

CEA-R 3156  
EUR 3244 f.  
COTSAFTIS M. -  
Stabilité électrostatique des plasmas de longueur finie.  
Théorie générale.-  
Association Communauté européenne de l'énergie atomique  
(Euratom) - Commissariat à l'énergie atomique, Groupe de  
recherches sur la fusion contrôlée, Fontenay-aux-Roses  
(Hauts-de-Seine), 1967.-  
27 cm, 50 p.

CEA-R 3156 - COTSAFTIS Michel

EUR-3244 f

STABILITE ELECTROSTATIQUE DES PLASMAS DE LONGUEUR FINIE  
THEORIE GENERALE

Sommaire. - Dans le modèle le plus simple d'une géométrie plane, en tenant compte de la dimension finie le long du champ magnétique du plasma et d'un plasma froid entre celui-ci et des plaques conductrices extérieures, ainsi que de la réflexion des particules aux miroirs, de la courbure des lignes de force et du gradient de densité, on établit avec un état d'équilibre le plus général l'équation des perturbations électrostatiques du système, en supposant  $\beta \ll 1$ .

On résout cette équation, qui contient des termes nouveaux dus à l'effet miroir présentant des pôles pour toutes les combinaisons linéaires en nombres entiers des diverses pulsations du système pour chaque espèce de particules, montrant qu'elle ne peut plus admettre comme précédemment une solution en "onde libre", puis nous établissons la relation de dispersion

CEA-R 3156 - COTSAFTIS Michel

EUR-3244 f

ELECTROSTATIC STABILITY OF PLASMAS OF FINITE LENGTH  
GENERAL THEORY

Summary. - With the simple model of a plane geometry, taking into account the finite extension of the plasma along the magnetic field and the existence of a cold plasma between the hot plasma and exterior conducting plates, as well as the reflection of the particles at the mirrors, the curvature of field lines and the density gradient, the equation for electrostatic perturbations, supposing  $\beta \ll 1$ , is given with the most general particle equilibrium state.

This equation is solved. It contains new terms related to the mirror effect, having poles for all the linear combination with integer numbers of the various frequencies of the system for each species of particles. It does no longer admit as previously a "free wave" solution. Furthermore, we give the general dispersion relation, applying the boundary conditions,

générale par application des conditions aux limites permettant d'étudier la stabilité électrostatique du système. Celle-ci sera faite ailleurs mais on indique quelques propriétés des systèmes ouverts.

1967

52 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

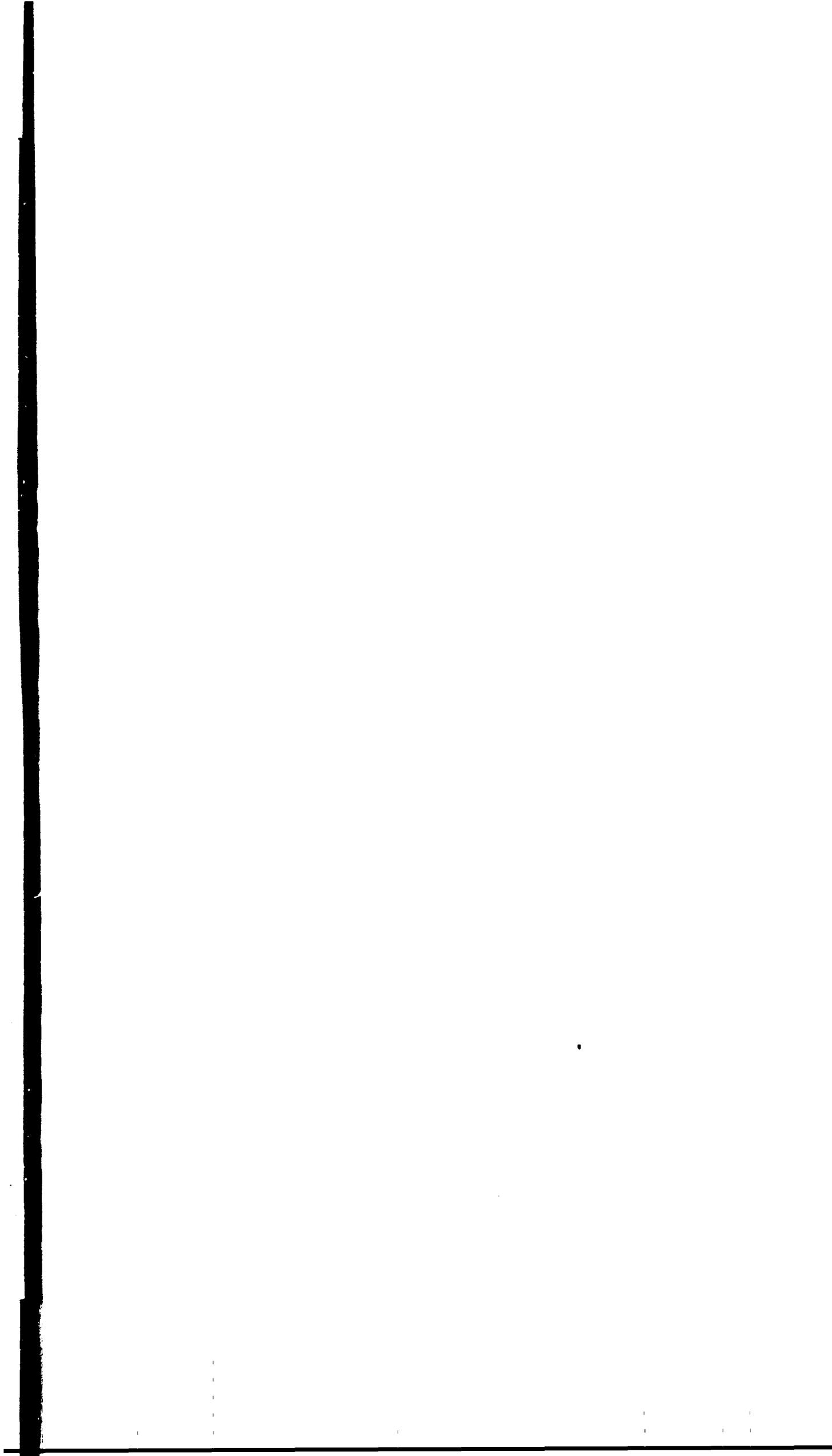
---

from which the electrostatic stability of the system can be studied. This will be done elsewhere, but some properties of open systems are indicated.

1967

52 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France



**C E A - R 3156**

**EUR 3244 f**

**ASSOCIATION EURATOM - C.E.A.**

**GROUPE DE RECHERCHES SUR LA FUSION CONTROLÉE**

**STABILITE ELECTROSTATIQUE  
DES PLASMAS DE LONGUEUR FINIE**

**THEORIE GENERALE**

par

Michel COTSAFTIS

**Rapport C E A - R 3156**

**CENTRE D'ÉTUDES NUCLÉAIRES  
DE FONTENAY-AUX-ROSES**

-Rapport C.E.A. R 3156 -

Groupe de Recherches de l'Association EURATOM-CEA  
sur la Fusion Contrôlée

STABILITE ELECTROSTATIQUE DES PLASMAS DE LONGUEUR FINIE  
Théorie Générale

par

Michel COTSAFTIS

- Février 1967 -

*Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.*

*The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.*

1.1 Une approximation couramment admise dans l'étude des micro-instabilités d'un plasma confiné dans une géométrie ouverte, de type miroir ou puits (donc de dimension finie le long de l'axe de la configuration) est de développer la relation de dispersion correspondant à ces micro-instabilités dans un milieu infini. Malgré des raffinements successifs témoignant de la prise en compte de divers effets caractéristiques de telles structures, cette approximation de milieu infini n'a pas été réellement modifiée. On évoque généralement à ce sujet une "quantification" du vecteur d'onde dans la direction axiale <sup>1)</sup> / 1 /, / 2 /, ou l'existence d'une longueur critique correspondant à une amplification de l'instabilité d'un nombre fixé à l'avance / 3 /, / 4 / qui montrent un effet de stabilisation intéressant. D'autres traitements introduisent la dimension finie dans l'équation de Poisson (pour les instabilités électrostatiques), le tenseur diélectrique étant cependant calculé à partir de la fonction de distribution en milieu infini / 11 /, ou bien tiennent compte de la variation de densité le long de la direction axiale / 5 /, mais utilisent l'approximation W.K.B. en repoussant très loin les limites pour l'obtention du résultat.

Ces approches présentent l'inconvénient de ne pas être entièrement consistantes, en ce sens que l'équilibre et la stabilité peuvent ne pas être cohérents entre eux, aussi afin de "tester" plus commodément les effets liés à la dimension finie, allons-nous tenter dans ce qui suit d'introduire un modèle aussi simple et aussi cohérent que possible, qui généralise un modèle précédemment introduit dans un cas particulier / 12 /.

1.2. Précisons tout d'abord le choix des conditions aux limites, point qui ne peut plus être éludé comme en milieu infini. Nous considérons ici la situation physique suivante :

---

1) En introduisant par exemple des conditions aux limites de plaques parfaitement conductrices, ou par assimilation.

Le système est composé d'un domaine d'espace fini limité par des plaques, ou ce qui en tient lieu, que nous supposons être parfaitement conductrices, et dans lequel existe un champ magnétique de type miroir ou puits "attaché" à ces plaques.

Dans ce domaine, existe un plasma supposé chaud et de "faible densité". Nous admettons, ainsi qu'il est logique et souhaitable de le faire, que ce plasma n'est pas en contact direct avec les plaques, mais en est séparé par une région intermédiaire dans laquelle existe un milieu de caractéristiques différentes de celles du plasma chaud, par exemple un plasma froid, ce que nous prendrons ici.

Nous avons donc le système représenté fig. 1, et les conditions aux limites correspondantes sont d'une part le raccord électrique au contact des deux milieux, d'autre part la normalité du champ électrique au contact des plaques, car, par suite de l'hypothèse de faible densité du plasma ( $\beta \ll 1$ ) nous nous limiterons ici à l'étude des instabilités de type électrostatique, caractérisée par :  $\delta B = 0, \delta E = -\nabla\psi$ .

Ainsi faut-il remarquer que l'étude d'un tel système permet de "tester" à la fois les effets de la longueur finie du plasma chaud et ceux dus à la présence du plasma froid et des plaques.

1.3 Afin de traiter mathématiquement ce système, nous le schématiserons par le modèle très simple d'une géométrie plane dans lequel le plasma chaud (milieu I) est situé dans le domaine d'espace limité entre les deux plans  $z = z_1$  et  $z = +z_1$ , le plan  $z = 0$  étant pris comme plan de symétrie de la figure, cf fig. 2, l'axe Oz représentant l'axe longitudinal du système, et les plaques conductrices sont représentées par les deux plans  $z = -z_2$  et  $z = +z_2$ ,  $z_2 \gg z_1$ , le plasma froid (milieu II) étant donc situé dans le domaine d'espace limité entre les deux plans  $z = z_1$  et  $z = z_2$  (ou  $z = -z_1$  et  $z = -z_2$ ). De plus, le champ magnétique est supposé parallèle à Oz, de module uniforme, et on simulera sa courbure par une gravité équivalente selon l'axe Ox, le plasma chaud est pris inhomogène avec un gradient le long de Ox, et les mouvements de va et vient des particules le long des lignes de champ magnétique (effet "miroir") seront simulés par un mouvement uniforme entre les plans  $z = \pm z_1$  et une réflexion parfaitement

élastique<sup>2)</sup> sur ces deux plans. Par ailleurs, afin de pouvoir étudier les effets de la dimension finie sur divers types d'instabilités possibles, la fonction de distribution de chaque espèce de particules est une fonction quelconque des constantes du mouvement, intégrable dans l'espace des vitesses.

Dans ces conditions, les mouvements des particules sont des spirales enroulées autour des lignes de champ (des parallèles à l'axe Oz) soumises de plus à une dérive uniforme selon Oy, et se réfléchissant élastiquement sur les "parois"  $z = z_1$  et  $z = -z_1$ .

Remarquons que si toutes les quantités d'équilibre sont supposées indépendantes de y, ce modèle est une représentation "dépliée" d'un modèle cylindrique, Ox représentant la direction radiale, Oy la direction tangentielle, et on pourra par suite assimiler le nombre d'onde k suivant Oy au nombre correspondant  $\frac{m}{R_0}$ ,  $R_0$  rayon du plasma, en géométrie cylindrique.

