

AMOUYAL A., BENOIST P.

Rapport C.E.A. n° 571

Nouvelle méthode de détermination du facteur d'utilisation thermique d'une cellule.

Sommaire.- Une nouvelle expression du facteur d'utilisation thermique, d'une simplicité comparable à celle de la théorie élémentaire, est établie. La comparaison avec les résultats fournis par la méthode  $S_n$  et les méthodes d'harmoniques sphériques montre que la précision obtenue par cette formule est très supérieure à celle que donne la théorie élémentaire.

1956

33 pages

AMOUYAL A., BENOIST P.

Rapport C.E.A. n° 571

New method of determining the thermal utilization factor of a cell.

Summary.- A new formula for the thermal utilization factor is derived, which, while comparable in simplicity to the formula given by elementary diffusion theory, furnishes much more precise results. This is clearly brought out by comparison with the results given by the  $S_n$  and spherical harmonics methods.

1956

33 pages

PRÉSIDENCE DU CONSEIL

**COMMISSARIAT A L'ÉNERGIE ATOMIQUE**

**NOUVELLE METHODE DE DETERMINATION DU FACTEUR  
D'UTILISATION THERMIQUE D'UNE CELLULE**

**A. AMOUYAL et P. BENOIST**

**Rapport C.E.A. n° 571**

**1956**

**Centre d'Études nucléaires de Saclay**

Service de Documentation

Boite postale n°2 Gif sur Yvette (S et O)

Service de Physique mathématique

**NOUVELLE METHODE DE DETERMINATION DU FACTEUR  
D'UTILISATION THERMIQUE D'UNE CELLULE**

par

**A. AMOJYAL et P. BENOIST**

NOUVELLE METHODE DE DETERMINATION DU FACTEUR

D'UTILISATION THERMIQUE D'UNE CELLULE.

**I . INTRODUCTION**

Le problème mathématique que l'on cherche à résoudre est celui du calcul du facteur d'utilisation thermique  $f$  d'une cellule cylindrique sans gradient longitudinal, composée d'une barre d'uranium de rayon  $a$  entourée d'une cavité annulaire d'épaisseur  $c - a$  et d'un modérateur de rayon extérieur  $b$ .

On suppose que :

- les neutrons ont une vitesse unique  $v$ ,
- la diffusion est isotrope,
- les sources sont uniformes, isotropes et de densité  $Q$  neutrons/cm<sup>3</sup>/s dans le modérateur, et nulles ailleurs,
- la densité en phase satisfait à la condition de réflexion au bord de la cellule.

Il s'agit là, bien entendu, d'un cas schématique et il nous a paru préférable de tester la formule qui va être établie par comparaison avec les résultats fournis par des méthodes mathématiques éprouvées, plutôt que par comparaison directe avec les résultats expérimentaux.

Les méthodes mathématiques couramment employées pour la résolution de ce problème consistent à résoudre directement l'équation de BOLTZMANN à laquelle satisfait la densité en phase. Elles se rattachent à deux types différents. :

1. - les méthodes d'intégration numérique, dont la plus connue est la méthode  $S_n$  <sup>(1)</sup>, qui nécessitent un volume relativement important de calculs ;

2. - les méthodes basées sur le développement en harmoniques sphériques de la densité en phase.

---

(1) Voir le rapport LADC 1948 de B.G. CARLSON : "Solution of the Transport Equation by  $S_n$  Approximations".

le nombre des neutrons de cette espèce capturés dans le modérateur par unité de temps et de longueur de cellule.

Ceux qui pénètrent dans le modérateur en  $r = c$ . Nous appellerons  $2\pi c J_+(c) \Gamma_m$  la capture qui en résulte par unité de temps et de longueur de cellule.  $\Gamma_m$  dépend évidemment de la distribution angulaire des neutrons pénétrant dans le modérateur en  $r = c$ .

Les captures dues aux deux catégories de neutrons mentionnées devront être naturellement calculées en tenant compte de la condition de réflexion en  $r = b$  et en admettant dans chacun des cas que la région intérieure  $r < c$  est noire, puisque le courant  $J_+(c)$  tient précisément compte de tous les neutrons qui proviennent de cette région.

Nous allons maintenant exprimer  $\frac{1}{f} - 1$  en fonction des quantités  $\Gamma_u'$ ,  $H$ ,  $\Gamma_m$ .

La conservation des neutrons impose l'égalité de la capture dans l'uranium et du courant total à la surface intérieure du modérateur. On a donc :

$$\begin{aligned} - 2\pi c \left[ J_+(c) - J_-(c) \right] &= 2\pi c J_-(c) \Gamma_u' \\ \text{d'où :} \quad J_+(c) &= (1 - \Gamma_u') J_-(c) \end{aligned}$$

Le courant  $J_-(c)$  se détermine en fonction des sources  $Q$  et des paramètres  $\Gamma_u'$ ,  $\Gamma_m$  et  $H$  en écrivant la relation de conservation des neutrons dans la cellule :

$$\begin{aligned} \pi (b^2 - c^2) Q &= \text{Capture dans le modérateur} + \text{Capture dans l'uranium} \\ &= \pi (b^2 - c^2) H Q + 2\pi c \Gamma_m (1 - \Gamma_u') J_-(c) + 2\pi c \Gamma_u J_-(c) \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad J_-(c) = \frac{(b^2 - c^2) (1 - H) Q}{2c \left[ \Gamma_m (1 - \Gamma_u') + \Gamma_u' \right]}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\pi (b^2 - c^2) H Q}{2\pi c \Gamma_u' J_-(c)} + \frac{\Gamma_m (1 - \Gamma_u')}{\Gamma_u'}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{1}{f} - 1 = \frac{1}{1 - H} \left[ H + \frac{\Gamma_m (1 - \Gamma_u')}{\Gamma_u'} \right]} \quad (1)$$

Nous avons donc à calculer les grandeurs  $\Gamma_u'$ ,  $\Gamma_m$  et  $H$ .

**Hypothèses**

La première hypothèse que l'on adoptera consiste à admettre que, à nombre égal de neutrons entrant dans le modérateur en  $r = c$ , la distribution angulaire de ces neutrons influe peu sur la capture dans le modérateur, donc sur  $\Gamma_m$ . De façon plus précise, on admettra qu'il est légitime de calculer  $\Gamma_m$  en remplaçant la densité en phase véritable des neutrons entrants par la densité en phase isotrope fournissant le même courant entrant, même si la précédente est assez éloignée de l'isotropie (3).

La seconde hypothèse à laquelle on fera appel concerne la forme de la densité en phase des neutrons sortant du modérateur en  $r = c$ . La quantité  $\Gamma'_u$  dépend en effet de la forme de cette densité en phase. On se contentera d'admettre que celle-ci est isotrope. Un calcul dont le détail ne sera pas exposé a d'ailleurs été effectué à partir d'une densité en phase à un harmonique du type  $A + B \cos \theta$ , où  $\theta$  est ici l'angle de la direction des neutrons avec la direction radiale. La valeur de  $f$  à laquelle on aboutit ainsi est peu différente, au moins pour de l'uranium naturel ou faiblement enrichi, de celle obtenue dans le cas d'une densité en phase isotrope, même pour des valeurs du paramètre d'anisotropie  $\frac{B}{A}$  importantes en comparaison de celle susceptible de représenter convenablement la véritable densité en phase des neutrons sortant du modérateur ; la méthode  $S_8$  montre d'ailleurs que dans ces cas, cette densité en phase véritable doit être peu éloignée de l'isotropie (beaucoup moins que la densité en phase des neutrons entrant dans le modérateur), et que la valeur de  $\frac{B}{A}$  qui la représente le mieux n'excède pas quelques pour cent.

Cette hypothèse sur l'isotropie des neutrons sortant du modérateur en  $r = c$  entraîne l'isotropie des neutrons entrant dans l'uranium en  $r = a$  et nous poserons par définition :

$$c \Gamma'_u = a \Gamma_u \quad (2)$$

**III - CALCUL DE  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_m$  ET  $H$**

**Calcul de  $\Gamma_u$**

Avec les hypothèses faites,  $\Gamma_u$  représente la probabilité de capture pour un neutron entrant dans la barre suivant la distribution angulaire fournie par une densité en phase isotrope ;  $2\pi a v \Gamma_u$  représente donc la capture par unité de temps et de longueur de la barre d'uranium due à une densité en phase entrante isotrope égale à  $\frac{1}{\pi}$  en tout point de sa surface.

---

(3) Dire que la densité en phase des neutrons entrant dans un milieu est isotrope revient à dire que le nombre de neutrons entrant par unité de surface dans l'angle solide  $d\Omega$  entourant le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est proportionnel à  $(\vec{n} \cdot \vec{n}) d\Omega$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à l'interface.

On considère un milieu infini diffusant et capturant, alimenté par des sources uniformes et isotropes donnant naissance à  $S$  neutrons par unité de temps et par unité de volume. La densité en phase, en régime permanent, est uniforme, isotrope et égale à :

$$\frac{S}{4\pi \sum_{uc} v}$$

Soit, dans ce milieu, un cylindre de rayon  $a$ . La capture à l'intérieur de ce cylindre est égale à  $\pi a^2 \cdot S$  par unité de temps et de longueur du cylindre ; elle est encore égale à la capture due aux sources  $S$  situées à l'intérieur de ce cylindre, augmentée de la capture due à la densité en phase entrante isotrope égale à :

$$\frac{S}{4\pi \sum_{uc} v}$$

en tout point de sa surface - étant entendu que le milieu extérieur est alors supposé être le vide avec des sources nulles. Cette source entrante rend compte en effet de tous les neutrons qui viennent de la région extérieure au cylindre considéré. On a donc l'égalité :

$$\pi a^2 S = \pi a^2 (1 - \mathcal{P}) S + 2\pi a v \Gamma_u \frac{S}{4 \sum_{uc} v}$$

où  $1 - \mathcal{P}$  est défini comme la probabilité de capture "globale", c'est-à-dire le nombre de neutrons capturés par unité de temps et de longueur de barre, pour un neutron naissant par unité de temps et de longueur de barre avec une probabilité uniforme et isotrope dans la barre entourée de vide ;  $\mathcal{P}$  est alors la probabilité de sortie.

