

PREMIER MINISTRE
COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

Validité de la représentation par modèle
électrique des effets de résonance
magnétique nucléaire

par

Georges BONNET

Rapport CEA n° **2025**

1961

CENTRE D'ÉTUDES
NUCLÉAIRES DE GRENOBLE

CEA 2025 - BONNET Georges.

Validité de la représentation par modèle électrique des effets de résonance magnétique nucléaire (1961).

Sommaire. — L'étude du comportement d'un transducteur à résonance magnétique formé de l'association d'un réseau électrique et d'un ensemble de noyaux dotés de spin, montre qu'il est possible d'en déduire une représentation analytiquement équivalente au moyen d'un modèle entièrement électrique utilisable pour un régime transitoire aussi bien que pour un régime permanent. Une étude détaillée des conditions de validité permet d'en justifier l'emploi dans la majorité des cas.

On propose enfin un critère de linéarité des équations de Bloch en régime transitoire, qui constitue un prolongement de la condition connue de non-saturation en régime stationnaire.

CEA 2025 - BONNET Georges.

Validity of the electrical model representation of the effects of nuclear magnetic resonance (1961).

Summary. — When studying the behaviour of a magnetic resonance transducer formed by the association of an electrical network and of a set of nuclear spins, it is possible to bring about a representation that is analytically equivalent by means of an entirely electrical model, available for transients as well as steady-state. A detailed study of the validity conditions justifies its use in most cases.

Also proposed is a linearity criterion of Bloch's equations in transient state that is simply the prolongation of the well-known condition of non-saturation in the steady-state.

VALIDITÉ DE LA REPRÉSENTATION PAR MODÈLE ÉLECTRIQUE DES EFFETS DE RÉSONANCE MAGNÉTIQUE NUCLÉAIRE

Par GEORGES BONNET,
Centre d'Études Nucléaires de Grenoble.

Résumé. — L'étude du comportement d'un transducteur à résonance magnétique formé de l'association d'un réseau électrique et d'un ensemble de noyaux dotés de spin, montre qu'il est possible d'en déduire une représentation analytiquement équivalente au moyen d'un modèle entièrement électrique utilisable pour un régime transitoire aussi bien que pour un régime permanent. Une étude détaillée des conditions de validité permet d'en justifier l'emploi dans la majorité des cas.

On propose enfin un critère de linéarité des équations de Bloch en régime transitoire, qui constitue un prolongement de la condition connue de non-saturation en régime stationnaire.

Abstract. — When studying the behaviour of a magnetic resonance transducer formed by the association of an electrical network and of a set of nuclear spins, it is possible to bring about a representation that is analytically equivalent by means of an entirely electrical model, available for transients as well as steady-state. A detailed study of the validity conditions justifies its use in most cases.

Also proposed is a linearity criterion of Bloch's equations in transient-state that is simply the prolongation of the well-known condition of non-saturation in the steady-state.

I. INTRODUCTION.

L'emploi d'un réseau électrique analytiquement équivalent à un système physique complexe a trouvé sa source dans le domaine de l'électromécanique et les travaux de P. Le Corbeiller, Y. Rocard, W. P. Mason — parmi tant d'autres — lui ont assuré un grand développement.

Il semble que l'intérêt principal de cette méthode réside dans l'unicité axiomatique qu'elle confère aux problèmes d'adaptation réciproque entre systèmes d'essence différente. En outre, la théorie des réseaux électriques a fait l'objet d'une somme de recherches considérable et l'application de ses résultats à d'autres domaines qui lui sont intégrés par cette voie est toujours bénéfique.

N. Bloembergen et R. V. Pound [1] avaient fait allusion à la similitude entre un montage à résonance gyromagnétique et un réseau électrique à double accord, et tout récemment P. D. Carter a proposé un schéma équivalent à un filtre à cristal de grenat [2], ces auteurs n'envisageant d'ailleurs que l'équivalence en régime stationnaire idéal. G. Brunner et A. Loesche [3] ont proposé un modèle qui rend compte du comportement d'un système de spins isolé et l'ont étendu du régime stationnaire à celui de « passage rapide ». Ils n'ont pas envisagé la recherche d'un modèle plus complet qui puisse traduire l'interaction entre spins et circuit électrique de mesure.

Nous nous proposons ici de rechercher le modèle électrique généralisé des transducteurs de champ magnétique qui utilisent la résonance nucléaire, en

mettant l'accent sur ses conditions de validité dans un régime quelconque.

L'observable utilisée dans de tels transducteurs est la fréquence des transitions entre sous-niveaux Zeeman d'un ensemble de moments nucléaires

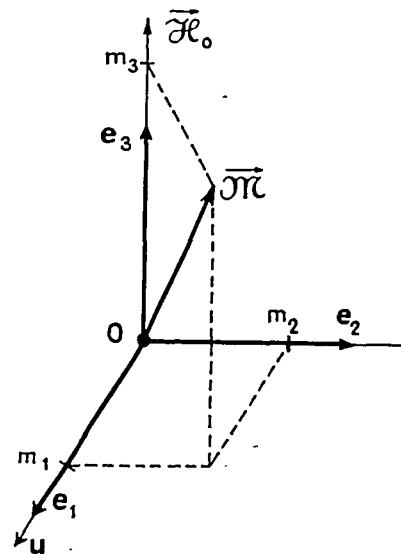


FIG. 1.

placés en présence du champ magnétique semi-permanent à étudier et soumis à un rayonnement transversal de radiofréquence, la relation champ/fréquence étant celle de Larmor. On peut schématiser le montage de base sous la forme d'un échantillon gyromagnétique contenu dans le volume intérieur d'un circuit électrique générateur du rayonnement transversal, lui-même fermé sur une certaine charge électrique. L'axe u du générateur du champ magné-

tique de radiofréquence — bobine ou cavité suivant le cas — et la direction du champ permanent $\vec{\mathcal{H}}_0$, supposés orthogonaux pour simplifier, définissent une base fixe ($\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$) que l'on norme, et l'on a, par exemple : $\mathbf{u} = |u| \mathbf{e}_1$, $\vec{\mathcal{H}}_0 = H_0 \mathbf{e}_3$ (fig. 1). L'ensemble des spins nucléaires d'une part, et le réseau électrique linéaire d'autre part, constituent un système couplé dont nous étudierons successivement l'évolution libre et forcée.

II. ÉVOLUTION LIBRE DU SYSTÈME COUPLÉ.

A. Ensemble gyromagnétique isolé. — Si l'on considère le système de spins isolé et soumis uniquement à l'influence du champ permanent, on sait que, sous certaines conditions, son évolution, envisagée sous l'aspect macroscopique, est régie avec une très bonne approximation par le schème de Bloch [4]. Dans la base définie précédemment, l'aimantation $\mathbf{M}(t)$ est reliée à l'aimantation à l'équilibre $m_0 \mathbf{e}_3$ par :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = (\gamma \mathbf{M} \wedge \mathbf{H}_0) - \frac{1}{T_2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{T_2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 - \frac{1}{T_1} [(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3) - m_0] \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

où γ est le rapport gyromagnétique, caractéristique des spins nucléaires utilisés, T_1 le temps de relaxation spin-milieu et T_2 le temps de relaxation spin-spin. Si l'on s'intéresse à la paire constituée par l'aimantation projetée sur l'axe de la bobine, $m_1 = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1)$, et l'aimantation projetée sur le champ permanent, $m_3 = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3)$, il est facile de tirer de (1) le groupe d'équations :

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d}{dt} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \right\} m_1 = 0 \quad (2a)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_1} \right\} m_3 = \frac{1}{T_1} m_0. \quad (2b)$$

Nous avons supposé implicitement que la condition $\left| \frac{1}{H_0} \frac{dH_0}{dt} \right| \ll \frac{1}{T_2}$ se trouve toujours largement remplie, comme on le verra plus loin. L'équation (2a) montre que le système est pendulaire et que la solution libre est une oscillation de fréquence cyclique $\omega_0 = \gamma H_0$, fréquence de Larmor, amortie suivant le décrement $\delta = 2\pi/\omega_0 T_2$. On peut parler d'une « surtension des spins » égale à

$$Q_s = \pi/\delta = (1/2) \omega_0 T_2$$

valeur qui, en pratique atteint et dépasse souvent 10^4 (*). La composante m_3 évolue aperiodiquement

(*) C'est en tenant compte de l'aspect pendulaire du système gyromagnétique isolé que Brunner et Loesche [loc. cit] ont utilisé expérimentalement un circuit résonant électrique qui leur a permis une très belle simulation des phénomènes de « wiggles » en passage rapide.

avec la constante de temps T_1 (m_2 suivrait une loi identique à celle de m_1). Il est remarquable que le système isolé soit un système linéaire comme le montre (2) et nous allons voir que c'est le couplage qui introduit une non-linéarité.