1.4 Plus généralement, on considérera également le modèle suivant lequel les particules sont soumises à un mouvement de va et vient périodique, défini par :

$$(T) \quad v_z = v_z(r, z, v_z, x)$$

où :  $\tau = t' - t, z = z(t), v_z = v_z(t)$ , dépendant de x, entre les deux points  $z^+ \text{ et } z^-$  définis par la propriété :

$$(A) \quad v_z(\tau^\pm, z, v_z, x) = \pm \theta |v_z|$$

où :  $0 \leq \theta \leq 1, |v_z| = |S_{\text{up}} v_z|$ , avec  $z(\tau^\pm) = z^\pm$ , avec un coefficient de réflexion  $R^\pm(v_z, v_z)$  en ces points. Soit alors :  $\tau_0 = \tau_+ + \tau_-$ ,  $v_z$  est telle que :

$$(P) \quad \begin{aligned} v_z(\tau + \tau_0) &= -v_z(\tau) \\ v_z(\tau + 2\tau_0) &= v_z(\tau) \end{aligned}$$

2) ou plus généralement représentée par un coefficient  $R^\pm(v_z, v_z)$ , éventuellement complexe.

On pourra relier la fonction  $v_2(\tau)$  à la donnée du champ magnétique réel B, ainsi que la propriété (A).

Etant donné une fonction de distribution non perturbée stationnaire de particules en chaque point, il lui correspond par suite un ensemble de points d'arrêt de trajectoires :  $z^\pm = z^\pm(v_2, x)$  dépendant de  $v_2$ . Il faut alors, dans l'écriture des conditions aux limites sur les perturbations de la fonction de distribution, remplacer les plans  $z = \pm z_1$  du paragraphe précédent par les surfaces :

$$(\Sigma) \quad z^\pm = z^\pm(v_2, x).$$

D'autre part, pour le potentiel électrostatique perturbé, il faut considérer l'enveloppe :

$$(\sigma) \quad z_2^\pm = z_1^\pm(x) = \sup_{v_2} z^\pm(v_2, x).$$

du domaine contenant le plasma chaud au lieu de plans  $z = \pm z_1$ , et écrire les conditions de raccord électrique sur ces surfaces.

Nous ferons les calculs sur le modèle défini en 1.3, mais ceux-ci, en particulier l'intégration le long de trajectoires non perturbées, s'étendent sans difficulté au présent modèle, car celle-ci ne fait appel qu'aux propriétés de périodicité (P) de la fonction  $v_2(\tau)$ . Dans le cas d'un tube de plasma de rayon  $R_0$  petit, plus précisément tel que :  $\frac{1}{2} \frac{dR}{dx} R_0 \ll 1$ , les surfaces  $z_1^\pm(x)$  sont des plans  $z = z_1^\pm(0)$  en première approximation. Seul l'effet de ralentissement aux miroirs n'est pas pris en compte dans le modèle 1.3.

Un tel modèle, dans lequel les mouvements de particules sont rigoureusement périodiques, peut être lui-même compris comme une première approximation cohérente en ce qui concerne la dimension finie et la structure à l'état non perturbé du système, d'un modèle plus complexe dans lequel les mouvements ne seraient plus que presque périodiques. Les constantes du mouvement n'étant plus alors que les invariants "adiabatiques" - à partir duquel on peut développer des méthodes connues / 16 /, / 17 / pour l'étudier.

Il faut remarquer que l' "ordre" des diverses périodes du mouvement des particules n'est pas fixé dans ce modèle comme il l'est dans les théories fluides habituelles / 18 / 19 /.

II

11.1 Soit donc :  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  <sup>3)</sup> le champ magnétique,  $\vec{g} = g \vec{e}_z$ , la force de gravité <sup>4)</sup> Les constantes du mouvement des particules dans le domaine  $[-z_1, +z_1]$  s'obtiennent aisément en intégrant les équations des trajectoires, qui s'écrivent, avec les hypothèses faites :

$$\frac{dx'}{dt} = v_x(\tau) = v_x \cos(\omega(\tau + \theta))$$

$$(T_0) \quad \frac{dy'}{dt} = v_y(\tau) = -v_x \sin(\omega(\tau + \theta)) + v_D.$$

$$\frac{dz'}{dt} = v_z(\tau) = \epsilon(\tau, g) |v_x|$$

3) On pourrait prendre plus généralement  $B_0 = B_0(X)$ ; en fait, on montre que, pour les basses fréquences, par exemple, on peut se limiter à  $B = B_0 (1 + \epsilon x) / 6 /$ . Mais on sait aussi / 7 / que pour l'étude des instabilités électrostatiques ( $\beta \ll 1$ ), il est cohérent de supposer :  $\epsilon = 0$ .

4) Nous rappelons que l'on prend en général :  $m_2 = -\mu \sqrt{B} + \frac{mv_x^2}{R}$ , où  $\mu$  est le moment magnétique de la particule et R le rayon de courbure de la ligne de champ magnétique.

où  $j = i, e$ ,  $\Omega_j = \frac{q_j B}{m_j c}$  représente la fréquence cyclotron des particules  $j$ ,  $v_z = -\frac{z}{\tau}$  est la vitesse de dérive due à la force de gravité, et où  $\epsilon(T)$  est une fonction en créneaux prenant alternativement les deux valeurs constantes  $+1$  et  $-1$ , et changeant de  $-1$  à  $+1$  (ou de  $+1$  à  $-1$ ) à la réflexion de la particule sur le plan  $z = z_1$  ou  $z = +z_1$  ou  $z = -z_1$  (cf fig. n° 3). Plus généralement, pour le modèle I-4, la dernière équation de (To) est remplacée par (T), avec les propriétés (P), auxquelles  $\epsilon(T)$  satisfait. Il vient les constantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= v_z^2 - 2gz = E \\ (C) \quad C_2 &= x + \frac{v_x}{\Omega_j} = p_x \\ C_3 &= |v_y| \quad 5) \end{aligned}$$

Aussi définissons-nous l'état non perturbé du système par la fonction de distribution pour chaque espèce :

$$(F) \quad f_{0j} = F_{0j}(E, p_x, |v_y|)$$

où  $F_{0j}$  est une fonction quelconque de ses trois arguments, soumise seulement à la condition d'être intégrable dans l'espace des vitesses afin que la densité  $n_{0j}(x)$

5) Remarquons qu'en vue d'une étude d'un modèle non strictement périodique défini en I.4, il vaudra mieux définir au lieu de  $C_3$  la quantité habituelle  $\int v_y dz$  ce qui revient ici à multiplier par une simple constante.

existe. Cette distribution généralise la distribution :  $(F_0) \quad f_{0j} = F_{0j}(E, p_x) \cdot \delta(v_y)$  antérieurement prise / 12 /. On sait que  $f_{0j}$  est solution, avec  $\bar{B}$ , du système :

$$\begin{aligned} V(f_{0j}) &= v \cdot \nabla f_{0j} + \frac{q_j}{m_j} \left[ v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_x}{\Omega_j} \frac{\partial}{\partial x} \right] \cdot \nabla_r f_{0j} = 0 \\ (E) \quad \nabla_{\perp} B &= \frac{4\pi q_j}{c} = \frac{4\pi q_j}{c} \sum_j q_j \int f_{0j} v^2 d^3v \\ \rho &= \sum_j q_j \int f_{0j} d^3v \end{aligned}$$

Nous supposons pour simplifier que le plasma ainsi décrit par cet ensemble est faiblement inhomogène et nous allons en étudier la stabilité à l'approximation linéaire.

11.2. Posant  $f = f_0 + \delta f$ , et en nous limitant à l'étude des perturbations électrostatiques pures, c'est-à-dire telles que :  $\delta B = 0$ , en supposant donc :  $\beta \ll 1$ , définies par :  $\delta E = -\nabla \psi$ , où  $\psi$  représente le potentiel électrostatique, il vient l'équation aux perturbations :

$$\frac{d}{dt} \delta f = -\frac{e}{m} \delta E \cdot \nabla_r f_0 \quad (1)$$

où  $\frac{d}{dt}$  représente la dérivée totale de  $\delta f$ , ou encore sa dérivée le long des trajectoires non perturbées ( $T_0$ ).

Deux voies s'ouvrent alors. On peut, soit utiliser la méthode habituelle d'intégration de (1) le long des trajectoires non perturbées ( $T_0$ ) en tenant compte ici des conditions aux limites sur  $\delta f$ , pour la reporter dans l'équation de Poisson, auquel cas il ne reste qu'à étudier l'équation résolvante sur le potentiel électrostatique  $\psi$ , soit considérer au contraire le système différentiel { (1) + équation de Poisson } et essayer de le résoudre globalement. La première méthode est plus générale et permet de ne considérer  $\delta f$  que comme un intermédiaire de calcul,

alors que la deuxième, traitant symétriquement  $\delta f$  et  $\psi$ , permet dans les cas simples de résoudre plus rapidement le problème en évitant l'intégration le long des trajectoires ( $T_0$ ) de (1), qui est relativement complexe. Ayant en vue l'établissement de la relation de dispersion générale, nous utiliserons ici la première méthode, prenant la deuxième méthode, évidemment équivalente, dans certaines applications. L'équation (1) s'intègre par suite en :

$$\delta f = -\frac{e}{m} \int_{T(z)} dt' \delta E \cdot \nabla_r f_0 \quad 6) \quad (2)$$

où  $\int_{T(z)}$  représente l'intégration le long de la demi trajectoire non perturbée antérieure au temps  $t$  aboutissant au point  $r$  au temps  $t$ . L'équation (2) combinée à l'équation de Poisson :

$$\text{div } \delta E = \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j \int \delta f_j d^3v \quad (3)$$

avec :

$$-\delta E = -\nabla \psi \quad (3')$$

fournit l'équation résolvante du problème :

$$\nabla^2 \psi = -\frac{4\pi}{c} \int d^3v \int_{T(z)} \nabla \psi \cdot \nabla_r f_0 dt' \quad (4)$$

Remarquons que (4) est tout à fait générale.

6) Ce formalisme revient à faire une transformation de Laplace avec conditions initiales  $\delta f_0 = 0$  à  $t_0 = -\infty$

Maintenant, supposons que les perturbations sont de la forme :

$$\psi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t - ik_y y) \cdot \psi(x, z)$$

De façon générale, l'évolution des perturbations dans un milieu continu peut être caractérisée par les trois temps suivants :

- $\tau_c$  - temps de croissance "sur place" de la perturbation, d'une hauteur caractéristique,
- $\tau_E$  - temps d'étalement de la perturbation, sur une longueur caractéristique,
- $\tau_D$  - temps de déplacement de la perturbation supposée initialement localisée, d'une distance caractéristique,

et on peut définir divers régimes suivant l'ordre de ces temps. Celui auquel on s'intéresse ici correspond à  $\tau_c \ll \tau_D, \tau_E$

Si  $\tau_E < \tau_c$ , le régime reste pratiquement linéaire. Si par contre  $\tau_E \gg \tau_c$  l'étalement domine, et le milieu devient turbulent, l'approximation linéaire est à revoir. Si  $\tau_D \neq 0$ , on conçoit que les perturbations correspondantes sont d'autant moins dangereuses que  $\tau_D$  est plus grand, puisqu'elles sont déplacées vers d'autres régions qui peuvent être plus stables. Le cas choisi correspond bien ici au cas le plus dangereux, quand il existe. 7)

En utilisant (F) et en remarquant que  $\int_r v \cdot \nabla \psi dt = \psi - \int_r \frac{\partial \psi}{\partial t} dt$ , il vient sur l'équation :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\psi = -\frac{4\pi}{c} \left\{ 2 \int \frac{\partial E}{\partial t} dt \psi + \int dt \left[ \frac{\partial E}{\partial t} - 2k \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \psi - \int dt \left[ 2k \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \psi \right\} \quad (5)$$

7) Ceci revient à se limiter aux seules solutions de (4) en modes normaux, donc à éliminer des solutions de type convectif, qui peuvent exister du fait de l'inhomogénéité en  $x$ . Ce point doit être repris à part. Les conditions que nous obtiendrons ne seront en général que nécessaires.

avec :

