AMOUYAL A., BENOIST P.

Rapport C.E.A. nº 571

Nouvelle méthode de détermination du facteur d'utilisation thermique d'une cellule.

<u>Sommaire</u>.- Une nouvelle expression du facteur d'utilisation thermique, d'une simplicité comparable à celle de la théorie élémentaire, est établie. La comparaison avec les résultats fournis par la méthode S_n et les méthodes d'harmoniques sphériques montre que la précision obtenue par cette formule est très supérieure à celle que donne la théorie élémentaire.

```
1956
```

1

33 pages

AMOUYAL A., BENOIST P.

Rapport C.E.A. nº 571

New method of determining the thermal utilization factor of a cell.

<u>Summary</u>.- A new formula for the thermal utilization factor is derived, which, while comparable in simplicity to the formula given by elementary diffusion theory, furnishes much more precise results. This is clearly brought out by comparison with the results given by the S_n and spherical harmonics methods.

1956

33 pages

COMMISSARIAT A L'ÉNERGIE ATOMIQUE

NOUVELLE METHODE DE DETERMINATION DU FACTEUR D'UTILISATION THERMIQUE D'UNE CELLULE

A. AMOUYAL of P. BENOIST

Rapport C.E.A. nº 571

1956

Centre d'Études nucléaires de Saclay Service de Documentation Buite postale n°2 Gif sur Yvette (Set Q) - Rapport C.E.A. nº 571 -

Service de Physique mathématique

NOUVELLE METHODE DE DETERMINATION DU FACTEUR

D'UTILISATION THERMIQUE D'UNE CELLULE

par

A. AMOUYAL et P. BENOIST

NOUVELLE METHODE DE DETERMINATION DU FACTEUR

D'UTILISATION THERMIQUE D'UNE CELLULE.

I . INTRODUCTION

Le problème mathématique que l'on cherche à résoudre est celui du calcul du facteur d'utilisation thermique f d'une cellule cylindrique sans gradient longitudinal, composée d'une barre d'uranium de rayon a entourée d'une cavité annulaire d'épaisseur c - a et d'un modérateur de rayon extérieur b.

On suppose que :

- les neutrons ont une vitesse unique v,
- la diffusion est isotrope,
- les sources sont uniformes, isotropes et de densité Q neutrons/cm³/s dans le modérateur, et nulles ailleurs,
- la densité en phase satisfait à la condition de réflexion au bord de la cellule.

Il s'agitlà, bien entondu, d'un cas schématique et il nous a paru préférable de tester la formule qui va être établie par comparaison avec les résultats fournis par des méthodes mathématiques éprouvées, plutôt que par comparaison directe avec les résultats expérimentaux.

Les méthodes mathématiques couramment employées pour la résolution de ce problème consistent à résoudre directement l'équation de BOLTZMANN à laquelle satisfait la densité en phase. Elles se rattachent à deux types différents.:

l. - les méthodes d'intégration numérique, dont la plus connue est la méthode $S_n^{(1)}$, qui nécessitent un volume relativement important de calculs ;

2. - les méthodes basées sur le développement en harmoniques sphériques de le densité en phase.

⁽¹⁾ Voir le rapport LADC 1948 de B.G. CARLSON : "Solution of the Transport Equation by S Approximations".

le nombre des neutrons de cette espèce capturés dans le modérateur par unité de temps et de longueur de cellule.

Ceux qui pénètrent dans le modérateur en r = c. Nous appellerons $2\pi c J_{+}(c) \Gamma_{m}$ la capture qui en résulte par unité de temps et de longueur de cellule. Γ_{m} dépend évidemment de la distribution angulaire des neutrons pénétrant dans le modérateur en r = c.

Les captures dues aux deux catégories de neutrons mentionnées devront être naturellement calculées en tenant compte de la condition de réflexion en r = b et en admettant dans chacun des cas que la région intérieure r < c est noire, puisque le courant J_+ (c) tient précisément compte de tous les neutrons qui proviennent de cette région.

Nous allons maintenant exprimer $\frac{1}{f} - 1$ en fonction des quantités Γ'_{u} , H, Γ_{m} .

La conservation des neutrons impose l'égalité de la capture dans l'uranium et du courant total à la surface intérieure du modérateur. On a donc :

$$\begin{array}{c} -2\pi c \left[J_{+} (c) - J_{-} (c) \right] = 2\pi c J_{-} (c) \Gamma'_{u} \\ J_{+} (c) = (1 - \Gamma'_{u}) J_{-} (c) \end{array}$$

Le courant J_(c) se détermine en fonction des sources Q et des paramètres \prod_{u}^{ν} , \prod_{m} et H en écrivant la relation de conservation des neutrons dans la cellule :

 π (b² - c²) Q = Capture dans le modérateur + Capture dans l'uranium

$$= \pi (b^{2} - c^{2}) HQ + 2\pi c \prod_{m} (1 - \prod_{u}') J_{(c)} + 2\pi c \prod_{u} J_{(c)}$$

$$J_{(c)} = \frac{(b^{2} - c^{2}) (1 - H) Q}{2c \left[\prod_{m} (1 - \prod_{u}') + \prod_{u}'\right]}$$

On en déduit :

d'où

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\pi (b^2 - c^2) H Q}{2\pi c \Gamma'_{u} J_{-}(c)} + \frac{\Gamma_{m} (1 - \Gamma'_{u})}{\Gamma'_{u}}$$

ou encore :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{1}{1 - H} \left[H + \frac{\prod_{u} (1 - \prod_{u}^{j})}{\prod_{u}^{j}} \right]$$
(1)

Nous avons donc à calculer les grandeurs $\prod_{u=1}^{1}$, \prod_{m} et H.

Hypothèses

La première hypothèse que l'on adoptera consiste à admettre que, à nombre égal de neutrons entrant dans le modérateur en r = c, la distribution angulaire de ces neutrons influe peu sur la capture dans le modérateur, donc sur \prod_m . De façon plus précise, on admettra qu'il est légitime de calculer \prod_m en remplaçant la densité en phase véritable des neutrons entrants par la densité en phase isotrope fournissant le même courant entrant, même si la précédente est assez éloignée de l'isotropie ⁽³⁾.

La seconde hypothèse à laquelle on fera appel concerne la forme de la densité en phase des neutrons sortant du modérateur en r = c. La quantité \prod_{u}' dépend en effet de la forme de cette densité en phase.On se contentera d'admettre que celle-ci ést isotrope. Un calcul dont le détail ne sera pas exposé a d'ailleurs été effectué à partir d'une densité en phase à un harmonique du type $A + B \cos \theta$, où θ est ici l'angle de la direction des neutrons avec la direction radiale. La valeur de f à laquelle on aboutit ainsi est peu différente, au moins pour de l'uranium naturel ou faiblement enrichi, de celle obtenue dans le cas d'une densité en phase isotrope, même pour des valeurs du paramètre d'anisotropie $\frac{B}{A}$ importantes en comparaison de celle susceptible de représenter convenablement la véritable densité en phase des neutrons sortant du modérateur ; la méthode S₈ montre d'ailleurs que dans ces cas, cette densité en phase véritable doit être peu éloignée de l'isotropie (beaucoup moins que la densité en phase des neutrons entrant dans le modérateur), et que la valeur de $\frac{B}{A}$ qui la représente le mieux n'excède pas quelques pour cent.

Cette hypothèse sur l'isotropie des neutrons sortant du modérateur en r = centraîne l'isotropie des neutrons entrant dans l'uranium en r = a et nous poserons par définition :

 $c \prod_{u}^{\prime} = a \prod_{u}$ ⁽²⁾

III - CALCUL DE Γ_{μ} , Γ_{m} ET H

Calcul de Γ_{u}

Avec les hypothèses faites, Γ_u représente la probabilité de capture pour un neutron entrant dans la barre suivant la distribution angulaire fournie par une densité en phase isotrope ; $2\pi a v \Gamma_u$ représente donc la capture par unité de temps et de longueur de la barre d'uranium due à une densité en phase entrante isotrope égale à $\frac{1}{\pi}$ en tout point de sa surface.

⁽³⁾ Dire que la densité en phase des neutrons entrant dans un milieu est isotrope revient à dire que le nombre de neutrons entrant par unité de surface dans l'angle solide d Ω entourant le vecteur unitaire $\vec{\Lambda}$ est proportionnel à ($\vec{\Lambda}$. \vec{n}) d Ω , où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface.

On considère un milieu infini diffusant et capturant, alimenté par des sources uniformes et isotropes donnant naissance à S neutrons par unité de temps et par unité de volume. La densité en phase, en régime permanent, est uniforme, isotrope et égale à :

$$\frac{S}{4\pi \sum_{uc} \mathbf{v}}$$

Soit, dans ce milieu, un cylindre de rayor a. La capture à l'intérieur de ce cylindre est égale à πa^2 . S par unité de temps et de longueur du cylindre ; elle est encore égale à la capture due aux sources S situées à l'intérieur de ce cylindre, augmentée de la capture due à la densité en phase entrante isotrope égale à :

$$\frac{S}{4\pi \sum_{\mu c} v}$$

en tout point de sa surface — étant entendu que le milieu extérieur est alors supposé être le vide avec des sources nulles.Cette source entrante rend compte en effet de tous les neutrons qui viennent de la région extérieure au cylindre considéré. On a donc l'égalité :

$$\pi a^2 S = \pi a^2 (1 - G^2) S + 2\pi a v \Gamma_u \frac{S}{4 \sum_{uc} v}$$

où l - \mathcal{P} est défini comme la probabilité de capture "globale", c'est-à-dire le nombre de neutrons capturés par unité de temps et de longueur de barre, pour un neutron naissant par unité de temps et de longueur de barre avec une probabilité uniforme et isotrope dans la barre entourée de vide ; \mathcal{P} est alors la probabilité de sortie.

L'égalité ci-dessous fournit l'expression de Γ_u en fonction de \mathcal{G} :

$$\Gamma_{\rm u} = 2 \ {\rm a} \sum_{\rm uc} \mathcal{P} \tag{3}$$

D'où

$$\Gamma'_{u} = \frac{2 a^{2} \Gamma_{uc}}{c} f$$
 (3bis)

L'expression de ${\mathcal G}$ sera établie un peu plus loin.

Calcul de H et de L

On rappelle que :

H représente la probabilité de capture dans le modérateur pour un neutron

y naissant de manière uniforme et isotrope.

 $\Gamma_{\rm u}$ représente la probabilité de capture dans le modérateur pour un neutron entrant dans le modérateur en r = c suivant la distribution angulaire fournie par une densité en phase entrante isotrope ; 2 π cv $\Gamma_{\rm m}$ représente donc la capture dans le modérateur (par unité de temps et de longueur de cellule) due à une densité en phase entrante isotrope égale à $\frac{1}{\pi}$ en tout point de la surface r = c.

Il est entendu que dans les deux cas, la région centrale r ζ c est occupée entièrement par un corps noir et que de plus, la densité en phase satisfait en r = b à la condition de réflexion.

On va d'abord établir une relation simple entre les quantités H et Γ_m .

Relation entre <u>C</u> et H.

On considère un cylindre de rayon b égal au rayon de la cellule, rempli cette fois entièrement de modérateur, et alimenté par des sources Q uniformes et isotropes dans tout le cylindre, la densité en phase étant soumise, comme dans la vraie cellule, à la condition de réflexion en r = b. En toute rigueur la densité en phase est uniforme, isotrope et égale à

$$\frac{Q}{4\pi \sum_{mc} v}$$

où \sum_{mc} est la section efficace de capture du modérateur. Soit, dans ce milieu, un cylindre de rayon égal à c. La capture dans la zone annulaire c $\leq r \leq$ b est égale à π (b² - c²) Q ; elle est encore égale à la capture due aux sources Q situées dans la dite zone, augmentée de la capture due à la densité en phase entrante isotrope égale à

$$\frac{Q}{4\pi \sum_{mc} v}$$

en tout point de la surface du cylindre $r = c - \acute{e}tant$ entendu que le cylindre central est alors supposé noir et sans sources puisque cette source entrante rend compte de tous les neutrons qui viennent de la région r $\langle c ; d'où l'égalité :$

$$\pi (b^2 - c^2) Q = \pi (b^2 - c^2) H Q + 2\pi c v \prod_{m} \frac{Q}{4 \sum_{mc} v}$$

On en tire \prod_{m} en fonction de H :

$$\Gamma_{\rm m} = \frac{2 \ (b^2 - c^2)}{c} \sum_{\rm mc} \ (1 - H)$$
(4)

Cette formule est l'équivalent, pour le modérateur, de la formule (3) pour l'uranium ; la probabilité de sortie l - H y joue le rôle de la probabilité de sortie \mathscr{P} .

Calcul de H.

H représente la probabilité de capture dans le modérateur pour un neutron y naissant de manière uniforme et isotrope c'est-à-dire la capture due à des sources uniformes et isotropes de densité égale à $\frac{1}{\pi(b^2 - c^2)}$ - la région r < c étant occupée par un corps noir et la densité en phase devant le plus satisfaire à la condition de réflexion en r = b. Cette capture peut s'obtenir par intégration sur le volume du flux neutronique régnant dans cette cellule particulière. On sait que ce flux neutronique peut se mettre sous forme d'une somme de deux fonctions de r :

L'une que nous appellerons "solution asymptotique", qui satisfait à l'équation élémentaire de la diffusion avec un laplacien pratiquement égal à

 $\sqrt{3\sum_{m}\sum_{m}}$

L'autre, qui peut être considérée comme une perturbation importante au voisinage de l'interface r = c et qui s'évanouit quand on s'éloigne de cette interface sur une distance de l'ordre du libre parcours total du modérateur pour de grandes valeurs de c ; cette distance tend vers zéro avec c.