B. Réseau électrique linéaire. — Nous allons supposer d'abord que la charge de la bobine — dont L est l'auto-inductance et R la résistance de pertes — est passive et constituée par une simple capacité C . Ce réseau constitue un deuxième système pendulaire dont l'évolution libre est régie par une équation homogène du type :

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\omega_R}{Q} \frac{d}{dt} + \omega_R^2 \right\} = 0 \quad (3)$$

ω_R est la population propre : $\omega_R = (LC)^{-1/2}$.

Q est la surtension : $Q = L\omega_R/R$.

L'interaction avec le système de spins introduira un terme de couplage au second membre de (3). Si l'on tient compte de ce que la surtension du réseau, de l'ordre de la centaine ou même moins, est très faible devant la « surtension des spins » il est à prévoir que cette interaction imposera à (3) un régime forcé dont le spectre de fréquences sera centré au voisinage de la fréquence de Larmor, ce qui amène à accorder le réseau près de cette fréquence : $\omega_R \sim \omega_0$.

A cause de l'effet de filtrage, ce spectre est nécessairement étroit, sa largeur étant de l'ordre de la bande passante du réseau tout au plus. Il en résulte que le régime sous interaction peut se mettre sous la forme

$$A_1(t) \cos \omega t + A_2(t) \sin \omega t \quad \text{avec } \omega \sim \omega_0. \quad (4)$$

Les amplitudes $A_1(t)$ et $A_2(t)$ varient lentement dans le temps et, en particulier, leur variation pendant une période est très faible, d'où

$$\frac{d}{dt} A_i \ll \omega_0 A_i. \quad (5)$$

C. Système couplé. — L'interaction entre l'ensemble de spins et le réseau électrique se présente sous un double aspect : le courant circulant dans la bobine crée un champ qui s'ajoute vectoriellement au champ permanent et perturbe le régime libre, les variations de la projection de l'aimantation sur l'axe de la bobine se traduisent d'autre part par une variation de son flux d'induction et y induisent une force électromotrice.

1. RELATIONS COURANT-AIMANTATION. — Considérons d'abord la première composante du courant conforme à la forme (4) :

$$i(t) = I(t) \cos \omega t. \quad (6)$$

Sachant que le champ magnétique $\vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, t)$ qu'il produit lui est proportionnel en tout point \mathbf{r} de

l'espace, $\vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot i(t)$, nous pouvons suivant I. Solomon [5], [6], définir un champ magnétique moyen \mathbf{H} dans le volume τ de l'échantillon :

$$\mathbf{H} = \left[\frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\tau \right] \cdot i(t) \equiv \mathbf{K}i(t)$$

lequel, si l'on tient compte de la symétrie de la bobine, est dirigé suivant son axe :

$$\mathbf{H} = H\mathbf{e}_1 = KI(t) \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_1. \quad (7)$$

Il est bien connu que ce champ oscillant peut se décomposer en deux vibrations circulaires tournant dans deux sens opposés dans le plan [001] et que, selon F. Bloch et A. Siegert [7], l'une de ces composantes n'a d'autre effet que de déplacer la fréquence de résonance des spins de la quantité

$$(H/H_0)^2 (\omega_0/2\pi)$$

correction qui, dans les conditions expérimentales habituelles où $H/H_0 < 10^{-3}$, est entièrement négligeable. L'autre composante circulaire s'écrit dans la base fixe et si, par exemple, γ est positif :

$$\mathbf{H}^* = \frac{1}{2} KI(t) \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} KI(t) \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_2 \quad (8)$$

et nous savons, d'après (5), que son module ne variera pas de façon appréciable pendant quelques cycles de rotation. Le système d'équations de Bloch s'écrit alors

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_2} \right\} m_1 = \omega_0 m_2 + \frac{1}{2} \gamma KI(t) \sin \omega t \cdot m_3 \quad (9a)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_2} \right\} m_2 = -\omega_0 m_1 + \frac{1}{2} \gamma KI(t) \cos \omega t \cdot m_3 \quad (9b)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_1} \right\} m_3 = \frac{1}{T_1} m_0 - \frac{1}{2} \gamma KI(t) \sin \omega t \cdot m_1 - \frac{1}{2} \gamma KI(t) \cos \omega t \cdot m_2. \quad (9c)$$

Par comparaison avec les équations (2) de l'ensemble isolé, on voit que ce sont les termes de couplage qui détruisent la linéarité ; m_3 dépend de $I(t)$ par (9c) ce qui introduit des termes non-linéaires dans les seconds membres de (9a) et (9b). Cependant, si nous nous limitons à un champ H suffisamment faible pour que sa composante circulaire puisse être traitée comme une perturbation, il apparaît [8], qu'à une approximation du second ordre près en H^2 , m_3 suivra sa loi d'évolution libre définie par (2b). Les équations (9) se trouvent ainsi linéarisées et nous obtenons après élimination de m_2 :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d}{dt} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \right\} m_1 \\ &= \frac{1}{2} \gamma K \left(I(t) m_3 \left[(\omega + \omega_0) \cos \omega t + \frac{1}{T_2} \sin \omega t \right] \right. \\ & \left. + \sin \omega t \frac{d}{dt} [I(t) m_3] \right). \end{aligned}$$

Quelques remarques amèneront à simplifier le terme perturbateur du second membre :

a) nous avons vu que ω demeure voisin de ω_0 et nous pouvons remplacer $(\omega + \omega_0)$ par 2ω ;

b) ω_0 étant très grand devant $1/T_2$, on peut négliger le terme en $(1/T_2) \sin \omega t$;

c) d'après la loi d'évolution (2b) que nous admettons dans l'approximation linéaire, $\frac{d}{dt} m_3$ est de l'ordre de $(m_3 - m_0)/T_1$ et par suite :

$$\frac{d}{dt} m_3 \ll \omega_0 m_3.$$

L'évolution des moments nucléaires est alors régie par la loi :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d}{dt} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \right\} m_1 \\ &= \gamma K m_3 \left[\omega I(t) \cos \omega t + \frac{1}{2} \frac{dI}{dt} \sin \omega t \right] \quad (10a) \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_1} \right\} m_3 = \frac{1}{T_1} m_0. \quad (10b)$$

2. RELATIONS AIMANTATION-TENSION. — Les m_i représentent évidemment une valeur moyenne dans l'échantillon des composantes de l'aimantation. Suivant les équations de Bloch linéarisées, la valeur locale de la projection de l'aimantation sur le champ est proportionnelle en tous points à ce dernier. Si λ est ce facteur de proportionnalité à l'instant t , nous pouvons en tenant compte des propriétés géométriques de symétrie et de l'équation (7), mettre m_1 sous la forme

$$m_1 = \frac{1}{\tau} \lambda i(t) \int_{\tau} \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\tau = K \lambda i(t).$$