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= i \int_{\Gamma} \exp i \omega t \exp i k (y' - y) \frac{\partial \varphi}{\partial z} [x(\tau), z(\tau)] \varepsilon(\tau, z) d\tau \\ \mathcal{K}(\varphi) &= i \int_{\Gamma} \exp i \omega t \exp i k (y' - y) \varphi [x(\tau), z(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (5')$$

Le calcul de  $J(\varphi)$  et  $\mathcal{K}(\varphi)$  peut se faire en utilisant les expressions de  $\vec{r}(\tau)$  obtenues en intégrant (T<sub>0</sub>), soit :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x(t) + \frac{v_x}{\omega} [\sin(\omega\tau + \theta) - \sin\theta] \\ y(\tau) &= y(t) + \frac{v_y}{\omega} [\cos(\omega\tau + \theta) - \cos\theta] - \frac{g\tau}{\omega} \\ z(\tau) &= z(t) + \varepsilon(\tau, z) |\varepsilon| \tau. \end{aligned} \quad (6)$$

et en admettant de plus que  $\varphi(x, z)$ , en tant que fonction de  $x$ , tend vers 0 suffisamment rapidement quand  $x = \pm \infty$  pour que  $\varphi(x, z) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_1)$  quel que soit  $z \in [-z_1, +z_1]$ . On a alors simplement :

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i k x dx \cdot \sum_{\pm} \int_{\frac{|\varepsilon|}{\omega}}^{\frac{|\varepsilon|}{\omega} + \tau} \int_{\Gamma(\pm)} \exp i \omega t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} [x, z(\tau)] \varepsilon(\tau, z) d\tau \\ \mathcal{K}(\varphi) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i k x dx \cdot \sum_{\pm} \int_{\frac{|\varepsilon|}{\omega}}^{\frac{|\varepsilon|}{\omega} + \tau} \int_{\Gamma(\pm)} \exp i \omega t \cdot \varphi [x, z(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

avec  $\alpha = \omega - \frac{g}{\omega} - \omega \Omega$  <sup>8)</sup>, les fonctions de Bessel provenant du développement classique de  $\exp i k (y' - y) + i \mu x'$ .

Remarquons qu'il peut être commode quelquefois d'intégrer par parties le dernier terme  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$  du deuxième membre de (4), d'où :

$$\int_{\Gamma} d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \int_{\Gamma} d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \left[ \frac{d\varepsilon}{d\tau} - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] = - \int_{\Gamma} \tau \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot F_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\tau$$

en utilisant la troisième équation de (T). On obtient une autre équation pour  $\varphi$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \varphi &= - \omega^2 \left\{ \int_{\Gamma} \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \cdot \varphi - \int_{\Gamma} d\tau |\varepsilon| \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} J(\varphi) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma} d\tau \left[ 2 \left( \omega - \frac{g}{\omega} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{g}{\omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] \mathcal{K}(\varphi) - \int_{\Gamma} d\tau \mathcal{K}(\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (7')$$

<sup>8)</sup> En tenant compte de l'inhomogénéité de  $B = B_0 (1 + \varepsilon x) \vec{e}_z$  (voir foot note 3), on aurait :  $\alpha = \omega - \frac{g}{\omega} - \omega \Omega + \frac{g \varepsilon x^2}{2L}$ .

<sup>9)</sup> Une autre forme intéressante est donnée Chap. IV .1, éq. (75).

avec la nouvelle intégrale :

$$K(\varphi) = i \int_{\Gamma} \exp i \omega t \cdot \tau \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot F_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\tau - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Gamma} \exp i \omega t \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot F_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\tau$$

C'est ainsi qu'a été écrite l'équation sur  $\varphi$  dans / 12 / avec :  $f_{\pm} = F_{\pm}(E, \mu) \delta(z)$  par suite de la singularité en  $v_z$ .

Il reste donc à évaluer les deux intégrales :

$$J_{\pm}(\varphi) = i \int_{\Gamma(\pm)} \exp i \omega t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} [x, z(\tau)] \varepsilon(\tau, z) d\tau \quad (8)$$

$$\mathcal{K}_{\pm}(\varphi) = i \int_{\Gamma(\pm)} \exp i \omega t \cdot \varphi [x, z(\tau)] d\tau$$

figurant dans  $J(\varphi)$  et  $\mathcal{K}(\varphi)$  (7) respectivement, avec :  $z(\tau) = z(t) + \varepsilon(\tau, z) |\varepsilon| \tau$  <sup>10)</sup>

Décomposons chacune des deux intégrales en deux parties + et - respectivement suivant que  $\varepsilon(\omega)$  est  $> 0$  ou  $< 0$ . Il vient alors :

$$H_{\pm}^{\pm}(\varphi) = i \int_{-\tau_{\pm}}^{\tau_{\pm}} \exp i \omega t \cdot \varphi [x, z \pm |\varepsilon| \tau] d\tau + i R^{\pm} \int_{-\tau_{\pm}}^{-\tau_{\pm}} \exp i \omega t \cdot \varphi [x, z \mp |\varepsilon| \tau] d\tau + \dots \quad (9)$$

et, en changeant successivement  $\tau$  en  $\tau - \tau_{\pm}, \tau - \tau_{\pm} - \tau_0, \dots$ , etc., dans la 2ème, 3ème, etc., intégrale, et en tenant compte des définitions

$$\tau_{\pm} = \frac{z_1 \pm z_2}{|\varepsilon|} \quad , \quad \tau_0 = \frac{2z_2}{|\varepsilon|} \quad (10)$$

<sup>10)</sup>  $z(\tau)$  est une fonction périodique de  $\tau$  de période  $\frac{2z_2}{\varepsilon} = \frac{2g|\varepsilon|}{\omega L}$  d'après (P).

on peut encore écrire :

$$H_{\pm}^{\pm}(\psi) = i \int_{-t_{\pm}}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt + i R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm}) \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt \quad (11)$$

$$+ i R^{\pm} R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm}) \exp(-i\omega t_0) \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt + \dots$$

ce qui, après resommation des termes, en supposant dans  $\omega$  une petite partie imaginaire négative (instabilité faible), se met sous la forme :

$$H_{\pm}^{\pm}(\psi) = i \int_{-t_{\pm}}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt + \frac{i R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm})}{1 - R^{\pm} R^{\pm} \exp(-2i\omega t_0)} \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt \quad (12)$$

$$+ \frac{i R^{\pm} R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm}) \exp(-i\omega t_0)}{1 - R^{\pm} R^{\pm} \exp(-2i\omega t_0)} \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt$$

où on a introduit les deux facteurs  $R^{\pm} = (v_{\pm}, v_{\pm})$ , éventuellement complexes, traduisant les propriétés de la réflexion des particules sur les deux murs  $z = \pm z_1$ . Le même calcul avec la trajectoire (T) donne plus généralement :

$$H_{\pm}^{\pm}(\psi) = i \int_{-t_{\pm}}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z(t)] dt + \frac{i R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm})}{1 - R^{\pm} R^{\pm} \exp(-2i\omega t_0)} \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|(t_{\pm} - t)] dt \quad (12')$$

$$+ \frac{i R^{\pm} R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm}) \exp(-i\omega t_0)}{1 - R^{\pm} R^{\pm} \exp(-2i\omega t_0)} \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|(t_0 - t)] dt$$

dont on pourra remarquer l'identité à (12) avec les définitions correspondantes de  $t_{\pm}, t_0$ .

Le calcul de  $I_{\pm}(\psi)$  se fait de façon similaire, et on trouve :

$$I_{\pm}^{\pm}(\psi) = i \int_{-t_{\pm}}^0 \exp(i\omega t) \frac{d}{dz} \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt + \frac{i R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm})}{1 - R^{\pm} R^{\pm} \exp(-2i\omega t_0)} \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \frac{d}{dz} \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt \quad (13)$$

$$\pm \frac{i R^{\pm} R^{\pm} \exp(-i\omega t_{\pm}) \exp(-i\omega t_0)}{1 - R^{\pm} R^{\pm} \exp(-2i\omega t_0)} \int_{-t_0}^0 \exp(i\omega t) \frac{d}{dz} \varphi[\mu, z \pm |v_{\pm}|t] dt$$

et une expression analogue avec l'intégration le long de la trajectoire (T) <sup>11)</sup>.

Reste maintenant d'après (4) à faire l'intégration dans l'espace des vitesses.

En introduisant les deux opérateurs linéaires intégraux :

$$(L) \quad \mathcal{L}^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} |v_{\pm}| \mathcal{L}^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ \frac{\partial F_{\pm}^{\pm}}{\partial t} - 2|v_{\pm}| \frac{\partial F_{\pm}^{\pm}}{\partial z} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\mu \sum_{\pm} \mathcal{L}^{\pm} \left( \frac{\sqrt{v_{\pm}^2 - v_{\pm}^2}}{v_{\pm}} \right)$$

$$\mathcal{M}_0^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} |v_{\pm}| \mathcal{M}_0^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ 2 \left( \omega - \frac{v_{\pm}}{z} \right) \frac{\partial F_{\pm}^{\pm}}{\partial z} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F_{\pm}^{\pm}}{\partial t} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\mu \sum_{\pm} \mathcal{L}^{\pm} \left( \frac{\sqrt{v_{\pm}^2 - v_{\pm}^2}}{v_{\pm}} \right)$$

où :  $F_{\pm}^{\pm} = F_0 \cdot \text{sign}(v_{\pm}) > 0$  (resp  $< 0$ ) et 0 ailleurs <sup>12)</sup>,

les deux derniers termes de (5) se mettent sous la forme :

$$\mathcal{M}_0^+ \mathcal{H}_e^+ + \mathcal{M}_0^- \mathcal{H}_e^- + \mathcal{L}^+ \mathcal{I}_e^+ - \mathcal{L}^- \mathcal{I}_e^- \quad (14)$$

Si l'on tient compte de ce que  $F_0^+(|v_{\pm}|) = F_0^-(|v_{\pm}|)$ , on peut encore regrouper les termes + et -, car  $\mathcal{M}_0^+ = \mathcal{M}_0^-$ ,  $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^-$ , sous la forme :

$$\mathcal{M}_0 \mathcal{H}_e + \mathcal{L} \mathcal{I}_e \quad (15)$$

avec 
$$\mathcal{H}_e(\psi) = \frac{i}{|v_{\pm}|} \Phi_p(z) + \frac{i}{|v_{\pm}|} \sum_{\epsilon \epsilon' = \pm 1} A^{\epsilon \epsilon'} \mathcal{I}^{\epsilon \epsilon'}(\psi) \exp \frac{i \omega \epsilon z}{|v_{\pm}|} \quad (16)$$

où 
$$\Phi_p(z) = \int_{-z_1}^z \exp \frac{i \omega (z' - z)}{|v_{\pm}|} \varphi(\mu, z') dz' + \int_z^{z_1} \exp \frac{i \omega (z - z')}{|v_{\pm}|} \varphi(\mu, z') dz' \quad (17)$$

11) Le calcul comporte en toute rigueur une singularité lorsque  $\theta = 0$  pour  $t = t_{\pm} + \omega t_0$ ,  $n$  entier, mais celle-ci ne joue pas comme on s'en assure.

12) On a toujours  $F_0^+(|v_{\pm}|) = F_0^-(|v_{\pm}|)$  à l'état stationnaire dans le type de modèle choisi ici. Mais on peut envisager aussi un système dans lequel  $F_0^- = 0$  correspondant à un flot de particules entre deux murs; par exemple pour une interaction faisceau-plasma.

13)  $\Phi_p(z)$  est une solution particulière de l'équation  $\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{d}{dz} \psi = - \frac{2i \omega}{|v_{\pm}|} \psi$

$$A^{\epsilon\epsilon'} = R^{\epsilon} [R^{-\epsilon}]^{\frac{1+\epsilon'}{2}} \frac{\exp -i \frac{2+\epsilon'}{2} \alpha \tau_0}{1 - R^{-\epsilon} R^{\epsilon'} \exp -2i\alpha \tau_0}, \quad \epsilon, \epsilon' = \pm 1 \quad (18)$$

et

$$I^{\epsilon\epsilon'}(\psi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp \frac{i\alpha \epsilon' z'}{|\eta_1|} \psi(r, z') dz' \quad (19)$$

expressions dans lesquelles on a fait le changement de variable :  $z' = \text{argument de } \psi$  dans (12), et de même :

$$I_{\epsilon}(\psi) = \frac{i}{|\eta_1|} \psi_f(z) + \frac{i}{|\eta_1|} \sum_{\epsilon'=\pm 1} \epsilon A^{\epsilon\epsilon'} I^{\epsilon\epsilon'} \left( \frac{d\psi}{dz} \right) \cdot \exp \frac{i\alpha \epsilon z'}{|\eta_1|} \quad (20)$$

où  $\psi_f$  a la même expression que  $\Phi_f$  en changeant  $\psi$  en  $\frac{d\psi}{dz}$ .