Dans ces conditions, si l'épaisseur b - c du modérateur est supérieure à une distance de l'ordre du libre parcours, on peut assimiler avec une bonne approximation, la capture due à la solution exacte à celle fournie par la solution asymptotique. Ceci revient en effet à négliger la capture due à la perturbation devant la capture totale du modérateur ce qui est légitime car le volume dans lequel cette perturbation n'est pas négligeable n'est qu'une petite fraction du volume total.

Tout le problème revient donc à déterminer cette solution asymptotique. Si l'on admet que le courant dû à la perturbation est négligeable en r = b, ce qui en pratique est toujours le cas, la solution asymptotique vérifie la condition de réflexion en r = b et il suffit pour la fixer entièrement de connaître la condition à laquelle elle doit satisfaire à la limite r = c. Si nous appelons \oint (r) cette solution asymptotique, nous supposerons connue la longueur d'extrapolation λ , exprimée en libres parcours $\frac{1}{\sum_{mt}}$, définie par :

$$\lambda = \frac{\Phi(c)}{(\frac{d\Phi}{dr})_{r} = c} \cdot \sum_{m_{1}}$$

Cette grandeur sera estimée plus loin. La solution la plus générale de l'équation élémentaire de la diffusion qui satisfait à la condition de réflexion en r = b s'écrit :

$$\dot{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi (b^2 - c^2) \sum_{mc}} + A \Delta_o (K_m \mathbf{r})$$

avec :

$$\Delta_{o} (K_{m}r) = I_{1} (K_{m}b) K_{o}(K_{m}r) + K_{1} (K_{m}b) I_{o}(K_{m}r)$$

et :

$$K_{\rm m} = \sqrt{3 \sum_{\rm mt} \sum_{\rm mc}}$$

La condition en c fixe le paramètre A :

$$A = \frac{1}{\pi (b^2 - c^2) \sum_{mc} \left[\Delta_0 (K_{mc}) + \frac{\lambda}{\sum_{mt} K_m} \Delta_1 (K_{mc}) \right]}$$

avec :

$$\Delta_{1}(K_{m}r) = I_{1}(K_{m}b) K_{1}(K_{m}r) - K_{1}(K_{m}b) I_{1}(K_{m}r)$$

L'intégration de la densité permet d'obtenir immédiatement la capture H :

$$H = 1 - \frac{2c}{b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{K_m \frac{\Delta_0(K_m c)}{\Delta_1(K_m c)} + \frac{\lambda}{\sum_{mt} K_m^2}}$$

ou encore :

$$H = I - \frac{1}{1 + K_{m}^{2} b^{2}C + \frac{b^{2} - c^{2}}{2c} \frac{\lambda}{\sum_{mt} K_{m}^{2}}}$$
(5)

C étant l'expression :

$$c = \frac{b^2 - c^2}{2b^2} \cdot \frac{\Delta_0(K_m c)}{K_m c \Delta_1(K_m c)} - \frac{1}{K_m^2 b^2}$$

qui, lorsque K b tend vers zéro, a pour limite l'expression classique suivante,

dont il existe des tables en fonction du paramètre $\frac{b}{c}$:

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{b^2}{c^2} \\ \frac{b^2}{c^2} - 1 \end{bmatrix} L_0 g \left(\frac{b}{c} \right) - \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \frac{b^2}{c^2}} \end{bmatrix}$$
(6)

Expression de $\frac{1}{f} - 1$

En portant dans la formule (2) les expressions obtenues pour \prod_{u} , \prod_{m} et H (formules (3bis), (4) et (5)) on obtient :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \sum_{uc}^{mc} \frac{1}{f} + K_m^2 b^2 C + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left(\frac{3}{2}\lambda - 2\right)$$
(7)

Parmi les grandeurs qui interviennent dans cette formule les seules que l'on ne sache pas encore évaluer sont la probabimité de sortie $\int f$ et la longueur d'extrapolation λ .

Evaluation de ${\cal P}$

On se placera en régime permanent et on supposera qu'il naît un neutron par unité de temps et de longueur de la barre (\mathscr{J} sera alors le nombre de neutrons sortant par unité de temps et de longueur). On a donc initialement une source uniforme et isotrope de densité $\frac{1}{\pi^2}$. On va calculer la capture globale $1 - \mathscr{J}$ due à cette source ; c'est la somme des captures C_i aux différents chocs :

$$1 - \mathcal{P} = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

Soit \sum_{ut} la section efficace totale et soit \sum_{us} la section efficace de diffusion du milieu considéré.

La source $\frac{1}{\pi a^2}$ donne une densité de collision totale (diffusion + capture) de premier choc égale à :

$$N_{1}(r) = \frac{1}{\pi a^{2}} \left[1 - a \sum_{ut} \int_{\sum_{ut}}^{\infty} I_{o}(sr) K_{1}(sa) \frac{ds}{s} \right]$$

dont l'intégrale sur le volume de la barre donne le nombre de collisions de premier choc :

$$\int_{0}^{a} N_{1}(r) 2\pi r dr = 1 - 2 \sum_{ut} \int_{ut}^{\infty} I_{1}(sa) K_{1}(sa) \frac{ds}{s^{2}} = P_{c}$$

où P_c, appelé probabilité de collision de premier choc, est la fonction suivante⁽⁴⁾, qui dépend du seul paremètre a \sum_{ut} :

$$P_{c} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} + 2 \ a \ \sum_{ut} - 2 \ a^{2} \ \sum_{ut}^{2} \ I_{o} \ (a \ \sum_{ut}) \ K_{o} \ (a \ \sum_{ut}) \right]$$

- $(2 \ a^{2} \ \sum_{ut}^{2} + 1) \ I_{1} \ (a \ \sum_{ut}) \ K_{1} \ (a \ \sum_{ut}) + 2 \ a \ \sum_{ut}^{2} \ I_{1} \ (a \ \sum_{ut}) \ K_{o} \ (a \ \sum_{ut}) \right]$

Le premier choc pouvant être une diffusion ou une capture, la capture C_1 au premier choc sera donc :

$$\frac{\sum_{uc}}{\sum_{ut}} P_{c} = (1 - \tau) P_{c}$$

en posant :

$$\tau = \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}}$$

Les neutrons ayant subi une collision et qui ne sont pas capturés sont diffusés et forment une nouvelle source isotrope, mais non uniforme, de densité égale à :

$$\tau N_{1}(\mathbf{r}) = \frac{\tau}{\pi a^{2}} \left[1 - a \sum_{ut} \int_{ut}^{\infty} I_{o}(\mathbf{sr}) K_{1}(\mathbf{sa}) \frac{ds}{s} \right]$$

La capture globale, c'est-à-dire après un nombre quelconque de chocs, due à cette source se décompose en deux parties : la capture due à la source uniforme $\frac{\tau}{\pi a^2}$, moins la capture due à la source

$$S(r) = \frac{\tau}{\pi a^2} = \sum_{ut} \int_{ut}^{\infty} I_0(sr) K_1(sa) \frac{ds}{s}$$

Par définition, la capture globale due à la source uniforme $\frac{\tau}{\pi a^2}$ est égale à $\tau(1-\hat{f})$; d'où la relation :

$$I - \mathcal{J} = (I - \tau) P_{c} + \tau (I - \mathcal{J}) - capture globale due à la source S(r)$$

(4) Cette fonction est tabulée avec 5 décimales, en fonction du paramètre a ∑_{ut} = a/l aux pages 34 et 35 de l'ouvrage de K.M. CASE, F. DE HOFFMANN et G. PLACZEK : "Introduction to the Theory of Neutron Diffusion", Vol. I.

L'expression de \mathscr{P} s'en déduit immédiatement :

$$\mathcal{P} = 1 - P_c + \frac{1}{1 - U}$$
. capture globale due à la source S(r).

Le problème est maintenant ramené au calcul de la capture globale due à la source S (r) ; cette capture peut être cstimée de façon plus ou moins poussée.

1° - Méthode classique.

La méthode la plus simple consiste évidemment à remplacer la source S(r)par sa valeur moyenne \overline{S} ; la capture globale qui en résulte s'exprime alors en fonction de l - \mathcal{P} :

capture globale =
$$\pi a^2 (1 - \mathcal{G}) \overline{S}$$

 \overline{S} s'exprime en fonction de P :

$$\overline{S} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a S(r) 2 \pi r dr = \frac{\tau}{\pi a^2} \cdot 2 \sum_{ut} \int_{ut}^{co} I_1(sa) K_1(sa) \frac{ds}{s^2} = \frac{\tau}{\pi a^2} (1 - P_c)$$

d'où : capture globale = $\tau (1 - \mathcal{P}) (1 - P_c)$

En portant ce résultat dans l'expression de \mathcal{G} écrite plus haut, on peut tirer la valeur classique suivante de \mathcal{P} , que nous appellerons \mathcal{P}_{o} :

$$\mathcal{F}_{o} = \frac{1 - P_{c}}{1 - \nabla P_{c}}$$
(8)

Cette formule donne une bonne approximation par excès.

2° - Méthode plus poussée.

Il nous a paru difficile d'obtenir une expression analytique exacte de la capture globale due à la source S (r) qui puisse se prêter à un calcul numérique qui ne soit pas trop volumineux. Le mieux qu'il nous ait semblé possible de faire a été de calculer exactement la capture au premier choc, puis de remplacer la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au premier choc par sa valeur moyenne, et d'en déduire la capture globale aux chocs suivants en l'exprimant comme ci-dessus au moyen de $1 - \mathcal{P}$.

La capture au premier choc due à S (r) a pour expression :

$$\tau (1 - \tau) P_e (1 - P_e - L)$$

où L est une intégrale dépendant du seul paramètre a \sum_{ut} , dont la courbe en fonction de ce paramètre est donnée à la fin du présent rapport :

$$L = \frac{2 a^2 \sum_{ut}^2}{P_c} \int_0^1 \left[\int_a^{\bullet} \frac{dt}{\sum_{ut} K_1} (t) \left\{ I_o(t \mathbf{P}) - \frac{2 I_1(t)}{t} \right\} \right]^2 \mathbf{P} d\mathbf{P}$$
(9)

La valeur moyenne de la source formée par les neutrons diffusés au premier choc se déduit immédiatement de la capture et vaut :

$$\frac{1}{\pi a^2} \tau^2 P_c (1 - P_c - L)$$

Cette source uniforme fournit une capture globale aux chocs suivants égale à : $\tau^2 P_c (1 - P_c - L) (1 - T)$, d'où la capture globale due à la source S (r) :

$$\tau(1 - \tau) P_{c} (1 - P_{c} - L) + \tau^{2} P_{c} (1 - P_{c} - L) (1 - f) = \tau P_{c} (1 - P_{c} - L) (1 - \tau f)$$

En portant ce résultat dans l'expression de Pécrite plus haut, on obtient :

$$\oint = \frac{(1 - \tau) (1 - P_c) + \tau P_c (1 - P_c - L)}{1 - \tau + \tau^2 P_c (1 - P_c - L)}$$

que l'on a intérêt à écrire sous la forme suivante, qui met en évidence la correction à apporter à la formule classique (5):

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{=} \quad \mathcal{P}_{o} \left(1 - \mathcal{E}\right) & \text{avec} : \\
\mathcal{E}_{=} \quad \frac{\tau(1 - \tau) P_{c} L}{(1 - P_{c}) \left[1 - \tau + \tau^{2} P_{c} (1 - P_{c} - L)\right]} \stackrel{\sim}{\sim} \frac{\tau(1 - \tau) P_{c} L}{(1 - P_{c}) (1 - \tau P_{c} \left[1 - \tau (1 - P_{c})\right]} \end{aligned} (10)$$

l'approximation étant justifiée car dans les cas usuels

$$\tau^2 P_c L \leq 1 - \tau + \tau^2 P_c (1 - P_c)$$

on a toujours

٤ ≯٥.

Pour les calculs pratiques de f, au lieu d'utiliser directement cette fornule, il est préférable de passer par l'intermédiaire des grandeurs A, α et β définies plus loin (voir paragraphe IV, pages 18 et 19).

(5) Voir l'annexe I. Une limite supérieure de l'erreur relative sur y est donnée.

Evaluation de λ

Remarquons tout d'abord que λ peut se déterminer grossièrement à l'aide de la théorie élémentaire : il suffit d'écrire que le courant de neutrons venant du corps noir vers le modérateur, exprimé en théorie élémentaire, est nul ; on obtient le résultat classique suivant, valable quelle que soit la géométrie :

$$\lambda = \frac{2}{3}$$

Cette estimation grossière est insuffisante et il est préférable d'essayer de tirer parti des résultats de B. DAVISON et S. KUSHNERIUK ⁽⁶⁾ concernant la longueur d'extrapolation du corps noir cylindrique ; ces résultats ont été établis dans le cas simple d'un milieu modérateur non capturant, de rayon b infini, où les sources à distance finie sont nulles et où l'alimentation en neutrons se fait par un courant non nul à l'infini. Dans le rapport NT-214, ces auteurs fournissent la courbe de variation de la longueur d'extrapolation en fonction du paramètre c \sum_{mt} . Cette courbe est reproduite à la fin de la présente note.