On en déduit la valeur de l'énergie emmagasinée par les spins

$$W = -\lambda i^2(t) \int_{\tau} k^2 d\tau = -(1/K) m_1 i(t) \int_{\tau} k^2 d\tau$$

et la force électromotrice induite dans la bobine

$$- \frac{1}{K} \int_{\tau} k^2 d\tau \cdot dm_1/dt.$$

On a coutume [6] d'utiliser le concept de « coefficient de remplissage » défini par

$$\eta = \int_{\tau} k^2 d\tau / \int_{\infty} k^2 d\tau. \quad (11)$$

Nous adopterons un système d'unités non rationalisées. L'intégrale située au dénominateur, étendue dans tout l'espace, est alors égale à $4\pi L/\mu_0$, L étant l'auto-inductance de la bobine et μ_0 la perméabilité du vide. Le coefficient de remplissage représente ainsi la fraction d'énergie magnétique que renferme le volume de l'échantillon en l'absence de matière aimantée. Finalement l'équa-

tion différentielle du réseau électrique prend la forme

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\omega_R}{Q} \frac{d}{dt} + \omega_k^2 \right\} i = - \frac{4\pi\eta}{\mu_0 K} \frac{d^2 m_1}{dt^2}. \quad (12)$$

D. Le modèle électrique. — Nous sommes maintenant en mesure de définir le modèle électrique dont le comportement puisse se représenter du point de vue formel par les relations (10) et (12). Il y a pour cela une condition nécessaire : Y. Rocard [9] a montré que, dans le cas de systèmes couplés dont les paramètres dérivent d'un potentiel, la conséquence de l'existence des énergies potentielle et cinétique est que les termes de couplage sont nécessairement symétriques. En l'espèce, les seconds membres de (10) et (12) ne peuvent être tels que sous la condition

$$\frac{d^2 i}{dt^2} \approx \rho \left[\omega I \cos \omega t + \frac{1}{2} \frac{dI}{dt} \sin \omega t \right]$$

ρ étant un scalaire indépendant du temps, et comme $i(t)$ a la forme (6), on en déduit que la représentation par un modèle électrique n'est possible que si $\rho = -\omega$, donc $\rho \neq -\omega_0$, et si

$$dI/dt \ll \omega_0 I.$$

C'est cette dernière loi de variation qui, dans le cas d'une charge capacitive, se trouve exprimée ipso-facto comme nous l'avons vu dans l'équation (5). En introduisant la susceptibilité paramagnétique statique $\chi_0 = m_0/\mu_0 H_0$ l'équation (10a) prend alors la forme (1) :

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d}{dt} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \right\} m_1 = - \frac{\gamma K m_3}{\omega_0} \frac{d^2 i}{dt^2} = - \mu_0 \chi_0 K \frac{m_3}{m_0} \frac{d^2 i}{dt^2}. \quad (13)$$

On obtiendrait un résultat identique avec la deuxième composante du courant, en $\sin \omega t$, que suggère la forme (4) et la linéarité des équations en conserve également la validité pour le courant total.

L'ensemble des relations (12) et (13) permet de bâtir entièrement le réseau équivalent. Il comprend deux mailles couplées par une mutuelle inductance (fig. 2), la première d'entre elles, parcourue par le courant $i_1 = i(t)$, étant formée évidemment par une inductance L_1 et une résistance R_1 identiques à celles, L et R , de la bobine, placées en série avec la capacité $C_1 = C = \omega_R^{-2} L^{-1}$. Il existe une certaine souplesse dans la représentation de la maille 2, puisque les seuls paramètres déterminants sont sa fréquence propre et sa surtension, et les valeurs des éléments résultent en

(1) On a choisi a dessein une grandeur sans dimensions,

$$\text{car} \quad 8\pi\chi_0 = \frac{m_0 H_0}{\mu_0 H_0^2 / 8\pi}.$$

fait de la convention de correspondance adoptée pour son courant i_2 . Nous en profitons pour poser arbitrairement $L_1 = L_2 = L$ et obtenons ainsi

$$\text{Inductance } L_2 = L \quad \text{Capacité } C_2^{-1} = L[\omega_0^2 + (1/T_2^2)]$$

$$\text{Résistance } R_2 = 2L/T_2$$

$$\text{Courant } i_2 = \frac{m_1}{K} \sqrt{4\pi\eta \cdot m_0 / \chi_0 m_3}$$

$$\text{Inductance mutuelle : } \mathcal{M} = L \sqrt{4\pi\eta \chi_0 m_3 / m_0}$$

ou coefficient de couplage :

$$z = \mathcal{M} / \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{4\pi\eta \chi_0 m_3 / m_0} \quad (15)$$

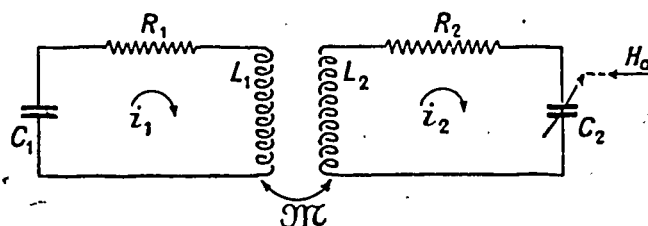


FIG. 2. — Modèle équivalent en évolution libre.

Dans la figure 2, la traduction champ/fréquence s'opère par les variations de la capacité C_2 avec la loi (2) :

$$1/C_2 = f(H_0) = L[(1/T_2^2) + \gamma^2 H_0^2]. \quad (16)$$

III. GÉNÉRALISATION. ÉVOLUTION FORCÉE DU SYSTÈME COUPLÉ.

A. Évolution forcée. — Nous avons utilisé jusqu'à présent une hypothèse assez contraignante, selon laquelle la charge de la bobine était constituée par un unique condensateur, et nous nous proposons d'étendre l'étude au cas le plus général d'une charge quelconque, représentée par un opérateur fonctionnel linéaire Z_{op} , qui peut inclure en outre une source de tension $e(t)$ (ou de courant) donnant lieu à un régime forcé. Le spectre de Fourier de la source peut comporter une ou plusieurs raies ainsi qu'une partie continue, et nous introduisons cette unique restriction que, pour que des transitions puissent être induites, ce spectre devra posséder une densité notable dans le voisinage de la fréquence de Larmor.

Dans le réseau ainsi défini, le courant qui traverse la bobine est soumis à la relation

$$\left\{ L \frac{d}{dt} + Z_{op} \right\} i_1 = e(t) - 4\pi\eta \frac{L}{\mu_0 K} \frac{dm_1}{dt} \quad (17)$$

(2) Bien que $1/T_2^2 \ll \gamma^2 H_0^2$ nous avons conservé la valeur exacte en vue d'éventuels calculs de précision.

et si sa densité spectrale est définie par

$$I(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} i_1(t) e^{-i\omega t} dt \quad (18)$$

le champ moyen qu'il crée dans le volume de l'échantillon prend la forme

$$\mathbf{H} = K \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) e^{i\omega t} d\omega \cdot \mathbf{e}_1. \quad (19)$$

Dans la bande de fréquences cycliques infiniment étroite centrée sur ω et de largeur $d\omega$, il correspond à la composante élémentaire $d\mathbf{H}(\omega)$ de ce champ rectiligne une vibration circulaire plane de sens convenable dont il est facile de trouver l'expression, soit pour γ positif (voir Appendice) :

$$d\mathbf{H}^*(\omega) = \frac{1}{2} KI(\omega) e^{i\omega t} \left[\mathbf{e}_1 + i \frac{\omega}{|\omega|} \mathbf{e}_2 \right] d\omega, \text{ avec } i^2 = -1 \quad (20)$$

et, si nous supposons remplies les conditions de linéarité des équations de Bloch, nous sommes conduits, en vertu de la règle de superposition, à écrire ces équations sous la forme

