaissance exacte des flux perturbés et la répartition angulaire des neutrons à la surface de la cavité. Il est impossible de traiter rigoureusement ce problème. La connaissance de la répartition angulaire exacte est la plus difficile, aussi la supposerons nous isotrope. La connaissance des flux perturbés est plus aisée ; nous pouvons, en première approximation, supposer que les flux perturbés sont identiques aux flux non perturbés. Ces deux hypothèses sont d'autant plus exactes que le diamètre du canal est faible devant les longueurs caractéristiques du réflecteur. Elles sont en particulier justifiées dans le cas d'un réflecteur d'eau lourde. Nous nous plaçons dans ce cas et nous allons calculer par la relation (2.5) la perte de réactivité due au transport des neutrons dans les canaux radiaux de la pile à modérateur et réflecteur d'eau lourde EL3.

Considérons une cavité et calculons la longueur d'extrapolation en un point courant $\vec{r}$ de sa surface. Supposons une densité en phase de la forme :




- Fig. 1 -

$$S(\vec{r},\vec{\Omega}) = S(\vec{r}) - \lambda_t \vec{\Omega}.\,\mathrm{grad}\; S(\vec{r})$$

l'élément d'angle solide a pour expression

$$d\Omega = \frac{1}{4\pi}\, d\varphi\, d\mu$$

Le nombre de neutrons traversant un élément d'aire $d\sigma$ en $\vec{r}$, en direction de la cavité, a pour expression :

$$J_- = \int S(\vec{r},\vec{\Omega})\; \vec{n}.\vec{\Omega}\; d\Omega$$

où $\vec{n}$ est la normale à la surface en $\vec{r}$ orientée vers la cavité, on trouve :

$$J_- = \frac{S(\vec{r})}{4} - \frac{\lambda t}{6}\; \vec{n}.\,\mathrm{grad}\; S(\vec{r})$$

Le nombre de neutrons traversant un élément d'aire $d\sigma'$ en $\vec{r}'$, en direction de la surface $d\sigma$ a pour valeur

$$dJ_+ = S(\vec{r}',\vec{\Omega}')\,\vec{n}'.\vec{\Omega}'\, d\Omega'$$

où $d\Omega'$ est l'angle solide sous lequel on voit l'élément $d\sigma$ à partir du point $\vec{r}'$

On a donc

$$J_+ = \iint_\Sigma S(\vec{r}',\vec{\Omega}')\; \vec{n}'.\;\vec{\Omega}'\, d\Omega'$$

où l'intégrale est étendue à la surface de la cavité.
Par raison de réciprocité, on a :

$$\vec{n}'.\vec{\Omega}'\, d\Omega' = \vec{n}.\vec{\Omega}\; d\Omega$$

où $d\Omega$ est l'angle solide sous lequel est vu $d\sigma'$ à partir de $r$

$$J_+ = \iint_\Sigma \left\{ S(\vec{r}') - \lambda_t\, \vec{\Omega}'.\,\mathrm{grad}\; S(\vec{r}') \right\} \mu\; d\Omega$$

La longueur d'extrapolation $\lambda(\vec{r})$ en $\vec{r}$ a pour expression :

$$\frac{1}{\lambda(\vec{r})} = \frac{3}{\lambda_t} \frac{J_- - J_+}{S(\vec{r})}$$

$$\frac{\lambda_t}{3\lambda(\vec{r})} = \frac{1}{4} - \iint_\Sigma \frac{S(\vec{r}')}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega - \frac{\lambda_t}{6} \vec{n} \cdot \frac{\text{grad}\, S(\vec{r})}{S(\vec{r})} + \lambda_t \iint_\Sigma \vec{\Omega}' \cdot \frac{\text{grad}\, S(\vec{r}')}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega$$

ajoutons $\frac{\lambda_t}{3} \vec{n} \cdot \frac{\text{grad}\, S(\vec{r})}{S(\vec{r})}$ aux deux membres, et remarquons que $S(\vec{r})$ étant la valeur du flux avant la perturbation, la longueur d'extrapolation avant la perturbation $\lambda_o$, a pour expression :