La question qui se pose alors est la suivante : peut-on assimiler la longueur d'extrapolation qui nous intéresse à celle fournie dans le rapport MT-214. Le passage du problème traité par ces auteurs à celui intéressant le présent calcul peut se faire en trois étapes.

l. — On commence par introduire une section efficace de capture du modérateur très petite mais non nulle, ce qui modifie la longueur d'extrapolation de façon certainement négligeable pour les modérateurs auxquels nous nous intéressons.

2. — On remplace les sources nulles à distance finie avec courant non nul à l'infini, par des sources uniformes et isotropes non nulles avec courant nul à l'infini.

3. — On remplace le milieu modérateur infini par un milieu modérateur de rayon fini r = b, avec condition de réflexion en r = b.

En vue de déterminer dans quelle mesure il est légitime d'utiliser les résultats du rapport MT-214, c'est-à-dire de négliger les erreurs introduites par les étapes 2 et 3, nous avons fait des calculs à trois harmoniques avec des modérateurs peu capturants dans un certain nombre de cas particuliers.

Les résultats de ces calculs montrent que :

- l'étape 2 ne change pas la longueur d'extrapolation ;

- l'erreur due à l'étape 3 est faible tant que l'on a affaire à une cellule

⁽⁶⁾ Voir le rapport MT-214 (National Research Council of Canada) : Linear Extrapolation Length for a black Sphere and a Black Cylinder.

dont l'épaisseur b - c du modérateur n'est pas inférieure à une distance de l'ordre du libre parcours, ce qui en pratique est toujours le cas. Le tableau ci-dessous montre les variations de λ fournies par des calculs à 3 harmoniques quand on fait varier le rayon b de la cellule, dans deux cas particuliers pour lesquels c est respectivement égal à 1,30 cm et 3,50 cm. La valeur de \sum_{mt} adoptée dans ces calculs est la même dans tous les cas et égale à 0,3721 cm⁻¹.

b en cm c en cm	7,93	11,28	œ
1,30	0,912	0,906	0,901
3,50	0,897	0,867	0,842

L'erreur que l'on commet sur f lorsqu'on remplace la vraie valeur de λ par celle correspondant à une cellule infinie est donnée par :

$$\delta(\frac{1}{f}-1) = -\frac{\delta f}{f^2} = \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \frac{3}{2} \delta_{\lambda} \sum_{mt}$$
$$\delta f = -f^2 \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \frac{3}{2} \delta_{\lambda} \sum_{mt}$$

d'où :

Pour c = 1,30 cm, b = 7,93 cm on a $\delta_{\lambda} \sum_{mt} = -0,011$ d'où $\delta_{f} < 0,80 \sum_{mc}$ Pour c = 1,30 cm, b = 11,28 cm on a $\delta_{\lambda} \sum_{mt} = -0,005$ d'où $\delta_{f} < 0,73 \sum_{mc}$ Pour c = 3,50 cm, b = 7,93 cm on a $\delta_{\lambda} \sum_{mt} = -0,055$ d'où $\delta_{f} < 1,19 \sum_{mc}$ Pour c = 3,50 cm, b = 11,28 cm on a $\delta_{\lambda} \sum_{mt} = -0,025$ d'où $\delta_{f} < 1,23 \sum_{mc}$

On voit donc que l'erreur commise sur f est de l'ordre de \sum_{mc} c'est-à-dire de 8 . 10⁻⁵ pour des cellules à eau lourde et 30 . 10⁻⁵ pour des cellules au graphite ce qui est pratiquement négligeable. Il est par conséquent tout à fait légitime d'utiliser pour valeur de λ celle fournie par la courbe tracée dans le rapport MT-214.

IV - INTERPRETATION DE LA FORMULE DE F

Il est usuel de décomposer $\frac{1}{f}$ - 1 de la manière suivante :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{V_{m} \sum_{mc}}{V_{u} \sum_{uc}} \qquad \left[G + a \sum_{uc} N \right] + X_{1}$$

avec :

$$G = \frac{\Phi(a)}{\Phi_{u}} \qquad N = \frac{\Phi(c) - \Phi(a)}{-2 J(a)} \qquad X_{1} = \frac{V_{m} \sum_{mc} \frac{\overline{\Phi}_{m} - \Phi(c)}{V_{u} \sum_{uc} \overline{\Phi}_{u}}}{V_{u} \sum_{uc} \overline{\Phi}_{u}} \qquad (11)$$

La théorie élémentaire fournit pour les quantités G et X_1 les expressions :

$$G = \frac{K_{u} a I_{o} (K_{u}a)}{2 I_{1} (K_{u}a)} \qquad X_{1} = K_{m}^{2} b^{2} C$$

L'expression de N dépend de la façon dont on traite le passage des neutrons dans la cavité, l'une des formules usuelles étant :

$$N = 1 - \frac{2\varphi_0}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin 2\varphi_0 \quad \text{avec} \quad \varphi_0 = \operatorname{Arc} \sin \frac{a}{c} \quad (12)$$

Dans le présent exposé l'expression de $\frac{1}{f}$ - l a été obtenue directement par l'évaluation du rapport de la capture du modérateur à celle de l'uranium, sans chercher à passer par l'intermédiaire des quantités G, N et X₁. Le calcul rigoureux des quantités G, N et X, à partir des hypothèses adoptées dans cette étude, nécessite l'évaluation des flux neutroniques en r = a et r = c. Cette évaluation requiert la détermination des densités en phase en r = a et r = c, ce qui demande la connaissance préalable de la distribution angulaire des neutrons sortant du modérateur et le calcul de la densité en phase sortant de l'uranium. Les hypothèses adoptées plus haut ont permis d'éviter de passer par ces intermédiaires pour le calcul des captures dans chaque milieu, c'est-à-dire du facteur d'utilisation thermique f. En effet les captures dans chaque milieu dépendent essentiellement du nombre de neutrons qui y pénètrent et assez peu de leurs distributions angulaires, tandis que les valeurs des flux aux interfaces, une fois connus les nombres de neutrons qui entrent et qui sortent de chaque milieu, sont encore très sensibles aux formes de leurs distributions angulaires. Le calcul des quantités G, N et X₁ sera exposé dans une note ultérieure.

Toutefois on peut atteindre rapidement et avec une précision raisonnable les quantités G, N et X_1 en utilisant pour le calcul des flux neutroniques en r = a et r = c la recette suivante.

On admet que les hypothèses adoptées pour le calcul de f concernant l'iso-

tropie des densités en phase des neutrons sortant du modérateur en r = c, entrant dans le modérateur en r = c et entrant dans l'uranium en r = a, sont encore justifiées pour le calcul des flux neutroniques en r = a et r = c. De plus on admet que la densité en phase sortante de l'uranium est isotrope ⁽⁷⁾. Mais il convient encore une fois d'insister sur le fait que la manière dont on calcule les flux en r = aet r = c, c'est-à-dire les quantités G, N et X₁, ne peut pas affecter les expressions des captures dans chaque milieu, donc celle du facteur d'utilisation thermique f.

Nous allons calculer les expressions de G, N et X₁ au moyen de la recette indiquée :

1° - Calcul de G.
Par définition :
$$G = \frac{\overline{\Phi}(a)}{\overline{\Phi}}$$

Les deux hypothèses sur l'isotropie des densités en phase en r = a pour les neutrons entrants et pour les neutrons sortants permettent de relier le flux $\Phi(a)$ aux courants $J_{+}(a)$ et $J_{-}(a)$:

$$\oint(a) = 2 \left[J_{+}(a) + J_{-}(a) \right]$$

Par ailleurs, la relation de conservation des neutrons dans la barre d'uranium peut s'écrire :

$$\pi a^2 \sum_{uc} \overline{\Phi}_u = -2 \pi a J(a) = -2 \pi a \left[J_+(a) - J_-(a) \right]$$

d'où :

$$\overline{\Phi}_{u} = -\frac{2}{a \sum_{uc}} \left[J_{+}(a) - J_{-}(a) \right]$$

et:

$$G = -a \sum_{uc}^{i} \frac{J_{+}(a) + J_{-}(a)}{J_{+}(a) - J_{-}(a)}$$

(7)

Ce truquage ne respecte pas complètement la propagation en ligne droite des neutrons dans la cavité. En effet, si les densités en phase sortantes, du modérateur et de l'uranium sont isotropes, la densité en phase entrante dans le modérateur ne peut pas être isotrope. Respecter la propagation en ligne droite dans la cavité, compte tenu de l'isotropie des densités en phase sortantes, des deux milieux, conduirait pour N et X_1 à des formules légèrement différentes de celles que l'on va obtenir ici ; en particulier, on aurait :

$$N = 1 - \frac{2 \varphi_0}{\pi}$$

Le truquage adopté ici a pour seule justification une meilleure concordance avec les résultats numériques fournis par des méthodes plus poussées. Pour relier $J_{+}(a)$ à $J_{-}(a)$, on écrira à nouveau la relation de conservation dans la barre en utilisant la définition de \prod_{u} :

$$-2\pi a \left[J_{+}(a) - J_{-}(a)\right] = 2\pi a J_{-}(a) \Gamma_{u} = 2\pi a \cdot 2a \sum_{uc} \int_{J_{-}(a)}^{0} J_{-}(a)$$

d'où :

$$\frac{J_{+}(a)}{J_{-}(a)} = 1 - 2 \ a \sum_{uc} \mathcal{P}$$

et :

$$G = \frac{1}{\mathcal{P}} - a \sum_{uc}$$
(13)

La valeur ainsi obtenue est une valeur par défaut. Par exemple, dans le cas d'une barre d'uranium naturel de rayon a = 1,30 cm, la théorie élémentaire fournit une valeur de G égale à 1,141, la formule (13) une valeur égale à 1,194, tandis que la valeur fournie par des méthodes plus poussées se situerait au voisinage de 1,23.

2° - Calcul de N.
Par définition :
$$N = \frac{\oint(c) - \oint(a)}{-2 J(a)}$$

Les hypothèses adoptées entraînent :

$$\begin{split} &\Phi(c) = 2 \left[J_{+}(c) + J_{-}(c) \right] \\ &\Phi(a) = 2 \left[J_{+}(a) + J_{-}(a) \right] \\ &J_{-}(c) = J_{-}(a) \\ &\frac{J_{+}(c)}{J_{-}(c)} = 1 - \Gamma_{u}^{\prime} = 1 - 2 \frac{a^{2}}{c} \sum_{uc} \mathcal{P} \\ &\frac{J_{+}(a)}{J_{-}(a)} = 1 - 2 a \sum_{uc} \mathcal{P} \end{split}$$

d'où l'on tire :

$$N = 1 - \frac{a}{c}$$
(14)

 3° - <u>Calcul de X</u>.

On pourrait calculer la quantité X_l à partir de l'expression qui la définit,

c'est-à-dire :

$$x_{1} = \frac{v_{m} \sum_{mc}}{v_{u} \sum_{uc}} \cdot \frac{\overline{\Phi}_{m} - \Phi(c)}{\overline{\Phi}_{u}}$$

Mais la quantité $\frac{1}{f}$ - l étant d'une part liée par définition aux quantités G, N et X, par la relation :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \frac{\sum_{mc}}{\sum_{uc}} \left[G + a \sum_{uc} N \right] + X_1$$

et d'autre part indépendante, dans la théorie exposée, des hypothèses faites pour le calcul des flux neutroniques en r = a et r = c, il est plus simple de déduire X_1 de la relation précédente et des expressions de $\frac{1}{f} - 1$, G et N (formules (7) (13) et (14)). On obtient ainsi :

$$X_{1} = K_{m}^{2} b^{2} C + \frac{b^{2} - c^{2}}{c} \sum_{mc} \left(\frac{3}{2} \lambda - 1\right)$$
(15)

Dans la suite de cet exposé, les expressions (13), (14) et (15) des quantités G, N et X_1 , calculées par la recette indiquée ci-dessus, seront appelées G', N' et X_1' pour les distinguer des expressions plus précises de ces mêmes quantités dont le calcul fera l'objet d'une note ultérieure.