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_2} \right\} m_1 = \omega_0 m_2 - \frac{1}{2} \gamma K m_3 \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{\omega}{|\omega|} I(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (21a)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_2} \right\} m_2 = -\omega_0 m_1 + \frac{1}{2} \gamma K m_3 \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (21b)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_1} \right\} m_3 \neq \frac{m_0}{T_1}. \quad (21c)$$

On en tire par élimination de m_2

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d}{dt} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \right\} m_1 = \frac{1}{2} \gamma K \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) e^{i\omega t} \left[m_3 (|\omega| + \omega_0) + i \frac{\omega}{|\omega|} \left(m_3 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) - \frac{m_0}{T_1} \right) \right] d\omega. \quad (22)$$

Remarquons tout d'abord que le terme imaginaire situé entre les crochets du second membre est de l'ordre de m_3/T_2 , donc très inférieur à $\omega_0 m_3$, ce qui permet de le négliger (*). Si, en première approximation, on négligeait la lente variation temporelle de m_3 et en tenant compte de ce que $1/T_2^2 \ll \omega_0^2$, on pourrait exprimer la solution de (22) sous la forme du terme spectral de m_1 :

$$M_1(\omega) \neq \frac{1}{2} \gamma K m_3 \frac{I(\omega) [|\omega| + \omega_0]}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2\omega/T_2} \quad (23)$$

et la forme du dénominateur nous montre que ce terme n'est vraiment important que dans une

(*) Cette hypothèse serait fautive dans le cas où $m_3 < m_0/\omega_0 T_2$, (mis à part le cas de saturation totale qui ne présente aucun intérêt) ce qui correspondrait à un désalignement du moment par rapport à sa position d'équilibre égal à 90° à quelques minutes d'arc. Ce dernier état est peu probable et en tous cas de très faible durée de vie.

bande très étroite comprise entre $\omega_0 - (1/T_2)$ et $\omega_0 + (1/T_2)$. Dans ces conditions, cet effet de filtrage des spins nous autorise à remplacer dans (22) $[\omega_0 + |\omega|]$ par $2\omega^2/\omega_0$ ce qui n'affectera aucunement l'argument de $M_1(\omega)$ et introduira une erreur infime sur son module. Comme d'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 I(\omega) e^{i\omega t} d\omega \equiv -\frac{d^2}{dt^2} i(t)$$

l'équation (22) se transforme finalement en une équation identique à (13). Les résultats acquis dans le cadre de l'évolution libre s'appliquent donc à l'évolution forcée, et, tenant compte de (17) et (21c) nous adoptons comme schéma équivalent au système formé par une bobine et un échantillon gyro-

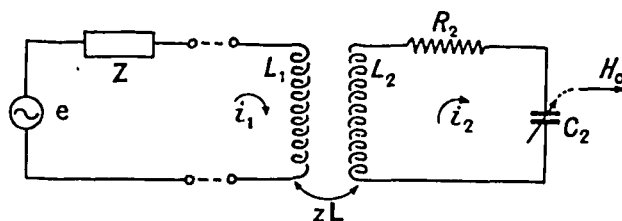


FIG. 3. — Modèle équivalent dans le cas général.

magnétique celui de la figure 3, dont les éléments sont déjà définis par (14) et (15).

Ce modèle est valable aussi bien en régime permanent que transitoire. Il offre ceci de particulier que le coefficient de couplage (15) est une variable susceptible de dépendre du temps par l'intermédiaire du rapport $[m_3/m_0]^{1/2}$.

1. RÉGIME PERMANENT. — Le coefficient de couplage est constant d'après (21c) et lorsque le facteur de saturation est faible, $m_3/m_0 \neq 1$. Si l'on veut améliorer l'approximation, il est facile d'adopter la solution exacte des équations de Bloch (cf. M. Soufif [13]) soit pour $i(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi)$:

$$\frac{m_3}{m_0} = \frac{1 + T_2^2(\omega - \omega_0)^2}{1 + T_2^2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 K^2 I_1^2 T_1 T_2}$$

Seuls sont touchés par cette correction le coefficient de couplage et le coefficient de proportionnalité entre courant et composante axiale de l'aimantation.

2. RÉGIME TRANSITOIRE. — Dans certains cas seulement, si la valeur initiale m_3^0 de m_3 au temps 0 diffère par trop de sa valeur d'équilibre m_0 , le coefficient de couplage varie avec le temps.

La loi suivant laquelle m_3 tend vers m_0 est

$$m_3/m_0 = 1 + [(m_3^0/m_0) - 1] \exp \frac{-t}{T_1}$$

et comme $T_1 \gg \omega_0^{-1}$, le couplage demeurera pratiquement constant pendant un grand nombre de périodes, ce qui permet de traiter de façon simple

le régime transitoire du réseau à paramètres variables.

B. Cas d'une polarisation négative. — Plusieurs procédés ont été proposés qui fournissent un renversement π des populations de spins nucléaires, soit par prépolarisation (H. Benoît et J. Hennequin [10]), soit par polarisation dynamique (A. Abragam et all. [11]) (*). Comme ces procédés s'accompagnent d'une très forte augmentation de l'amplitude de la polarisation, ils s'avèrent d'un grand intérêt dans la réalisation de transducteurs de type « MASER » en champs faibles.

L'aimantation à l'équilibre dans un champ permanent y prend une direction opposée à celle du champ, $-m_0 e_3$, et comme l'évolution macroscopique en présence d'une polarisation quasi-stationnaire est toujours régie par le schéma de Bloch, la seule modification à introduire dans les calculs précédents est d'y considérer la susceptibilité paramagnétique statique χ_0 comme une valeur négative. Dans le schéma de la figure 3, le coefficient de couplage devient alors une grandeur imaginaire, ceci d'après (15) :

$$z' = \mathcal{K} \sqrt{L_1 L_2} = i \sqrt{4 \pi \eta |\chi_0| m_3 / m_0}. \quad (15 \text{ bis})$$

Les éléments du circuit demeurent réels, mais la relation de correspondance courant/aimantation, d'ailleurs conventionnelle, est imaginaire.

Ces résultats paraissent logiques, si l'on considère la nécessité de rendre compte de la fourniture d'énergie qu'opère dans ce cas le système de spins.

C. Possibilités d'extension. — Il est relativement aisé d'étendre le schéma équivalent d'un réseau électrique en interaction avec un système de spins à des montages plus complexes mettant en œuvre plusieurs bobinages, dans le cas où leurs axes demeurent parallèles.

Il n'en est pas de même dans le cas contraire, et en particulier, celui du montage de Bloch à bobines croisées. L'étude du groupe d'équations différentielles, auxquelles conduit un calcul analogue au précédent, montre alors l'existence de termes de couplages de signes opposés, du type de ceux que Y. Rocard nomme « termes gyroscopiques » [9]. On sait qu'il est alors impossible de rendre compte du comportement de l'ensemble, dans les conditions les plus générales, par un modèle purement électrique. Si l'on se limite aux seuls régimes stationnaires, on peut par contre bâtir un tel modèle en y introduisant un simple élément déphaseur, dont la présence correspond au décalage temporel des composantes, suivant chaque bobine, de l'aimantation macroscopique lors de son mouvement de précession.

(*) On trouvera une excellente étude d'ensemble de ces procédés dans un récent article de P. Grivet [12].