$$\frac{1}{\lambda_o(\vec{r})} = - \frac{\vec{n} \cdot \text{grad}\, S(\vec{r})}{S(\vec{r})}$$

$$\frac{\lambda_t}{3}\left(\frac{1}{\lambda(\vec{r})} - \frac{1}{\lambda_o(\vec{r})}\right) = \frac{1}{4} - \iint_\Sigma \frac{S(\vec{r}')}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega + \lambda_t \iint_\Sigma \frac{\vec{\Omega}' \cdot \text{grad}\, S(\vec{r}')}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega$$

$$+ \frac{\lambda_t}{6} \vec{n} \cdot \frac{\text{grad}\, S(\vec{r})}{S(\vec{r})}$$

Utilisons les relations :

$$\iint_\Sigma \mu \, d\Omega = \frac{1}{4}$$

et $$\iint \vec{\Omega} \cdot \frac{\text{grad}\, S(r)}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega = - \frac{1}{6} \vec{n} \cdot \frac{\text{grad}\, S(\vec{r})}{S(\vec{r})}$$

il vient :

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right) \frac{\lambda_t}{3} = \iint_\Sigma \frac{S(\vec{r}) - S(\vec{r}')}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega + \lambda_t \iint_\Sigma \frac{\vec{\Omega}' \cdot \text{grad}\, S(\vec{r}') - \vec{\Omega} \cdot \text{grad}\, S(\vec{r})}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega$$

Si on néglige le gradient, ce qui revient à supposer le flux isotrope, conformément à notre hypothèse,

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o} = \frac{3}{\lambda_t} \iint_\Sigma \frac{S(\vec{r}) - S(\vec{r}')}{S(\vec{r})} \mu \, d\Omega \qquad (3.1)$$

Le calcul de l'intégrale (3.1) est donné en annexe dans le cas d'un canal cylindrique traversant radialement le réflecteur de la pile.

## IV - RESULTATS NUMERIQUES

Nous avons évalué la perte de réactivité causée par la présence de canaux radiaux dans le réflecteur de EL3. La pile est supposée chargée de toutes ses barres.

Caractéristiques principales : canal horizontal de rayon a = 8 cm, placé dans le plan médian de la pile et dirigé vers son axe. Il traverse les réflecteurs de graphite et d'eau lourde. Le fond affleure la partie active.

L'antiréactivité totale due à l'effet de transport des neutrons est de 22 p.c.m.

6 p.c.m. sont dûs au terme de flux rapide,

16 p.c.m. au terme de flux thermique.

Les flux réels et adjoints utilisés sont les flux calculés pour la pile critique. La formule adoptée est démontrée en annexe ; elle fait intervenir les dérivées des flux.

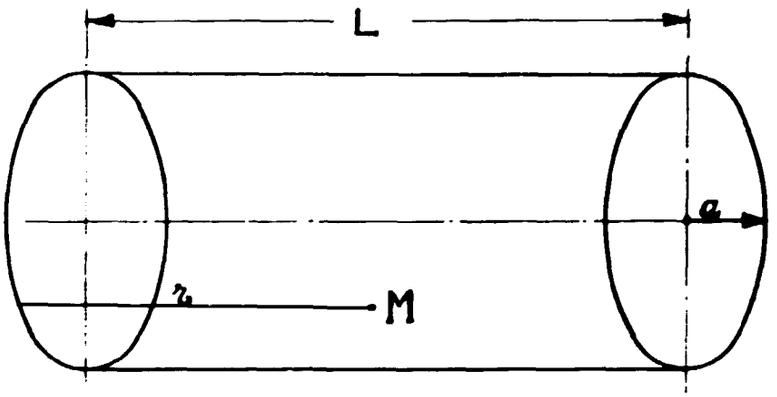
Ainsi, pour la contribution du flux rapide :