On a intérêt à réécrire la formule (7) sous la forme suivante qui met en évidence les expressions de G', N' et X¦ :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \frac{\sum_{mc}}{\sum_{uc}} \left[\frac{1}{f} - a\sum_{uc} + a\sum_{uc} (1 - \frac{a}{c}) \right] + K_m^2 b^2 c + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} (\frac{3}{2} \lambda - 1)$$

(7bis) En pratique le terme G' = $\frac{1}{\varphi}$ - a \sum_{uc} sera calculé de la façon suivante :

$$G^{\prime} = \frac{1}{\mathcal{P}} - a \sum_{uc} = \frac{1}{\mathcal{P}_{o}(1-\varepsilon)} - a \sum_{uc} \simeq \frac{1}{\mathcal{P}_{o}} - a \sum_{uc} + \frac{\varepsilon}{\mathcal{P}_{o}}$$

D'où, en explicitant \mathcal{P}_{0} (formule (8)) et \mathcal{E} (formule (10)) : $C_{1} \simeq \frac{1 - \tau P_{c}}{1 - P_{c}} - a \sum_{uc} + \frac{\tau (1 - \tau) P_{c} L}{(1 - P_{c})^{2} \left[1 - \tau (1 - P_{c})\right]}$

La quantité $T(1 - P_c)$ étant assez petite devant l'unité, on peut, dans les calculs pratiques, remplacer dans le dernier terme $\frac{1}{1 - T(1 - P_c)}$ par $1 + T(1 - P_c)$,

ce qui n'introduit qu'une erreur du second ordre sur G' :

$$G' \simeq \frac{1 - \nabla P_c}{1 - P_c} - a \sum_{uc} + \frac{\tau (1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c)^2} + \frac{\tau^2 (1 - \tau) P_c L}{1 - P_c}$$

formule que l'on utilisera sous la forme suivante :

$$G' \simeq 1 + \frac{\sum uc}{\sum ut} A \left[1 + \alpha \frac{\sum us}{\sum ut} + \beta \left(\frac{\sum us}{\sum ut} \right)^2 \right]$$
 (16)

On rappelle que \sum_{ut} , \sum_{us} et \sum_{uc} désignent respectivement les sections efficaces macroscopiques totale, de diffusion et de capture de l'uranium. Les grandeurs A, α , et β ne dépendent alors que du paramètre a \sum_{ut} :

$$A = \frac{P_{c}}{1 - P_{c}} - a \sum_{ut}$$
$$\alpha = \frac{P_{c}}{(1 - P_{c})^{2}} \frac{L}{A}$$
$$\beta = \frac{P_{c}}{1 - P_{c}} \frac{L}{A}$$

La grandeur A est tabulée à la fin du présent rapport ; pour les grandeurs α et β qui n'interviennent que dans des termes correctifs et ne demandent pas à être connues avec la même précision, on s'est contenté de tracer les courbes représentatives qui sont jointes à la table de la fonction A.

Si l'on néglige les termes α et β ce qui revient à remplacer \mathcal{J} par $\mathcal{P}_{o \ om}$ obtient déjà une bonne approximation par défaut de la quantité G.

On remarquera l'analogie de l'expression approximative de X_l et de celle fournie par la théorie élémentaire, qui ne diffèrent que par la présence dans la nouvelle formule, du terme correctif

$$\frac{b^2-c^2}{c}\sum_{mc}\left(\frac{3}{2}\lambda-1\right)$$

On peut interpréter ce terme correctif comme traduisant un relèvement dans le modérateur du flux fourni par la théorie élémentaire. La nécessité de ce relèvement apparaît clairement quand on compare les courbes de flux fournies par la théorie élémentaire à celles obtenues par des méthodes plus poussées.

Ce relèvement peut d'ailleurs s'introduire directement dans le formalisme de la théorie élémentaire au moyen du truquage suivant.

La courbe élémentaire de flux dans le modérateur, une fois remplie la

condition $\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r = b} = 0$, ne dépend plus que d'une condition à la limite r = c, qui peut s'exprimer par exemple par la connaissance du rapport

$$\frac{\sum_{mt} \Phi(c)}{(\frac{d\Phi}{dr})} = \Lambda_{\acute{e}1\acute{e}m}.$$

Cette quantité est déterminée habituellement par les relations de continuité du flux et du courant de part et d'autre de l'interface r = c. Pour obtenir le relèvement mentionné plus haut, on doit alors imposer au flux dans le modérateur une condition à la limite truquée qui consiste à adopter une nouvelle valeur de Λ définie par :

$$\Lambda = \Lambda_{\acute{e}1\acute{e}m.} + \lambda_{(corps noir)} - \frac{2}{3}$$

 $\lambda_{(corps ncir)}$ est la longueur d'extrapolation exacte pour une cellule à corps noir qui, comme on l'a montré, peut être prise égale à celle donnée par la courbe tracée dans le rapport MT-214 ; $\frac{2}{3}$ est la même longueur d'extrapolation calculée à partir d'une théorie élémentaire (voir plus haut). Ce truquage revient donc à recaler la condition à la limite r = c sur le cas type où la capture de l'uranium tend vers l'infini.

V - RESULTATS NUMERIQUES

A titre de référence une première série de calculs ⁽⁸⁾ a été effectuée par la méthode S_n (approximation S_8) dans quatre cas particuliers qui correspondent à des cellules à l'uranium naturel et au graphite avec cavité d'épaisseur variable ; dans tous les cas, le rayon de la barre est a = 1,30 cm et le rayon extérieur de la cellule est b = 11,90 cm. Les valeurs de l - f obtenues (colonne 3) sont comparées dans le tableau ci-dessous à celles fournies par la méthode proposée(colonne 4) et par la théorie élémentaire (colonne 2), pour laquelle on a pris $K_m^2 = 3 \sum_{ut} \sum_{uc}$ et : $N = 1 - \frac{2\varphi_0}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin 2\varphi_0$ (voir formules (11) et (12))

c	1 - f(P1)	$1 - f(s_{\delta})$	l – f (méthode proposée)
1,30	0,1151	0,1317	0,1313
1,60	0,1131	0,1280	0,1282
2,50	0,1099	0,1201	0,1206
3,50	0,1047	0,1123	0,1127

- TABLEAU I -

(8) Nous tenons à exprimer nos remerciements au Dr. B.G. CARLSON qui a eu l'obligeance d'effectuer ces calculs pour nous.

Les sections efficaces utilisées sont :

$$\sum_{uc} = 0,3220 \text{ cm}^{-1}$$
$$\sum_{ut} = 0,7221 \text{ cm}^{-1}$$
$$\sum_{mc} = 3,118.10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$
$$\sum_{mt} = 0,3721 \text{ cm}^{-1}$$

Une deuxième série de calculs a été effectuée par la méthode des harmoniques sphériques, dans plusieurs cas particuliers qui correspondent également à des cellules à l'uranium naturel et au graphite avec ou sans cavité. Les valeurs de l - f obtenues dans l'approximation ⁽⁹⁾ P₃ sont comparées à celles fournies par la théorie élémentaire classique et par la méthode proposée pour laquelle on a adopté deux valeurs différentes de la quantité λ :

- dans un cas on a adopté la valeur de λ présumée exacte fournie par la courbe tracée dans le rapport MT-214 et qui est celle que l'on doit utiliser normalement ;

- dans l'autre cas on a adopté la valeur de λ résultant de l'approximation P₃ et tracée elle aussi dans le rapport MT-214 ⁽¹⁰⁾.

Il est en effet plus cohérent, si l'on veut tester la méthode proposée par comparaison avec l'approximation P_3 d'utiliser la valeur de λ calculée avec la même approximation. On ne doit quand même pas s'attendre à obtenir des résultats identiques par suite de la façon différente dont on traite la cellule dans les deux cas.

Le tableau ci-dessous correspond à des cellules ne différant des précédentes que par le rayon b qui vaut ll,28 cm au lieu de ll,90 cm.

C	$1 - f_{(P_1)}$	1 - f _{(P3})	l - f (λ exact)	l - f (λ calculé par P ₃)
1,30	0,1022	0, 1135	0,1187	0,1143
1,60	0,1006	0,1112	0,1158	0,1129
2,50	0,0978	0,1035	0,1085	0,1072
3,50	0,0929	0,0972	0,1007	0,1002

- TABLEAU II -

(9) La cavité a été traitée par la méthode proposée par TAIT dans le rapport P/443 publié à la conférence de Genève sous le titre : "Calculation of Thermal Utilization by the Method of Spherical Harmonics".

(10) Cette courbe est reproduite en pointillé à la fin de cette note, sur le même graphique que la courbe donnant les valeurs présumées exactes de λ. Un calcul dans l'approximation P_5 a été effectué dans le cas sans gaine d'air (c = 1,30) et a donné l - f = 0,1162, valeur à mi-chemin de celle fournie par l'approximation P_3 (colonne 3) et par la méthode proposée (colonne 4). Il est vraisemblable, d'après les résultats du tableau I, que l'approximation S_8 conduirait à un résultat l'égèrement supérieur à celui de la méthode proposée. L'examen du tableau ci-dessus montre que le fait d'utiliser la valeur de λ calculée avec l'approximation P_3 au lieu de la valeur présumée exacte, rapproche bien les résultats (colonne 5), de ceux donnés par l'approximation P_3 (colonne 3). Le désaccord qui subsiste est relativement peu important tant que la cavité est pe'ite, ce qui tend à prouver que le désaccord pour les grandes valeurs de c - a est surtout dû à la façon différente dont les deux méthodes traitent la cavité. Ce point apparaîtra plus clairement dans un rapport ultérieur où les différents effets dans l'uranium, la cavité et le modérateur seront détaillés (calcul de G, N et X₁).

Le tableau III correspond à des cellules à l'uranium naturel et au graphite sans cavité avec des rayons de barre différents.

Les sections efficaces utilisées sont les mêmes que dans les calculs précédents sauf \sum_{mt} qui vaut ici 0,3925 cm⁻¹. Le rayon b de la cellule est pris égal à 7,93 cm. Les colonnes 2, 3 et 4 donnent les valeurs de l - f fournies par les approximations P₁, P₃ et P₅. Les colonnes 5 et 6 donnent les valeurs de l - f obtenues par la méthode proposée quand on utilise respectivement pour λ la valeur exacte et celle fournie par l'approximation P₃.

a = c en cm	$\left(\begin{array}{c} \mathbf{P}_{1} \\ \mathbf{P}_{1} \end{array} \right)$	1 - f (P ₃)	1 - f (P ₅)	l - f (λ exact)	$\begin{array}{c} 1 - f \\ (\lambda \ calculé \\ par P_3) \end{array}$
1,30	0,0501	0,0563	0,0578	0,0589	0,0567
1,50	0,0398	0,0457	0,0469	0,0478	0,0460
1,70	0,0336	0,0384	0,0391	0,0398	0,0383

-	TA	BL	. <u>E</u> A	U	II	Ι	-

Nous croyons utile de compléter cet ensemble de valeurs numériques par celles correspondant à une cellule avec cavité et faible épaisseur de modérateur, pour laquelle les sections efficaces sont les mêmes que dans les cas du tableau III et dont les dimensions sont :

$$a = 1,30$$
 cm $c = 3,50$ cm $c = 7,93$ cm

Les valeurs obtenues pour 1 - f sont :

$\left(\begin{array}{c} 1 - f \\ (P_1) \end{array} \right)$	$(P_3)^{f}$	l - f (λ exact)	$\frac{1-f}{(\lambda \text{ calculé})}$
0,0414	0,0439	0,0451	0,0448

-	TABL	.EAU	IV	

Nous tenons à remercier MM. J. HOROWITZ et J. BUSSAC, avec lesquels nous avons eu de nombreuses discussions. Nous exprimons également nos remerciements à Mme PILLARD pour le soin apporté à l'exécution des calculs numériques.

- ANNEXE I -

METHODES DE CALCUL DE \mathcal{P} - LIMITES D'ERREUR

La méthode de calcul de \mathscr{P} utilisée au paragraphe III peut être exposée d'une autre manière, qui lui est équivalente. D'après ce que l'on a vu dans le calcul de Γ_u , \mathscr{P} , défini comme la probabilité de sortie pour un neutron naissant de manière uniforme, peut aussi être défini de la façon suivante : $4 \pi a^2 \sum_{uc} \mathscr{P}$ représente la capture globale (c'est-à-dire après un nombre quelconque de chocs) dans l'uranium due à une densité en phase entrante isotrope égale à $\frac{1}{\pi}$ en tout point de la surface de la barre. La méthode de détermination de \mathscr{P} exposée plus haut est alors rigoureusement équivalente à la suivante : on part de la densité en phase entrante isotrope égale à $\frac{1}{\pi}$; la densité de collision de premier choc qui en résulte se trouve être égale à :

$$4 \mathbf{v} \sum_{ut}^{2} \mathbf{a} \int_{\sum_{ut}}^{\infty} \mathbf{I}_{0}(\mathbf{sr}) \mathbf{K}_{1}(\mathbf{sa}) \frac{d\mathbf{s}}{\mathbf{s}} = \frac{4\pi \mathbf{a}^{2} \mathbf{v} \sum_{ut}}{\mathbf{T}} \mathbf{S}(\mathbf{r})$$

comme d'ailleurs un raisonnement simple, analogue à celui utilisé pour la détermination de Γ_u , permet de le montrer ; la capture au premier choc s'en déduit immédiatement ; on calcule ensuite exactement la capture au second choc, puis on remplace la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au second choc par sa valeur moyenne (c'est-à-dire la densité de second choc par sa valeur moyenne), et on en déduit la capture globale aux chocs suivants en l'exprimant au moyen de 1 - f.

L'examen des courbes de densité de choc successives semble montrer que cette hypothèse doit conduire à des résultats assez proches des résultats exacts, mais il ne nous a pas été possible de mettre en évidence le signe de l'erreur commise sur de façon certaine, bien qu'il soit très probable que cette valeur de foit une valeur par excès.