IV. CONDITIONS DE VALIDITÉ.

A. Les conditions de validité sont tout d'abord celles même que Bloch a introduites pour poser ses équations [*loc. cit.*], à savoir :

— On supposera que l'équilibre thermique entre spins et milieu est établi dans le champ permanent H_0 au moment où l'on applique le champ transversal. Cette condition n'implique pratiquement qu'une restriction très limitée dans l'emploi du modèle électrique appliqué à un transducteur.

— Homogénéité du champ permanent : implicitement, la valeur adoptée pour T_2 peut tenir compte de l'inhomogénéité, à condition qu'elle soit faible et contribue à un élargissement modéré de la raie naturelle. Autrement dit, dans le cas des liquides, le champ moléculaire devra constituer le processus de relaxation dominant, de façon à ce que la décroissance des composantes transversales de l'aimantation conserve un caractère exponentiel, celui qu'implique le réseau électrique dissipatif employé dans la représentation. Sinon le modèle ne pourra convenir à tous les cas d'expérience et il serait nécessaire de le compléter en introduisant une répartition de fréquences propres sur un ensemble de mailles de spin, de préférence continu, ce qui ne présente plus aucun intérêt pratique.

B. Nous avons rencontré également au cours de ce calcul d'autres restrictions qu'il reste à étudier. Tout d'abord nous avons posé, à propos de l'équation (2), que la stabilité à court terme du champ « permanent » devait être telle que

$$\left| \frac{1}{H_0} \frac{dH_0}{dt} \right| \ll \frac{1}{T_2}.$$

Nous pouvons considérer que ce champ comporte une partie fixe $\langle H_0 \rangle$ à laquelle se superpose une partie fluctuante, de nature plus ou moins aléatoire $\varepsilon(t)$ beaucoup plus petite que la première. On voit alors que la condition précédente, qui équivaut à $\left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \right| \ll \frac{1}{T_2} \frac{\langle H_0 \rangle}{\varepsilon}$ sera toujours très largement remplie, et d'ailleurs la mesure de H_0 perdrait autrement toute signification.

C. En outre, nous avons admis la possibilité de remplacer, dans l'équation (22) la quantité

$$\frac{|\omega| + \omega_0}{\omega_0} \text{ par } 2\omega^2 / \omega_0^2.$$

Cette approximation implique une erreur de représentation si ω s'écarte trop de la fréquence de Larmor ω_0 . Deux cas sont à étudier, suivant que le spectre du courant est discret ou continu :

1. RÉGIME STATIONNAIRE. — Supposons que le spectre soit constitué par une raie unique centrée sur $\pm \omega_1$, avec $\omega_1 \sim \omega_0$.

On sait [13] que dans le cas d'une perturbation périodique, la solution exacte des équations de Bloch conduit à décrire la variation d'impédance de la bobine entourant l'échantillon par la relation :

$$\Delta Z_{11} = 2\pi\eta\chi_0 \omega_0 T_2 \frac{m_3}{m_0} \cdot L\omega_1 \frac{1}{1 - iT_2(\omega_0 - \omega_1)}.$$

En utilisant le circuit équivalent de la figure 3, cette variation d'impédance apparaît comme due à l'impédance couplée $(zL\omega_1)^2/Z_{22}$ qui s'écrit, suivant les équations (14) et (15) :

$$\Delta Z_{11} = 2\pi\eta\chi_0 \omega_0 T_2 \frac{m_3}{m_0} \cdot L\omega_1 \frac{\omega_1/\omega_0}{1 - i\frac{T_2}{2\omega_1} \left[\omega_0^2 - \omega_1^2 + \frac{1}{T_2^2} \right]}.$$

On voit, par comparaison, que l'approximation conduit à trois sortes d'erreurs :

a) Une erreur sur le centrage de la résonance, $\delta\omega_0/\omega_0 \approx (1/2)(\omega_0 T_2)^{-2}$. Elle sera le plus souvent très inférieure à 10^{-8} , donc entièrement négligeable.

b) Une erreur sur la forme de la raie d'absorption, qui n'est plus exactement lorentzienne. Sa valeur relative, de l'ordre de $[\omega_1 - \omega_0]^2/8\omega_0^2$, est inappréciable pour des désaccords atteignant déjà plusieurs dizaines de largeurs de raie. Elle n'est sensible que sur la « queue » de la raie, mais il faut remarquer que c'est également dans ce domaine qu'est discutable la forme même de Lorentz à laquelle conduisent les équations de Bloch. On sait (cf. Y. Ayant [14], [15]) que, même dans le cas de liquides à faible viscosité, l'influence du temps de corrélation de Debye est susceptible de se manifester pour les grandes valeurs de $|\omega_1 - \omega_0|$, et il est plus vraisemblable que la raie d'absorption ait une forme générale de Lorentz avec des queues gaussiennes.

Le modèle électrique peut donc être considéré comme satisfaisant à cet égard pour l'étude du fonctionnement en transducteur, la nécessité dans ce cas d'une énergie d'interaction appréciable entre le champ électromagnétique et le système de spins impliquant en effet une fréquence de travail telle que $T_2|\omega_0 - \omega_1|$ soit de l'ordre de l'unité.

c) Une erreur sur l'amplitude, due au facteur ω_1/ω_0 que nous négligerons pour les mêmes raisons.

2. RÉGIME TRANSITOIRE. — Nous pouvons décomposer le spectre de fréquences du courant i_1 en trois parties principales :

a) $0 < |\omega| < 1/T_1$. L'évolution très lente qui correspond à cette bande conserve l'équilibre thermique entre spins et milieu et se traduit par un vecteur d'aimantation macroscopique parallèle et proportionnel au champ magnétique résultant. Il y a donc rotation et variation de norme de cette aimantation. L'effet en est négligeable si le champ

transversal est faible, sinon le modèle électrique, qui ne peut en rendre compte, devra faire place au calcul direct.

b) $1/T_1 < |\omega| < \omega_0$. La perturbation introduite par cette partie du spectre répond au critère de validité du théorème adiabatique. La répartition des populations entre sous-niveaux Zeeman est donc sensiblement la même qu'en l'absence de perturbation, mais l'axe de quantification évolue parallèlement au champ résultant, ce qui traduit par une rotation du vecteur aimantation macroscopique sans variation de sa norme. Si la densité spectrale est du même ordre dans cette bande qu'autour de ω_0 , il correspond à $H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ une variation

$$dm_1 \approx \mu_0 \chi_0 H(\omega) \cdot d\omega$$

entièrement négligeable par rapport à ce que fournit le voisinage de ω_0 correspondant

$$dm_1 \approx \frac{1}{2} \mu_0 \chi_0 \omega_0 T_2 H(\omega) \cdot d\omega.$$

Mais si la majeure partie de l'énergie est répartie dans la bande adiabatique, le résultat ci-dessus cesse d'être valable et le phénomène de rotation dominera celui de résonance. D'ailleurs, à moins de conditions expérimentales défavorables, cette partie du spectre proviendra d'événements séparés dans le temps de ceux susceptibles d'induire des transitions. On pourra alors traiter les rotations adiabatiques par le calcul direct et le modèle électrique sera utilisé à l'étude des variations non-adiabatiques, en prenant pour conditions initiales celles fournies par ce calcul.

c) $|\omega| \sim \omega_0$ et $|\omega| > \omega_0$. Cette troisième bande entre dans le cadre des « modifications soudaines » de l'état dynamique du système de spins. C'est la seule qui intervienne dans l'interaction avec le champ électromagnétique dont tient compte le schéma électrique étudié. On a vu par l'équation (23) l'extrême étroitesse de la bande de fréquences qui intéresse les transitions entre niveaux énergétiques. De ce fait, et plus encore que dans le cas stationnaire, le remplacement de $\frac{|\omega| + \omega_0}{\omega_0}$ par $2\omega^2/\omega_0^2$ ne peut avoir qu'un effet inappréciable et se justifie pleinement.