Finalement, en regroupant tous les termes du deuxième membre, l'équation résolvente (5) peut, avec les approximations faites, s'écrire :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi = -\omega^2 \left\{ \frac{2\partial \epsilon}{\partial E} \frac{d\tau}{dz} \psi + i \mathcal{L} \left[ \frac{1}{|\eta_1|} \psi_f(z) \right] - i \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{|\eta_1|} \Phi_f(z) \right] + i \sum_{\epsilon'=\pm 1} A^{\epsilon\epsilon'}(\psi) \cdot \exp \frac{i\alpha \epsilon z'}{|\eta_1|} (\epsilon_2 + \epsilon_2') \right\} \quad (21)$$

avec :

$$A^{\epsilon\epsilon'}(\psi) = \int_0^{|\eta_1|} \overline{A^{\epsilon\epsilon'}(\psi)} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz'}{|\eta_1|} \left[ \epsilon \mathcal{L} \frac{d}{dz'} - \mathcal{M}_0 \right] A^{\epsilon\epsilon'} \psi \quad (22)$$

ou encore, en sortant les deux coefficients  $\exp \frac{i\alpha \epsilon z'}{|\eta_1|}$  des intégrations sur  $z'$  :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi = -\omega^2 \left\{ 2 \frac{\partial \epsilon}{\partial E} \frac{d\tau}{dz} \psi + i \mathcal{L} \left[ \frac{1}{|\eta_1|} \psi_f(z) \right] - i \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{|\eta_1|} \Phi_f(z) \right] + i \sum_{\epsilon'=\pm 1} A^{\epsilon\epsilon'}(\psi) \exp \frac{i\alpha \epsilon z'}{|\eta_1|} \right\} \quad (21')$$

où :

$$A^{\epsilon}(\psi) = \sum_{\epsilon'=\pm 1} A^{\epsilon\epsilon'}(\psi) \exp \frac{i\alpha \epsilon' z'}{|\eta_1|} \quad (23)$$

On obtiendrait une expression analogue avec l'intégration le long des trajectoires (T), les exposants des exponentielles étant simplement des fonctions plus complexes de  $z$  et  $z'$ , reliées à l'inversion de la fonction  $\alpha_2(\epsilon)$ .

11.3 Avant d'essayer de résoudre l'équation (21'), faisons quelques remarques sur sa structure. C'est une équation integro-différentielle partielle du deuxième ordre, dont il est intéressant de voir tout d'abord quels sont les nouveaux termes provenant de la prise en compte des réflexions des particules, par la comparaison au cas limite où  $z_1$  est infini, qui redonne l'équation habituelle. Ces termes se composent de deux parties :

- d'une part les deux derniers termes des intégrales  $H_{\epsilon}(\psi)$  et  $I_{\epsilon}(\psi)$ , qui donnent la quantité :

$$a^+(\psi) \exp \frac{i\alpha z}{|\eta_1|} + a^-(\psi) \exp -\frac{i\alpha z}{|\eta_1|}$$

dans (21')

- d'autre part les termes "non diagonaux" de  $\Phi_f$  et  $\psi_f$ . D'après la note (13), nous avons en effet pour une fonction  $\psi = \psi_0 \exp i\lambda z$  :

$$\Phi_f(\exp i\lambda z) = \Phi_0(\lambda) \exp i\lambda z + \Phi^+(\lambda) \exp \frac{i\lambda z}{|\eta_1|} + \Phi^-(\lambda) \exp -\frac{i\lambda z}{|\eta_1|} \quad (24)$$

où  $\Phi_0, \Phi^+, \Phi^-$  sont des expressions bien déterminées de  $\lambda$  d'après (17), et de même pour  $\psi_f(z)$ . Nous désignerons alors par "diagonale" la partie  $\Phi_0(\lambda) \exp i\lambda z$  dans (24), correspondant donc à la réponse "forcée" de  $\Phi_f$ , et par "non diagonale" la partie restante (qui correspond à la réponse "propre").

Ces deux types de nouveaux termes sont très différents. Les seconds en effet ne contiennent, dans l'intégration sur  $|\eta_1|$  contenues dans  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}_0$ , que des pôles de Landau habituels du type "propagation libre". Par contre les premiers peuvent aussi contenir, par les dénominateurs  $1 - R^{\epsilon} R^{\epsilon'} \exp -2i\alpha \tau_0$  dans les expressions (16) et (20), d'autres pôles de type "résonant" qui sont intimement reliés aux réflexions. Ce phénomène se retrouve d'ailleurs dans d'autres situations / 10 /.

Du fait de la complexité accrue de l'équation (21') en tenant compte de ces

termes, il est intéressant de savoir dans quels cas on peut les négliger. Ceci se voit très aisément sur les expressions (16) et (20). En effet, si :

$$|\gamma_m \omega| \cdot \frac{L}{|v_y|} > 1 \quad (25)$$

alors la partie réelle des exponentielles en facteur devant les deux dernières intégrales de l'expression de  $H_e(\psi)$  ou  $I_e(\psi)$  est très petite : on peut ainsi ignorer la partie "réfléchie" et ne conserver, dans la partie "libre" représentée par la première intégrale de (16) et (20), que la partie "diagonale" d'après la définition ci-dessous. L'équation sur  $\psi$  devient par suite identique à l'équation établie en milieu infini.

Si, de plus, on s'intéresse à des perturbations telles que, lorsque  $z_1 \rightarrow \infty$ , celles-ci redonnent la classe des perturbations telles que  $k_B = 0$  (perturbations "perpendiculaires" au champ magnétique) alors lorsque :

$$\frac{\omega_p^2 z_1(z_1 - z_2)}{|v_y|^2} \gg 1 \quad (26)$$

on peut négliger en général le terme de Landau dû au fait que le mode qui tend vers un mode  $k_B = 0$  ( $k_{\parallel}^{\infty} = 0$ ) quand  $z_1 \rightarrow \infty$  n'est pas à  $k_{\parallel} = 0$  quand  $z_1$  est fini, et se limiter à l'approximation du plasma longitudinalement froid<sup>14)</sup>, qui a été faite dans un rapport précédent / 12 /, et qui consiste à prendre pour fonctions de distribution de particules les dépendances particulières :

$$(F_j) \quad f_j = F_{0j}(E, p_{\parallel}) \delta(v_{\perp})$$

La condition (25) peut encore s'écrire :

$$\tau_{Te} > \tau_I \quad (25')$$

14) Cette hypothèse peut également être faite pour représenter plus particulièrement des expériences du type miroir à injection strictement transversale.

soit le temps de transit des particules est supérieur au temps de croissance de l'instabilité en utilisant la définition (10) :  $\tau_k = \tau_0 = \frac{L}{|v_y|}$ .

Par conséquent, dans l'espace des paramètres dont dépend la configuration étudiée, si nous traçons la surface  $\Sigma$  de stabilité marginale ( $\tau_k = \tau_0$ ), à l'approximation du plasma longitudinalement froid, et la surface  $\Sigma'$  telle que :  $\tau_k = \tau_I$ , les nouveaux termes de réflexion ne vont jouer qu'à l'intérieur du domaine limité par  $\Sigma$  et contenant  $\Sigma_0$ , par exemple modifier la limite de stabilité  $\Sigma_0$ , mais n'auront aucun effet au-delà de la surface  $\Sigma$ . Si l'on peut montrer que les termes nouveaux ne sont pas déstabilisants, ils ne peuvent que modifier  $\Sigma_0$  vers  $\Sigma$ , donc augmenter le domaine stable. Les critères établis avec l'approximation du plasma longitudinalement froid sont alors pessimistes.

III

III.1 Etudions maintenant l'équation (21'). Du fait de sa complexité, nous allons simplifier un peu en nous limitant à l'étude des solutions  $\varphi(x, z)$  telles que leur dépendance en  $x$  peut être négligée, c'est-à-dire telles que  $\frac{\nabla \varphi}{\varphi} \ll \frac{\nabla n}{n}$ , où  $n = n(x)$  est la densité. On peut alors ignorer le terme en  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$  et on a :  $\varphi(\mu, z) = \varphi(z) \delta(\mu)$

ce qui permet de faire l'intégration sur  $\mu$  immédiatement. Une autre approximation également assez simple consiste à supposer au contraire que  $\frac{\nabla \varphi}{\varphi} \gg \frac{\nabla n}{n}$ , on peut alors négliger la dépendance en  $x$  de  $n(x)$  par exemple, le terme  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$  devient simplement  $-\mu^2 \varphi(\mu, z)$  et l'intégration sur  $\mu$  disparaît. Dans les deux cas, les difficultés reliées à la différenciation en  $x$  sont éliminées, et on retrouve une équation intégral-différentielle simple sur  $z$ ,  $x$  jouant le rôle d'un paramètre. Par exemple dans le premier cas, (21') devient :

$$\mathcal{H}_0(\varphi) \equiv \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \varphi + \omega^2 \left\{ \int_0^\infty \frac{d\mu}{|\mu|} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \varphi + i \mathcal{A}_0 \left[ \frac{1}{|\mu|} \varphi(z) \right] - i \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{|\mu|} \varphi(z) \right] + i \mathcal{A}_0^+ \exp i \frac{\omega z}{|\mu|} + i \mathcal{A}_0^- \exp -i \frac{\omega z}{|\mu|} \right\} = 0 \quad (27)$$

avec :

$$\mathcal{A}_0 = \int_0^\infty \frac{d\mu}{|\mu|} \mathcal{A}_0 = \int_0^\infty d^2 \mu \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - 2 \frac{\mu}{|\mu|} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] \sum_z \mathcal{A}_0^z \left( \frac{\omega \mu}{|\mu|} \right)$$

$$(L_0) \quad \mathcal{M}_0 = \int_0^\infty \frac{d\mu}{|\mu|} \mathcal{M}_0 = \int_0^\infty d^2 \mu \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\mu}{|\mu|} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] \sum_z \mathcal{M}_0^z \left( \frac{\omega \mu}{|\mu|} \right)$$

et :

$$\mathcal{A}_0^{\pm} = \int_0^\infty \bar{\mathcal{A}}_0^{\pm} d\mu = \sum_{\ell=\pm 1} \mathcal{A}_0^{\ell \pm} \exp i \frac{\omega \mu}{|\mu|} \quad (27')$$

Ceci correspond à l'approximation "locale" / 8 /, usuellement utilisée lorsque  $\frac{R_0}{L} \ll 1$ ,  $L$  tel que  $L \frac{\nabla n}{n} \ll 1$ , et lorsqu'il n'y a pas de shear, ce que nous avons supposé ici <sup>15)</sup>.

15) On prend d'ailleurs pour  $x$  le point  $x_0$  où  $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$  est maximum / 9 /.

Dans le second cas, il faudrait remplacer  $k^2$  par  $-(k^2 + \mu^2)$  au premier membre de (27) et dans les termes  $\mathcal{A}_0^{\pm}$  seulement.

Remarquons que ces deux approximations (grandes et petites longueurs d'onde) ne sont pas équivalentes du fait que  $k$  intervient seul dans  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{M}_0$ , et n'est pas modifié en  $\sqrt{k^2 + \mu^2}$  en passant du premier cas au deuxième.

De plus, du fait que  $x$  n'est plus qu'un paramètre indépendant, nous pouvons remplacer les deux plans de réflexion des particules  $z = \pm z_1$  par une surface plus "réaliste" :  $z_1 = z_1(x)$ .