$$\delta\rho_f \iiint_{canal} \frac{K_\infty \Sigma_a}{\rho} S_f^- S_s \, dV = \frac{\pi a^2}{8} \int_0^L S_f'^+(r)\, dr \left\{ \int_0^r \left[ \left(\frac{r-u}{a}\right)^2 + 2 - \frac{r-u}{a} \sqrt{\left(\frac{r-u}{a}\right)^2 + h} \right] S_f'(u)\, du + \int_r^L \left[ \left(\frac{u-r}{a}\right)^2 + 2 - \frac{u-r}{a} \sqrt{\left(\frac{u-r}{a}\right)^2 + h} \right] S_f'(u)\, du \right\}$$

# A N N E X E

Nous avons effectué les calculs sur un canal cylindrique (de longueur L), de base circulaire (de rayon a) fermé à ses extrémités par des parois normales à son axe.

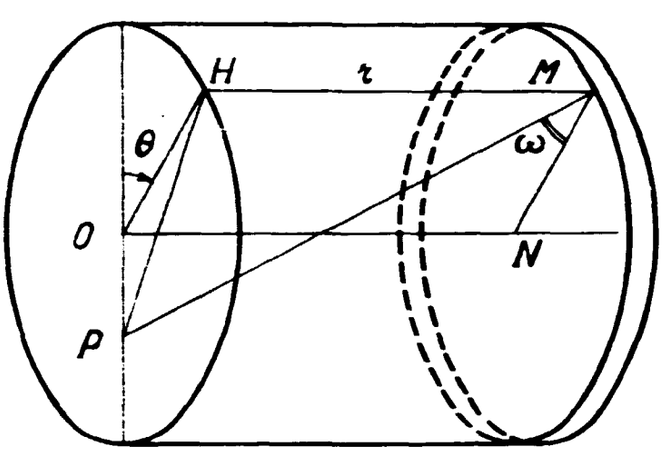
Soit $r$ la distance à l'une des bases d'un point quelconque du canal. Nous admettons que le flux n'est fonction que de r et n'a pas de variation azimuthale. Nous supposons de plus l'isotropie des neutrons issus de toute la surface du canal.




- Fig. 2 -

Nous avons calculé ici en détail toutes les quantités nous permettant de déterminer les longueurs d'extrapolation en tout point, ainsi que l'antiréactivité causée par le canal.

1) <u>Courant d $J_+(\alpha)$ entrant en un point P d'une base ($OP = \alpha a$) et provenant d'un élément de surface cylindrique de longueur dr, situé à la distance r.</u>




$$dJ_+(\alpha) = S(r) \int \mu \, \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\mu = \frac{r}{PM}$$

$$d\Omega = \frac{\cos\omega}{PM^2} \, a \, d\theta \, dr$$

avec $PM^2 = r^2 + a^2(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos\theta)$

- Fig. 3 -

$$PM \cdot NM = PM \cdot a \cdot \cos\omega = \overline{PH} \cdot \overline{OH} = (\overline{PO} + \overline{OH}) \cdot \overline{OH} = a^2(1 + \alpha\cos\theta)$$

d'où $\cos\omega = \frac{a}{PM}(1 + \alpha\cos\theta)$

$$dJ_+(\alpha) = \frac{S(r)\,r\,dr}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\alpha\cos\theta}{\left(\frac{r^2}{a^2}+\alpha^2+1+2\alpha\cos\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$dJ_+(\alpha) = \frac{\frac{r^2}{a^2}+1-\alpha^2}{\left[\left(\frac{r^2}{a^2}+1+\alpha^2\right)^2-4\alpha^2\right]^{3/2}}\,\frac{r\,S(r)}{2a^2}\,dr$$

2) <u>Courant $J_+$ (α) entrant en un point P d'une base</u>

On peut considérer la base opposée comme équivalente au cylindre prolongeant indéfiniment le canal, où régnerait le flux uniforme $\phi$ (L).

