XXXI JUGOSLOVENSKA KONFERENCIJA ETAN-a BLED, 1—5 JUNA 1987

V.Stančić
Institut za nuklearne nauke
"Boris Kidrič" - Vinča
OOUR Institut za nuklearnu
energetiku i tehničku fiziku

# PRIMENA TROTTEROVE APROKSIMACIJE ZA REŠAVANJE VREMENSKI ZAVISNE TRANSPORTNE JEDNAČINE NEUTRONA

# APPLICATION OF TROTTER APROXIMATION FOR SOLVING TIME DEPENDENT NEUTRON TRANSPORT EQUATION

SADRŽAJ- Primenom Trotter-ove aproksimacije polugrupa predložen je metod rešavanja vremenski zavisne transportne jednačine neutrona sa proizvoljnim stepenom anizotropije rasejanja. Dobijena rekurentna relacija je jednostavna i numerički stabilna. Posebna prednost je tretiranje komplikovanih geometrija

ABSTRACT-A method is proposed to solve multigroup time dependent neutron transport equation with arbitrary scattering anisotropy. The recurence relation thus obtained is simple, numercally stable and especially suitable for treatment of complicated geometries

## 1 UVOD

Vremenski zavisna transportna jednačina bez zakasnelih neutrona je formalno Cauchy-ev problem

$$\dot{n} = -Hn + q \tag{1}$$

$$n(x,v,0) = f(x,v)$$

x i v su trodimenzionalni vektori $x=(x_1,x_2,x_3)$ - prostorna koordinata, $v=(v_1,v_2,v_3)$ - koordinata brzine. Osnovni dinamički objekat je pozitivna, integrabilna funkcija $n(x,v,t)$ koja predstavlja gustinu neutrona u tački $(x,v)\in R^6$ faznog prostora. Prirodno je usvojiti $n\in L^1_+(R^6)$ - pozitivni konus u $L^1(R^6)$, gde norma predstavlja ukupan broj neutrona. Hamiltonijan H je oblika

$$H = T + W, \qquad (2)$$

gde je $Tn = v\,\mathrm{grad}\,n$ - slobodni član koji opisuje difuziju, a $W$ interakcija neutrona sa nuklidima sredine:

$$Wn(x,v,t) = v\Sigma_t(x)n(x,v,t) - \int v'\Sigma(x,v',v)n(x,v',t)dv' \qquad (3)$$

Pokazano je |1| da su

$$U(t) = \exp(-tT) \qquad (4)$$

i

$$U_1(t) = \exp(-t(T+W)) \qquad (5)$$

generatori jedoparametarskih polugrupa, pri čemu je

$$U(t)n(x,v,t) = n(x-vt,v,t) \qquad (6)$$

U radovima [2,3,4] su prikazane neke varijante rešavanja jednačine (1) u jednogrupnoj aproksimaciji. U ovom radu je primenjena Trotter-ova formula [5] za aproksimaciju polugrupe $U_1(t)$ za slučaj energetski zavisne transportne jednačine sa proizvoljnim stepenom anizotropije rasejanja neutrona. Zakasneli neutroni nisu razmatrani samo iz razloga jednostavnosti. Njihovo uključenje u izraze koji će biti prikazani je prosto.

Nalaženje vremenski zavisne raspodele gustine neutrona se svodi na izračunavanje izvedene rekurentne relacije, pri čemu gustina neutrona poslednjeg vremenskog koraka predstavlja početni uslov jednačine (1) za naredni korak.

Posebna pogodnost korišćenja polugrupa je u tome što se omogućava korišćenje aproksimativnih metoda vrlo razvijenih u drugim oblastima fizike. Od izabrane procene i interpolacije raspodele gustine neutrona zavisi veličina vremenskog koraka i koraka po prostornoj koordinati. Međutim, i bez takvih aproksimacija, pokazuje se da izračunavanja nisu duža od uobičajene adijabatske kinetike u kombinaciji sa kvazistacionarnom aproksimacijom transportne jednačine neutrona. Pored toga, dobijeni izrazi su pogodni i za primenu u slučaju vrlo komplikovanih geometrija, gde se uglavnom koriste Monte Carlo metode.

U nastavku je prikazan algoritam proračuna na jednom primeru sferne geometrije.