L'égalité ci-dessous fournit l'expression de  $\Gamma_u$  en fonction de  $\mathcal{P}$  :

$$\boxed{\Gamma_u = 2 a \sum_{uc} \mathcal{P}} \quad (3)$$

D'où

$$\Gamma'_u = \frac{2 a^2 \sum_{uc} \mathcal{P}}{c} \quad (3bis)$$

L'expression de  $\mathcal{P}$  sera établie un peu plus loin.

Calcul de  $H$  et de  $\Gamma_m$

On rappelle que :

$H$  représente la probabilité de capture dans le modérateur pour un neutron

y naissant de manière uniforme et isotrope.

$\Gamma_u$  représente la probabilité de capture dans le modérateur pour un neutron entrant dans le modérateur en  $r = c$  suivant la distribution angulaire fournie par une densité en phase entrante isotrope ;  $2 \pi c v \Gamma_m$  représente donc la capture dans le modérateur (par unité de temps et de longueur de cellule) due à une densité en phase entrante isotrope égale à  $\frac{1}{\pi}$  en tout point de la surface  $r = c$ .

Il est entendu que dans les deux cas, la région centrale  $r < c$  est occupée entièrement par un corps noir et que de plus, la densité en phase satisfait en  $r = b$  à la condition de réflexion.

On va d'abord établir une relation simple entre les quantités  $H$  et  $\Gamma_m$ .

Relation entre  $\Gamma_m$  et  $H$ .

On considère un cylindre de rayon  $b$  égal au rayon de la cellule, rempli cette fois entièrement de modérateur, et alimenté par des sources  $Q$  uniformes et isotropes dans tout le cylindre, la densité en phase étant soumise, comme dans la vraie cellule, à la condition de réflexion en  $r = b$ . En toute rigueur la densité en phase est uniforme, isotrope et égale à

$$\frac{Q}{4\pi \sum_{mc} v}$$

où  $\sum_{mc}$  est la section efficace de capture du modérateur. Soit, dans ce milieu, un cylindre de rayon égal à  $c$ . La capture dans la zone annulaire  $c \leq r \leq b$  est égale à  $\pi (b^2 - c^2) Q$  ; elle est encore égale à la capture due aux sources  $Q$  situées dans la dite zone, augmentée de la capture due à la densité en phase entrante isotrope égale à

$$\frac{Q}{4\pi \sum_{mc} v}$$

en tout point de la surface du cylindre  $r = c$  - étant entendu que le cylindre central est alors supposé noir et sans sources puisque cette source entrante rend compte de tous les neutrons qui viennent de la région  $r < c$  ; d'où l'égalité :

$$\pi (b^2 - c^2) Q = \pi (b^2 - c^2) H Q + 2\pi c v \Gamma_m \frac{Q}{4\pi \sum_{mc} v}$$

On en tire  $\Gamma_m$  en fonction de  $H$  :

$$\Gamma_m = \frac{2 (b^2 - c^2)}{c} \sum_{mc} (1 - H) \tag{4}$$

Cette formule est l'équivalent, pour le modérateur, de la formule (3) pour l'uranium ; la probabilité de sortie  $1 - H$  y joue le rôle de la probabilité de sortie  $\mathcal{P}$ .

Calcul de H.

H représente la probabilité de capture dans le modérateur pour un neutron y naissant de manière uniforme et isotrope c'est-à-dire la capture due à des sources uniformes et isotropes de densité égale à  $\frac{1}{\pi(b^2 - c^2)}$  - la région  $r < c$  étant occupée par un corps noir et la densité en phase devant le plus satisfaire à la condition de réflexion en  $r = b$ . Cette capture peut s'obtenir par intégration sur le volume du flux neutronique régnant dans cette cellule particulière. On sait que ce flux neutronique peut se mettre sous forme d'une somme de deux fonctions de  $r$  :

L'une que nous appellerons "solution asymptotique", qui satisfait à l'équation élémentaire de la diffusion avec un laplacien pratiquement égal à

$$\sqrt{3 \sum_{mt} \sum_{mc}}$$

L'autre, qui peut être considérée comme une perturbation importante au voisinage de l'interface  $r = c$  et qui s'évanouit quand on s'éloigne de cette interface sur une distance de l'ordre du libre parcours total du modérateur pour de grandes valeurs de  $c$  ; cette distance tend vers zéro avec  $c$ .

Dans ces conditions, si l'épaisseur  $b - c$  du modérateur est supérieure à une distance de l'ordre du libre parcours, on peut assimiler avec une bonne approximation, la capture due à la solution exacte à celle fournie par la solution asymptotique. Ceci revient en effet à négliger la capture due à la perturbation devant la capture totale du modérateur ce qui est légitime car le volume dans lequel cette perturbation n'est pas négligeable n'est qu'une petite fraction du volume total.

Tout le problème revient donc à déterminer cette solution asymptotique. Si l'on admet que le courant dû à la perturbation est négligeable en  $r = b$ , ce qui en pratique est toujours le cas, la solution asymptotique vérifie la condition de réflexion en  $r = b$  et il suffit pour la fixer entièrement de connaître la condition à laquelle elle doit satisfaire à la limite  $r = c$ . Si nous appelons  $\Phi(r)$  cette solution asymptotique, nous supposerons connue la longueur d'extrapolation  $\lambda$ , exprimée en libres parcours  $\frac{1}{\sum_{mt}}$ , définie par :

$$\lambda = \frac{\Phi(c)}{\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=c}} \cdot \sum_{mt}$$

Cette grandeur sera estimée plus loin. La solution la plus générale de l'équation élémentaire de la diffusion qui satisfait à la condition de réflexion en  $r = b$  s'écrit :

$$\Phi(r) = \frac{1}{\pi(b^2 - c^2) \sum_{mc}} + A \Delta_0(K_m r)$$

avec :

$$\Delta_0(K_m r) = I_1(K_m b) K_0(K_m r) + K_1(K_m b) I_0(K_m r)$$

et :

$$K_m = \sqrt{3 \sum_{mt} \sum_{mc}}$$

La condition en  $c$  fixe le paramètre  $A$  :

$$A = \frac{1}{\pi(b^2 - c^2) \sum_{mc} \left[ \Delta_0(K_{mc}) + \frac{\lambda}{\sum_{mt}} K_m \Delta_1(K_{mc}) \right]}$$

avec :

$$\Delta_1(K_m r) = I_1(K_m b) K_1(K_m r) - K_1(K_m b) I_1(K_m r)$$

L'intégration de la densité permet d'obtenir immédiatement la capture  $H$  :

$$H = 1 - \frac{2c}{b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{K_m \frac{\Delta_0(K_m c)}{\Delta_1(K_m c)} + \frac{\lambda}{\sum_{mt}} K_m^2}$$

ou encore :

$$H = 1 - \frac{1}{1 + K_m^2 b^2 c + \frac{b^2 - c^2}{2c} \frac{\lambda}{\sum_{mt}} K_m^2} \quad (5)$$

$C$  étant l'expression :

$$c = \frac{b^2 - c^2}{2b^2} \cdot \frac{\Delta_0(K_m c)}{K_m c \Delta_1(K_m c)} - \frac{1}{K_m^2 b^2}$$

qui, lorsque  $K_m b$  tend vers zéro, a pour limite l'expression classique suivante,

dont il existe des tables en fonction du paramètre  $\frac{b}{c}$  :

$$C = \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{b^2}{c^2}}{\frac{b^2}{c^2} - 1} \text{Log} \left( \frac{b}{c} \right) - \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \frac{b^2}{c^2}} \right] \quad (6)$$

Expression de  $\frac{1}{f} - 1$

En portant dans la formule (2) les expressions obtenues pour  $\Gamma_u, \Gamma_m$  et H (formules (3bis), (4) et (5) ) on obtient :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \frac{\sum_{mc}}{\sum_{uc}} \frac{1}{\mathcal{P}} + K_m^2 b^2 C + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left( \frac{3}{2} \lambda - 2 \right) \quad (7)$$

Parmi les grandeurs qui interviennent dans cette formule les seules que l'on ne sache pas encore évaluer sont la probabilité de sortie  $\mathcal{P}$  et la longueur d'extrapolation  $\lambda$ .

Evaluation de  $\mathcal{P}$

On se placera en régime permanent et on supposera qu'il naît un neutron par unité de temps et de longueur de la barre ( $\mathcal{P}$  sera alors le nombre de neutrons sortant par unité de temps et de longueur). On a donc initialement une source uniforme et isotrope de densité  $\frac{1}{\pi a^2}$ . On va calculer la capture globale  $1 - \mathcal{P}$  due à cette source ; c'est la somme des captures  $C_i$  aux différents chocs :

$$1 - \mathcal{P} = C_1 + C_2 + \dots + C_n + \dots$$

Soit  $\sum_{ut}$  la section efficace totale et soit  $\sum_{us}$  la section efficace de diffusion du milieu considéré.