Pour résoudre (27), nous allons tout d'abord mettre l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  figurant au premier membre de (27) sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}_0(\varphi) \equiv \mathcal{D}(\varphi) + \omega^2 \mathcal{H}_0^{\pm}(\varphi) = 0 \quad (28)$$

avec les définitions suivantes :

$$\mathcal{H}_0^{\pm}(\varphi) = \sum_{\ell=\pm 1} \mathcal{H}_0^{\ell \pm}(\varphi) = \int_0^\infty \bar{\mathcal{H}}_0^{\ell \pm}(\varphi) \exp i \frac{\omega \mu}{|\mu|} d\mu \quad (29)$$

où

$$\bar{\mathcal{H}}_0^{\ell \pm}(\varphi) = \mathcal{N}_0^{\pm} \left[ \frac{1}{|\mu|} \varphi^{\ell \pm}(\varphi) \right] + \mathcal{E} \mathcal{A}_0^{\pm} \left[ \frac{1}{|\mu|} \exp i \frac{\omega \mu}{|\mu|} \right] \varphi(\mu) + \bar{\mathcal{A}}_0^{\pm}(\varphi) \quad (30)$$

est une fonctionnelle de  $\varphi$  parfaitement définie,  $\mathcal{A}_0^{\pm}$  étant donné par (22), en remarquant que :

$$\mathcal{A}_0^{\pm}(\varphi) = \frac{d\varphi}{dz} + \exp -i \frac{\omega z}{|\mu|} \sum_{\ell=\pm 1} \varphi(\mu) \exp i \frac{\omega \mu}{|\mu|} \quad (31)$$

et en introduisant l'opérateur  $\mathcal{N}_0^{\pm}$  :

$$\mathcal{N}_0^{\pm} = \int_0^\infty \bar{\mathcal{N}}_0^{\pm} d\mu = \int_0^\infty \left[ \mathcal{E}_0 \frac{1}{\mu} \pm \bar{\mathcal{M}}_0 \right] d\mu \quad (32)$$

L'opérateur  $\mathcal{D}$  contient tous les autres termes de  $\mathcal{H}_0$  d'après (28) soit :

$$\mathcal{D}(\varphi) = \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \varphi + \omega^2 \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{d\mu}{|\mu|} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \varphi + \mathcal{N}_0^{\pm} \left[ \frac{1}{|\mu|} \varphi \right] \right\} \quad (33)$$

en utilisant dans (30) et (33) la décomposition (24) de  $\phi$  en partie "diagonale" et "non diagonale".

Il en résulte aussitôt que :

$$\mathcal{D}(\exp \pm i\lambda z) = \mathcal{D}(\lambda) \exp \pm i\lambda z \quad (34)$$

où  $\mathcal{D}(\lambda)$  n'est autre que le premier membre de la relation de dispersion en milieu infini.  $\mathcal{D}$  est donc un opérateur diagonal en transformée de Fourier et tel que :

$$\mathcal{D}(-\lambda) = \mathcal{D}(\lambda) \quad . \text{ Par contre :}$$

$$\mathcal{X}_1^E(\exp \pm i\lambda z) = \int_0^a \mathcal{X}_1^E(\exp \pm i\lambda z) \cdot \exp \frac{i\epsilon \alpha z}{|v_1|} d|v_1|. \quad (35)$$

Ainsi l'opérateur  $\mathcal{X}_1$  transforme une exponentielle donnée en un ensemble d'exponentielles "étalé" sur l'intervalle sur lequel  $F_0(v_1)$  n'est pas nul. Par conséquent, le cas le plus simple se produira évidemment lorsque cet intervalle est le plus petit possible, c'est-à-dire se réduit à un point;  $F_0(v_1)$  est alors une fonction delta :

$$F_0(E, v_1, |v_1|) = F_0(E, v_1) \delta(v_1 - u_0), \quad u_0 > 0 \quad (36)$$

C'est donc la situation physique d'un double faisceau de particules monocinétiques avec des vitesses égales et opposées, rebondissant élastiquement (éventuellement avec pertes et déphasages par le facteur R) entre deux "murs" parfaitement réfléchissants avec éventuellement un plasma suffisamment "froid" longitudinalement pour que (25) ne soit pas satisfaite et qu'on puisse par conséquent négliger les effets de réflexion pour cette composante.

Parce qu'il correspond à des expériences réalisées, ce cas sera repris en détail dans un rapport suivant afin de montrer dans un cas simple les effets de la dimension finie pris en compte de façon cohérente.

On se limitera ici à l'établissement de la relation de dispersion.

III.2 Ceci étant, si nous prenons pour  $\psi(z)$  une représentation du type Fourier :

$$\psi(z) = \int \exp i\lambda z \psi(\lambda) d\lambda \quad (37)$$

cette expression ne peut être solution de (27), en vertu de (34) et (35), que si :

a) - La partie diagonale est nulle, soit :

$$\mathcal{D}(\lambda) = 0 \quad (38)$$

b) - Pour chaque valeur de  $\frac{z}{|v_1|}$  dans le domaine d'intégration de  $|v_1|$ ,  $\alpha$  étant fixé, le coefficient de  $\exp \frac{i\epsilon \alpha z}{|v_1|}$  est nul, soit :

$$\mathcal{X}_1^E[\psi] = 0 \quad (39)$$

(38) définit le  $\lambda$  donnant la solution comme pour un calcul en milieu infini, cependant on ne doit pas en conclure déjà que le résultat du cas présent lui sera identique, puisqu'il faut encore introduire les conditions aux limites. La relation (39) montre de plus que, contrairement au cas infini, ou fini avec un plasma longitudinalement froid, les solutions en onde pure du type :  $\psi(z) = \psi_0 \exp i\lambda z$ ,  $\mathcal{D}(\lambda) = 0$ , ne sont plus possibles ici. (39) est en effet une relation <sup>6)</sup>(généralement intégrale) entre tous les  $\psi(\lambda)$ , déterminant ceux-ci pour définir la solution de (27) sous la forme (37). Ceci introduit une réelle difficulté dans le problème général.

Pour le voir et afin de faciliter le passage au cas  $z_1$  infini, nous poserons pour la solution (37) la forme suivante :

---

16) Chaque relation (39) représente en fait deux relations, voir ci-après.

$$\varphi(z) = \varphi_2^+ \exp(i\lambda_1 z) + \varphi_1^- \exp(-i\lambda_1 z) + \int \exp(i\lambda z) \varphi(\lambda) d\lambda \quad (37')$$

obtenue en singularisant, dans l'ensemble des  $\lambda$  satisfaisant (38) sur lequel est faite l'intégration dans (37), deux valeurs  $\pm \lambda_2$ ,  $\int$  étant relié à  $\int$  par la relation symbolique :

$$\int \equiv \int + \delta(\lambda - \lambda_2) + \delta(\lambda + \lambda_2) \quad (40)$$

Cette forme (37') est suggérée par la possibilité, en utilisant la remarque (13), d'écrire l'équation (27) sous la forme du système :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\varphi) &\equiv \left(\frac{d^2}{dz^2} - \epsilon^2\right)\varphi + \epsilon^2 \left\{ 2 \int \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \cdot \varphi + i \sum_{\epsilon \in \mathbb{Z}} \alpha_\epsilon \left[ \frac{1}{|\lambda_j|} \psi_2(z) \right] \right. \\ &\quad \left. - i \gamma_0 \left[ \frac{1}{|\lambda_j|} \phi(z) \right] + i \sum_{\epsilon \in \mathbb{Z}} \alpha_\epsilon \exp(i\epsilon z) \frac{\varphi}{|\lambda_j|} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$(S_2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{\epsilon^2}{|\lambda_j|^2} \phi &= - \frac{2i\alpha \varphi}{|\lambda_j|} \\ \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{\epsilon^2}{|\lambda_j|^2} \psi &= - \frac{2i\alpha d\varphi}{|\lambda_j| dz} \end{aligned}$$

la dernière relation découlant du fait que  $\psi_2 = \phi_2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$ , où  $\phi_2$  et  $\psi_2$  sont des solutions particulières de ces deux dernières équations, satisfaisant à (24) et l'équivalent pour  $\psi_2$ .

Considérons alors le système (S) où  $\phi_2$  et  $\psi_2$  sont remplacées par les fonctions inconnues indépendantes  $\phi$  et  $\psi$ , et en supposant que  $\sum_{\epsilon \in \mathbb{Z}} \alpha_\epsilon \exp(i\epsilon z) \frac{\varphi}{|\lambda_j|}$  est le "second membre", c'est-à-dire sans tenir compte de la dépendance fonctionnelle de  $\alpha_\epsilon$  en  $\varphi$ . Et pour simplifier, admettons de plus qu'il y a un nombre fini de valeurs de  $|\lambda_j|$  par exemple avec une forme (36), ou même avec une sommation de fonctions  $\delta(|\lambda_j| - \lambda_\nu)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, p$ .

Dans ce cas,  $\varphi$  est un scalaire, mais on voit par contre que  $\phi_2$  et  $\psi_2$  sont

des vecteurs dont le nombre de composantes est fixé par les deuxième et troisième équations de (S). (On admet donc aussi que la sommation sur  $\ell$ , qui figure dans  $\varphi$  est aussi finie, pour commencer).

La solution de (S) se met donc sous la forme d'une solution particulière du système avec second membre plus la solution générale du système sans second membre (c'est-à-dire avec  $\alpha_0^\epsilon = 0$ ). La solution particulière est évidente, c'est :

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= 0 \\ (A_2) \quad \phi_0^\pm(z) &= \phi^\pm \exp \pm i \frac{\alpha \varphi}{|\lambda_j|} z \\ \psi_0^\pm(z) &= \psi^\pm \exp \pm i \frac{\alpha \varphi}{|\lambda_j|} z \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi^E &= - \sum_{\epsilon'} A^{\epsilon \epsilon'} I^{\epsilon \epsilon'}(\varphi) \\ \Psi^E &= - \epsilon \sum_{\epsilon'} A^{\epsilon \epsilon'} I^{\epsilon \epsilon'}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) \end{aligned} \quad (41)$$

et la solution générale de (S) sans "second membre" est de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \sum_{\epsilon} \varphi_\epsilon^0 \exp i \lambda_\epsilon z \\ (A_3) \quad \phi_0(z) &= \sum_{\epsilon} \frac{-2i \frac{\alpha \varphi}{|\lambda_j|}}{\frac{\alpha^2}{|\lambda_j|^2} - \lambda_\epsilon^2} \varphi_\epsilon^0 \exp i \lambda_\epsilon z \\ \psi_0(z) &= \sum_{\epsilon} \frac{-2i \frac{\alpha \varphi}{|\lambda_j|} dz}{\frac{\alpha^2}{|\lambda_j|^2} - \lambda_\epsilon^2} \varphi_\epsilon^0 \exp i \lambda_\epsilon z \end{aligned}$$

en utilisant les deux dernières équations de (S), et où  $\lambda_\epsilon$  est racine de (38)  $\mathcal{D}^2(\lambda) = 0$ , la sommation étant à faire sur toutes les racines de (38).

Si l'on avait le système (S) à résoudre, la somme  $\{(\lambda_2) + (\lambda_0)\}$  fournirait la solution générale de celui-ci, et on peut remarquer qu'il est tout-à-fait loisible de ne considérer que la solution en ondes libres du système, tous les

$\varphi_k^0$  étant indépendants. Il n'en est plus de même si l'on considère maintenant le système ( $S_2$ ). En effet, il faut écrire qu'effectivement :  $\phi(z) = \phi_1(z) + \psi(z) = \psi_2(z)$  défini par (17) et la relation équivalente en changeant  $\varphi \rightarrow \frac{d\varphi}{dz}$ . Ceci revient à imposer à  $\phi^\pm$  et  $\psi^\pm$  une expression bien déterminée (24) en fonction de  $\phi_e$  et  $\psi_e$ . Par suite, les deux équations (41) qui deviennent :

$$\sum_k \frac{\exp i(\lambda_k - \epsilon)z}{i(\lambda_k - \epsilon)} \varphi_k^0 = \sum_{k \in E} A^{\epsilon \epsilon'} I^{\epsilon \epsilon'}(\exp i \lambda_k z) \cdot \varphi_k^0 \quad (41')$$

$$\sum_k i \lambda_k \frac{\exp i(\lambda_k - \epsilon)z}{i(\lambda_k - \epsilon)} \varphi_k^0 = \sum_{k \in E} A^{\epsilon \epsilon'} I^{\epsilon \epsilon'}(\exp i \lambda_k z) \cdot \varphi_k^0$$

ne sont autres que les relations de compatibilité traduisant la restriction de (S) à ( $S_p$ ). Ce sont des relations linéaires entre tous les  $\varphi_k^0$ , qui de ce fait ne sont plus indépendantes, et cette liaison oblige à ne considérer désormais que la solution complète de (S). On ne peut donc plus se limiter à l'étude des solutions en "ondes libres" comme précédemment.