On peut toutefois déterminer une limite supérieure de l'erreur commise ainsi sur \mathcal{P} , en utilisant des méthodes légèrement différentes. Pour obtenir une valeur de \mathscr{P} par défaut, il suffit d'opérer comme on vient de le faire, et de remplacer la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au second choc par une source de même valeur moyenne mais proportionnelle à la densité de premier choc c'est-à-dire à S (r). La formule que l'on obtient ainsi est :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{o} (1 - \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\tau P_{c} L}{(1 - F_{c})(1 - \tau P_{c})}$$
(18)

Si l'on désire une valeur de \mathscr{P} par excès, on peut opérer de la façon suivante. \mathscr{P} représente la probabilité de sortie pour un neutron naissant uniformément dans la barre. 1 - \mathscr{P} représente donc la probabilité de capture. On calcule exactement la densité de premier choc $N_1(r)$ due à une source uniforme dans la barre. On en déduit la capture au premier choc. On calcule exactement la capture au second choc. Pour le calcul de la capture aux chocs suivants, on remplace la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au second choc par une source de même valeur moyenne mais proportionnelle à la densité de premier choc c'est-à-dire à $N_1(r)$. La formule que l'on obtient ainsi est :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{o}(1-\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\tau (1-\tau) P_{c} L}{(1-P_{c})(1-\tau) P_{c} - \tau L} \sim \frac{\tau (1-\tau) P_{c} L}{(1-P_{c})(1-\tau) P_{c}}$$
(19)

La formule adoptée dans ce rapport :

$$\mathcal{E} = \frac{\tau (1 - \tau) P_{c} L}{(1 - P_{c})(1 - \tau P_{c}) [1 - \tau (1 - P_{c})]}$$
(20)

donne un résultat compris entre ceux des deux formules précédentes, bien que très voisin de celui fourni par la formule (19).

Limite d'erreur.

L'erreur relative sur **P**est donnée par :

une limite supérieure de $|\delta \mathcal{E}|$ est obtenue en prenant la différence des expressions (18) et (20). On obtient :

$$\left|\delta \xi\right| \leq \frac{\tau^{2} P_{c}^{2} L}{(1 - P_{c})(1 - \tau P_{c}) \left[1 - \tau (1 - P_{c})\right]}$$

L'erreur vraie est sans doute beaucoup plus faible.

Pour une barre d'uranium naturel de rayon 1,30 cm, l'erreur relative sur \mathscr{F} est certainement inférieure à 0,4 pour cent, estimation probablement très pessimiste.

Par ailleurs les résultats fournis pour ${\mathcal P}$ par la formule élémentaire :

$$\hat{\mathcal{F}} = \frac{1 - P_c}{1 - \nabla P_c} \tag{21}$$

et par la formule (20) différent entre eux en valeur relative de

$$\mathcal{E} = \frac{\tau(1 - \tau) P_{c} L}{(1 - P_{c})(1 - \tau P_{c}) \left[1 - \tau (1 - P_{c})\right]}$$

Pour une barre d'uranium naturel de rayon 1,30 cm la valeur de cette quantité $\not\in$ est 0,5 . 10^{-2} , ce qui pour une telle barre fait passer la quantité G' de la valeur 1,194 quand on utilise la formule (20) à 1,186 quand on utilise la formule (21).

A titre d'exemple, dans le cas de la cellule du tableau IV, on commet ainsi une erreur relative sur l = f de l'ordre de 0,5 pour cent.

- ANNEXE II -

La méthode exposée peut se prêter à diverses généralisations.

Elle permet en particulier le traitement d'une cellule cylindrique infinie à barre d'uranium annulaire de rayon extérieur a et de rayon intérieur a', dont la partie centrale est vide, ce qui est utile pour le calcul de certains réacteurs refroidis au gaz. L'expression que l'on obtient pour $\frac{1}{r}$ - l est la suivante :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\sum_{mc} v_m}{\sum_{uc} v_u} \left[G' + \frac{2 v_u \sum_{uc} v_u}{S(a)} \right] + X_1'$$

οù

 $V_m = \pi (b^2 - c^2)$ représente le volume du modérateur $V_u = \pi (a^2 - a^{*2})$ représente le volume de l'uranium $S(a) = 2\pi a$ représente la surface extérieure de la barre d'uranium.

$$G^{*} = \frac{1}{5} - \frac{1}{S(a)} \sum_{uc}$$

$$N^{*} = 1 - \frac{a}{c} = 1 - \frac{S(a)}{S(c)} \text{ avec } S(c) = 2\pi c$$

$$X_{1}^{*} = K_{m}^{2} b^{2}c + \frac{2}{S(c)} \sum_{mc} \left[(\frac{3}{2} \lambda - 1) \right]$$

Comme pour le cas de la barre pleine, les quantités G', N' et X_1^* représentent approximativement les quantités classiques

$$G = \frac{\oint(a)}{\oint u}, \quad N = \frac{\oint(c) - \oint(a)}{-2 J(a)} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{\sum_{mc} V_m}{\sum_{uc} V_u} \quad \frac{\oint m - \oint(c)}{\oint u}$$

F représente la probabilité de sortie de la barre creuse pour un neutron naissant avec une probabilité uniforme et de façon isotrope dans l'uranium.

En première approximation on pourra prendre comme plus haut :

$$\mathcal{P} = \frac{1 - \mathbf{r}_c}{1 - \mathbf{T}_c} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}}$$

P_e étant la probabilité de collision de la barre creuse qui dépend cette fois des

deux paramètres ⁽¹¹⁾ a \sum_{ut} et a' \sum_{ut} . J. BUSSAC a d'ailleurs constaté que ces valeurs étaient très voisines de celles obtenues pour une barre pleine homogène de même rayon extérieur a et contenant le même nombre de noyaux d'uranium. Le calcul de $\frac{1}{f}$ - 1 peut ainsi se ramener en première approximation au calcul de $\frac{1}{f}$ - 1 pour une barre pleine.

Le tableau suivant fournit les valeurs de l - f obtenues pour une cellule à barre creuse et à uranivm légèrement enrichi, pour laquelle on a :

a = c = 1,45 cm a' = 1,10 cm, b = 9,19 cm $\sum_{uc} = 0,5309 cm^{-1} \sum_{mc} = 0,81 \cdot 10^{-4} cm^{-1}$ $\sum_{ut} = 0,9299 cm^{-1} \sum_{mt} = 0,4082 cm^{-1}$

Р ₁	^р з	Méthode proposée (P _C Nucleonics)	Méthode proposée (P_calculé en diluant l'uranium)
0,0193	0,0214	0,0225	0 ,022 5

Dans le cas de cellules à barre d'uranium creuse dont la partie centrale est remplie d'un milieu purement diffusant et sans sources, la formule précédente est encore applicable à condition de prendre pour P_c la probabilité de sortie correspondante dont des tables seront données dans un article de C. MERCIER à paraître.

La généralisation à la géométrie sphérique est évidente que la sphère d'uranium soit pleine ou creuse. La valeur de λ à utiliser dans ce cas est fournie dans le rapport MT-214 déjà cité et celle de P pour une sphère pleine dans l'ouvrage de K.M. CASE, F. DE HOFFMANN et G. PLACZEK déjà cité également.

 (11) Voir Nucleonics Avril 1953 : "Fast Fission Factor for Hollow Natural Uranium Cylinders" par R.L. MURRAY et A.C. MENIUS Jr.
 Des valeurs plus précises de P seront publiées dans un article de C. MER-CIER à paraître.

FORMULAIRE PRATIQUE

Pour une cellule à barre d'uranium pleine, air et modérateur, la formule à utiliser est la suivante :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \cdot \frac{\sum_{uc}}{\sum_{uc}} \left[1 + \frac{\sum_{uc}}{\sum_{ut}} A \left\{ 1 + \alpha \cdot \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} + \beta \left(\frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}}^2 \right) + a \cdot \sum_{uc} \left(1 - \frac{a}{c} \right) \right] + K_m^2 b^2 c + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left(\frac{3}{2} \lambda - 1 \right)$$

dans laquelle :

- a = rayon de la barre d'uranium = rayon intérieur de la gaine d'air,
- c = rayon extérieur de la gaine d'air = rayon intérieur du modérateur,
- b = rayon extérieur de la cellule,

 \sum_{uc} = section efficace de capture macroscopique de l'uranium

$$\sum_{us} = " " de diffusion " "$$

$$\sum_{ut} = " " totale " "$$

$$\sum_{mc} = " " de capture " du modérateur$$

$$\sum_{mt} = " " totale " "$$

$$K_{m} = \sqrt{3} \sum_{mt} \sum_{mc} mc = laplacien du modérateur$$

$$C = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{b^2}{c^2}}{(\frac{b^2}{c^2}) - 1} \cdot Log(\frac{b}{c}) - \frac{3}{4} + \frac{1}{4\frac{b^2}{c^2}} \right]$$

A est tabulé ci-après en fonction de a \sum_{ut}

 α et β sont représentés graphiquement ci-après en fonction de a \sum_{ut}

 λ est aussi représenté graphiquement en fonction de c \sum_{mt} (utiliser la courbe en trait plein).

Remarques.

I. - La quantité
$$G = \frac{\Phi(a)}{\Phi_u}$$
 est approximativement égale à
 $1 + \frac{\sum_{uc} A}{\sum_{ut} A} \left\{ 1 + \alpha \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut} + \beta} \left(\frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} \right)^2 \right\}$ (valeur par défaut)

La quantité

$$N = \frac{\oint (c) - \oint (a)}{-2 J(a)}$$

est <u>approximativement</u> égale $\lambda = \frac{a}{c}$.

Ces deux dernières formules peuvent être utiles pour le traitement appreximatif de cellules comportant des gaines minces d'aluminium ou de sirconium placées en r = a et en r = c.

II. - Si l'on néglige dans l'expression de $\frac{1}{f}$ - 1, les termes où figurent a et β , on commet une erreur relative sur $\frac{1}{f}$ - 1 de l'ordre de 0,5 pour ceut pour une cellule à barre d'uranium naturel de rayon a = 1,30 cm.

Manuscrit reçu le 16 avril 1956.