La source  $\frac{1}{\pi a^2}$  donne une densité de collision totale (diffusion + capture) de premier choc égale à :

$$N_1(r) = \frac{1}{\pi a^2} \left[ 1 - a \sum_{ut} \int_{\sum_{ut}}^{\infty} I_0(sr) K_1(sa) \frac{ds}{s} \right]$$

dont l'intégrale sur le volume de la barre donne le nombre de collisions de premier choc :

$$\int_0^a N_1(r) 2\pi r dr = 1 - 2 \sum_{ut} \int_{\sum_{ut}}^{\infty} I_1(sa) K_1(sa) \frac{ds}{s^2} = P_c$$

où  $P_c$ , appelé probabilité de collision de premier choc, est la fonction suivante<sup>(4)</sup>, qui dépend du seul paramètre  $a \sum_{ut}$  :

$$P_c = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{2} + 2 a \sum_{ut} - 2 a^2 \sum_{ut}^2 I_0 (a \sum_{ut}) K_0 (a \sum_{ut}) \right. \\ \left. - (2 a^2 \sum_{ut}^2 + 1) I_1 (a \sum_{ut}) K_1 (a \sum_{ut}) + 2 a \sum_{ut} I_1 (a \sum_{ut}) K_0 (a \sum_{ut}) \right]$$

Le premier choc pouvant être une diffusion ou une capture, la capture  $C_1$  au premier choc sera donc :

$$\frac{\sum_{uc}}{\sum_{ut}} P_c = (1 - \tau) P_c$$

en posant :

$$\tau = \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}}$$

Les neutrons ayant subi une collision et qui ne sont pas capturés sont diffusés et forment une nouvelle source isotrope, mais non uniforme, de densité égale à :

$$\tau N_1 (r) = \frac{\tau}{\pi a^2} \left[ 1 - a \sum_{ut} \int_{\sum_{ut}}^{\infty} I_0 (sr) K_1 (sa) \frac{ds}{s} \right]$$

La capture globale, c'est-à-dire après un nombre quelconque de chocs, due à cette source se décompose en deux parties : la capture due à la source uniforme  $\frac{\tau}{\pi a^2}$ , moins la capture due à la source

$$S (r) = \frac{\tau}{\pi a^2} a \sum_{ut} \int_{\sum_{ut}}^{\infty} I_0 (sr) K_1 (sa) \frac{ds}{s}$$

Par définition, la capture globale due à la source uniforme  $\frac{\tau}{\pi a^2}$  est égale à  $\tau (1 - \mathcal{P})$  ; d'où la relation :

$$1 - \mathcal{P} = (1 - \tau) P_c + \tau (1 - \mathcal{P}) - \text{capture globale due à la source } S(r)$$

---

(4) Cette fonction est tabulée avec 5 décimales, en fonction du paramètre  $a \sum_{ut} = a/l$  aux pages 34 et 35 de l'ouvrage de K.M. CASE, F. DE HOFFMANN et G. PLACZEK : "Introduction to the Theory of Neutron Diffusion", Vol. I.

L'expression de  $\mathcal{P}$  s'en déduit immédiatement :

$$\mathcal{P} = 1 - P_c + \frac{1}{1 - \tau} \cdot \text{capture globale due à la source } S(r).$$

Le problème est maintenant ramené au calcul de la capture globale due à la source  $S(r)$  ; cette capture peut être estimée de façon plus ou moins poussée.

1° - Méthode classique.

La méthode la plus simple consiste évidemment à remplacer la source  $S(r)$  par sa valeur moyenne  $\bar{S}$  ; la capture globale qui en résulte s'exprime alors en fonction de  $1 - \mathcal{P}$  :

$$\text{capture globale} = \pi a^2 (1 - \mathcal{P}) \bar{S}$$

$\bar{S}$  s'exprime en fonction de  $P_c$  :

$$\bar{S} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a S(r) 2 \pi r dr = \frac{\tau}{\pi a^2} \cdot 2 \sum_{ut} \int_{\Sigma_{ut}} I_1(sa) K_1(sa) \frac{ds}{s^2} = \frac{\tau}{\pi a^2} (1 - P_c)$$

d'où : 
$$\text{capture globale} = \tau (1 - \mathcal{P}) (1 - P_c)$$

En portant ce résultat dans l'expression de  $\mathcal{P}$  écrite plus haut, on peut tirer la valeur classique suivante de  $\mathcal{P}$ , que nous appellerons  $\mathcal{P}_0$  :

$$\boxed{\mathcal{P}_0 = \frac{1 - P_c}{1 - \tau P_c}} \quad (8)$$

Cette formule donne une bonne approximation par excès.

2° - Méthode plus poussée.

Il nous a paru difficile d'obtenir une expression analytique exacte de la capture globale due à la source  $S(r)$  qui puisse se prêter à un calcul numérique qui ne soit pas trop volumineux. Le mieux qu'il nous ait semblé possible de faire a été de calculer exactement la capture au premier choc, puis de remplacer la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au premier choc par sa valeur moyenne, et d'en déduire la capture globale aux chocs suivants en l'exprimant comme ci-dessus au moyen de  $1 - \mathcal{P}$ .

La capture au premier choc due à  $S(r)$  a pour expression :

$$\tau (1 - \tau) P_c (1 - P_c - L)$$

où L est une intégrale dépendant du seul paramètre  $a \sum_{ut}$ , dont la courbe en fonction de ce paramètre est donnée à la fin du présent rapport :

$$L = \frac{2 a^2 \sum_{ut}^2}{P_c} \int_0^1 \left[ \int_a^\infty \frac{dt}{\sum_{ut}} K_1(t) \left\{ I_0(tP) - \frac{2 I_1(t)}{t} \right\} \right]^2 P dP \quad (9)$$

La valeur moyenne de la source formée par les neutrons diffusés au premier choc se déduit immédiatement de la capture et vaut :

$$\frac{1}{\pi a^2} \tau^2 P_c (1 - P_c - L)$$

Cette source uniforme fournit une capture globale aux chocs suivants égale à :  $\tau^2 P_c (1 - P_c - L) (1 - \mathcal{P})$ , d'où la capture globale due à la source S (r) :

$$\tau(1 - \tau) P_c (1 - P_c - L) + \tau^2 P_c (1 - P_c - L) (1 - \mathcal{P}) = \tau P_c (1 - P_c - L) (1 - \tau \mathcal{P})$$

En portant ce résultat dans l'expression de  $\mathcal{P}$  écrite plus haut, on obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{(1 - \tau) (1 - P_c) + \tau P_c (1 - P_c - L)}{1 - \tau + \tau^2 P_c (1 - P_c - L)}$$

que l'on a intérêt à écrire sous la forme suivante, qui met en évidence la correction à apporter à la formule classique (5) :

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 (1 - \varepsilon)$ <p style="text-align: center;">avec :</p> $\varepsilon = \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c) [1 - \tau + \tau^2 P_c (1 - P_c - L)]} \approx \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c) (1 - \tau P_c [1 - \tau (1 - P_c)])}$	(10)
---	------

l'approximation étant justifiée car dans les cas usuels

$$\tau^2 P_c L \leq 1 - \tau + \tau^2 P_c (1 - P_c)$$

on a toujours

$$\varepsilon \gg 0.$$

Pour les calculs pratiques de f, au lieu d'utiliser directement cette formule, il est préférable de passer par l'intermédiaire des grandeurs A, a et  $\beta$  définies plus loin (voir paragraphe IV, pages 18 et 19).

(5) Voir l'annexe I. Une limite supérieure de l'erreur relative sur  $\mathcal{P}$  y est donnée.

Evaluation de  $\lambda$

Remarquons tout d'abord que  $\lambda$  peut se déterminer grossièrement à l'aide de la théorie élémentaire : il suffit d'écrire que le courant de neutrons venant du corps noir vers le modérateur, exprimé en théorie élémentaire, est nul ; on obtient le résultat classique suivant, valable quelle que soit la géométrie :

$$\lambda = \frac{2}{3}$$

Cette estimation grossière est insuffisante et il est préférable d'essayer de tirer parti des résultats de B. DAVISON et S. KUSHNERIUK <sup>(6)</sup> concernant la longueur d'extrapolation du corps noir cylindrique ; ces résultats ont été établis dans le cas simple d'un milieu modérateur non capturant, de rayon  $b$  infini, où les sources à distance finie sont nulles et où l'alimentation en neutrons se fait par un courant non nul à l'infini. Dans le rapport MT-214, ces auteurs fournissent la courbe de variation de la longueur d'extrapolation en fonction du paramètre  $c \sum_{mt}$ . Cette courbe est reproduite à la fin de la présente note.

La question qui se pose alors est la suivante : peut-on assimiler la longueur d'extrapolation qui nous intéresse à celle fournie dans le rapport MT-214. Le passage du problème traité par ces auteurs à celui intéressant le présent calcul peut se faire en trois étapes.

1. - On commence par introduire une section efficace de capture du modérateur très petite mais non nulle, ce qui modifie la longueur d'extrapolation de façon certainement négligeable pour les modérateurs auxquels nous nous intéressons.

2. - On remplace les sources nulles à distance finie avec courant non nul à l'infini, par des sources uniformes et isotropes non nulles avec courant nul à l'infini.

3. - On remplace le milieu modérateur infini par un milieu modérateur de rayon fini  $r = b$ , avec condition de réflexion en  $r = b$ .

En vue de déterminer dans quelle mesure il est légitime d'utiliser les résultats du rapport MT-214, c'est-à-dire de négliger les erreurs introduites par les étapes 2 et 3, nous avons fait des calculs à trois harmoniques avec des modérateurs peu capturants dans un certain nombre de cas particuliers.