Bien entendu, on vérifie sans difficulté sur les expressions de  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  que, par suite du facteur  $\frac{\exp -i \lambda_k z}{i \lambda_k}$  du numérateur de celles-ci, les relations (41') deviennent identiques à 0 lorsque  $z \rightarrow \infty$  ou  $|z| \rightarrow 0$ , et on retrouve le découplage des modes des cas précédents.

Reste à dénombrer les relations (41') pour justifier (37'). On voit aisément que (S) est un système différentiel linéaire d'ordre  $2 + 4N$ , où :  $N = \dim. \{ |v_j| \otimes \alpha_e \}$ , la dimension de l'ensemble produit cartésien de l'ensemble des  $|v_j|$  par celui de l'ensemble des  $\alpha_e$  utilisés dans le problème posé. Pour transformer (S) en ( $S_p$ ), nous avons les relations (41') au nombre de  $4N$  (car  $\epsilon = \pm 1$ ; évidemment il y a  $2 + 4N$  solutions  $\lambda_k$  à (38), d'ailleurs associées par paires de signe opposé). Par conséquent, nous avons  $2 + 4N$   $\varphi_k^0$  reliés par  $4N$  relations, il y a donc bien  $2$   $\varphi_k^0$  indépendants, en fonction desquels on peut exprimer tous les autres par résolution d'un système de Cramer habituel. Ceci justifie complètement (37'), lorsque N est fini. Nous admettrons que ce résultat s'étend aux cas où N est infini, ce qui semble raisonnable, au moins lorsque N est dénombrable.

Par suite, la solution de (27) se met sous la forme :

$$\varphi(z) = \varphi_1^+ [\exp i \lambda_1 z + S^+(z)] + \varphi_1^- [\exp -i \lambda_1 z + S^-(z)] \quad (42)$$

avec :

$$S^\pm(z) = \sum_k \sigma_k^\pm \exp \pm i \lambda_k z \quad (42')$$

$\sigma_k^\pm$  étant les solutions de (41') avec  $\varphi_1^\pm = 1$ , et en tenant compte de la parité des solutions de (38).

Comme  $\lambda_k$  peut être en fait n'importe laquelle des solutions de (38), cette forme (42) montre que la solution de (27) est composée d'une partie "libre"  $\exp \pm i \lambda_k z$  et d'une partie "réfléchie", qui est due à l'interaction des diverses solutions libres par suite de la dimension finie et des réflexions, cette dernière étant négligeable si  $z \rightarrow \infty$  ou  $|z| \rightarrow 0$ .

On s'assurera que les calculs sont les plus simples lorsque N est le plus petit possible, c'est-à-dire  $N = 1$ , ce qui correspond au cas du double faisceau froid <sup>17)</sup> (41') étant alors un système  $4 \times 4$  que l'on pourra même réduire à un système  $2 \times 2$  si on se limite à la considération des solutions paires de ( $S_2$ ). Ce résultat est général. A l'inverse, dans le cas général où  $|v_j|$  varie dans un intervalle, en admettant que (42) est encore valable, N a la dimension du contenu, et les relations (41'), (42) deviennent des relations intégrales dont la résolution est bien plus complexe <sup>18)</sup>.

17) Cette application sera traitée dans le prochain rapport.

18) On a une équation intégrale du type Cauchy-Hilbert, dont la résolution est possible sous certaines hypothèses, / 14 /, / 15 /.

III.3 Par suite des difficultés de la méthode de résolution de (23) par une solution du type (38) dans le cas général où  $|z_2|$  varie dans un intervalle, on peut essayer de résoudre (23) d'une manière plus systématique par transformation de Fourier.

On remarque en effet que, dans l'expression (25) de  $\bar{\alpha}_0^\varepsilon[\varphi]$ , le dernier terme :

$$\int_0^\infty \bar{\alpha}_0^\varepsilon[\varphi] \exp(-i\varepsilon \frac{z}{|z_2|}) d|z_2| \quad (43)$$

ne contient en fait que des intégrales :

$$\int_{-z_1}^{+z_2} \exp(\pm i \frac{z}{|z_2|} (z \pm z')) \varphi(z') dz' \quad (44)$$

qui sont du type convolution, après réduction des intégrales figurant dans  $I^{\varepsilon\varepsilon'}(\frac{d\varphi}{dz})$  par :

$$\int_{-z_1}^{+z_2} \exp(\pm i \frac{z}{|z_2|} \frac{d\varphi}{dz}) dz' = \left[ \exp(\pm i \frac{z}{|z_2|} z') \varphi(z') \right]_{-z_1}^{+z_2} \mp i \frac{z}{|z_2|} \int_{-z_1}^{+z_2} \exp(\pm i \frac{z}{|z_2|} z') \varphi(z') dz' \quad (45)$$

et qui se transforment très simplement par transformation de Fourier. D'autre part, nous mettrons l'expression (15) de  $\Phi_p$  sous la forme :

$$\Phi_p = -2\varepsilon \int_{-z_2}^{+z_1} \sin \frac{z}{|z_2|} (z-z') \cdot \varphi(z') dz' + \int_{-z_1}^{+z_2} \exp(i \frac{z}{|z_2|} (z-z')) \cdot \varphi(z') dz' \quad (15')$$

dont la première intégrale peut encore s'écrire :

$$\int_{-z_1}^{+z_2} \sin \frac{z}{|z_2|} (z-z') \cdot \varphi(z') dz' = \int_{-z_1}^{+z_2} \mathcal{Y}(z-z') \cdot \varphi(z') dz' \quad (46)$$

en introduisant :

$$\mathcal{Y}(u) = \sin \frac{u}{|z_2|} \cdot H(u) \quad (47)$$

où  $H(u)$  est la fonction échelon égale à 0 si  $u < 0$  et à 1 si  $u > 0$ .

Dans ces conditions, en utilisant les définitions (27) et (28) et en regroupant tous les termes en  $\varphi(\pm z_1)$ , on peut mettre (23) sous la forme :

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - R^2 \right) \varphi + \omega^2 \left\{ \varepsilon \int_{-z_2}^{+z_1} \mathcal{Y}(z-z') \cdot \varphi(z') dz' + i \int_{-z_1}^{+z_2} K^+(z-z') \cdot \varphi(z') dz' + i \int_{-z_1}^{+z_2} K^-(z-z') \cdot \varphi(z') dz' \right\} \quad (48)$$

$$= -i\omega^2 \sum_{\varepsilon\varepsilon'} \varepsilon\varepsilon' \varphi(\varepsilon z_2) \mathcal{Y}_0 \left[ \frac{1}{|z_2|} \mathcal{P}^{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \exp(i \frac{\varepsilon\varepsilon' z}{|z_2|}) \right]$$

$$K^-(u) = \int_0^\infty d|z_2| \left\{ \bar{\mathcal{N}}_0^- \left[ \frac{(i\varepsilon)}{|z_2|} \frac{1}{|z_2|} \exp(i \frac{u}{|z_2|}) \right] - 2i \mathcal{L}_0 \left[ \frac{1}{|z_2|} \frac{1}{|z_2|} \mathcal{P}^-(u) \right] + \varepsilon \bar{\mathcal{N}}_0 \left[ \frac{1}{|z_2|} \mathcal{Y}(u) \right] - 2i \bar{\mathcal{N}}_0 \left[ \frac{(i\varepsilon)}{|z_2|} \frac{1}{|z_2|} \cdot \frac{R^+ R^- \exp(-\varepsilon i \alpha t_0)}{1 - R^+ R^- \exp(-2i \alpha t_0)} \cos \frac{u}{|z_2|} \right] \right\} \quad (49)$$

$$K^+(u) = \int_0^\infty d|z_2| \left\{ \bar{\mathcal{N}}_0^+ \left[ \frac{(i\varepsilon)}{|z_2|} \frac{1}{|z_2|} \cdot \frac{R^- \exp(i \alpha t_0)}{1 - R^+ R^- \exp(-2i \alpha t_0)} \cos \frac{u}{|z_2|} \right] \right\} \quad (50)$$

$$\mathcal{P}^\pm = \exp(-i \frac{\alpha z_2}{|z_2|} \cdot \delta_{\pm, \pm} + \frac{R^\pm \exp(-i \alpha t_0)}{1 - R^+ R^- \exp(-2i \alpha t_0)} \left[ \exp(\pm i \frac{\alpha z_2}{|z_2|}) + R^\mp \exp(-i \alpha t_0) \exp(\mp i \frac{\alpha z_2}{|z_2|}) \right] \quad (51)$$

et où  $\bar{\mathcal{N}}_0^\pm(a)$  est la transformée de Fourier de l'opérateur (28).

Passons maintenant en transformée de Fourier sur (48), avec

$$\varphi(z) = \sum_n \varphi_n \exp(-i n \pi \frac{z}{z_2}) \quad (52)$$

il vient ainsi :

$$\Delta_n^\pm \varphi_{\pm n} + i \omega^2 K_n^\mp \varphi_n = -i \omega^2 \sum_{\varepsilon\varepsilon'} \varepsilon\varepsilon' \varphi(\varepsilon z_2) \mathcal{Y}_0 \left[ \frac{1}{|z_2|} \mathcal{P}^{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{\sin(\frac{\varepsilon\varepsilon' (z_2 \pm z_2)}{z_2})}{(\frac{\varepsilon\varepsilon' (z_2 \pm z_2)}{z_2})^2} \right] - \frac{(\pm)^2}{z_2} X_\varepsilon \pm \frac{(-)^2}{z_2} \cdot i \frac{z_2}{z_2} X_\varepsilon \quad (53)$$

pour les deux composantes  $\varphi_n$  et  $\varphi_{-n}$ , avec :

$$\Delta_n^\pm = -\frac{z_2^2}{z_2^2} - R^2 + \omega^2 \left\{ 2 \int d|z_2| \frac{2\varepsilon}{|z_2|} + i K_n^\pm \right\} \quad (54)$$

et où :

$$2X_\varepsilon = \varphi'(z_2) - \varphi'(-z_2) \quad (55)$$

$$2X_2 = \varphi(z_1) - \varphi(-z_1) \quad (56)$$

représentent les deux constantes d'intégration du système (48) (on peut en effet considérer (48) et l'équation sur  $\varphi(-z)$  associée,  $\phi_n^\pm$  étant le n<sup>ième</sup> coefficient de la série de Fourier de  $\phi(u)$ ).

De (53) on tire par résolution d'un système 2 x 2  $\varphi_n$  et  $\varphi_{-n}$ . Il faut maintenant rendre la solution cohérente. Formons alors la série figurant au second membre de (52) et faisons  $z = z_1$ , nous obtenons d'après les propriétés de séries de Fourier la quantité  $\frac{1}{2} [\varphi(z_1) + \varphi(-z_1)]$ , lorsque celles-ci représentent, comme c'est en général le cas, une fonction périodique mais discontinue. Cette équation, couplée avec (56), permet de calculer  $\varphi(z_1)$  et  $\varphi(-z_1)$  en fonction des deux constantes  $X_1$  et  $X_2$  et la solution de (23) est ainsi entièrement déterminée. Nous ne l'écrirons pas entièrement (il suffit de résoudre à partir de (53) et (56) deux équations linéaires à deux inconnues) car bien qu'effective cette résolution même dans le cas simple où  $F_{0j}$  a la forme (37), donne une solution sous forme de série infinie plus difficile à relier à la forme en onde libre quand  $z_1 \rightarrow \infty$  (ou  $|z_1| \rightarrow 0$ ) que la forme précédente (39), aussi nous préférons cette dernière par la suite, spécialement dans le cas double faisceau.