$$J_+(\alpha) = \int_0^L \frac{\frac{r^2}{a^2}+1-\alpha^2}{\left[\left(\frac{r^2}{a^2}+1+\alpha^2\right)^2-4\alpha^2\right]^{3/2}}\,S(r)\,\frac{r\,dr}{2a^2} + \int_L^\infty \frac{\frac{r^2}{a^2}+1-\alpha^2}{\left[\left(\frac{r^2}{a^2}+1+\alpha^2\right)^2-4\alpha^2\right]^{3/2}}\,S(L)\,\frac{r\,dr}{2a^2}$$

$$J_+(\alpha) = \int_0^L \frac{\frac{r^2}{a^2}+1-\alpha^2}{\left[\left(\frac{r^2}{a^2}+1+\alpha^2\right)^2-4\alpha^2\right]^{3/2}}\,S(r)\,\frac{r\,dr}{2a^2} + \left[1-\frac{1-\alpha^2-\frac{L^2}{a^2}}{\left[\left(1+\alpha^2+\frac{L^2}{a^2}\right)^2-4\alpha^2\right]^{1/2}}\right]\frac{S(L)}{8}$$

N.B. Lorsque α tend vers 1, $J_+$ (α) ne tend pas vers $J_+$ (1), car le point correspondant du canal est un point singulier, mais vers $\frac{S(0)}{8}+J_+(1)$

$$J_+(\alpha) \longrightarrow \frac{S(0)}{8} + \frac{1}{2a}\int_0^L \frac{S(r)\,dr}{\left(\frac{r^2}{a^2}+4\right)^{3/2}} + \left(1+\frac{L}{a}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{a^2}+4}}\right)\frac{S(L)}{8}$$

3) <u>Courant entrant dans une base</u>

$$J_+ = 2\pi a^2\int_0^1 J_+(\alpha)\,\alpha\,d\alpha$$

On peut définir un courant moyen par

$$\bar{J}_+ = \frac{J_+}{\pi a^2} = 2\int_0^1 J_+(\alpha)\,\alpha\,d\alpha$$

$$\overline{J_+} = \int_0^\infty \frac{r\,S(r)\,dr}{2a^2}\int_0^1 \frac{\frac{r^2}{a^2}+1-\alpha^2}{\left[\left(\frac{r^2}{a^2}+1+\alpha^2\right)^2-4\alpha^2\right]^{3/2}}\,2\alpha\,d\alpha$$

Posons $a^2 = \beta$

$$\int_0^1 \frac{\frac{r^2}{a^2} + 1 - \beta}{\left[\beta^2 + 2\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)\beta + \left(\frac{r^2}{a^2} + 1\right)^2\right]^{3/2}} \, d\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{r^2}{a^2} + 2}{\frac{r}{a}\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4}} - 1 \right)$$

$$\bar{J}_+ = \frac{1}{4a} \int_0^\infty \left( \frac{\frac{r^2}{a^2} + 2}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4}} - \frac{r}{a} \right) S(r) \, dr$$

en convenant toujours de prendre $S(r) = S(L)$ pour $r \geqslant L$.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$g(r) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{r^2}{a^2} + 2}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4}} - \frac{r}{a} \right)$$

Remarquons que $\frac{d}{dr}\left[ \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4} \; g(r) \right] = - \frac{2\, g(r)}{a}$

$$\bar{J}_+ = \frac{1}{2a} \int_0^\infty g(r)\, S(r)\, dr = \frac{1}{2a} \int_0^L g(r)\, S(r)\, dr + \sqrt{\frac{L^2}{a^2} + 4}\; g(L)\, \frac{S(L)}{4}$$

Si $S(r)$ était constant, on aurait $\bar{J}_+ = \frac{S(0)}{4}$ . Nous mettrons cette quantité en évidence en intégrant par parties :

$$\bar{J}_+ = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{2g(r)}{a} S(r)\, dr = \frac{1}{4} \left| - \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4}\; g(r)\, S(r) \right|_0^\infty + \frac{1}{4} \int_0^\infty \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4}\; g(r)\, S'(r)\, dr$$

Or $S'(r) = 0$ lorsque $r > L$

et $\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4}\; g(r) \longrightarrow 0$ lorsque $r \longrightarrow \infty$

$$\bar{J}_+ = \frac{S(0)}{4} + \frac{1}{4} \int_0^L \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 4}\; g(r)\, S'(r)\, dr$$

4) <u>Courant $2\pi a\, dr\, dJ_+(r)$ entrant dans l'élément de surface cylindrique (r, dr) et provenant de l'élément de surface (r + x, dx)</u>.