2. REŠAVANJE TRANSPORTNE JEDNAČINE

Rešenje jednačine (1) se može formalno napisati u obliku

$$n(x,v,t) = e^{-tH} f(x,v) + \int_0^t dt' e^{-(t'-t)H} q(x,v,t') \qquad (7)$$

Na osnovu osobina operatora T i W [1] zadovoljeni su uslovi za primenu Trotter-ove formule [5] koja izgleda

$$e^{-tH} = \underset{k\to\infty}{s\text{-}\lim} (e^{-tW/k} e^{-tT/k})^{1/k} \qquad (8)$$

za sve elemente $L^1(R^6)$.

Smatraćemo da radimo sa takvim vremenskim korakom da je opravdano uzeti član k=1 u izrazu (8). Označimo $n_i(x,v) = n(x,v,i\Delta t)$. Primenjujući formulu (7) na dva sukcesivna trenutka, koristeći osobinu (6) i zamenjujući intergal u izrazu (7) srednjom vrednošću, dobijemo rekurentnu relaciju

$$u_{i+1}(x,v) = e^{-\Delta tW} u_i(x-v\Delta t, v) + \Delta t q_{i+1} \qquad (9)$$

gde je zbog simetrije izraza uvedeno

$$u_i = n_i + \Delta t q_i/2 \qquad (10)$$

Uobičajeno je u transportnoj teoriji neutrona da se koristi multigrupna aproksimacija. U tom slučaju interakcija neutrona sa nuklidima sredine je oblika

$$(Wn)(\Omega) = \sum_l (2l+1) W_l / 4\pi \int d\Omega' P_l(\Omega\cdot\Omega') n(\Omega'), \qquad (11)$$

gde je $\Omega$ jedinični vektor brzine, a $W_l$ su matrice. Korišćenjem Von Neumann-ove teoreme razlaganja i (11) može se pokazati

$$(e^{-\Delta tW} n)(\Omega) = \sum_l (2l+1) e^{-\Delta tW_l} \int d\Omega' P_l(\Omega\cdot\Omega') n(\Omega')/4\pi \qquad (12)$$

Izrazi (9-12) čine konačne rekurentne relacije za izračunavanje vremenski zavisne raspodele gustine neutrona. Primećujemo da u izrazu (9) nema znaka oduzimanja, što obezbeđuje numeričku stabilnost. Takođe je očigledno i fizičko tumačenje formule (9).

U narednoj tački dat je primer rešavanja relacije (9) za slučaj osvedočenog sfernog sistema.

## 3.PRIMER

U slučaju sferne simetrije raspodela gustine neutrona zavisi samo od radijusa $r=|x|$ i $\mu$ - kosinusa ugla vektora brzine u odnosu na r ( usvojeno je da se r poklapa sa z-osom). U multigrupnoj aproksimaciji n je matrica kolona,a v je dijagonalna matrica brzine

Na osnovu uslova simetrije možemo napisati

$$u_i( x-vt,\mu)= u_i(r_1, \mu') \tag{13}$$

$$r_1 = (r^2 + v^2t^2 - 2\mu rvt)^{1/2} \tag{14}$$

$$\mu'= (r\mu - vt)/r_1 \tag{15}$$

Neka je $(\mu_i)$ niz Gauss-ovih tačaka,a $(\omega_i)$ odgovarajući niz težina za numeričku integraciju. Uvedimo oznake

$$A^l_{jk} = (l+1/2)\omega_k P_l(Z_{jk}) \tag{16}$$

$$Z_{jk} = \mu_j \mu_k + [(1-\mu_j^2)(1- \mu_k^2)]^{1/2}$$

$A_{jk}$ je simetrično po indeksima j i k. Za svako j i k potrebno je odrediti $A^0_{jk}$ i $A^1_{jk}$ . Ostali elementi se dobijaju korišćenjem rekurentnih relacija Legendre-ovih polinoma.

Korišćenjem relacija (12-16) izraz (9) dobija definitivan oblik za slučaj sferne simetrije:

$$u_{i+1}(r,\mu_j) = \Delta t q_{i+1}(r,\mu_j) +$$

$$+\sum_{l,k} A^l_{jk} \exp(-v\Delta t B_l) u_i(r_1,\mu_k') \tag{17}$$

$$B_l = \Sigma_t - \Sigma_{sl} - \delta_{to} F_o$$

gde su

$\Sigma_t$ - dijagonalna matrica totalnog preseka,
$\Sigma_{sl}$ - matrica rasejanja za l-ti harmonik,
$F_0$ - fisioni član transportne jednačine.