Les résultats de ces calculs montrent que :

- l'étape 2 ne change pas la longueur d'extrapolation ;

- l'erreur due à l'étape 3 est faible tant que l'on a affaire à une cellule

---

(6) Voir le rapport MT-214 (National Research Council of Canada) : Linear Extrapolation Length for a black Sphere and a Black Cylinder.

dont l'épaisseur  $b - c$  du modérateur n'est pas inférieure à une distance de l'ordre du libre parcours, ce qui en pratique est toujours le cas. Le tableau ci-dessous montre les variations de  $\lambda$  fournies par des calculs à 3 harmoniques quand on fait varier le rayon  $b$  de la cellule, dans deux cas particuliers pour lesquels  $c$  est respectivement égal à 1,30 cm et 3,50 cm. La valeur de  $\sum_{mt}$  adoptée dans ces calculs est la même dans tous les cas et égale à  $0,3721 \text{ cm}^{-1}$ .

b en cm	7,93	11,28	$\infty$
c en cm			
1,30	0,912	0,906	0,901
3,50	0,897	0,867	0,842

L'erreur que l'on commet sur  $f$  lorsqu'on remplace la vraie valeur de  $\lambda$  par celle correspondant à une cellule infinie est donnée par :

$$\delta\left(\frac{1}{f} - 1\right) = -\frac{\delta f}{f^2} = \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \frac{3}{2} \delta\lambda \sum_{mt}$$

d'où :

$$\delta f = -f^2 \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \frac{3}{2} \delta\lambda \sum_{mt}$$

Pour  $c = 1,30 \text{ cm}$ ,  $b = 7,93 \text{ cm}$  on a  $\delta\lambda \sum_{mt} = -0,011$  d'où  $\delta f < 0,80 \sum_{mc}$

Pour  $c = 1,30 \text{ cm}$ ,  $b = 11,28 \text{ cm}$  on a  $\delta\lambda \sum_{mt} = -0,005$  d'où  $\delta f < 0,73 \sum_{mc}$

Pour  $c = 3,50 \text{ cm}$ ,  $b = 7,93 \text{ cm}$  on a  $\delta\lambda \sum_{mt} = -0,055$  d'où  $\delta f < 1,19 \sum_{mc}$

Pour  $c = 3,50 \text{ cm}$ ,  $b = 11,28 \text{ cm}$  on a  $\delta\lambda \sum_{mt} = -0,025$  d'où  $\delta f < 1,23 \sum_{mc}$

On voit donc que l'erreur commise sur  $f$  est de l'ordre de  $\sum_{mc}$  c'est-à-dire de  $8 \cdot 10^{-5}$  pour des cellules à eau lourde et  $30 \cdot 10^{-5}$  pour des cellules au graphite ce qui est pratiquement négligeable. Il est par conséquent tout à fait légitime d'utiliser pour valeur de  $\lambda$  celle fournie par la courbe tracée dans le rapport MT-214.

IV - INTERPRETATION DE LA FORMULE DE f

Il est usuel de décomposer  $\frac{1}{f} - 1$  de la manière suivante :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{V_m \sum_{mc}}{V_u \sum_{uc}} \left[ G + a \sum_{uc} N \right] + X_1$$

avec :

$$G = \frac{\Phi(a)}{\Phi_u} \quad N = \frac{\Phi(c) - \Phi(a)}{-2 J(a)} \quad X_1 = \frac{V_m \sum_{mc} \bar{\Phi}_m - \Phi(c)}{V_u \sum_{uc} \bar{\Phi}_u} \quad (11)$$

La théorie élémentaire fournit pour les quantités G et  $X_1$  les expressions :

$$G = \frac{K_u a I_0(K_u a)}{2 I_1(K_u a)} \quad X_1 = K_m^2 b^2 C$$

L'expression de N dépend de la façon dont on traite le passage des neutrons dans la cavité, l'une des formules usuelles étant :

$$N = 1 - \frac{2 \varphi_0}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin 2 \varphi_0 \quad \text{avec} \quad \varphi_0 = \text{Arc sin } \frac{a}{c} \quad (12)$$

Dans le présent exposé l'expression de  $\frac{1}{f} - 1$  a été obtenue directement par l'évaluation du rapport de la capture du modérateur à celle de l'uranium, sans chercher à passer par l'intermédiaire des quantités G, N et  $X_1$ . Le calcul rigoureux des quantités G, N et  $X_1$  à partir des hypothèses adoptées dans cette étude, nécessite l'évaluation des flux neutroniques en  $r = a$  et  $r = c$ . Cette évaluation requiert la détermination des densités en phase en  $r = a$  et  $r = c$ , ce qui demande la connaissance préalable de la distribution angulaire des neutrons sortant du modérateur et le calcul de la densité en phase sortant de l'uranium. Les hypothèses adoptées plus haut ont permis d'éviter de passer par ces intermédiaires pour le calcul des captures dans chaque milieu, c'est-à-dire du facteur d'utilisation thermique f. En effet les captures dans chaque milieu dépendent essentiellement du nombre de neutrons qui y pénètrent et assez peu de leurs distributions angulaires, tandis que les valeurs des flux aux interfaces, une fois connus les nombres de neutrons qui entrent et qui sortent de chaque milieu, sont encore très sensibles aux formes de leurs distributions angulaires. Le calcul des quantités G, N et  $X_1$  sera exposé dans une note ultérieure.

Toutefois on peut atteindre rapidement et avec une précision raisonnable les quantités G, N et  $X_1$  en utilisant pour le calcul des flux neutroniques en  $r = a$  et  $r = c$  la recette suivante.

On admet que les hypothèses adoptées pour le calcul de f concernant l'iso-

tropie des densités en phase des neutrons sortant du modérateur en  $r = c$ , entrant dans le modérateur en  $r = c$  et entrant dans l'uranium en  $r = a$ , sont encore justifiées pour le calcul des flux neutroniques en  $r = a$  et  $r = c$ . De plus on admet que la densité en phase sortante de l'uranium est isotrope <sup>(7)</sup>. Mais il convient encore une fois d'insister sur le fait que la manière dont on calcule les flux en  $r = a$  et  $r = c$ , c'est-à-dire les quantités  $G$ ,  $N$  et  $X_1$ , ne peut pas affecter les expressions des captures dans chaque milieu, donc celle du facteur d'utilisation thermique  $f$ .

Nous allons calculer les expressions de  $G$ ,  $N$  et  $X_1$  au moyen de la recette indiquée :

1° - Calcul de  $G$ .

Par définition :

$$G = \frac{\bar{\Phi}(a)}{\bar{\Phi}_u}$$

Les deux hypothèses sur l'isotropie des densités en phase en  $r = a$  pour les neutrons entrants et pour les neutrons sortants permettent de relier le flux  $\bar{\Phi}(a)$  aux courants  $J_+(a)$  et  $J_-(a)$  :

$$\bar{\Phi}(a) = 2 [J_+(a) + J_-(a)]$$

Par ailleurs, la relation de conservation des neutrons dans la barre d'uranium peut s'écrire :

$$\pi a^2 \sum_{uc} \bar{\Phi}_u = - 2 \pi a J(a) = - 2 \pi a [J_+(a) - J_-(a)]$$

d'où :

$$\bar{\Phi}_u = - \frac{2}{a \sum_{uc}} [J_+(a) - J_-(a)]$$

et :

$$G = - a \sum_{uc} \frac{J_+(a) + J_-(a)}{J_+(a) - J_-(a)}$$

(7) Ce truquage ne respecte pas complètement la propagation en ligne droite des neutrons dans la cavité. En effet, si les densités en phase sortantes, du modérateur et de l'uranium sont isotropes, la densité en phase entrante dans le modérateur ne peut pas être isotrope. Respecter la propagation en ligne droite dans la cavité, compte tenu de l'isotropie des densités en phase sortantes, des deux milieux, conduirait pour  $N$  et  $X_1$  à des formules légèrement différentes de celles que l'on va obtenir ici ; en particulier, on aurait :

$$N = 1 - \frac{2 \varphi_0}{\pi}$$

Le truquage adopté ici a pour seule justification une meilleure concordance avec les résultats numériques fournis par des méthodes plus poussées.

Pour relier  $J_+(a)$  à  $J_-(a)$ , on écrira à nouveau la relation de conservation dans la barre en utilisant la définition de  $\Gamma_u$  :

$$- 2 \pi a \left[ J_+(a) - J_-(a) \right] = 2 \pi a J_-(a) \Gamma_u = 2 \pi a \cdot 2 a \sum_{uc} \mathcal{P}_{J_-(a)}$$

d'où :

$$\frac{J_+(a)}{J_-(a)} = 1 - 2 a \sum_{uc} \mathcal{P}$$

et :

$$\boxed{G = \frac{1}{\mathcal{P}} - a \sum_{uc}} \quad (13)$$

La valeur ainsi obtenue est une valeur par défaut. Par exemple, dans le cas d'une barre d'uranium naturel de rayon  $a = 1,30$  cm, la théorie élémentaire fournit une valeur de  $G$  égale à 1,141, la formule (13) une valeur égale à 1,194, tandis que la valeur fournie par des méthodes plus poussées se situerait au voisinage de 1,23.

### 2° - Calcul de N.

Par définition :

$$N = \frac{\Phi(c) - \Phi(a)}{-2 J(a)}$$

Les hypothèses adoptées entraînent :

$$\Phi(c) = 2 \left[ J_+(c) + J_-(c) \right]$$

$$\Phi(a) = 2 \left[ J_+(a) + J_-(a) \right]$$

$$J_-(c) = J_-(a)$$

$$\frac{J_+(c)}{J_-(c)} = 1 - \Gamma'_u = 1 - 2 \frac{a^2}{c} \sum_{uc} \mathcal{P}$$

$$\frac{J_+(a)}{J_-(a)} = 1 - 2 a \sum_{uc} \mathcal{P}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{N = 1 - \frac{a}{c}} \quad (14)$$

### 3° - Calcul de $X_1$ .

On pourrait calculer la quantité  $X_1$  à partir de l'expression qui la définit,

c'est-à-dire :

$$X_1 = \frac{v_m \sum_{mc}}{v_u \sum_{uc}} \cdot \frac{\bar{\Phi}_m - \Phi(c)}{\bar{\Phi}_u}$$

Mais la quantité  $\frac{1}{f} - 1$  étant d'une part liée par définition aux quantités G, N et  $X_1$  par la relation :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \frac{\sum_{mc}}{\sum_{uc}} \left[ G + a \sum_{uc} N \right] + X_1$$

et d'autre part indépendante, dans la théorie exposée, des hypothèses faites pour le calcul des flux neutroniques en  $r = a$  et  $r = c$ , il est plus simple de déduire  $X_1$  de la relation précédente et des expressions de  $\frac{1}{f} - 1$ , G et N (formules (7) (13) et (14) ). On obtient ainsi :

$$X_1 = K_m^2 b^2 c + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left( \frac{3}{2} \lambda - 1 \right) \quad (15)$$

Dans la suite de cet exposé, les expressions (13), (14) et (15) des quantités G, N et  $X_1$ , calculées par la recette indiquée ci-dessus, seront appelées G', N' et  $X_1'$  pour les distinguer des expressions plus précises de ces mêmes quantités dont le calcul fera l'objet d'une note ultérieure.