On peut considérer ce courant comme la différence des courants entrant dans une base située aux distances x et x + dr de l'élément (r + x, dx).

Soit

$$2\pi a\,dr\;\; dJ_+(r) = \pi a^2\left[\tfrac{1}{2}g(x) - \tfrac{1}{2}g(x+dr)\right]\; S(r+x)\,\frac{dx}{a}$$

$$dJ_+(r) = -\;\frac{g'(x)}{4}\;S(r+x)\,dx$$

La fonction $-g'(x)$ est identique à la fonction $P(x)$ calculée par CRITOPH et PEARCE [7] pour le même problème.

$$-\,g'(x) = \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{x}{a}\;\frac{\frac{x^2}{a^2}+6}{\left(\frac{x^2}{a^2}+4\right)^{3/2}}\right)$$

Cette quantité purement géométrique n'a de sens que pour $x \geqslant 0$
Nous nous ramènerons toujours à ce cas par la suite.

5) <u>Courant $J_+$ (r) entrant en un point r de la paroi latérale</u>

$$J_+(r) = \int_0^\infty -\;\frac{g'(x)}{4}\,S(r+x)\,dx - \int_0^\infty \frac{g'(x)}{4}\,S(r-x)\,dx$$

Intégrons par parties :

$$J_+(r) = -\left|\frac{g(x)}{4}\,S(r+x)\right|_0^\infty - \left|\frac{g(x)}{4}\,S(r-x)\right|_0^\infty$$

$$+\int_0^\infty \frac{g(x)}{4}\,S'_x(r+x)\,dx + \int_0^\infty \frac{g(x)}{4}\,S'_x(r-x)\,dx$$

$$g(\infty) = 0 \qquad S'_x(r+x) = 0 \quad \text{dès que } x > L-r$$

$$g(0) = \frac{1}{2} \qquad S'_x(r-x) = 0 \quad \text{dès que } x > r$$

$$J_+(r) = \frac{S(r)}{4} + \int_0^{L-r} \frac{g(x)}{4}\,S'_x(r+x)\,dx + \int_0^{r} \frac{g(x)}{4}\,S'_x(r-x)\,dx$$

6) <u>Nous pouvons donc partout déduire les longueurs d'extrapolation rapide et thermique par</u> :

$$J_-(r) = \frac{S(r)}{4}$$

$$\text{et} \quad -\frac{D}{\lambda} = \frac{J_+(r) - J_-(r)}{S(r)}$$

7) <u>Expression de l'antiréactivité causée par l'effet de transport des neutrons</u>.

Evaluons :

$$\iint_{canal} -\frac{D}{\lambda}\, S(r)\, S^+(r)\, dA = \iint_{canal} \left[J_+(r) - J_-(r)\right] S^+(r)\, dA =$$

$$\pi a^2 \times \frac{S^+(0)}{4} \int_0^L \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + 4}\; g(v)\, S'(v)\, dv - \pi a^2 \times \frac{S^+(L)}{4} \int_0^L \sqrt{\left(\frac{L-v}{a}\right)^2 + 4}\; g(L-v)\, S'(v)\, dv$$

$$+ 2\pi a \int_0^L S^+(r)\, dr \left[\frac{1}{4}\int_0^{L-r} g(x)\, S'_x(r+x)\, dx + \frac{1}{4}\int_0^r g(x)\, S'_x(r-x)\, dx\right]$$