III.4 Pour terminer, indiquons que la résolution de (23) peut notablement se simplifier lorsque certaines hypothèses supplémentaires sont faites.

a - Par exemple, si nous supposons :  $R = 0$ , ce qui correspond à la situation physique de deux ensembles de particules entretenus de façon stationnaire et symétriquement par rapport à un plan de symétrie, et absorbés par les murs, c'est-à-dire n'ayant qu' "une" seule interaction, les expressions  $A^\pm$ ,  $B^\pm$  sont nulles, et par suite  $Q_0^\pm$ . L'équation (23) devient alors :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)\varphi + \omega_p^2 \left\{ 2 \int_{z_1}^z \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \varphi + i \eta_0 [\phi_2] \right\} = i \omega_p^2 \chi_0 \left[ \frac{1}{|k_1|} \exp - \frac{i z}{|k_1|} (z_1 + z) \right] \varphi(-z_1) - i \omega_p^2 \chi_0 \left[ \frac{1}{|k_1|} \exp - \frac{i z}{|k_1|} (z_1 - z) \right] \varphi(z_1) \quad (57)$$

qui peut se résoudre comme précédemment. Remarquons que la dimension finie intervient encore explicitement dans (57). Si plus particulièrement, nous étudions un système double faisceau, auquel cas (57) peut être résolu par la méthode du paragraphe 2 élémentairement, l'équation (57) correspondante, et donc la solution correspondante, dépendent de la longueur finie, et on peut la comparer aux résultats habituels du double faisceau en milieu infini (avec champ homogène, sans gravité ni gradient de densité pour simplifier encore). Mais on notera que les pôles dûs aux allers et retours des particules par suite des réflexions ont disparu avec R. Un résultat physique est donc que, lorsqu'on fait interagir deux faisceaux distribués symétriquement par rapport à un plan perpendiculaire aux lignes de champ magnétique, si ceux-ci sont parfaitement absorbés aux "murs", on ne doit pas observer de résonances à la fréquence de transit <sup>19)</sup> des particules entre les murs, avec :

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_k} = \frac{2\pi |v_f|}{L} \quad (58)$$

c'est même un moyen assez sensible de "tester" le coefficient de réflexion R de ces murs, si l'on se place dans la zone instable. Ce cas sera aussi discuté dans le rapport suivant.

b - Une autre simplification intéressante se produit lorsque,  $\alpha \neq 0$

c'est-à-dire :

$$\omega - \omega_j - \frac{\omega_p}{\Omega_j} \approx 0. \quad (59)$$

19) ou à la demi-fréquence de transit, correspondant à un aller et retour si les perturbations ne sont pas symétriques par rapport au plan de symétrie du système (voir plus loin).

(59)

Ceci n'est possible pour les deux espèces de particules à la fois que si  $\ell = 0$ , ce qui réduit les sommations  $\sum_{\ell} J_{\ell}^2(\frac{\hbar \omega_{\ell}}{h\nu})$  figurant dans  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{M}_0$  au seul terme  $\ell = 0$ ,  $J_0^2(\frac{\hbar \omega_0}{h\nu})$ , dont on ne retiendra de plus, quand  $\frac{\hbar \omega_0}{h\nu} \ll 1$ , que les deux premiers termes seulement. Cette approximation correspond aux instabilités en flûtes habituelles<sup>20)</sup>.

On peut alors remplacer dans les diverses expressions précédentes les exponentielles  $\exp \pm i \frac{\alpha z}{h\nu}$  par 1 et il vient à l'ordre le plus bas :

$$\Phi_{\pm} = \phi_0(\beta) + \frac{\exp -i \alpha z}{h\nu} \int_{-z}^{+z} \psi(z') dz' \quad (60)$$

De même :

$$\psi_{\pm} = \frac{d\phi_0}{dz} + \frac{\exp -i \alpha z}{h\nu} \cdot [\psi(z) - \psi(-z)] \quad (61)$$

$$C_{\alpha}^{\pm} = \pm \mathcal{L}_0 \left[ \frac{R \exp -i \alpha z}{h\nu (1 - R \exp -i \alpha z)} \right] \cdot [\psi(z) - \psi(-z)] - \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{h\nu} \frac{R \exp -i \alpha z}{1 - R \exp -i \alpha z} \right]^{21)} \quad (62)$$

d'où pour  $\psi(z)$  l'équation :

$$\partial \psi \equiv \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \psi + 2 \omega_p^2 \int \frac{\partial \psi}{\partial z'} \cdot \psi + \omega_p^2 \mathcal{N}_0 \phi_0 = -i \omega_p^2 \left\{ [\psi(z) - \psi(-z)] \cdot \mathcal{L}_0 \left[ \frac{1}{h\nu} \frac{\exp -i \alpha z}{1 - R \exp -i \alpha z} \right] - \int_{-z}^{+z} \psi(z') dz' \cdot \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{h\nu} \frac{\exp -i \alpha z}{1 - R \exp -i \alpha z} + \frac{1}{h\nu} \frac{2 R \exp -i \alpha z}{1 - R \exp -i \alpha z} \right] \right\} \quad (63)$$

dont on peut même éventuellement ne conserver que le dernier terme du second membre, lorsque  $R = 1$ , puisque ce terme présente alors un pôle pour  $\alpha = 0$ . Si on se limitait à des perturbations paires en  $z$  :  $\psi(z) = \psi(-z)$ , ceci éliminerait le

20) Il faut aussi se limiter à la classe des perturbations donnant quand  $z \rightarrow \infty$  les perturbations à  $k, \beta > 0$ .

21) Avec de plus  $R^+ = R^- = R$

premier terme du deuxième membre. On a conservé les facteurs  $\exp -i \frac{\alpha z}{h\nu}$  au numérateur des expressions du deuxième membre de (63) afin de retrouver quand  $z \rightarrow \infty$  les résultats habituels.

La résolution de (63) est à nouveau possible par des solutions en forme d'ondes pures :  $\psi(z) \approx \psi_0 \exp i \lambda z$ . Sa solution générale peut en effet s'écrire :

$$\psi(z) = \psi^+ \exp i \lambda z + \psi^- \exp -i \lambda z + \psi_0 \quad (64)$$

où  $\pm \lambda$  sont solutions de la relation de dispersion habituelle :  $\mathcal{D}(\lambda) = 0$  et où  $\psi_0$  est une constante en  $z$  donnée par

$$\mathcal{D}(0) \cdot \psi_0 = \text{second membre de (63)} \quad (65)$$

Ceci suppose donc que 0 n'est pas racine de  $\mathcal{D}(\lambda) = 0$ .

On rend la solution (64) consistante en formant les deux quantités  $\int_{-z}^{+z} \psi(z') dz'$  et  $\psi(z) - \psi(-z)$  figurant dans (65). On a d'abord :

$$\psi(z) - \psi(-z) = 2i \sin \lambda z (\psi^+ - \psi^-)$$

que l'on reporte dans (67) et il vient pour  $\int_{-z}^{+z} \psi(z') dz'$  l'équation :

$$\int_{-z}^{+z} \psi(z') dz' \cdot \left\{ 1 - \frac{i \omega_p^2}{\mathcal{D}(0)} \cdot \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{h\nu} \left( \frac{\exp -i \alpha z}{h\nu} + \frac{2 R \exp -i \alpha z}{1 - R \exp -i \alpha z} \right) \right] \right\} = 2i \sin \lambda z \left\{ \frac{\psi^+ - \psi^-}{\lambda} + \frac{\psi_0 (\psi^+ - \psi^-)}{\mathcal{D}(0)} \cdot \mathcal{L}_0 \left[ \frac{1}{h\nu} \frac{\exp -i \alpha z}{1 - R \exp -i \alpha z} \right] \right\} \quad (66)$$

d'où  $\psi_0$  en reportant dans (65), et par suite  $\psi(z)$  par (64)

c - Remarquons qu'on peut résoudre également une équation un peu moins simplifiée que (63), dans laquelle on a conservé les exponentielles  $\exp \pm i \frac{\alpha z}{h\nu}$ , coefficients de  $\mathcal{L}_0^{\pm}$  (cf (28, 29)), au lieu de les prendre égales à 1 comme dans (63). En supposant par exemple que les perturbations sont paires, il vient au lieu de (63) :

$$\partial \psi \equiv \frac{d^2 \psi}{dz^2} - k^2 \psi + 2 \omega_p^2 \int \frac{\partial \psi}{\partial z'} \cdot \psi + \omega_p^2 \mathcal{N}_0 \left[ \phi_0 \right] = -i \omega_p^2 \int_{-z}^{+z} \psi(z') dz' \cdot \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{h\nu} \left( \frac{\exp -i \alpha z}{h\nu} + \frac{R \exp -i \alpha z}{1 - R \exp -i \alpha z} \cos \frac{\alpha z}{h\nu} \right) \right] \quad (67)$$

dont le second membre dépend de z.

On résoud ( 67 ) de la même manière que ci-dessus, en écrivant sa solution générale sous la forme :

$$\varphi(z) = \varphi^+ \exp(i\lambda z) + \varphi^- \exp(-i\lambda z) + \int_0^{\infty} dh_1 \left[ \varphi_0(h_1) + \varphi_1(h_1) \cos \frac{z}{h_1} \right] \quad (68)$$

où  $\pm \lambda$  sont toujours solution de  $\mathcal{D}(\lambda) = 0$ , et où  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0) \varphi_0(h_1) &= \int_{-z_1}^{+z_1} \varphi(z) dz' \cdot i \omega_p^2 M_0 \left[ \frac{1}{h_1} \exp -i \frac{z_1}{h_1} \right] \\ \mathcal{D} \left( \frac{z}{h_1} \right) \varphi_1(h_1) &= \int_{-z_1}^{+z_1} \varphi(z) dz' \cdot i \omega_p^2 M_0 \left[ \frac{1}{h_1} \frac{R \exp -i \lambda z_0}{1 - R \exp -i \lambda z_0} \right] \end{aligned} \quad (69)$$

et on rend la solution ( 68 ) consistante en formant comme précédemment la quantité  $\int_{-z_1}^{+z_1} \varphi(z) dz'$  qui sera définie par une équation linéaire que nous ne donnons pas ici; l'étude de ces instabilités sera reprise dans un autre rapport.

d - Enfin, il faut noter qu'une résolution rigoureuse de ( 41 ) comme celles proposées dans III.2 et III.3 n'est quelquefois pas nécessaire du point de vue physique. Il arrive en effet que l'on sélectionne dans la relation de dispersion en milieu infini ( 31 ) un mode particulier correspondant, comme c'est souvent le cas dans l'étude des systèmes non dissipatifs, à un pôle précis de celle-ci, par exemple, le plus instable. Ceci revient à dire qu'au lieu de considérer la relation ( 38 ) de façon équivalente, l'ensemble de ses solutions explicitées :

$$\lambda_k = \lambda_k \{ \omega, h_1, \dots \} \quad (38')$$

On ne retient de l'ensemble ( 38' ) qu'une seule racine et même, le plus souvent, une expression approchée de celle-ci, négligeant toutes les autres en première approximation. Ceci revient tout simplement, dans ( 41' ), à égaliser les termes  $S^+(z)$  et  $S^-(z)$  à 0, donc à négliger les effets de réflexions. Nous appellerons cette approximation

qui peut être faite de façon systématique pour n'importe quelle instabilité étudiée en milieu infini, l'approximation du mode dominant.

Plus généralement d'ailleurs, on peut, dans ( 31' ), ne considérer qu'un sous-ensemble de celui-ci. Le fait de la consistance du traitement ( 41' ) devient automatiquement un sous-système de celui-ci associé à ce sous-ensemble, et par suite  $S^\pm(z)$  ne contiennent que des sommes partielles sur le sous-ensemble distingué. Le cas le plus simple correspond à  $N = 1$ , c'est-à-dire à considérer, à  $\ell$  fixé, le système double faisceau associé à une vitesse particulière  $u_0$  sélectionnée dans le spectre non perturbé de vitesses  $\{v_s\}$  parallèles à  $\vec{B}$ , pour telle ou telle raison physique. On obtient ainsi l'approximation du double faisceau associé à cette vitesse qui est meilleure que l'approximation du mode dominant puisqu'elle tient compte des réflexions correspondant à cette vitesse. Et ainsi de suite en complétant le spectre des vitesses parallèles déterminé.

Ces approximations sont appliquées dans un autre rapport.

IV

IV.1 Après avoir établi l'équation (27) à laquelle obéit avec les hypothèses faites le potentiel scalaire perturbé  $\varphi$ , et étudié sa solution chap. III, il reste maintenant à tenir compte des conditions aux limites qui vont nous donner la relation de dispersion générale à partir de laquelle nous pourrions discuter de la stabilité des perturbations électrostatiques considérées. Nous avons vu par. 1.2 que celles-ci se composent du raccord électrique au contact des deux milieux plasma chaud - plasma froid pour  $z_1 = \pm z_1(x)$ , et de la condition de normalité du champ électrique à la paroi  $z = \pm z_2$ , supposée donc parfaitement conductrice.

a - Pour  $z = \pm z_2$  d'abord, nous écrivons la condition de continuité du potentiel scalaire  $\varphi$ ; soit :

$$(L_1) \quad \langle \varphi \rangle = 0$$

où le symbole  $\langle X \rangle$  représente le saut de la quantité  $X$ ,  $X_+ - X_-$ , à la traversée de la frontière  $z = \pm z_1$ .