On a intérêt à réécrire la formule (7) sous la forme suivante qui met en évidence les expressions de G', N' et  $X_1'$  :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \frac{\sum_{mc}}{\sum_{uc}} \left[ \frac{1}{\bar{\Phi}} - a \sum_{uc} + a \sum_{uc} \left( 1 - \frac{a}{c} \right) \right] + K_m^2 b^2 c + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left( \frac{3}{2} \lambda - 1 \right) \quad (7bis)$$

En pratique le terme  $G' = \frac{1}{\bar{\Phi}} - a \sum_{uc}$  sera calculé de la façon suivante :

$$G' = \frac{1}{\bar{\Phi}} - a \sum_{uc} = \frac{1}{\bar{\Phi}_0 (1 - \epsilon)} - a \sum_{uc} \approx \frac{1}{\bar{\Phi}_0} - a \sum_{uc} + \frac{\epsilon}{\bar{\Phi}_0}$$

D'où, en explicitant  $\bar{\Phi}_0$  (formule (8) ) et  $\epsilon$  (formule (10) ) :

$$G' \approx \frac{1 - \tau P_c}{1 - P_c} - a \sum_{uc} + \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c)^2 [1 - \tau(1 - P_c)]}$$

La quantité  $\tau(1 - P_c)$  étant assez petite devant l'unité, on peut, dans les calculs pratiques, remplacer dans le dernier terme  $\frac{1}{1 - \tau(1 - P_c)}$  par  $1 + \tau(1 - P_c)$ ,

ce qui n'introduit qu'une erreur du second ordre sur  $G'$  :

$$G' \approx \frac{1 - \tau P_c}{1 - P_c} - a \sum_{uc} + \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c)^2} + \frac{\tau^2(1 - \tau) P_c L}{1 - P_c}$$

formule que l'on utilisera sous la forme suivante :

$$G' \approx 1 + \frac{\sum_{uc}}{\sum_{ut}} A \left[ 1 + \alpha \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} + \beta \left( \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} \right)^2 \right] \quad (16)$$

On rappelle que  $\sum_{ut}$ ,  $\sum_{us}$  et  $\sum_{uc}$  désignent respectivement les sections efficaces macroscopiques totale, de diffusion et de capture de l'uranium. Les grandeurs  $A$ ,  $\alpha$ , et  $\beta$  ne dépendent alors que du paramètre  $a \sum_{ut}$  :

$$A = \frac{P_c}{1 - P_c} - a \sum_{ut}$$

$$\alpha = \frac{P_c}{(1 - P_c)^2} \frac{L}{A}$$

$$\beta = \frac{P_c}{1 - P_c} \frac{L}{A}$$

La grandeur  $A$  est tabulée à la fin du présent rapport ; pour les grandeurs  $\alpha$  et  $\beta$  qui n'interviennent que dans des termes correctifs et ne demandent pas à être connues avec la même précision, on s'est contenté de tracer les courbes représentatives qui sont jointes à la table de la fonction  $A$ .

Si l'on néglige les termes  $\alpha$  et  $\beta$  ce qui revient à remplacer  $\mathcal{P}$  par  $\mathcal{P}_0$  on obtient déjà une bonne approximation par défaut de la quantité  $G'$ .

On remarquera l'analogie de l'expression approximative de  $X_1$  et de celle fournie par la théorie élémentaire, qui ne diffèrent que par la présence dans la nouvelle formule, du terme correctif

$$\frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left( \frac{3}{2} \lambda - 1 \right)$$

On peut interpréter ce terme correctif comme traduisant un relèvement dans le modérateur du flux fourni par la théorie élémentaire. La nécessité de ce relèvement apparaît clairement quand on compare les courbes de flux fournies par la théorie élémentaire à celles obtenues par des méthodes plus poussées.

Ce relèvement peut d'ailleurs s'introduire directement dans le formalisme de la théorie élémentaire au moyen du truquage suivant.

La courbe élémentaire de flux dans le modérateur, une fois remplie la

condition  $\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=b} = 0$ , ne dépend plus que d'une condition à la limite  $r = c$ , qui peut s'exprimer par exemple par la connaissance du rapport

$$\frac{\sum_{mt} \Phi(c)}{\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=c}} = \Lambda_{\text{élém.}}$$

Cette quantité est déterminée habituellement par les relations de continuité du flux et du courant de part et d'autre de l'interface  $r = c$ . Pour obtenir le relèvement mentionné plus haut, on doit alors imposer au flux dans le modérateur une condition à la limite truquée qui consiste à adopter une nouvelle valeur de  $\Lambda$  définie par :

$$\Lambda = \Lambda_{\text{élém.}} + \lambda_{(\text{corps noir})} - \frac{2}{3}$$

$\lambda_{(\text{corps noir})}$  est la longueur d'extrapolation exacte pour une cellule à corps noir qui, comme on l'a montré, peut être prise égale à celle donnée par la courbe tracée dans le rapport MT-214 ;  $\frac{2}{3}$  est la même longueur d'extrapolation calculée à partir d'une théorie élémentaire (voir plus haut). Ce truquage revient donc à recaler la condition à la limite  $r = c$  sur le cas type où la capture de l'uranium tend vers l'infini.

#### V . RESULTATS NUMERIQUES

A titre de référence une première série de calculs <sup>(8)</sup> a été effectuée par la méthode  $S_n$  (approximation  $S_8$ ) dans quatre cas particuliers qui correspondent à des cellules à l'uranium naturel et au graphite avec cavité d'épaisseur variable ; dans tous les cas, le rayon de la barre est  $a = 1,30$  cm et le rayon extérieur de la cellule est  $b = 11,90$  cm. Les valeurs de  $1 - f$  obtenues (colonne 3) sont comparées dans le tableau ci-dessous à celles fournies par la méthode proposée (colonne 4) et par la théorie élémentaire (colonne 2), pour laquelle on a pris  $k_m^2 = 3 \sum_{mt} \sum_{uc}$  et :

$$N = 1 - \frac{2\varphi_0}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin 2\varphi_0 \quad (\text{voir formules (11) et (12)})$$

- TABLEAU I -

c	$1 - f(P_1)$	$1 - f(S_8)$	$1 - f$ (méthode proposée)
1,30	0,1151	0,1317	0,1313
1,60	0,1131	0,1280	0,1282
2,50	0,1099	0,1201	0,1206
3,50	0,1047	0,1123	0,1127

(8) Nous tenons à exprimer nos remerciements au Dr. B.G. CARLSON qui a eu l'obligeance d'effectuer ces calculs pour nous.

Les sections efficaces utilisées sont :

$$\begin{aligned}\sum_{uc} &= 0,3220 \text{ cm}^{-1} \\ \sum_{ut} &= 0,7221 \text{ cm}^{-1} \\ \sum_{mc} &= 3,118 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \\ \sum_{mt} &= 0,3721 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

Une deuxième série de calculs a été effectuée par la méthode des harmoniques sphériques, dans plusieurs cas particuliers qui correspondent également à des cellules à l'uranium naturel et au graphite avec ou sans cavité. Les valeurs de  $1 - f$  obtenues dans l'approximation <sup>(9)</sup>  $P_3$  sont comparées à celles fournies par la théorie élémentaire classique et par la méthode proposée pour laquelle on a adopté deux valeurs différentes de la quantité  $\lambda$  :

- dans un cas on a adopté la valeur de  $\lambda$  présumée exacte fournie par la courbe tracée dans le rapport MT-214 et qui est celle que l'on doit utiliser normalement ;

- dans l'autre cas on a adopté la valeur de  $\lambda$  résultant de l'approximation  $P_3$  et tracée elle aussi dans le rapport MT-214 <sup>(10)</sup>.

Il est en effet plus cohérent, si l'on veut tester la méthode proposée par comparaison avec l'approximation  $P_3$  d'utiliser la valeur de  $\lambda$  calculée avec la même approximation. On ne doit quand même pas s'attendre à obtenir des résultats identiques par suite de la façon différente dont on traite la cellule dans les deux cas.

Le tableau ci-dessous correspond à des cellules ne différant des précédentes que par le rayon  $b$  qui vaut 11,28 cm au lieu de 11,90 cm.

- TABLEAU II -

c	$1 - f(P_1)$	$1 - f(P_3)$	$1 - f$ ( $\lambda$ exact)	$1 - f$ ( $\lambda$ calculé par $P_3$ )
1,30	0,1022	0,1135	0,1187	0,1143
1,60	0,1006	0,1112	0,1158	0,1129
2,50	0,0978	0,1035	0,1085	0,1072
3,50	0,0929	0,0972	0,1007	0,1002

(9) La cavité a été traitée par la méthode proposée par TAIT dans le rapport P/443 publié à la conférence de Genève sous le titre : "Calculation of Thermal Utilization by the Method of Spherical Harmonics".

(10) Cette courbe est reproduite en pointillé à la fin de cette note, sur le même graphique que la courbe donnant les valeurs présumées exactes de  $\lambda$ .

Un calcul dans l'approximation  $P_5$  a été effectué dans le cas sans gaine d'air ( $c = 1,30$ ) et a donné  $1 - f = 0,1162$ , valeur à mi-chemin de celle fournie par l'approximation  $P_3$  (colonne 3) et par la méthode proposée (colonne 4). Il est vraisemblable, d'après les résultats du tableau I, que l'approximation  $S_8$  conduirait à un résultat légèrement supérieur à celui de la méthode proposée. L'examen du tableau ci-dessus montre que le fait d'utiliser la valeur de  $\lambda$  calculée avec l'approximation  $P_3$  au lieu de la valeur présumée exacte, rapproche bien les résultats (colonne 5), de ceux donnés par l'approximation  $P_3$  (colonne 3). Le désaccord qui subsiste est relativement peu important tant que la cavité est petite, ce qui tend à prouver que le désaccord pour les grandes valeurs de  $c - a$  est surtout dû à la façon différente dont les deux méthodes traitent la cavité. Ce point apparaîtra plus clairement dans un rapport ultérieur où les différents effets dans l'uranium, la cavité et le modérateur seront détaillés (calcul de  $G$ ,  $N$  et  $X_1$ ).