D. Linéarité. — L'emploi d'un réseau électrique de caractère linéaire pour représenter des phénomènes de nature physique différente ne peut se justifier que si ces phénomènes eux-mêmes sont régis par des lois linéaires, du moins avec une bonne approximation.

Or, nous avons vu que la linéarité des équations de Bloch est détruite par les termes de couplage, dès lors que la composante de l'aimantation suivant le champ permanent dépend de la valeur du champ transversal.

1. Dans le cas de régimes stationnaires, le critère de linéarité est bien connu [4]. Nous l'écrivons :

$$\gamma^2(H/2)^2 T_1 T_2 < 1$$

$H = K \cdot I_1$ étant l'amplitude du champ rectiligne sinusoïdal créé par le courant $I_1 \cos \omega t$ qui circule dans la bobine.

2. La définition d'un tel critère est beaucoup plus délicate lorsqu'il s'agit de perturbations transitoires, et nous allons essayer de l'aborder ici :

Considérons donc une modification soudaine de l'hamiltonien, mise en route au temps $t = 0$ et provoquée par un champ transversal issu d'un courant $i_1(t)$ dont nous supposons la densité spectrale notable autour de ω_0 , de telle façon que les probabilités de transitions soient importantes.

Sauf dans un cas unique (oscillation très peu amortie qui, d'ailleurs, si sa largeur spectrale est inférieure à $1/T_2$, pourra se ranger dans le cadre d'une perturbation périodique) le courant i_1 ainsi défini est tel que son spectre est nécessairement très étalé relativement à la largeur de raie.

L'aspect de l'équation (23) nous a montré que l'effet de filtrage des spins est tel que les composantes spectrales situées en dehors de la raie d'absorption ne jouent aucun rôle. On va profiter de cette propriété pour substituer au spectre du courant $i_1(t)$ un autre spectre ayant même allure autour de ω_0 , mais dont les parties inopérantes seront adaptées de façon adéquate. On s'arrangera en effet pour faire correspondre à ce spectre de remplacement la transformée d'une fonction du temps de forme simple. Nous calquons ce procédé sur celui qu'on utilise fréquemment dans la Théorie des Réseaux, et qui permet de substituer à une impulsion brève une « impulsion réduite » équivalente du point de vue de ses effets [16]. Dans notre cas cependant, le courant $i_1(t)$ n'a certainement pas la forme idéale d'une impulsion de Dirac et la recherche de son impulsion réduite doit tenir compte dans une certaine mesure de l'évolution du spectre à l'intérieur de la bande d'absorption.

Si $\mathcal{H}(\omega) \equiv H(\omega) e^{i\Phi(\omega)}$ est la densité spectrale, à la fréquence cyclique ω , du champ transversal $h(t)$, le fait que ce dernier sera, dans la plupart des cas, créé par un courant issu d'un réseau physiquement réalisable implique, d'après les relations de Bode [17], que la forme du module $H(\omega)$ n'est pas indépendante de celle du facteur de phase $\Phi(\omega)$, qu'il suffit alors de considérer seul.

Si nous représentons l'évolution de Φ autour de ω_0 par un développement en série

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) = & \Phi(\omega_0) + (\omega - \omega_0) (d\Phi/d\omega)_0 \\ & + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 (d^2\Phi/d\omega^2)_0 + \dots \end{aligned}$$

nous pouvons admettre que l'épanouissement du

spectre en regard de la bande d'absorption permet de n'en retenir que les deux premiers termes, ce qui constitue la relation d'équivalence de forme :

$$\text{pour } \omega \sim + \omega_0 \quad \Phi(\omega) \# \Phi(\omega_0) + (\omega - \omega_0) (d\Phi/d\omega)_{\omega=\omega_0} \quad (24)$$

Notons qu'un étalement satisfaisant, eu égard à notre hypothèse, se traduit par :

$$|d\Phi/d\omega|_{\omega=\omega_0} \ll 2\pi T_2 \quad (25)$$

Du module, il suffit de ne retenir que sa valeur à la fréquence cyclique ω_0

$$\text{pour } \omega \sim + \omega_0 \quad H(\omega) \# H(\omega_0) \quad (26)$$

ce qui permet de conserver l'équivalence énergétique.

Dans le cas où le courant est créé d'une autre manière, nous admettons qu'il est tout de même possible de conserver ces relations d'équivalence en considérant entre autres que les variations de l'argument, plus rapides que celles du module, ont une influence dominante sur la forme de la fonction image.

Nous disposons ainsi, par (24) et (26), de trois paramètres pour définir la fonction que nous allons substituer à $h(t)$ (les équations correspondant à $\omega \sim - \omega_0$ ne sont pas indépendantes des précédentes à cause des propriétés de parité de H et Φ), et cette latitude permet de centrer sur ω_0 le spectre de substitution, ce qui lui fait correspondre une perturbation à la fréquence de Larmor dont l'amplitude est variable avec le temps.

Choisissons par exemple :

$$\begin{cases} h_r(t) = H_r \sin(\omega_0 t - \varphi) & \text{pour } 0 < t < \Theta \\ h_r(t) = 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (27)$$

Son spectre, par ailleurs bien connu, répondra aux conditions (24) et (26) si l'on écrit :

$$\Theta = -2(d\Phi/d\omega)_{\omega=\omega_0} \quad (28a)$$

$$\varphi = -[\Phi(\omega_0) + \pi/2] \quad (28b)$$

$$H_r = -2\pi \text{ mod } \mathcal{H}(\omega_0) \cdot (d\Phi/d\omega)_{\omega=\omega_0}^{-1} \quad (28c)$$

ce qui définit la durée, la phase et l'amplitude de l'impulsion réduite de pulsation ω_0 .

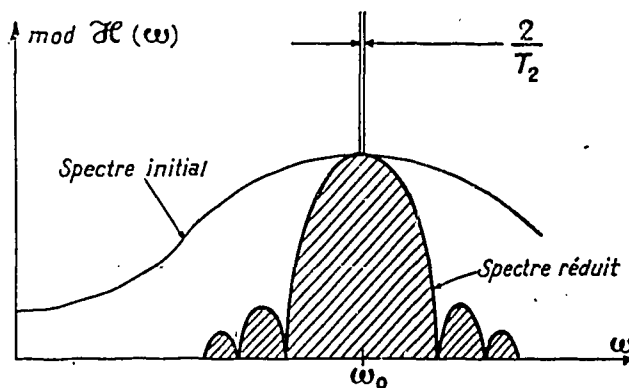


FIG. 4. — Découpage du spectre.

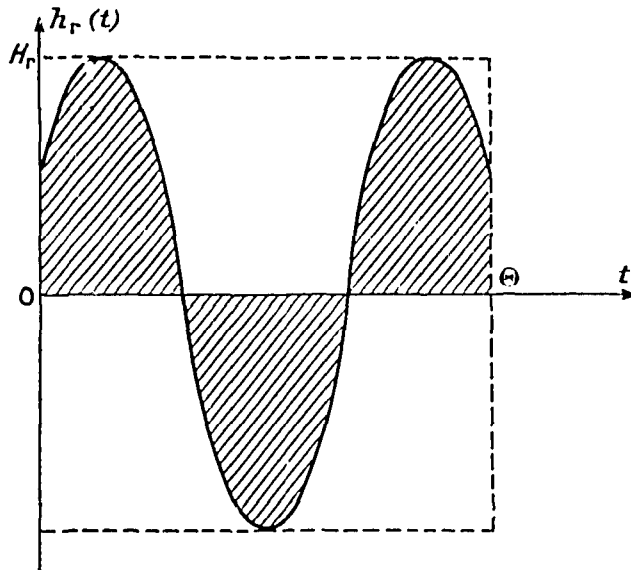


FIG. 5. — Allure de l'impulsion réduite.