	-	33	-	
TARLE	38 A	- 1	P. - P.	-* ∑ _{ut}

0 0. 6.8 1,18 0,5779 1,41 2,36 1,5477 18 3,54 2,6548 195 4,76 3,16 0,00058 597 1,20 0,6505 1,41 2,40 1,5471 18 3,60 2,1735 195 82 3,55 0,00050 597 24 0,6455 14 2,407 16425 18 2,7375 196 64 3,55 0,00059 590 3.20 0,6451 164 44 1,6421 18 2,7375 196 64 2,7795 194 4,00 3,20 1,6792 186 2,7795 194 4,00 3,20 1,6792 186 2,7795 194 4,01 3,10 2,0071 1,30 0,1793 155 1,1792 186 2,4778 193 94 4,11 0,00009 641 3,00 0,0739 155 1,1715 164 1,185 1,187 164 1,185 1,185 <	-	▲	8	e Zut		S	• Sut	۵ ۵	• S _{ut}	ۍ ⊾	• Sut	که ۲
0.022 0.00528 1.20 0.5250 1.11 24 0.6651 144 2.40 1.5621 163 2.40 1.5621 164 2.40 1.5621 163 2.40 1.5621 164 2.40 1.5621 164 2.7331 165 2.7331 165 2.7331 165 2.7331 165 2.7331 165 2.7331 166 2.7331 167 2.2 2.6331 167 167 2.2 16731 167 2.2 16731 167 <td>0</td> <td>0.</td> <td>628</td> <td>1,18</td> <td>0,5779</td> <td>141</td> <td>2,36</td> <td>1,5477 181</td> <td>3,54</td> <td>2,6548 105</td> <td>4,78</td> <td>3,8613 202</td>	0	0.	628	1,18	0,5779	141	2,36	1,5477 181	3,54	2,6548 105	4,78	3,8613 202
	;02	0,00628	599	1,20	0,5920	141	38	1,5658 183	56	2,6743 190	4,80	3,8815 195
66 0,01814 gar 24 0,6205 144 42 1,6205 184 5,60 2,7138 195 66 3,5 0.0 0,02092 28 0,6459 146 44 1,6205 182 64 2,7138 195 66 3,5 12 0,03592 298 28 0,6479 148 48 1,6552 166 2,7799 194 4,90 3,5 16 0,04618 633 34 0,6929 169 52 1,6752 163 3,10 2,2092 191 94 4,4 0,04059 641 0,7379 152 56 1,7765 163 2,8051 195 2 4,50 3,176 2,2,6751 156 4 1,7661 163 2,8053 191 2 4,50 3,2022 195 14 4,5 4,5 3,50 4,50 1,50 1,50 1,760 113 1,70 1,705 1,70 1,705	04	0,01227	587	22	0,6061	144	2,40	1,5841 180	56	2,6933 193	82	3,9010 199
00 0.00401 591 26 0.6459 1.66 44 1.6507 192 42 2.7739 196 66 3.5 12 0.05590 6600 1.50 0.6451 146 44 1.6527 160 66 2.7799 193 92 3.5 16 0.04518 633 34 0.6928 149 5.2 1.6932 163 3.700 2.8625 193 94 4.4 16 0.04518 633 34 0.6729 151 54 1.7115 164 2.8661 195 2.4627 192 56 4.4	06	0,01814	587	24	0,6205	144	42	1,6021 184	3,60	2,7126 193	- 64	3,9209 192
0.10 0.0392 598 28 28 0.695 146 46 1.657 179 64 2.7515 190 68 3.5 12 0.0559 660 1.50 0.641 148 46 1.656 146 62 2.759 194 5.90 3.5 14 0.0419 620 32 0.679 149 15 2.1653 180 3.70 2.6959 191 94 4.4 0.20 0.0509 661 36 0.709 149 52 1.6732 180 77 2.2.828 195 94 4.4 0.20 0.0509 661 36 0.709 149 52 1.1715 148 7.7 2.2.828 195 94 4.4 0.20 0.0509 661 36 0.7228 151 56 1.729 166 74 2.2617 194 99 44 22 0.677 677 144 0.739 152 59 1.765 163 70 2.8057 192 52 4.4 24 0.07837 694 42 0.7341 153 2.40 1.7656 166 179 2.2664 195 2 4.4 25 0.677 144 0.7649 155 64 1.8027 115 62 2.9551 194 4 4.4 25 0.0619 77 1 40 0.769 155 64 1.8007 115 62 2.9641 195 2 4.4 26 0.00137 171 44 0.7649 155 64 1.8027 115 62 2.9651 194 4 4.4 23 0.07857 77 1.50 0.0160 156 66 1.2622 184 66 2.9641 195 2 4.4 32 0.0169 77 4 1.50 0.0161 156 2.70 1.0593 167 62 2.9641 194 5.10 4.4 33 0.0108 77 52 0.0516 158 2.70 1.0593 167 62 3.9641 194 5.10 4.4 34 0.1108 77 52 0.0516 158 2.70 1.0593 167 92 3.0022 193 161 4 4.5 35 0.1108 77 52 0.0516 158 2.70 1.0593 167 92 3.0022 193 161 4 4.5 36 0.1108 77 52 0.0516 158 2.1071 167 92 3.0022 193 161 4 4.5 36 0.1108 77 52 0.0516 158 2.1071 167 92 3.0025 195 194 5.10 4.4 40 0.1504 64 55 0.05791 161 76 1.9150 166 94 3.000 195 24 4.5 44 0.1501 47 64 0.9972 160 78 1.9352 187 92 3.0025 195 124 4.5 45 0.1690 96 60 0.9552 160 78 1.9352 187 92 3.0051 195 24 4.5 46 0.1601 47 64 0.9572 161 2.80 1.9171 187 4.00 3.0996 152 22 4.5 47 4.0,1501 47 64 0.9572 163 282 1.9711 187 4.00 3.0996 152 22 4.5 46 0.1601 49 66 0.9595 162 2.90 2.41071 191 3.26 5.3 47 4.0,2571 102 9.160 0.9516 162 2.905 185 4.31581 195 3.26 4.5 52 0.2161 97 74 1.0091 164 92 2.0460 167 0.3,1781 193 32 6.4 47 0.3294 110 1.901 165 92 2.0461 197 1.5 4.5 48 0.1590 106 82 1.0757 170 3.00 2.1402 191 8.3,2594 195 3.44 4.5 54 0.0595 106 44 1.0257 166 92 2.1402 191 8.3,2594 195 3.44 4.5 54 0.0595 118 2.00 1.2591 116 3.42171 191 8.3,2594 195 3.44 4.5 54 0.0595 118 2.00 1.2591 116 3.42171 119 38 3.3581 195 44 4.5 54 0.0595 118 2.00 1.2591 177 3.44 2.2178 193 38 3.3788	06	0,02401	591	26	0,6349	146	- 44	1,6205 182	62	2,7319 196	86	3,9401 195
	,10	0,02992	598	28	0,6495	146	46	1,6387 179	64	2,7515 190	86	3,9596 199
14 0,04199 ccol 32 0,6789 149 52 1,6752 160 64 2,7899 193 92 3,16 16 0,05616 643 34 0,6736 154 54 1,7195 156 72 2,8623 195 95 64 4,0 22 0,66760 677 1,40 0,7395 151 55 1,7295 166 76 2,8672 192 50.0 4,6 24 0,0737 654 42 0,77845 155 64 1,8007 185 22 2,8673 192 6 4,1 23 0,1087 77 1,50 0,8166 155 66 1,8006 16 66 2,9635 191 14 4,1 34 0,1108 77 1,50 0,816 156 66 1,8051 167 3,903 3,002 1,9595 166 8 2,9635 191 14 4,1 34 0,1108 77 1,50 0,816 158 2,10711 180	12	0,03590	608	1,30	0,6641	148	48	1,6566 186	66	2,7705 194	4,90	3,9795 202
16 0,04518 cgs3 34 0,6936 149 52 1,6932 169 57 2,0052 19 54 4,0 0,0509 661 38 0,7230 151 56 1,7159 163 76 2,0647 194 59 4,6 2 0,07437 674 42 0,7349 152 56 1,7649 163 78 2,0644 195 2 4,64 20 0,07437 674 42 0,7544 155 62 1,7764 163 3,00 2,0559 14 4 6,754 165 22 1,0737 66 2,9451 16 64 4 4 4,14 51 1,075 16 1,0037 17 1,50 0,6474 158 72 1,0779 166 2,9451 16 4 4 4 4 4 51 12 4 4 3 0,1165 0,6474 158 72 1,0779 164 79 3,022 193 112 4 4 1	14	0,04198	620	32	0,6789	149	2,50	1,6752 180	66	2,7899 193	92	3,9997 195
	16	0,04818	633	X	0,6938	149	52	1,6932 183	3,70	2,8092 191	94	4,0192 198
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		0,05451	648	36	0,7057	151	54	1,7115 184	72	2,8285 195	96	4,0390 191
22 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0 0,0,0,0,0,0 0,0,0,0,0,0 0,0,0,0,0,0 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,	20	0,06099	661	38	0,7238	151	56	1,7299 186	74	2,8478 194	98	4,0581 20
44 0,07537 654 42 0,7531 153 2,000 1,7684 166 70 2,8085 93 4 4,1 28 0,00842 727 46 0,7849 155 64 1,8037 165 64 2,9053 193 64 4,1 20 0,0051 77 1,50 0,8160 156 66 1,8022 184 64 2,9053 191 12 6,1 34 0,1010 77 120 0,8160 156 66 1,8022 183 3,00 3,0023 166 44 4,1<	22	0,06760	677	1,40	0,7509	152	76	1,7465 185	76	2,8672 192	5,00	4,078 19
a_{1} a_{1} a_{1} a_{1} a_{2} a_{1} a_{2}	24	0,07457	694	42	0,7541	153	2,60	1,7665 186	78	2,8864 195	2	4,097 20
0_{1} <	20	0,08151	711	44	0,7694	155	02	1,7874 183	3,80	^{2,9059} 194	4	4,117 20
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		0,00042	727	40	0,7849	155	04 //	1,8037 185	62	2,9255 192		4,157 20
24 0,1031 77 1, 1,20 0,0100 156 00 1,000 197 00 2,0955 191 12 4, 35 0,1105 20 54 0,0474 156 72 1,0779 184 3,90 3,0024 196 14 4, 38 0,1265 81 56 0,0632 159 74 1,0953 167 92 3,0024 196 14 4, 49 0,1430 84 1,60 0,0952 160 78 1,9336 188 96 3,0615 191 18 4, 40 0,1514 64 57 62 0,9112 161 76 1,9150 186 94 3,0615 193 18 4, 42 0,1610 89 66 0,9952 160 78 1,9336 188 96 3,0615 194 5,20 4, 44 0,1610 89 66 0,9952 160 78 1,9336 188 96 3,0615 193 22 4, 45 0,1601 89 66 0,9956 162 19,9721 188 4,00 3,0999 195 24 4, 45 0,1690 90 66 0,9556 162 1,971 188 4,00 3,0999 195 24 4, 45 0,1690 90 66 0,9556 162 1,971 188 4,00 3,0999 195 24 4, 45 0,1690 90 66 0,9556 162 2,90 2,0065 186 4 3,1583 193 5,20 4, 46 0,1695 90 76 1,00576 164 88 2,0077 190 6 3,1583 193 5,20 4, 47 0,1872 93 1,70 0,9756 164 88 2,0077 190 6 3,1583 193 5,20 4, 47 0,1875 93 7 76 1,0057 166 94 2,0087 187 4 3,3758 193 5,30 4, 46 0,2554 161 78 1,0027 166 94 2,0087 187 4,10 3,1776 191 32 4, 46 0,2555 161 78 1,0027 166 94 2,0087 187 4,10 3,1776 191 52 4, 47 0,2554 161 78 1,0027 166 94 2,1027 187 12 3,2161 193 5,40 4, 46 0,2453 105 64 1,0927 166 94 2,1027 187 16 3,2752 195 5,40 4, 46 0,2453 105 64 1,0927 166 22 1,21389 16 3,2752 195 5,40 4, 47 0,2554 110 1,90 1,1695 169 4 2,1177 189 22 3,3139 195 44 4, 46 0,2453 105 64 1,0927 166 22 1,21389 16 3,2752 195 5,50 4, 47 0,2891 111 92 1,1264 177 6 2,2156 190 34 4,33284 191 44 4, 47 0,2891 111 92 1,1264 177 6 2,2156 190 34 3,3328 191 44 4, 47 0,2891 111 94 1,1776 177 12 2,2257 188 4,30 3,3987 192 44 4, 48 0,3459 114 94 1,176 177 12 2,2257 188 4,30 3,3987 192 44 4, 49 0,3261 113 2,100 1,2282 174 18 2,3765 191 34 3,3708 291 5,50 4, 40 0,3467 197 48 1,176 177 12 2,2575 188 4,30 3,3987 193 44 4, 41 0,3304 193 1,436 177 34 2,2723 193 32 3,4113 191 54 4, 41 0,3505 118 2,00 1,2292 177 18 2,2357 191 34 3,508 199 54 4,45 41 0,3505 118 2,00 1,2292 177 18 2,2357 191 44 3,568 197 5,50 4,4 42 0,560 118 2,00 1,2292 177 18 2,2357 191 44 3,568 195 77 4,45 41 0,3509 138 3,45 1,4509 177 35 2,2464 199 54 3,566 195 64 4,5 5	,50	0,09769	74	48	0,8004	156	60	1,8222 184	84	2,9445 196	8	4,157 18
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	×	0,1031	77·	1,30	0,0100	156	00	1,8406 187	00	2,9641 194	5,10	4,175 21
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	2	0,1106	77	76	0,0310	158	2,10	1,0795 186		2,9035 191	12	4,190 19
$\begin{array}{c}$	7	0 1946	80	74	0 0620	1 58		1 mort 184	0,90	196		4 236
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		0.1846	81	70 54	0 9704	159	74	1 0160 187	96	3,0416 193		4.255
-1, -2, -6 6 $-1, -2, -6$ 16 $1, -2, -2, -6$ $1, -2, -2, -2, -6$ $1, -2, -2, -2, -6$ $1, -2, -2, -2, -2, -6$ $1, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2$		0.1430	84	1 60	0.8052	161	72	1.0134 186		3 0612	10 6 20	4.275 20
0, j, j, 01 $0, j$ $0, j$ $0, j$ $1, j$		0.1514	84	62	0.9112	160	2.80	1.9524	94	3,0006	2,20	4,294