Izračunavanje (17) da bi se dobila vremenska zavisnost raspodele gustine neutrona samo po sebi malo znači ako se nema mogućnost poređenja. To nije lako, jer su programi koji rešavaju vremenski zavisnu transportnu jednačinu neutrona vrlo retki i ne postoje test problemi. S druge strane, poređenje sa eksperimentima zahteva niz drugih, vrlo specifičnih izračunavanja, koja bi nas na kraju udaljila od cilja ilustracije metode.

Zbog toga je odlučeno da se izračunaju kinetički parametri jednog sfernog dvozonog brzog reaktora, naprimer POPSY [6], koji je ranije bio predmet primene [4]. Da bi se ovo postiglo jednačinu (17) je potrebno rešiti metodom iteracije izvora po vremenu [6]. Usvojićemo da nema spoljnog izvora, a da je zadana prostorno uniformna raspodela gustine neutrona. Prva generacija neutrona se dobija iz jednačine (17) tako što se izbaci izvorni član, a u eksponentu fisioni. Početni uslov je početna raspodela neutrona. Raspodele gustine neutrona ostalih generacija se dobijaju tako što se uzima početni uslov jednak nuli, izbaci fisioni član iz eksponenta izraza (17), a izvor neutrona zameni fisionim izvorom od neutrona prethodne generacije. Pokazuje se da vremenska zavisnost ukupnog broja neutrona k-te generacije ima oblik

$$n_k(t) \sim (t/l_k)^{k-1}\exp(-t/l_k) \tag{18}$$

Za veliko k veličina $l = l_{k+1} - l_k$ je konstantno i jednaka generacijskom vremenu. Faktor umnožavanja je jednak graničnoj vrednosti odnosa izvora neutrona dve uzastopne generacije. U proračunu su korišćeni 50-grupni $P_3$ nuklearni podaci [7], 150 prostornih intervala i 8 Gauss-ovih tačaka. Rezultati proračuna su:

| Generacija | k | l /ns/ |
|---|---|---|
| 1 | 1,05180 | 14,91 |
| 2 | 1,02145 | 14,53 |
| 3 | 1,01264 | 14,07 |
| 4 | 1,01022 | 13,96 |
| 7 | 1,00961 | 13,57 |

Pošto zakasneli neutroni nisu računati, greška u faktoru umnožavanja je $3\beta_{eff}$, a u 1 ($t_{ex}$=12,1) 12 %.

## 4. ZAKLJUČAK

Dobijene rekurentne relacije su veoma jednostavne za primenu čak i u vrlo komplikovanim geometrijama kao što su preseci tela ili sistem tela koja se nalaze na odredjenom rastojanju. Možda na prvi pogled izgleda komplikovano izračunavanje eksponencijalne funkcije matrice. Ipak, treba imati u vidu da za to postoje brojne razvijene numeričke, pa i analitičke metode. Proširenje vremenskog intervala u relaciji (9) je u direktnoj vezi sa korakom po prostornoj koordinati. Može se pokazati da su eksponencijalne probne finkcije vrlo efikasne za ovu namenu.

Inače, dobijene rekurentne relacije u sebi sadrže elemente metoda verovatnoće sudara i diskretnih ordinata, ali nije ni jedna od njih.

## 5. REFERENCE


1. J.Hejtmanek,"Scattering Theory of the Linear Boltzmannoperator", Comm.math.Phys., Vol.43,pp. 109-120,1975.
2. V.Stančić,"Perturbacioni metod rešavanja vremenski zavisne transportne jednačine neutrona",XXI Jug. konf. ETAN-a,Vol. IV, pp.43-48,1977.
3. V.Stančić,"Vremenski zavisna transportna jednačina:perturbacioni metod rešavanja i primena",XXIIJug. konf. ETAN-a,Vol. IV, pp. 155-160,1978.
4. V.Stančić,"Razmatranje prostorne kinetike brzih nuklearnih reaktora",XXIII Jug.konf. ETAN-a, Vol.IV,pp.109-116,1979.
5. O. Brattell,D.W. Robinson,"Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I",New York, Springer-verlag,1979.
6. H.Rief, H.Kschwendt, "Reactor Analysis by Monte Carlo",Nucl.Sc. Eng.,Vol. 30,pp.395-418,1967.
7. R.B. Kidman, R.E. Mac Farlane,"LIB-IV Library of Group Constants for Nuclear Reactor Calculations",LA-6260-MS,1982.