La largeur du spectre de $h_r(t)$ est de l'ordre de $4\pi/\Theta$, soit d'après la relation (28a),

$$2\pi|d\Phi/d\omega|_{\omega=\omega_0}^{-1},$$

et en tenant compte de l'hypothèse (25), on voit que cette valeur est grande devant la largeur $2/T_2$ de la raie d'absorption, ce qui justifie l'approximation effectuée.

Traitée dans le référentiel mobile de Rabi [18] tournant à la vitesse angulaire $-\omega_0$ autour de e_3 , il correspond à l'impulsion réduite un champ transversal ayant la forme d'une impulsion rectangulaire de hauteur $H_r/2$ et de durée Θ . Au temps $t = 0$ l'axe 1 de ce référentiel tournant, choisi suivant la direction du champ transversal, forme avec l'axe 1 correspondant du référentiel fixe l'angle $-\varphi$ défini par (28c).

Au temps $t = \Theta$ le champ transversal s'annule, le système de spins est alors abandonné à son évolution libre et retrouve son équilibre avec la loi $\exp(-t/T_2)$. C'est donc l'état acquis au temps $t = \Theta$ qui nous renseignera sur la linéarité de la réponse à la perturbation.

La présence, pour t compris entre 0 et Θ , de coefficients constants, permet, comme l'a fait Torrey [19], de soumettre à la transformation de Laplace les équations de Bloch rapportées au repère tournant, ce qui fournit le groupe :

$$(p + 1/T_2)\bar{\mu}_1 = 0 \quad (29a)$$

$$(p + 1/T_2)\bar{\mu}_2 + (1/2)\gamma H_r \bar{\mu}_3 = 0 \quad (29b)$$

$$p + 1/T_1)\bar{\mu}_3 - (1/2)\gamma H_r \bar{\mu}_2 = \mu_{30} + \mu_0/pT_1, \quad (29c)$$

Les $\bar{\mu}_i$ représentent les transformées de Laplace,

$$\bar{\mu}_i = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} \mu_i(t) dt$$

des composantes $\mu_i(t)$ de l'aimantation suivant les axes du repère tournant, μ_{30} est la valeur initiale

de la composante suivant le champ permanent, et $\mu_0 = m_0$ sa valeur à l'équilibre.

On a par ailleurs : $\mu_1 = \mu_2 = 0$ pour $t \leq 0$.

La solution de ces équations fournit pour $\bar{\mu}_3$:

$$\bar{\mu}_3 = \frac{\mu_0 p^2 + \left(\frac{1}{T_2} \mu_{30} + \frac{1}{T_1} \mu_0\right) p + \frac{\mu_0}{T_1 T_2}}{p \left[p^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) p + \frac{1}{4} \gamma^2 H^2 + \frac{1}{T_1 T_2} \right]}. \quad (30)$$

D'après la forme du dénominateur, il apparaît que $\mu_3(t)$ contiendra des facteurs exponentiels avec la constante de temps $2[(1/T_1) + (1/T_2)]^{-1}$.

Or, d'après (28a) et (25), Θ est petit devant T_2 et *a fortiori* devant T_1 , ce qui fait que l'évolution de $\mu_3(t)$ pendant la durée de l'impulsion réduite peut être représentée correctement par un développement en série autour de $t = 0$. La propriété bien connue :

$$\lim_{t \rightarrow 0} [\mu_i(t)_0] = \lim_{p \rightarrow \infty} [\bar{\mu}_i(p)]$$

nous permet de tirer ce dernier du développement asymptotique de (30) :

$$\bar{\mu}_3 = \mu_{30} \cdot \frac{1}{p} + \frac{\mu_0 - \mu_{30}}{T_1} \cdot \frac{1}{p^2} - \left[\frac{\mu_0 - \mu_{30}}{(T_1)^2} + \frac{1}{4} \gamma^2 H^2 \mu_{30} \right] \cdot \frac{1}{p^3} + \dots$$

ce qui, par transformation inverse, donne immédiatement pour $t = \Theta$:

$$\mu_3(\Theta) = \mu_{30} + (\mu_0 - \mu_{30}) \frac{\Theta}{T_1} - \frac{1}{2} \left[(\mu_0 - \mu_{30}) + \frac{1}{4} \gamma^2 H^2 (T_1)^2 \mu_{30} \right] \left(\frac{\Theta}{T_1} \right)^2 + \dots \quad (31)$$

L'influence de H_r apparaît dans (31) à partir du terme quadratique, ce qui permet de prendre comme critère de linéarité :

$$\frac{1}{4} \gamma^2 H^2 \Theta^2 < 1 + \left(\frac{m_0}{m_{30}} - 1 \right) \frac{\Theta}{T_1}. \quad (32)$$

Dans la grande majorité des cas, m_{30} différera suffisamment peu de m_0 pour que le second membre reste très voisin de 1. Nous en déduisons alors un résultat très simple : la condition nécessaire pour conserver leur linéarité aux équations de Bloch en régime transitoire est indépendante de l'allure exacte de $h(t)$ et se résume, d'après (32), (28a) et (28c) à :

$$2\pi|\gamma| \text{ mod } \mathcal{R}(\omega_0) < 1 \quad (33a)$$

soit :

$$\text{mod} \left[\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega t} h(t) dt \right] < 1. \quad (33b)$$

La comparaison entre cette condition et le critère de non-saturation en régime stationnaire, montre que T_1 et T_2 n'interviennent plus. Ce résultat paraît justifié si l'on considère que la durée de

la perturbation transitoire est nécessairement brève devant l'une ou l'autre de ces quantités.

N. B. — Si, au contraire, la valeur initiale de m_3 était très faible devant $m_0 \cdot \Theta / T_1$, il faudrait tenir compte indirectement de l'allure de $h(t)$ par l'intermédiaire de la vitesse de variation de l'argument de son spectre autour de ω_0 . La condition de linéarité deviendrait :

$$[2\pi\gamma \text{ mod } \Re(\omega_0)]^2 < \frac{m_0}{m_{30}} \frac{1}{T_1} \left| \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Il semble d'ailleurs que ce dernier cas ne puisse correspondre qu'à des perturbations dont l'allure se rapproche davantage de celle des perturbations quasi-stationnaires (Θ et donc $d\Phi/d\omega$ importants).

V. Fluctuations thermiques. — Le bruit de fluctuations thermiques dans le circuit électrique utilisé pour la mise en évidence des phénomènes gyromagnétiques peut être attribué à la résistance R_1 de ce circuit, avec une densité spectrale énergétique à la température T du circuit donnée par la relation de Nyquist : $E^2(\nu) = 4kTR_1$ (*).

La présence de la résistance R_2 dans le modèle équivalent de la figure 3 suggère de lui attribuer un bruit propre dont l'origine réelle ne peut être évidemment due qu'à des fluctuations dans la répartition des populations des niveaux Zeeman. Il est alors nécessaire de vérifier si les valeurs calculées au moyen du modèle équivalent s'accordent avec la réalité physique.

Sous un aspect macroscopique, considérons le moment magnétique résultant M en présence du champ permanent H_0 , en équilibre thermique à la température T' du milieu et soumis en outre au champ de rayonnement isotherme incohérent. Il en résulte des fluctuations autour de sa position d'équilibre, qui, en dehors de la bande de fréquences de 0 à $1/T_1$, laissent invariante la norme de M :

$$\sum (m_1)^2 = (m_0)^2 = \mu_0^2 \chi_0^2 H_0^2$$

L'énergie potentielle du système par unité de volume

$$W_p = - (M \cdot H_0) \# - m_0 H_0 \left[1 - \frac{(m_1)^2 + (m_2)^2}{2(m_0)^2} + \dots \right]$$

aurait pour valeur à l'état « figé » : $W_0 = - m_0 H_0$.