0, 1690 99 066 $0, 9596$ 163 $10, 11, 188$ $0, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 1$		0.1601	87	ũ	0.9273	161	82	1.9711	4.00	3,0998	24	4.314
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		0.1690	89	66	0.9436	163		1.9909	2	3 1193	26	4,333
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	50	0.1780	90	68	0.9598	162	86	2.0095		3,1366	28	4.353
54 0,1955 55 72 0,9926 164 2,0460 197 8 5,1776 193 74 56 0,2061 97 74 1,0091 166 92 2,0460 190 8 5,1776 193 74 32 44 56 0,2136 98 76 1,0257 166 94 2,0627 167 12 3,2161 196 54 4,00 60 0,2255 101 76 1,0257 166 96 2,1213 199 16 3,2752 195 42 4, 64 0,2553 104 62 1,0757 170 3,000 2,1402 187 18 3,2752 195 42 4, 64 0,2553 105 64 1,0957 166 2 2,1777 199 24 3,3334 191 44 4, 60 0,2564 107 65 1,1057 170 8 2,2176 193 3,3334 191 46 4, 4, 4, <td>52</td> <td>0.1872</td> <td>92</td> <td>1.70</td> <td>0.9762</td> <td>164</td> <td>86</td> <td>2.0270</td> <td></td> <td>3,1583</td> <td>5.30</td> <td>4.374</td>	52	0.1872	92	1.70	0.9762	164	86	2.0270		3,1583	5.30	4.374
56 0,2061 97 74 1,0091 165 94 2,0647 187 94 104 31 194 34 4,0 56 0,2256 98 76 1,00257 166 94 2,0647 197 12 3,2151 199 36 4, 0,60 0,22557 102 1,00 1,0591 166 96 2,1123 189 16 3,2554 198 5,40 4, 64 0,2563 105 84 1,0591 166 2 2,1313 189 16 3,2554 195 42 4, 64 0,2563 105 84 1,0527 166 2 2,1313 189 16 3,2534 195 44 4, 64 0,2564 107 66 1,1055 169 4 2,1777 198 22 3,3334 191 46 4, 67 0,2594 11 52 1,1255 170 8 2,2175 180 3,3734 191 54 4, <td>54</td> <td>0.1965</td> <td>93</td> <td>72</td> <td>0.9926</td> <td>164</td> <td>2.90</td> <td>2.0460</td> <td></td> <td>3,1776</td> <td>32</td> <td>4.392</td>	54	0.1965	93	72	0.9926	164	2.90	2.0460		3,1776	32	4.392
58 $0,2159$ 9776 $1,0257$ 166 94 $2,0037$ 190 12 $3,2161$ 196 36 $4,$ 60 $0,2256$ 101 78 $1,0423$ 166 96 $2,1024$ 199 14 $3,2359$ 195 38 $4,$ 62 $0,2357$ 102 $1,600$ $1,0991$ 166 98 $2,1213$ 189 16 $3,2554$ 198 $5,400$ $4,$ 64 $0,2459$ 104 42 $1,0757$ 1700 $3,000$ $2,1402$ 187 188 $3,2752$ 195 44 $4,$ 66 $0,2563$ 105 64 $1,0927$ 166 2 $2,1999$ 188 $3,2947$ 192 44 $4,$ 66 $0,2563$ 105 64 $1,0927$ 166 2 $2,1996$ 188 $3,2947$ 192 44 $4,$ 67 $0,2775$ 109 68 $1,1256$ 171 $5,100$ $2,2156$ 191 26 $3,3334$ 191 52 $4,$ 74 $0,2996$ 111 92 $1,1405$ 171 $3,10$ $2,2377$ 188 $3,5788$ 191 52 $4,$ 76 $0,3105$ 116 94 $1,2777$ 173 14 $2,2725$ 193 32 $3,4113$ 191 56 $4,$ 76 $0,3219$ 115 96 $1,2122$ 176 $2,2355$ 193 35 $3,4002$ 256 $4,$ <td< td=""><td>56</td><td>0.2061</td><td>5</td><td>74</td><td>1.0091</td><td>107</td><td>92</td><td>2.0647</td><td>4.10</td><td>3,1967</td><td>34</td><td>4.413 .0</td></td<>	56	0.2061	5	74	1.0091	107	92	2.0647	4.10	3,1967	34	4.413 .0
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	50	0.2158	y /	76	1.0257	100	94	2.0837	12	3.2161	36	4.432
620,23571041,801,0591166982,1213169163,25541985,404,640,2453105641,07571703,002,1402187163,2732195424,660,2563105641,092716622,15991884,203,2947192444,660,2564107661,1095169422,1717199223,3139195464,720,28841101.901,143517162,2156191263,35522035,504,740,2994111921,16051713,102,2547188283,3728191524,760,3105114941,1776171122,25351884,303,9919194544,780,323911691,2232172162,2916190343,4304202584,620,310511691,2232172182,3106199363,4703194624,780,32501182,001,2292172182,3206190443,4897197644,640,35671182,001,2292174182,3676191423,5084192664, <td>,60</td> <td>0,2256</td> <td>70</td> <td>78</td> <td>1,0423</td> <td>168</td> <td>96</td> <td>2,1024 107</td> <td>14</td> <td>3,2359 105</td> <td>38</td> <td>4.452 20</td>	,60	0,2256	70	78	1,0423	168	96	2,1024 107	14	3,2359 105	38	4.452 20
640,2459104821,07571703,002,1402167183,2752195424,660,2563105641,092716622,15991884,203,2947192444,680,2668107661,109516942,1777199223,3139195464,670,2775109881,126417162,2156191263,3324191484,720,28841101.901,143517082,2547198283,33252035,504,740,2994111921,1776171122,25351884,303,3919194544,760,3105114941,1776171122,25351884,303,2919194544,780,3219115961,1947173142,2713193323,4113191564,780,34501182,001,2232174182,3166190343,45061975,604,640,35671182,001,2232174182,3165191423,5091192664,650,36071182,101,3164175242,3667191423,5061195724,	62	0,2357	107	1,80	1,0591	100	98	2,1213	16	3,2554 100	5.40	4.472 .0
660,2563100641,092716622,15991684,203,2947192444,680,2668107661,109516942,1777199223,3139195444,720,28841101,901,143517082,2156191263,3334191484,740,2994111921,16051713,102,2156191263,3728191524,760,3105114941,1776171122,227351884,303,378919524,4780,3219115961,1947177142,2723193323,4113191564,4780,32191182,001,2130172162,2175190343,4304202584,4640,35671182,001,2232174182,3106199343,4304202564,4640,356713021,34661723,202,3295191363,4703194624,4640,356713061,2388176222,3676191423,5061195724,4650,360712361,2888175282,4638191443,5366196664,47	4	0,2459	104	82	1,0757	100	3,00	2,1402	18	3,2752 105	42	4.491 20
680,2668107661,109516942,1777169223,3139192464,0,2775109681,126417162,1966190243,3334191484,720,28841101,901,143517082,2156191263,35252035,504,740,2994111921,16051713,102,234718823,03919194544,780,3219115961,2120172162,2316190343,4304202584,0,5000,5334116961,2120172162,2316190343,4504202584,620,34501182,001,2292174182,3106190363,45041975,604,640,356712041,2638176222,34661904,403,4897197644,640,356712061,2814173242,3576191423,5694192664,650,3607127121,3359175262,3657191443,5686195724,660,35671261,3164175262,3676191423,5681195724,670,4054127 <td< td=""><td>"</td><td>0,2563</td><td>105</td><td>84</td><td>1,0927</td><td>160</td><td>2</td><td>2,1509 100</td><td>4,20</td><td>3,2947 192</td><td>44</td><td>4,511 20</td></td<>	"	0,2563	105	84	1,0927	160	2	2,1509 100	4,20	3,2947 192	44	4,511 20
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	68	0,2668	107	66	1,1095	160	4	2,1777 100	22	3,3139 195	46	4,531 10
720,28841101,901,143517082,2156191263,35252035,504,740,2994111921,16051713,102,2347188283,3728191524,1760,3105114941,1776171122,25351884,303,3919194544,1780,3219115961,947173142,2723193323,4113191564,1780,32501182,001,2292174162,2916190343,4304<202	70	0,2775	109	86	1,1264	171	6	2,1966 190	24	3,3334 191	48	4,550 20
74 $0,2994$ 11192 $1,1605$ 171 $3,10$ $2,2347$ 18828 $3,3728$ 191524,676 $0,3105$ 11494 $1,1776$ 17112 $2,2535$ 188 $4,30$ $3,3919$ 194544,678 $0,3219$ 11596 $1,2120$ 17216 $2,2316$ 19332 $3,4113$ 191564,60,00 $0,3334$ 11696 $1,2120$ 17216 $2,2916$ 19034 $3,4304$ 202584,662 $0,3450$ 118 $2,00$ $1,2292$ 17418 $2,3106$ 19936 $3,4506$ 1975,604,664 $0,3564$ 1192 $1,2466$ 172 $3,20$ $2,3295$ 19138 $3,4703$ 194624,6664 $0,3607$ 1204 $1,2538$ 17622 $2,3667$ 19144 $3,5306$ 192664,665 $0,9500$ 1236 $1,2814$ 17526 $2,3667$ 19144 $3,5306$ 195724,794 $0,4054$ 12712 $1,3539$ 177 $3,300$ $2,4489$ 19248 $3,5661$ 195724,795 $0,4054$ 12712 $1,3539$ 17632 $2,4441$ 1914,50 $3,5676$ 196744,196 $0,4054$ 1312.8 $1,6045$ 17836<	72	0,2004	110	1,90	1,1435	170	8	2,2156 191	26	3,3525 203	5,50	4,570 20
76 $0,3105$ 114 94 $1,1776$ 171 12 $2,2535$ 108 $4,30$ $3,3919$ 194 54 $4,778$ $0,3219$ 115 96 $1,1947$ 173 14 $2,2723$ 193 32 $3,4113$ 191 56 $4,793$ $0,00$ $0,3334$ 116 96 $1,2120$ 172 16 $2,2723$ 193 32 $3,4113$ 191 56 $4,7933$ 62 $0,3450$ 118 $2,000$ $1,2292$ 174 18 $2,3106$ 199 36 $3,4506$ 197 $5,60$ $4,79333$ 64 $0,3567$ 120 4 $1,2638$ 176 22 $2,3486$ 190 $3,4997$ 197 64 $4,793333$ 66 $0,3607$ 120 4 $1,2638$ 176 22 $2,3486$ 190 $4,400$ $3,4997$ 197 64 $4,793333333$ $0,3907$ 125 6 $1,2814$ 175 28 $2,3667$ 191 42 $3,5094$ 192 66 $4,793333333333$ 124 5 $1,2399$ 177 28 $2,4349$ 192 46 $3,5482$ 199 $5,70$ $4,79333333333333333333333333333333333333$	74	0,2994	111	92	1,1605	171	3,10	2,2347 188	26	3,3728 191	52	4,590 20
78 $0,3219$ 11596 $1,1947$ 17314 $2,2723$ 19332 $3,4113$ 191564,60,40 $0,3334$ 11696 $1,2120$ 17216 $2,2916$ 19034 $3,4304$ 202584,642 $0,3450$ 118 $2,000$ $1,2232$ 17418 $2,3106$ 18936 $3,4506$ 1975,604,644 $0,3567$ 1204 $1,2538$ 17622 $2,3486$ 1904,40 $3,4897$ 197644,646 $0,3607$ 1236 $1,2814$ 17524 $2,3676$ 19142 $3,5094$ 192664,695 $0,4054$ 124 $2,100$ $1,3164$ 17528 $2,3067$ 19144 $3,5486$ 1955,704,696 $0,4054$ 124 $2,100$ $1,3164$ 17528 $2,4058$ 19146 $3,5482$ 1995,704,69796 $0,4176$ 12712 $1,3539$ 177 $3,200$ $2,4449$ 19248 $3,5661$ 195724,698 $0,4432$ 12714 $1,3568$ 17736 $2,4425$ 19154 $3,6267$ 197784,699 $0,4432$ 131 $2,200$ $1,4045$ 17638 $2,5014$ 19056 $3,6464$ 1925,8004,696 $0,4432$ 131 $2,200$ $1,404$	76	0,3105	114	94	1,1776	171	12	2,2535 188	4,30	3,3919 194	54	4,610 20
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	78	0,3219	115	96	1,1947	173	14	2,2723 193	32	3,4113 191	56	4,630 20
62 $0,3450$ 118 $2,00$ $1,2292$ 174 18 $2,3106$ 109 36 $3,4506$ 197 $5,60$ $4,4$ 64 $0,5568$ 119 2 $1,2466$ 172 $3,20$ $2,3295$ 191 38 $3,4703$ 194 62 $4,4$ 66 $0,5607$ 120 4 $1,2638$ 176 222 $2,3406$ 190 $4,40$ $3,4097$ 197 64 $4,6$ $0,5007$ 123 6 $1,2014$ 175 24 $2,3676$ 191 42 $3,5094$ 192 66 $4,6$ $0,500$ $0,3930$ 124 5 $1,2309$ 175 26 $2,3067$ 191 44 $3,5206$ 196 66 $4,6$ 92 $0,4054$ 124 $2,10$ $1,3164$ 175 280 $2,4036$ 191 46 $3,5402$ 199 $5,70$ $4,6$ 94 $0,4178$ 127 12 $1,3339$ 177 $3,30$ $2,4249$ 192 48 $3,5601$ 195 72 $4,6$ 94 $0,4432$ 129 16 $1,3692$ 176 32 $2,4441$ 191 $4,50$ $3,5676$ 196 74 $4,6$ 96 $0,4432$ 129 16 $1,3692$ 176 32 $2,4443$ 191 52 $3,6074$ 193 76 $4,6$ 96 $0,4432$ 129 16 $1,3692$ 177 36 $2,4632$ <th< td=""><td></td><td>0,3334</td><td>116</td><td>96</td><td>1,2120</td><td>172</td><td>16</td><td>2,2916 190</td><td>ж</td><td>3,4304 202</td><td>58</td><td>4,650 19</td></th<>		0,3334	116	96	1,2120	172	16	2,2916 190	ж	3,4304 202	58	4,650 19