Le tableau III correspond à des cellules à l'uranium naturel et au graphite sans cavité avec des rayons de barre différents.

Les sections efficaces utilisées sont les mêmes que dans les calculs précédents sauf  $\sum_{mt}$  qui vaut ici  $0,3925 \text{ cm}^{-1}$ . Le rayon  $b$  de la cellule est pris égal à  $7,93 \text{ cm}$ . Les colonnes 2, 3 et 4 donnent les valeurs de  $1 - f$  fournies par les approximations  $P_1$ ,  $P_3$  et  $P_5$ . Les colonnes 5 et 6 donnent les valeurs de  $1 - f$  obtenues par la méthode proposée quand on utilise respectivement pour  $\lambda$  la valeur exacte et celle fournie par l'approximation  $P_3$ .

- TABLEAU III -

a = c en cm	1 - f ( $P_1$ )	1 - f ( $P_3$ )	1 - f ( $P_5$ )	1 - f ( $\lambda$ exact)	1 - f ( $\lambda$ calculé par $P_3$ )
1,30	0,0501	0,0563	0,0578	0,0589	0,0567
1,50	0,0398	0,0457	0,0469	0,0478	0,0460
1,70	0,0336	0,0384	0,0391	0,0398	0,0383

Nous croyons utile de compléter cet ensemble de valeurs numériques par celles correspondant à une cellule avec cavité et faible épaisseur de modérateur, pour laquelle les sections efficaces sont les mêmes que dans les cas du tableau III et dont les dimensions sont :

$$a = 1,30 \text{ cm} \quad c = 3,50 \text{ cm} \quad c = 7,93 \text{ cm}$$

Les valeurs obtenues pour  $1 - f$  sont :

- TABLEAU IV -

$1 - f$ ( $P_1$ )	$1 - f$ ( $P_3$ )	$1 - f$ ( $\lambda$ exact)	$1 - f$ ( $\lambda$ calculé par $P_3$ )
0,0414	0,0439	0,0451	0,0448

Nous tenons à remercier MM. J. HOROWITZ et J. BUSSAC, avec lesquels nous avons eu de nombreuses discussions. Nous exprimons également nos remerciements à Mme PILLARD pour le soin apporté à l'exécution des calculs numériques.



- ANNEXE I -

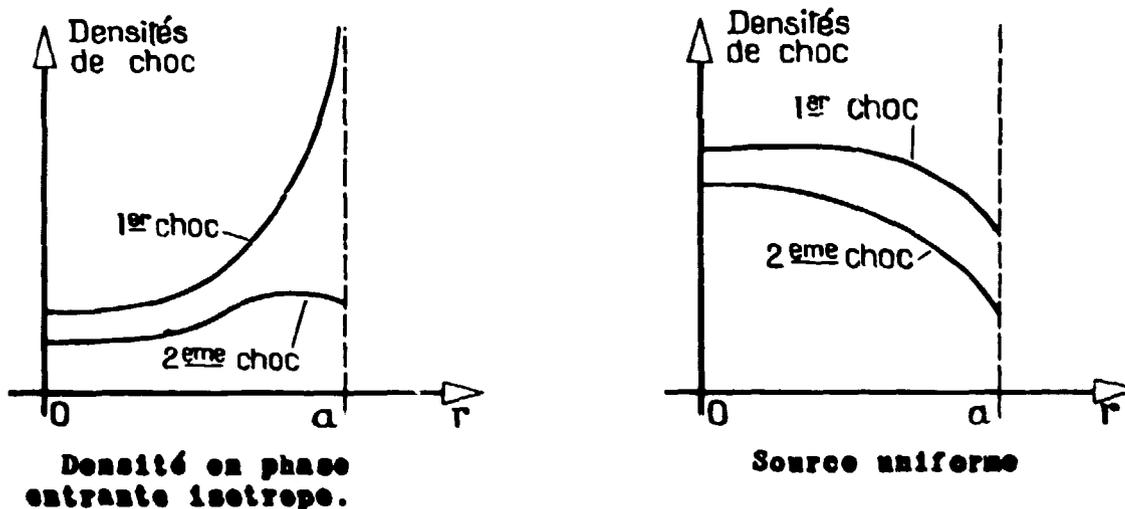
METHODES DE CALCUL DE  $\mathcal{P}$  - LIMITES D'ERREUR

La méthode de calcul de  $\mathcal{P}$  utilisée au paragraphe III peut être exposée d'une autre manière, qui lui est équivalente. D'après ce que l'on a vu dans le calcul de  $\Gamma_u$ ,  $\mathcal{P}$ , défini comme la probabilité de sortie pour un neutron naissant de manière uniforme, peut aussi être défini de la façon suivante :  $4 \pi a^2 \sum_{uc} \mathcal{P}$  représente la capture globale (c'est-à-dire après un nombre quelconque de chocs) dans l'uranium due à une densité en phase entrante isotrope égale à  $\frac{1}{\pi}$  en tout point de la surface de la barre. La méthode de détermination de  $\mathcal{P}$  exposée plus haut est alors rigoureusement équivalente à la suivante : on part de la densité en phase entrante isotrope égale à  $\frac{1}{\pi}$  ; la densité de collision de premier choc qui en résulte se trouve être égale à :

$$4 v \sum_{ut}^2 a \int_{\sum_{ut}}^{\infty} I_0(sr) K_1(sa) \frac{ds}{s} = \frac{4\pi a^2 v \sum_{ut}}{v} S(r)$$

comme d'ailleurs un raisonnement simple, analogue à celui utilisé pour la détermination de  $\Gamma_u$ , permet de le montrer ; la capture au premier choc s'en déduit immédiatement ; on calcule ensuite exactement la capture au second choc, puis on remplace la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au second choc par sa valeur moyenne (c'est-à-dire la densité de second choc par sa valeur moyenne), et on en déduit la capture globale aux chocs suivants en l'exprimant au moyen de  $1 - \mathcal{P}$ .

L'examen des courbes de densité de choc successives semble montrer que cette hypothèse doit conduire à des résultats assez proches des résultats exacts, mais il ne nous a pas été possible de mettre en évidence le signe de l'erreur commise sur  $\mathcal{P}$  de façon certaine, bien qu'il soit très probable que cette valeur de  $\mathcal{P}$  soit une valeur par excès.



On peut toutefois déterminer une limite supérieure de l'erreur commise ainsi sur  $\mathcal{P}$ , en utilisant des méthodes légèrement différentes.

Pour obtenir une valeur de  $\mathcal{P}$  par défaut, il suffit d'opérer comme on vient de le faire, et de remplacer la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au second choc par une source de même valeur moyenne mais proportionnelle à la densité de premier choc c'est-à-dire à  $S(r)$ . La formule que l'on obtient ainsi est :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 (1 - \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\tau P_c L}{(1 - P_c)(1 - \tau P_c)} \quad (18)$$

Si l'on désire une valeur de  $\mathcal{P}$  par excès, on peut opérer de la façon suivante.  $\mathcal{P}$  représente la probabilité de sortie pour un neutron naissant uniformément dans la barre.  $1 - \mathcal{P}$  représente donc la probabilité de capture. On calcule exactement la densité de premier choc  $N_1(r)$  due à une source uniforme dans la barre. On en déduit la capture au premier choc. On calcule exactement la capture au second choc. Pour le calcul de la capture aux chocs suivants, on remplace la source non uniforme formée par les neutrons diffusés au second choc par une source de même valeur moyenne mais proportionnelle à la densité de premier choc c'est-à-dire à  $N_1(r)$ . La formule que l'on obtient ainsi est :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 (1 - \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c)(1 - \tau P_c - \tau L)} \approx \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c)(1 - \tau P_c)} \quad (19)$$

La formule adoptée dans ce rapport :

$$\varepsilon = \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c)(1 - \tau P_c) [1 - \tau(1 - P_c)]} \quad (20)$$

donne un résultat compris entre ceux des deux formules précédentes, bien que très voisin de celui fourni par la formule (19).

#### Limite d'erreur.

L'erreur relative sur  $\mathcal{P}$  est donnée par :

$$\frac{\delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} \approx - \delta \varepsilon$$

une limite supérieure de  $|\delta \varepsilon|$  est obtenue en prenant la différence des expressions (18) et (20). On obtient :

$$|\delta \varepsilon| \leq \frac{\tau^2 P_c^2 L}{(1 - P_c)(1 - \tau P_c) [1 - \tau(1 - P_c)]}$$

L'erreur vraie est sans doute beaucoup plus faible.

Pour une barre d'uranium naturel de rayon 1,30 cm, l'erreur relative sur  $\mathcal{P}$  est certainement inférieure à 0,4 pour cent, estimation probablement très pessimiste.

Par ailleurs les résultats fournis pour  $\mathcal{P}$  par la formule élémentaire :

$$\mathcal{P} = \frac{1 - P_c}{1 - \tau P_c} \quad (21)$$

et par la formule (20) différent entre eux en valeur relative de

$$\xi = \frac{\tau(1 - \tau) P_c L}{(1 - P_c)(1 - \tau P_c) [1 - \tau(1 - P_c)]}$$

Pour une barre d'uranium naturel de rayon 1,30 cm la valeur de cette quantité  $\xi$  est  $0,5 \cdot 10^{-2}$ , ce qui pour une telle barre fait passer la quantité  $G'$  de la valeur 1,194 quand on utilise la formule (20) à 1,186 quand on utilise la formule (21).

A titre d'exemple, dans le cas de la cellule du tableau IV, on commet ainsi une erreur relative sur  $1 - f$  de l'ordre de 0,5 pour cent.



- ANNEXE II -

GENERALISATIONS - BARRE CREUSE

La méthode exposée peut se prêter à diverses généralisations.