Comme le système macroscopique possède deux degrés de liberté il en résulte une énergie moyenne de fluctuation dans le volume τ de l'échantillon qui vaut :

$$\tau \cdot \text{mod } \langle W_p \rangle - W_0 = kT'$$

et en vertu de l'équipartition, on en déduit la variance des composantes :

$$\langle (m_1)^2 \rangle = \langle (m_2)^2 \rangle = \mu_0 \frac{kT'}{\tau} |\chi_0|$$

(*) k représente ici la constante de Boltzmann.

Ce résultat sera conservé lors du mouvement de précession causé par la présence supplémentaire d'un rayonnement cohérent, tant que la valeur moyenne de l'angle entre M et H_0 reste faible. Alors, d'une part, la température des spins demeure très voisine de celle du milieu et, d'autre part, les équations de Bloch demeurent linéaires et autorisent ainsi l'emploi du modèle électrique équivalent.

Ce modèle fournit justement, en appliquant la formule de Nyquist à la maille 2 considérée comme isolée ($i_1 = 0$) la relation

$$\langle i_2 i_2^* \rangle = kT' / L_2$$

soit, d'après le tableau de correspondance (14) :

$$\langle (m_1)^2 \rangle = (\mu_0^2 K^2 / 4\pi\eta L) \cdot kT' / \chi_0$$

Or il est facile de voir, d'après les définitions de K et de η du § C, que $\mu_0^2 K^2 / 4\pi\eta L \# \mu_0 / \tau$, ce qui conduit pour $\langle (m_1)^2 \rangle$ aux mêmes résultats que précédemment.

Ainsi le modèle électrique, qui fournit la même variance et le même caractère « microscopique » de la fonction de corrélation, s'avère-t-il parfaitement apte à traduire quantitativement et jusque dans leurs ultimes conséquences tous les phénomènes de fluctuations.

VI. CONCLUSION.

Nous avons pu voir qu'une équivalence analytique entre un montage à résonance magnétique nucléaire et un réseau électrique de structure particulièrement simple paraît se justifier pour des conditions d'emploi qui sont celles d'un appareil destiné à la seule mesure d'un champ magnétique : stabilité et homogénéité du champ, en relation même avec la nécessité d'une définition précise de l'objet de la mesure, et travail dans une bande de fréquences évidemment voisine de la fréquence de Larmor, ou dans le cas transitoire, respect du critère de non-adiabaticité.

Bien qu'il s'agisse en fait d'une fiction mathématique qui ne peut prétendre se substituer en tous points au traitement physique, le fait que l'emploi du modèle équivalent puisse s'étendre au régime transitoire est d'un grand intérêt, en ce sens que les problèmes délicats d'adaptation ou d'interprétation qu'on y rencontre peuvent trouver une solution simple au moyen des méthodes de calcul connues de la Théorie des Réseaux. Citons par exemple l'effet complexe d'amortissement par rayonnement cohérent [1] qui, par l'intermédiaire du circuit équivalent, peut être ramené à l'étude classique de l'évolution libre de deux mailles couplées.

De même, en régime stationnaire, les relations d'équilibre d'un pont, les conditions d'oscillation

d'un « Maser » en champ faible [6], [10], ou l'effet d'entraînement de fréquence [20], etc... peuvent être traités quantitativement de manière très simple.

APPENDICE

Champ tournant déduit d'un spectre de bande.

— Considérons, dans le repère de la figure 1, un champ magnétique transversal rectiligne, dont l'expression en intégrale de Fourier s'écrit :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \cdot e_1.$$

Si l'on choisit une bande de fréquences cycliques infiniment étroite, centrée sur ω et de largeur $d\omega$, la composante élémentaire

$$dh = H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \cdot e_1$$

représente un champ oscillant rectiligne cisoidal qu'on écrira :

$$dh = H(\omega) \left[\cos \omega t + i \frac{\omega}{|\omega|} \sin |\omega| t \right] d\omega \cdot e_1. \quad (34)$$

A ce champ rectiligne on peut faire correspondre deux vibrations à polarisation circulaire, et si l'on ne retient que celle dont le sens est convenable, en relation avec le signe du rapport gyromagnétique des noyaux étudiés, on obtiendra un vecteur élémentaire dh^* ayant une vitesse de rotation

$$\Omega = -\gamma \left| \frac{\omega}{\gamma} \right| e_3.$$

Dans cette correspondance, la contribution du terme de (34) en $\cos \omega t$ est (on suppose γ positif) :

$$\frac{1}{2} H(\omega) [\cos \omega t \cdot e_1 - \sin |\omega| t \cdot e_2] d\omega.$$

Celle du terme en $\sin |\omega| t$:

$$\frac{i}{2} H(\omega) [\sin |\omega| t \cdot e_1 + \cos \omega t \cdot e_2] \frac{\omega}{|\omega|} d\omega.$$

Soit au total :

$$dh^* = \frac{1}{2} H(\omega) e^{i\omega t} \left[e_1 + i \frac{\omega}{|\omega|} e_2 \right] d\omega. \quad (35)$$

Manuscrit reçu le 23 novembre 1960.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLOEMBERGEN (N.) et POUND (R. V.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, n° 1, 8.
- [2] CARTER (P. D.) (Stanford U. S. A.) « Magnetically tunable filter employing a single crystal garnet. » (A paraître).
- [3] BRUNNER (G.) et LOESCHE (A.), *Z. Physik*, 1954, **139**, 569-577.
- [4] BLOCH (F.), *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 460.
- [5] FREYCEON (J.) et SOLOMON (I.), *Onde Electr.*, septembre 1960, **402**, 590-595.
- [6] SOLOMON (I.), « Théorie de l'auto-oscillateur nucléaire utilisé pour la mesure du champ magnétique terrestre. » (A paraître dans *J. Physique Rad.*).
- [7] BLOCH (F.) et SIEGERT (A.), *Phys. Rev.*, 1940, **57**, 522.
- [8] JACOBSON (B. A.) et WANGSNES (R. K.), *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 9, 942.
- [9] ROCARD (Y.), « Dynamique générale des vibrations », Masson éd., Paris, 1949.
- [10] BENOIT (H.) et HENNEQUIN (J.), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1959, **248**, 1991-1993.
- [11] ABRAGAM (A.), COMBRISSE (J.) et SOLOMON (I.), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1957, **245**, 157-160.
- [12] GRIVET (P.), *Comm. Colloque A. M. P. E. R. E.*, Pise, 1960.
- [13] SOUTIF (M.), *J. Physique Rad.*, 1949, sér. VIII, **10**, 61-78.
- [14] AYANT (Y.), dans « Résonance paramagnétique nucléaire » (GRIVET P.), C. N. R. S., Paris, 1955.
- [15] AYANT (Y.), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1955, **240**, 2230-2232.
- [16] BLAQUIÈRE (A.), *Ann. Radioélectricité*, 1953, **8**, n° 31, 36-80.
- [17] BODE (H. W.), *Bell Syst. Techn. J.*, 1940, **19**, 421.
- [18] RABI (I. I.), RAMSEY (N. F.) et SCHWINGER (J.), *Rev. Mod. Physics*, 1954, **26**, n° 2, 167-171.
- [19] TORREY (H. C.), *Phys. Rev.*, 1949, **76**, n° 8, 1059-1068.
- [20] GORDON (J. P.), ZEIGER (H. J.) et TOWNES (C. H.), *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 4, 1264-1274.

FIN