44 $0,3568$ 119 2 $1,2466$ 172 $3,20$ $2,3295$ 191 36 $3,4703$ 194 62 $4,40$ 46 $0,3607$ 120 4 $1,2538$ 176 22 $2,3466$ 190 $4,40$ $3,4897$ 197 64 $4,40$ $0,3007$ 125 6 $1,2614$ 175 24 $2,3676$ 191 42 $3,5094$ 192 66 $4,40$ $0,3007$ 125 6 $1,2509$ 175 26 $2,3676$ 191 44 $3,5306$ 196 66 $4,40$ 92 $0,4054$ 124 $2,10$ $1,3164$ 175 28 $2,4058$ 191 46 $3,5482$ 199 $5,70$ $4,40$ 94 $0,4176$ 127 12 $1,3339$ 177 $3,30$ $2,4249$ 192 48 $3,5681$ 195 72 $4,40$ 94 $0,4176$ 127 12 $1,3592$ 176 32 $2,4441$ 191 $4,50$ $3,5876$ 198 74 $4,40$ 96 $0,4305$ 127 14 $1,3592$ 176 34 $2,4632$ 191 52 $3,6074$ 193 76 $4,40$ 90 $0,4432$ 129 16 $1,3692$ 177 36 $2,4623$ 191 52 $3,6074$ 193 76 $4,40$ $1,00$ $0,4551$ 131 18 $1,3668$ 177 36 $2,5024$ 191	82	0,3450	118	2,00	1,2292	174	18	2,3106 189	34	3,4506 197	5,60	4,669 19
66 $0,3607$ 120 4 $1,2638$ 176 22 $2,3486$ 190 $4,40$ $3,4897$ 197 64 $4,50$ $0,3007$ 123 6 $1,2814$ 175 24 $2,3676$ 191 42 $3,5094$ 192 66 $4,50$ $0,300$ $0,3930$ 124 2 $1,2599$ 175 26 $2,3676$ 191 44 $3,5286$ 196 66 $4,50$ 92 $0,4054$ 124 $2,10$ $1,3164$ 175 28 $2,4058$ 191 46 $3,5482$ 199 $5,70$ $4,50$ 94 $0,4176$ 127 12 $1,3339$ 177 $3,30$ $2,4249$ 192 48 $3,5681$ 195 72 $4,50$ 94 $0,4432$ 127 14 $1,351c$ 176 32 $2,4441$ 191 $4,50$ $3,5876$ 198 74 $4,60$ 96 $0,4325$ 129 16 $1,3692$ 176 34 $2,4632$ 191 52 $3,6074$ 193 76 $4,60$ $1,00$ $0,4551$ 131 18 $1,3966$ 177 36 $2,3204$ 190 56 $3,6464$ 192 $5,80$ $4,60$ $0,4692$ 131 $2,20$ $1,4045$ 178 $3,40$ $2,3204$ 195 56 $3,6656$ 195 82 $4,50$ 100 $0,4623$ 133 22 $1,4223$ 178 $3,40$ $2,5204$ <th< td=""><td>•</td><td>0,3568</td><td>119</td><td>2</td><td>1,2466</td><td>172</td><td>3,20</td><td>2,3295 191</td><td>36</td><td>3,4703 194</td><td>62</td><td>4,688 20</td></th<>	•	0,3568	119	2	1,2466	172	3,20	2,3295 191	36	3,4703 194	62	4,688 20
660,300712561,2814175242,3676191423,5094192664,5 $0,30$ 0,393012451,2399175262,3677191443,5286196684,5 94 0,40541242,101,3164175282,4058191463,54821995,704,5 96 0,4305127121,33391773,302,4249192483,5661195724,5 96 0,4325127141,3516176322,44411914,503,5676196744,6 96 0,4432129161,3692176342,4632191523,6074193764,6 $1,00$ 0,4561131181,3668177362,4823191543,6267197784,6 042 0,46921312,201,4045178382,5014190563,64641925,804,6 04 0,4623133221,42231783,402,5294195583,6656195824,6 06 0,4956134241,4601180422,53991904,603,6651198644,5 06 0,4956134241,4581179442,5569194623,7049193	66	0,3687	120	4	1,2638	176	22	2,3486 190	4,40	3,4897 197	64	4,708 20
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	•	0,3007	125	6	1,2614	175	24	2,3676 191	42	3,5094 192	66	4,728 21
920,40541242,101,3164175282,4058191463,54821995,704,5940,4176127121,33391773,302,4249192483,5681195724,5960,4332127141,3516176322,44411914,503,5676196744,6980,4432129161,3692176342,4632191523,6074193764,61,000,4561131181,3668177362,4823191543,6267197784,6020,46921312,201,4045178382,5014190563,64641925,804,6040,4823131221,42231783402,5204195583,6656195824,6040,4956134241,4401180422,53991904,603,6851198844,55050,5050135261,4581179442,5509194623,7049193864,551100,5225137281,4760178462,5783188643,7342196884,55120,53621382,301,4938181482,5971193663,74382005,90 <th< td=""><td>90</td><td>0,3930</td><td>124</td><td>9</td><td>1,2909</td><td>175</td><td>26</td><td>2,3867 191</td><td>44</td><td>3,5206 196</td><td>66</td><td>4,749 19</td></th<>	90	0,3930	124	9	1,2909	175	26	2,3867 191	44	3,5206 196	66	4,749 19
94 $0,4176$ 127 12 $1,3339$ 177 $3,30$ $2,4249$ 192 48 $3,5681$ 195 72 $4,59$ 96 $0,4305$ 127 14 $1,3516$ 176 32 $2,4441$ 191 $4,50$ $3,5876$ 198 74 $4,61$ 96 $0,4432$ 129 16 $1,3692$ 176 34 $2,4632$ 191 52 $3,6074$ 193 76 $4,61$ $1,00$ $0,4561$ 131 18 $1,3668$ 177 36 $2,4825$ 191 54 $3,6267$ 197 78 $4,61$ 02 $0,4692$ 131 $2,20$ $1,4045$ 178 38 $2,5014$ 190 56 $3,6464$ 192 $5,800$ $4,60$ 04 $0,4623$ 133 22 $1,4223$ 178 $3,400$ $2,5204$ 195 58 $3,6656$ 195 82 $4,60$ 06 $0,4956$ 134 24 $1,4001$ 180 422 $2,5399$ 190 $4,60$ $3,6851$ 198 84 $4,55$ $1,10$ $0,5225$ 137 28 $1,4760$ 178 46 $2,5783$ 180 64 $3,7438$ 200 $5,90$ $4,55$ 14 $0,5500$ 136 32 $1,5119$ 178 $3,50$ $2,6164$ 192 66 $3,7638$ 194 92 $4,52$ 16 $0,5538$ 141 34 $1,5297$ 180	92	0,4054	124	2,10	1,3164	175	28	2,4058 191	46	3,5482 199	5,70	4,768 19
y_0 $0,4305$ 127 14 $1,7576$ 176 322 $2,4441$ 191 $4,50$ $3,5876$ 198 74 $4,4$ y_0 $0,4432$ 129 16 $1,3692$ 176 34 $2,4632$ 191 52 $3,6074$ 193 76 $4,4$ $1,00$ $0,4561$ 131 18 $1,3068$ 177 36 $2,4625$ 191 52 $3,6267$ 197 78 $4,4$ 02 $0,4692$ 131 $2,20$ $1,4045$ 178 36 $2,5014$ 190 56 $3,6464$ 192 $5,80$ $4,4$ 04 $0,4623$ 133 22 $1,4223$ 178 $3,40$ $2,5204$ 195 58 $3,6656$ 195 82 $4,40$ 06 $0,4956$ 134 24 $1,4001$ 180 422 $2,5399$ 190 $4,60$ $3,6851$ 198 64 $4,50$ 06 $0,5990$ 135 26 $1,4760$ 178 46 $2,5783$ 180 64 $3,7242$ 196 86 $4,52$ $1,10$ $0,5225$ 137 23 $1,4760$ 178 46 $2,5783$ 180 64 $3,7438$ 200 $5,90$ $4,52$ $1,2$ $0,5362$ 138 32 $1,5119$ 178 $3,50$ $2,6164$ 192 66 $3,7638$ 194 92 $4,52$ $1,4$ $0,5500$ 136 32 $1,5297$ 180 52	%	0,4178	127	12	1,3339	177	3,30	2,4249 192	48	3,5681 195	72	4,707 20
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	2	0,4305	127	14	1,5%	175	7	2,4441 191	4,50	3,5876 198	74	4,807
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	2	U,4432	129	16	1,5092	178	X	2,4632 191	52	3,0074 193	76	4,024 21
0x 0,4052 131 2,40 1,4055 176 26 2,5014 190 56 3,6464 192 5,80 4,4 04 0,4623 133 22 1,4223 178 3,40 2,5204 195 58 3,6656 195 62 4,40 06 0,4956 134 24 1,4001 180 42 2,5399 190 4,60 3,6651 195 62 4,40 06 0,5090 135 26 1,4581 179 44 2,5509 194 62 3,7049 193 86 4,50 1,10 0,5225 137 28 1,4760 178 46 2,5783 188 64 3,7242 196 88 4,55 12 0,5352 138 2,30 1,4938 181 48 2,5971 193 66 3,7438 200 5,90 4,55 14 0,5500 136 .32 1,5119 178 3,50 2,6164 192 66 3,7638 194 92 <td><u>~</u> [</td> <td>U,4201</td> <td>131</td> <td>18</td> <td>1,7060</td> <td>177</td> <td></td> <td>2,4523 191</td> <td>24</td> <td>2, 8267 197</td> <td>78</td> <td>4,847 20</td>	<u>~</u> [U,4201	131	18	1,7060	177		2,4523 191	24	2, 8267 197	78	4,847 20
04 0,4453 133 22 1,4223 178 5,40 2,5204 195 56 5,6056 195 82 4,4 06 0,4956 134 24 1,4401 180 42 2,5399 190 4,60 3,6651 198 64 4,5 06 0,5090 135 26 1,4581 179 44 2,5589 194 62 3,7049 193 86 4,5 1,10 0,5225 137 28 1,4760 176 46 2,5783 180 64 3,7242 196 88 4,5 12 0,5362 138 2,30 1,4938 181 48 2,5971 193 66 3,7438 200 5,90 4,5 14 0,5500 138 .32 1,5119 176 3,50 2,6164 192 66 3,7636 194 92 4,5 16 0,5638 141 34 1,5297 180 52 2,6356 192 4,70 3,7832 197 94		U ,4052 .	131	2,3 0	1,4045	176	70	2,2014 190	20	3,9494 192	>,8 0	4,007
00 0,0550 134 00 1,0001 180 02 2,5599 190 5,000 198 84 4,5 00 0,5090 135 26 1,4581 179 44 2,5589 194 62 3,7049 193 86 4,5 1,10 0,5225 137 28 1,4760 176 46 2,5783 188 64 3,7242 196 88 4,5 12 0,5362 138 2,30 1,4938 181 48 2,5971 193 66 3,7438 800 5,90 4,5 14 0,5500 138 .32 1,5119 176 3,50 2,6164 192 66 3,7638 194 92 4,50 16 0,5638 141 34 1,5297 180 52 2,6356 192 4,70 3,7632 197 94 5,00 16 0,5638 141 34 1,5297 180 52 2,6356 192 4,70 3,7632 197 94 5,00	21	U,995) .	·33		1,9223	178	,40	2,2204 195	70	7,0070 195	वर	*,000) A am 22
w 0,5050 135 w 1,4501 179 44 2,5059 194 62 5,7049 193 86 4,1 1,10 0,5225 137 28 1,4760 178 46 2,5783 188 64 3,7242 196 88 4,5 12 0,5362 138 2,30 1,4938 161 48 2,5971 193 66 3,7438 800 5,90 4,5 14 0,5500 138 .32 1,5119 178 3,50 2,6164 192 68 3,7638 194 92 4,5 16 0,5638 141 34 1,5297 180 52 2,6356 192 4,70 3,7832 197 94 5,0	. I (v, 4730 .	134	24 	1,4401	180	42	4,2777 190	1,00	7,0071 198	04	4,907 4 per 19
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	 []	U,7U7U .	135		1,4261	179		2,7709 194		3, 1049 193		4,340 20
16 0,5500 136 .32 1,5119 176 3,50 2,6164 192 66 3,7636 194 92 4,5 16 0,5636 141 34 1,5297 180 52 2,6356 192 4,70 3,7832 197 94 5,00 16 0,5636 141 34 1,5297 180 52 2,6356 192 4,70 3,7832 197 94 5,00		U,)22)	137		1,4700	176	40	Z,3703 180	14	2,7242 196		4,946 19
16 0,5630 141 34 1,5297 180 52 2,6356 192 4,70 3,7832 197 94 5,0		U , 7,742 .	138	<i>2,7</i> 0	1,4738	181	45	2,2971 193	90	3,7435 200	7,9 0	4,965 20
······································		v,7700 . 	136	· X	1,7119	176	7,7 0	Z,0104 192		3,7030 194	*	4,305 20
	" I'	v,7975	141	74	1,2697	180	×	×,•,770 192	4,70	3, 7832 197	94 64	5,005 5,005 20
	I								72	3,0029 192		5,045 20
										2, mee 194		2,045 5,045



- TABLE DES MATIERES -

1

Pages

I - INTRODUCTION	1
II - PRINCIPE DE LA METHODE	2
- Hypothèses	4
III - CALCUL DE Γ_u , Γ_m et H	4
- Calcul de Γ_u	4
- Calcul de H et de \prod_{m}	5
Relation entre $\Gamma_{\mathbf{m}}$ et H	6
Calcul de H	7
- Expression de $\frac{1}{f}$ - 1	9
- Evaluation de $\mathcal G$	9
l° - Wéthode classique	11
2° - Méthode plus poussée	11
- Evaluation de λ	13
IV - INTERPRETATION DE LA FORMULE DE 1	15
l [•] - Calcul de G	16
2• - Calcul de N	17
3° - Calcul de X ₁	17
V - RESULTATS NUMERIQUES	20
ANNEXE I - Méthodes de calcul de J - Limites d'erreur	25
ANNEXE II - Généralisations - Barre creuse	29
ANNEXE III - Formulaire pratique	31

•

#