Elle permet en particulier le traitement d'une cellule cylindrique infinie à barre d'uranium annulaire de rayon extérieur  $a$  et de rayon intérieur  $a'$ , dont la partie centrale est vide, ce qui est utile pour le calcul de certains réacteurs refroidis au gaz. L'expression que l'on obtient pour  $\frac{1}{k} - 1$  est la suivante :

$$\frac{1}{k} - 1 = \frac{\sum_{mc} V_m}{\sum_{uc} V_u} \left[ G' + \frac{2 V_u \sum_{uc}}{S(a)} N' \right] + X_1'$$

où

$$V_m = \pi(b^2 - c^2) \quad \text{représente le volume du modérateur}$$

$$V_u = \pi(a^2 - a'^2) \quad \text{représente le volume de l'uranium}$$

$$S(a) = 2\pi a \quad \text{représente la surface extérieure de la barre d'uranium.}$$

$$G' = \frac{1}{\mathcal{P}} - \frac{2 V_u}{S(a)} \sum_{uc}$$

$$N' = 1 - \frac{a}{c} = 1 - \frac{S(a)}{S(c)} \quad \text{avec} \quad S(c) = 2\pi c$$

$$X_1' = K_m^2 b^2 c + \frac{2 V_m}{S(c)} \sum_{mc} \left[ \left( \frac{3}{2} \lambda - 1 \right) \right]$$

Comme pour le cas de la barre pleine, les quantités  $G'$ ,  $N'$  et  $X_1'$  représentent approximativement les quantités classiques

$$G = \frac{\bar{\Phi}(a)}{\bar{\Phi}_u}, \quad N = \frac{\bar{\Phi}(c) - \bar{\Phi}(a)}{-2 J(a)} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{\sum_{mc} V_m}{\sum_{uc} V_u} \frac{\bar{\Phi}_m - \bar{\Phi}(c)}{\bar{\Phi}_u}$$

$\mathcal{P}$  représente la probabilité de sortie de la barre creuse pour un neutron naissant avec une probabilité uniforme et de façon isotrope dans l'uranium.

En première approximation on pourra prendre comme plus haut :

$$\mathcal{P} = \frac{1 - P_c}{1 - \tau P_c} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}}$$

$P_c$  étant la probabilité de collision de la barre creuse qui dépend cette fois des

deux paramètres <sup>(11)</sup>  $a \sum_{ut}$  et  $a' \sum_{ut}$ . J. BUSSAC a d'ailleurs constaté que ces valeurs étaient très voisines de celles obtenues pour une barre pleine homogène de même rayon extérieur  $a$  et contenant le même nombre de noyaux d'uranium. Le calcul de  $\frac{1}{f} - 1$  peut ainsi se ramener en première approximation au calcul de  $\frac{1}{f} - 1$  pour une barre pleine.

Le tableau suivant fournit les valeurs de  $1 - f$  obtenues pour une cellule à barre creuse et à uranium légèrement enrichi, pour laquelle on a :

$$\begin{aligned}
 a = c = 1,45 \text{ cm} & & a' = 1,10 \text{ cm}, & & b = 9,19 \text{ cm} \\
 \sum_{uc} = 0,5309 \text{ cm}^{-1} & & \sum_{mc} = 0,81 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \\
 \sum_{ut} = 0,9299 \text{ cm}^{-1} & & \sum_{mt} = 0,4082 \text{ cm}^{-1}
 \end{aligned}$$

$P_1$	$P_3$	Méthode proposée ( $P_c$ Nucleonics)	Méthode proposée ( $P_c$ calculé en diluant l'uranium)
0,0193	0,0214	0,0225	0,0225

Dans le cas de cellules à barre d'uranium creuse dont la partie centrale est remplie d'un milieu purement diffusant et sans sources, la formule précédente est encore applicable à condition de prendre pour  $P_c$  la probabilité de sortie correspondante dont des tables seront données dans un article de C. MERCIER à paraître.

La généralisation à la géométrie sphérique est évidente que la sphère d'uranium soit pleine ou creuse. La valeur de  $\lambda$  à utiliser dans ce cas est fournie dans le rapport MT-214 déjà cité et celle de  $P_c$  pour une sphère pleine dans l'ouvrage de K.M. CASE, F. DE HOFFMANN et G. PLACZEK déjà cité également.

---

(11) Voir Nucleonics Avril 1953 : "Fast Fission Factor for Hollow Natural Uranium Cylinders" par R.L. MURRAY et A.C. MENIUS Jr.

Des valeurs plus précises de  $P_c$  seront publiées dans un article de C. MERCIER à paraître.

- ANNEXE III -

FORMULAIRE PRATIQUE

Pour une cellule à barre d'uranium pleine, air et modérateur, la formule à utiliser est la suivante :

$$\frac{1}{k} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \cdot \frac{\sum_{uc}}{\sum_{uc}} \left[ 1 + \frac{\sum_{uc}}{\sum_{ut}} A \left\{ 1 + \alpha \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} + \beta \left( \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} \right)^2 \right\} + a \sum_{uc} \left( 1 - \frac{a}{c} \right) \right] + K_m^2 b^2 c + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left( \frac{3}{2} \lambda - 1 \right)$$

dans laquelle :

- a = rayon de la barre d'uranium = rayon intérieur de la gaine d'air,
- c = rayon extérieur de la gaine d'air = rayon intérieur du modérateur,
- b = rayon extérieur de la cellule,

$\sum_{uc}$  = section efficace de capture macroscopique de l'uranium

$\sum_{us}$  = " " de diffusion " "

$\sum_{ut}$  = " " totale " "

$\sum_{mc}$  = " " de capture " du modérateur

$\sum_{mt}$  = " " totale " "

$K_m = \sqrt{3 \sum_{mt} \sum_{mc}}$  = laplacien du modérateur

$$C = \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{b^2}{c^2}}{\left( \frac{b^2}{c^2} \right) - 1} \cdot \text{Log} \left( \frac{b}{c} \right) - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{b^2}{c^2} \right]$$

A est tabulé ci-après en fonction de  $a \sum_{ut}$

$\alpha$  et  $\beta$  sont représentés graphiquement ci-après en fonction de  $a \sum_{ut}$

$\lambda$  est aussi représenté graphiquement en fonction de  $c \sum_{mt}$  (utiliser la courbe en trait plein).

Remarques.

I. - La quantité  $G = \frac{\Phi(a)}{\Phi_n}$  est approximativement égale à

$$1 + \frac{\sum_{nc}}{\sum_{ut}} A \left\{ 1 + \alpha \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} + \beta \left( \frac{\sum_{us}}{\sum_{ut}} \right)^2 \right\} \quad (\text{valeur par défaut})$$

La quantité

$$N = \frac{\Phi(c) - \Phi(a)}{-2 J(a)}$$

est approximativement égale à  $1 - \frac{a}{c}$ .

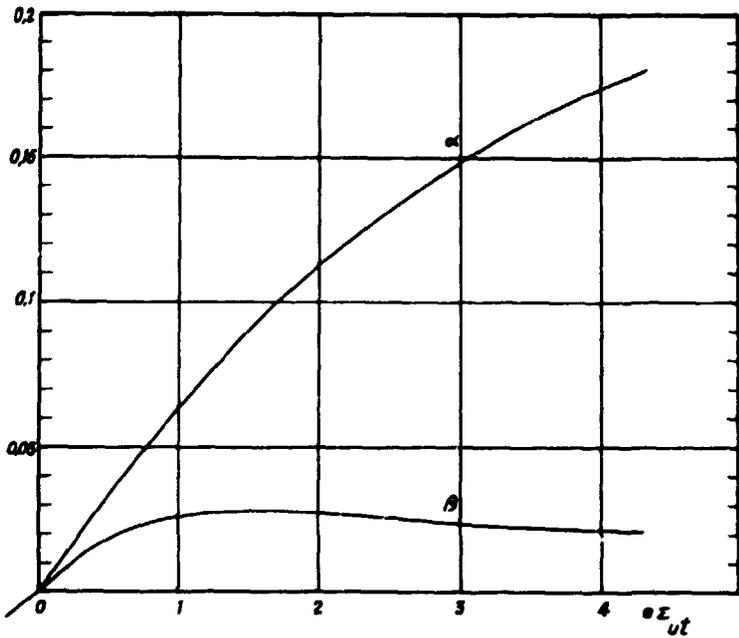
Ces deux dernières formules peuvent être utiles pour le traitement approximatif de cellules comportant des gaines minces d'aluminium ou de zirconium placées en  $r = a$  et en  $r = c$ .

II. - Si l'on néglige dans l'expression de  $\frac{1}{f} - 1$ , les termes où figurent  $\alpha$  et  $\beta$ , on commet une erreur relative sur  $\frac{1}{f} - 1$  de l'ordre de 0,5 pour cent pour une cellule à barre d'uranium naturel de rayon  $a = 1,30$  cm.

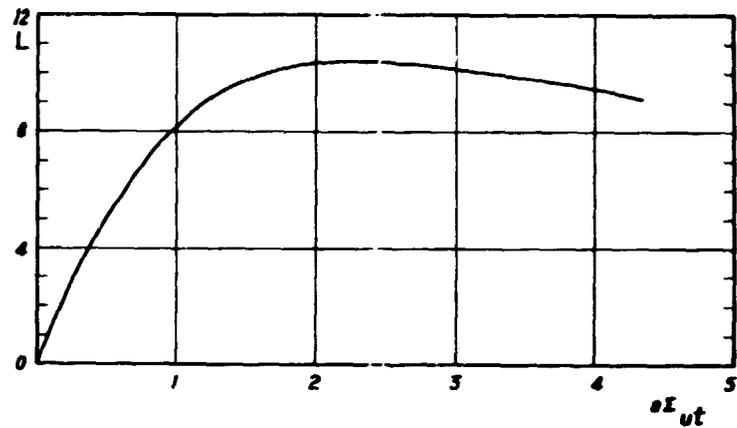
Manuscrit reçu le 16 avril 1956.