Transformons ce dernier terme en écrivant

$$\int_0^{L-r} g(x)\, S'_x(r+x)\, dx = \int_r^L g(u-r)\, S'(u)\, du$$

$$\int_0^r g(x)\, S'_x(r-x)\, dx = \int_0^r g(r-u)\, S'(u)\, du$$

Posons maintenant :

$$X(r) = \int_r^L \sqrt{\frac{(u-r)^2}{a^2} + 4}\; g(u-r)\, S'(u)\, du + \int_0^r \sqrt{\frac{(r-u)^2}{a^2} + 4}\; g(r-u)\, S'(u)\, du$$

$$X'(r) = \frac{2}{a}\int_r^L g(u-r)\, S'(u)\, du - S'(u) - \frac{2}{a}\int_0^r g(r-u)\, S'(u)\, du + S'(u)$$

Nous pouvons donc intégrer par parties le dernier terme de l'expression ci-dessus.

$$\int_0^L S^+(r)\,dr\left[\int_0^{L-r} g(x)\,S'_x(r+x)\,dx+\int_0^r g(x)\,S'_x(r-x)\,dx\right]=$$

$$\frac{a}{2}\Big|S^+(r)\,X(r)\Big|_0^L-\frac{a}{2}\int_0^L S'^+(r)\,X(r)\,dr$$

Le terme $\frac{a}{2}\Big|S^+(r)\,X\,S(r)\Big|_0^L$ disparaît dans l'expression de l'antiréactivité.

Il reste donc :

$$\iint_{canal}\frac{D}{\lambda}\,S^+S\,dA=$$

$$-\frac{\pi a^2}{8}\int_0^L S'^+(r)\,dr\left\{\int_0^r\left[\left(\frac{r-u}{a}\right)^2+2-\frac{r-u}{a}\sqrt{\left(\frac{r-u}{a}\right)^2+4}\right]S'(u)\,du+\int_r^L\left[\left(\frac{u-r}{a}\right)^2+2-\frac{u-r}{a}\sqrt{\left(\frac{u-r}{a}\right)^2+4}\right]S'(u)\,du\right\}$$

Cette expression est particulièrement intéressante lorsqu'on connaît une expression analytique suffisamment approchée du flux.

Si on désire utiliser des valeurs expérimentales, les calculs demandent plus de précision. On passe alors par l'intermédiaire des longueurs d'extrapolation calculées plus haut :

$$\left(\frac{D}{\lambda}\right)_{base}S(0)=\frac{S(0)}{4}-\frac{1}{2a}\int_0^L g(r)\,S(r)\,dr-\sqrt{\frac{L^2}{a^2}+4}\;g(L)\,\frac{S(L)}{4}$$

$$\left(\frac{D}{\lambda}\right)_{base\,L}S(L)=\frac{S(L)}{4}-\frac{1}{2a}\int_0^L g(r)\,S(L-r)\,dr-\sqrt{\frac{L^2}{a^2}+4}\;g(L)\,\frac{S(0)}{4}$$

$$\frac{D}{\lambda(r)}S(r)=\frac{S(r)}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{L-r}g'(x)\,S(r+x)\,dx+\frac{1}{4}\int_0^r g'(x)\,S(r-x)\,dx$$

$$-\frac{1}{4}\,g(L-r)\,S(L)-\frac{1}{4}\,g(r)\,S(0)$$

# BIBLIOGRAPHIE

[1] Lectures by Dr WEINBERG A. on perturbation theory, IDO 16023, PPCO, 1952, août, 6.

[2] MURRY H.L., Perturbation theory and application, AECD-3656.

[3] YVON, Journal de Physique et le Radium, 1951, mai.

[4] PENHAGEN B., Conférence de Genève, 1955, P/791.

[5] RAIEVSKI V., Projet EL3 (Rapport intérieur).

[6] MARGENAU H., MOSELEY, MURPHY G., The mathematics of Physics and Chemistry.

[7] CRITOPH E., PEARCE R.M., CRNE-549, The effect of a hollow through-tube on the reactivity of a reactor.

FIN