TABLE II A =  $\frac{P}{1-P} - a \sum_{ut}$

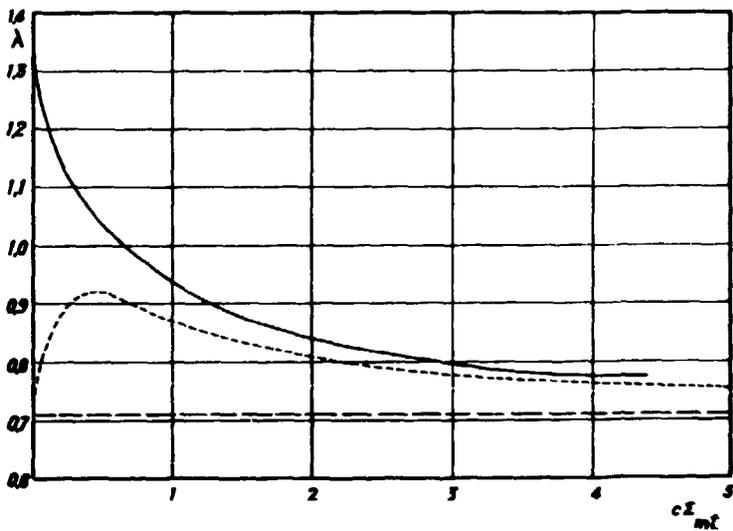
$a \sum_{ut}$	$\Delta$	$\delta$												
0	0.	628	1,18	0,5779	141	2,36	1,5477	181	3,54	2,6548	195	4,78	3,8615	202
0,02	0,00628	599	1,20	0,5920	141	38	1,5658	183	56	2,6743	190	4,80	3,8815	195
04	0,01227	587	22	0,6061	144	2,40	1,5841	180	58	2,6933	193	82	3,9010	199
06	0,01814	587	24	0,6205	144	42	1,6021	184	3,60	2,7126	193	84	3,9209	192
08	0,02401	591	26	0,6349	146	44	1,6205	182	62	2,7319	196	86	3,9401	195
0,10	0,02992	598	28	0,6495	146	46	1,6387	179	64	2,7515	190	88	3,9596	199
12	0,03590	608	1,30	0,6641	148	48	1,6566	186	66	2,7705	194	4,90	3,9795	202
14	0,04198	620	32	0,6789	149	2,50	1,6752	180	68	2,7899	193	92	3,9997	195
16	0,04818	633	34	0,6938	149	52	1,6932	183	3,70	2,8092	191	94	4,0192	198
18	0,05451	648	36	0,7087	151	54	1,7115	184	72	2,8283	195	96	4,0390	191
0,20	0,06099	661	38	0,7238	151	56	1,7299	186	74	2,8478	194	98	4,0581	20
22	0,06760	677	1,40	0,7389	152	58	1,7485	183	76	2,8672	192	5,00	4,078	19
24	0,07437	694	42	0,7541	153	2,60	1,7668	186	78	2,8864	195	2	4,097	20
26	0,08131	711	44	0,7694	155	62	1,7854	183	3,80	2,9059	194	4	4,117	20
28	0,08842	727	46	0,7849	155	64	1,8037	185	82	2,9253	192	6	4,137	20
0,30	0,09569	74	48	0,8004	156	66	1,8222	184	84	2,9445	196	8	4,157	18
32	0,1031	77	1,50	0,8160	156	68	1,8406	187	86	2,9641	194	5,10	4,175	21
34	0,1108	77	52	0,8316	158	2,70	1,8593	186	88	2,9835	191	12	4,196	19
36	0,1185	80	54	0,8474	158	72	1,8779	184	3,90	3,0026	196	14	4,215	21
38	0,1265	81	56	0,8632	159	74	1,8963	187	92	3,0222	193	16	4,236	19
0,40	0,1346	84	58	0,8791	161	76	1,9150	186	94	3,0415	197	18	4,255	20
42	0,1430	84	1,60	0,8952	160	78	1,9336	188	96	3,0612	194	5,20	4,275	19
44	0,1514	87	62	0,9112	161	2,80	1,9524	187	98	3,0806	192	22	4,294	20
46	0,1601	89	64	0,9273	163	82	1,9711	188	4,00	3,0998	195	24	4,314	19
48	0,1690	90	66	0,9436	162	84	1,9899	186	2	3,1193	193	26	4,333	20
0,50	0,1780	92	68	0,9598	164	86	2,0085	185	4	3,1386	197	28	4,353	21
52	0,1872	93	1,70	0,9762	164	88	2,0270	190	6	3,1583	193	5,30	4,374	18
54	0,1965	96	72	0,9926	165	2,90	2,0460	187	8	3,1776	191	32	4,392	21
56	0,2061	97	74	1,0091	166	92	2,0647	190	4,10	3,1967	194	34	4,413	19
58	0,2158	98	76	1,0257	166	94	2,0837	187	12	3,2161	198	36	4,432	20
0,60	0,2256	101	78	1,0423	168	96	2,1024	189	14	3,2359	195	38	4,452	20
62	0,2357	102	1,80	1,0591	166	98	2,1213	189	16	3,2554	198	5,40	4,472	19
64	0,2459	104	82	1,0757	170	3,00	2,1402	187	18	3,2752	195	42	4,491	20
66	0,2563	105	84	1,0927	168	2	2,1589	188	4,20	3,2947	192	44	4,511	20
68	0,2668	107	86	1,1095	169	4	2,1777	189	22	3,3139	195	46	4,531	19
0,70	0,2775	109	88	1,1264	171	6	2,1966	190	24	3,3334	191	48	4,550	20
72	0,2884	110	1,90	1,1435	170	8	2,2156	191	26	3,3525	203	5,50	4,570	20
74	0,2994	111	92	1,1605	171	3,10	2,2347	188	28	3,3728	191	52	4,590	20
76	0,3105	114	94	1,1776	171	12	2,2535	188	4,30	3,3919	194	54	4,610	20
78	0,3219	115	96	1,1947	173	14	2,2723	193	32	3,4113	191	56	4,630	20
0,80	0,3334	116	98	1,2120	172	16	2,2916	190	34	3,4304	202	58	4,650	19
82	0,3450	118	2,00	1,2292	174	18	2,3106	189	36	3,4506	197	5,60	4,669	19
84	0,3568	119	2	1,2466	172	3,20	2,3295	191	38	3,4703	194	62	4,688	20
86	0,3687	120	4	1,2638	176	22	2,3486	190	4,40	3,4897	197	64	4,708	20
88	0,3807	123	6	1,2814	175	24	2,3676	191	42	3,5094	192	66	4,728	21
0,90	0,3930	124	8	1,2989	175	26	2,3867	191	44	3,5286	196	68	4,749	19
92	0,4054	124	2,10	1,3164	175	28	2,4058	191	46	3,5482	199	5,70	4,768	19
94	0,4178	127	12	1,3339	177	3,30	2,4249	192	48	3,5681	195	72	4,787	20
96	0,4305	127	14	1,3516	176	32	2,4441	191	4,50	3,5876	198	74	4,807	19
98	0,4432	129	16	1,3692	178	34	2,4632	191	52	3,6074	193	76	4,826	19
1,00	0,4561	131	18	1,3868	177	36	2,4823	191	54	3,6267	197	78	4,847	21
02	0,4692	131	2,20	1,4045	178	38	2,5014	190	56	3,6464	192	5,80	4,867	18
04	0,4823	133	22	1,4223	178	3,40	2,5204	195	58	3,6656	195	82	4,885	22
06	0,4956	134	24	1,4401	180	42	2,5399	190	4,60	3,6851	198	84	4,907	19
08	0,5090	135	26	1,4581	179	44	2,5589	194	62	3,7049	193	86	4,926	20
1,10	0,5225	137	28	1,4760	178	46	2,5783	188	64	3,7242	196	88	4,946	19
12	0,5362	138	2,30	1,4938	181	48	2,5971	193	66	3,7438	200	5,90	4,965	20
14	0,5500	138	32	1,5119	178	3,50	2,6164	192	68	3,7638	194	92	4,985	20
16	0,5638	141	34	1,5297	180	52	2,6356	192	4,70	3,7832	197	94	5,005	20
									72	3,8029	192	96	5,025	20
									74	3,8221	194	98	5,045	20
									76	3,8415	198	6,00	5,064	19



Courbes de  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $a \sum_{ut}$



Courbe de  $L$ , en fonction de  $a \sum_{ut}$



Courbes de  $\lambda$  en fonction de  $c \sum_{mt}$   
 — valeur exacte  
 - - valeur asymptotique  
 - · - valeur calculée par  $P_3$

**- TABLE DES MATIERES -**

---

	<b>Pages</b>
<b>I - INTRODUCTION</b> .....	<b>1</b>
<b>II - PRINCIPE DE LA METHODE</b> .....	<b>2</b>
- Hypothèses .....	4
<b>III - CALCUL DE <math>\Gamma_u</math>, <math>\Gamma_m</math> et H</b> .....	<b>4</b>
- Calcul de $\Gamma_u$ .....	4
- Calcul de H et de $\Gamma_m$ .....	5
Relation entre $\Gamma_m$ et H .....	6
Calcul de H .....	7
- Expression de $\frac{1}{f} - i$ .....	9
- Evaluation de $\mathcal{P}$ .....	9
1° - Méthode classique .....	11
2° - Méthode plus poussée .....	11
- Evaluation de $\lambda$ .....	13
<b>IV - INTERPRETATION DE LA FORMULE DE f</b> .....	<b>15</b>
1° - Calcul de G .....	16
2° - Calcul de N .....	17
3° - Calcul de $X_1$ .....	17
<b>V - RESULTATS NUMERIQUES</b> .....	<b>20</b>
 <b>ANNEXE I - Méthodes de calcul de <math>\mathcal{P}</math> - Limites d'erreur</b> .....	 <b>25</b>
<b>ANNEXE II - Généralisations - Barre creuse</b> .....	<b>29</b>
<b>ANNEXE III - Formulaire pratique</b> .....	<b>31</b>

**FIN**