Pour obtenir une autre condition cohérente avec l'équation (23), nous l'intégrerons dans un petit domaine compris entre les deux plans  $\pm z_1 - \epsilon, \pm z_1 + \epsilon$  et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0. Seuls les termes de (23) contenant une dérivation en  $z$  vont contribuer de façon non nulle à l'intégrale.

Pour faciliter le calcul, nous introduisons une autre forme de l'équation (5) directement, qui peut être utile. Celle-ci s'obtient en regroupant tous les termes en  $\frac{\partial F_0}{\partial E}$  dans (5), en utilisant les expressions (7) des opérateurs  $\mathcal{A}(\varphi)$  et  $\mathcal{B}(\varphi)$ , l'identité :

$$\sum_e \mathcal{J}_e^z(x) \equiv 1 \quad (70)$$

et en remarquant que :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial E} \quad (71)$$

par (C). Il vient alors :

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\varphi = -\omega_p^2 \left\{ \mathcal{A}(\varphi) + \int_{T(\varphi)} \left[ \frac{\partial F_0}{\partial E} \mathcal{B}(\varphi) + \int_{T(\varphi)} \left[ \frac{\partial F_0}{\partial E} \mathcal{B}(\varphi) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F_0}{\partial x} \right) \mathcal{B}(\varphi) \right] \right] \right\} \quad (72)$$

avec le nouvel opérateur :

$$\mathcal{A}(\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu x) d\mu \sum_e \mathcal{J}_e^z \left( \frac{\sqrt{E_0 - \mu^2}}{E} \right) \int_{T(\varphi)} \left[ F_0(t) - \exp(i\mu t) \left[ i(\mu + \ell) + \epsilon(t) \right] \frac{\partial}{\partial z} \right] \varphi(\mu, z(t)) dt \quad (73)$$

qui peut encore s'écrire en utilisant l'expression de  $\alpha$  :  $\alpha = \omega - \frac{k^2}{\mu} - \ell$

$$\mathcal{A}(\varphi) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu x) d\mu \sum_e \ell \mathcal{J}_e^z \left( \frac{\sqrt{E_0 - \mu^2}}{E} \right) \int_{T(\varphi)} \exp(i\mu t) \varphi(\mu, z(t)) dt \quad (74)$$

(72) devient alors :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\varphi = -\omega_p^2 \left\{ i \mathcal{Q} \int_{T(\varphi)} \exp(i\mu t) \varphi(\mu, z(t)) dt + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu x) d\mu \sum_e \mathcal{J}_e^z \left( \frac{\sqrt{E_0 - \mu^2}}{E} \right) \cdot \int_{T(\varphi)} \exp(i\mu t) \frac{\partial}{\partial z} F_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} dt \right\} \quad (75)$$

avec :

$$\mathcal{Q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu x) d\mu \sum_e \left[ \ell \mathcal{J}_e^z \frac{\partial F_0}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F_0}{\partial x} \right) \mathcal{J}_e^z \left( \frac{\sqrt{E_0 - \mu^2}}{E} \right) \right] \quad (76)$$

où on a pris la forme (71) du dernier terme du deuxième membre de (75). Cette forme (76) est intéressante lorsque la fonction de distribution  $F_0(E, \mu, t)$  est singulière en  $v_x$ , car il n'y a pas dans son expression des termes non définis (qui disparaissent par regroupement) comme dans (5). D'autre part pour les flûtes, par exemple, si l'on fait  $\ell = 0$ , on réduit aussitôt  $\mathcal{Q}$  sans plus d'opérations.

Intégrant alors (75) dans un petit domaine  $\{\pm z_1 - \epsilon, \pm z_1 + \epsilon\}$  après avoir fait l'hypothèse  $\varphi(\mu, z) = \varphi(\mu) \cdot \delta(z)$  et utilisant la forme (39) ou (52) de la solution de (27), il vient sans difficulté la condition aux limites :

$$(L_2) \quad \langle L_2(\varphi) \rangle = L_2^c(\varphi) - L_2^z(\varphi) = \left\langle \frac{d\varphi}{dz} + \omega_p^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu x) d\mu \sum_e \mathcal{J}_e^z \left( \frac{\sqrt{E_0 - \mu^2}}{E} \right) F_0 \int_{T(\varphi)} \exp(i\mu t) \frac{d\varphi}{dz} dt \right\rangle = 0 \quad 22)$$

22) Il suffit de transformer systématiquement le  $\frac{d}{dz}$  sous le signe  $\int_{T(\varphi)}$  dans (75) en  $\frac{d}{dz} \cdot \int_{T(\varphi)}$

avec :

$$\int_{T(z)} \exp(i\lambda z) \frac{d\varphi}{dz} dz \equiv H_L \left( \frac{d\varphi}{dz} \right) = \sum_{\lambda} i\lambda H_L(\varphi) \varphi(\lambda) \quad (76')$$

où on a remis l'intégration sur  $z_2$  entre les bornes  $-\infty$  et  $+\infty$  et où  $\sum_{\lambda}$  représente la sommation sur tous les coefficients  $\lambda$  des exponentielles figurant dans l'expression de la solution de (27).

b - Pour  $z = \pm z_2$ , d'autre part, nous imposons la condition de conducteur parfait :

$$(L_3) \quad n_{\lambda} E \Big|_{z=\pm z_2} = 0$$

Notons que cette condition ( $L_3$ ) peut être trop "optimiste". Aussi un traitement plus complet consisterait-il à imposer seulement une condition du type :

$$(L'_3) \quad e^{\pm} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi \Big|_{z=\pm z_2} = 0$$

à mener tous les calculs et éventuellement à faire en dernier l'extremum sur  $e^{\pm}$  pour obtenir les conditions les plus sévères. Nous ne considérerons ici par la suite que le cas où  $e^{\pm} = 0$ .

Remarquons que l'on peut écrire les conditions aux limites pour l'équation plus générale (19) de la même manière. Il suffit de remplacer l'opérateur  $\mathcal{L}_0$  dans ( $L_2$ ) par l'opérateur  $\mathcal{L}$  et d'ajouter une condition pour  $x = \pm \infty$  de la forme :

$$(L_4) \quad \varphi(\pm \infty, z) = 0 \quad \text{quel que soit } z \in (-z_1, z_1)$$

on doit même avoir :  $\varphi(x, z) \in \mathcal{L}_0^1(\mathbb{R}_z)$

pour que la représentation (L) soit justifiée.

c - Enfin, il reste à préciser la solution dans le milieu plasma froid (II). Les effets de va et vient des particules peuvent être négligés et nous aurons la solution "libre" :

$$\varphi_{\pm}^{\pm}(z) = a^{\pm} \exp(i\lambda_{\pm} z) + b^{\pm} \exp(-i\lambda_{\pm} z) \quad (77)$$

qui, dans le cas général, n'est pas telle que  $\varphi_{\pm}^+(z) = \varphi_{\pm}^-(z)$  + et - représentant les deux intervalles  $[z_1, z_2]$  et  $[-z_1, -z_2]$  respectivement, et où  $\lambda_{\pm}$  est solution de l'équation :

$$\mathcal{D}_{\pm}(\lambda_{\pm}) = 0 \quad (78)$$

$\mathcal{D}_{\pm}$  étant l'opérateur  $\mathcal{D}$  sur lequel ont été faites les simplifications correspondant au plasma froid, ce qui revient essentiellement à simplifier les opérateurs  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{M}_0$ , ou  $\mathcal{Q}_0$  si on utilise la forme (75)

En particulier, dans la partie froide de ( $L_2$ ), l'opérateur  $L_2^{\pm}(\varphi_{\pm})$  s'écrit tout simplement, avec (77) :

$$L_2^{\pm}(\varphi_{\pm}) = i\lambda_{\pm} \cdot [1 - \mathcal{D}_{\pm}] \cdot \{ a^{\pm} \exp(\pm i\lambda_{\pm} z) - b^{\pm} \exp(\mp i\lambda_{\pm} z) \} \quad (79)$$

avec :

$$\mathcal{D}_{\pm} = \varepsilon \frac{\omega_{\pm}^2}{\omega^2} \quad (80)$$

en supposant comme précédemment / 12 / que le profil de  $F_{0j}$  en  $z$  a la forme indiquée fig. 4.

IV.2 L'ensemble (23), (39), (77), (78) et les conditions ( $L_j$ ) ( $j = 1, 2, 3$ ) détermine entièrement le problème posé. Il comprend en effet 6 paramètres en général  $\varphi^{\pm}, a^{\pm}, b^{\pm}$  que les 6 relations  $L_j$  ( $2 \times 3$ ) permette d'obtenir par l'annulation à 0 d'un déterminant  $6 \times 6$ , qui est la relation de dispersion cherchée. Il s'écrit :

$$(R) \Delta(\omega, k) = \begin{vmatrix} \varphi_I^+(z) & \varphi_I^-(z) & -e^{\mu} i \lambda_I z_1 & -e^{\mu} i \lambda_I z_1 & 0 & 0 \\ \varphi_I^+(z) & \varphi_I^-(z) & 0 & 0 & -e^{\mu} i \lambda_I z_1 & -e^{\mu} i \lambda_I z_1 \\ L_c^+ \varphi_I^+(z) & L_c^- \varphi_I^-(z) & -i \lambda_I (1-B_I) e^{\mu} i \lambda_I z_1 & i \lambda_I (1-B_I) e^{\mu} i \lambda_I z_1 & 0 & 0 \\ L_c^+ \varphi_I^+(z) & L_c^- \varphi_I^-(z) & 0 & 0 & -i \lambda_I (1-B_I) e^{\mu} i \lambda_I z_1 & i \lambda_I (1-B_I) e^{\mu} i \lambda_I z_1 \\ 0 & 0 & (i \lambda_I l^+ + 1) e^{\mu} i \lambda_I z_2 & (-i \lambda_I l^+ + 1) e^{\mu} i \lambda_I z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-i \lambda_I l^- + 1) e^{\mu} i \lambda_I z_2 & (i \lambda_I l^- + 1) e^{\mu} i \lambda_I z_2 \end{vmatrix} = 0$$

avec :  $\varphi_I^\pm(z) = e^{\mu} i \lambda_I z + S^\pm(z)$  et où  $\lambda_I$  et  $\lambda_{II}$  sont respectivement solutions de (34) et (78). Ce déterminant se simplifie considérablement si l'on se limite à la classe des solutions  $\varphi_I(z), \varphi_{II}(z)$  du système précédent paires en  $z$ .

En effet, une solution convenable pour le milieu II satisfaisant aux conditions aux limites ( $L_3$ ) s'écrit :

$$\varphi_{II}^\pm(z) = S[\lambda_{II}(z_2 \mp z)] \quad z \in [\pm z_2, \pm z_2] \quad (81)$$

alors que dans le milieu I, nous prendrons la solution :

$$\varphi_I(z) = \varphi_0 [C(\lambda_I z) + \mathcal{Y}(z)] \quad (82)$$

où :  $C, S$  représente l'ensemble (cos, sin) resp. (ch, sh) suivant la réalité de  $\lambda$  et où  $\mathcal{Y}(z)$  est la combinaison symétrique en  $z$  de  $S^\pm(z)$  et  $S^\mp(z)$  dans (39), en utilisant (40) :

$$\mathcal{Y}(z) = \sum_p \sigma_p C(\lambda_p z) \quad (83)$$

$\varphi_0$  étant le seul paramètre du problème.

Ecrivons que  $\varphi_I$  et  $\varphi_{II}$  satisfont à ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ), il vient les deux relations :

$$\begin{aligned} \varphi_0 [C(\lambda_I z_2) + \sum_p \sigma_p C(\lambda_p z_2)] &= S[\lambda_{II}(z_2 - z_2)] \\ \varphi_0 [\lambda_{II} S(\lambda_I z_2) (1 - B_I(\lambda_I, \omega)) + \sum_p \lambda_p \sigma_p S(\lambda_p z_2) (1 - B_I)] & \\ - \lambda_{II} \sum_p \frac{\omega}{\omega^2} \int d^3 v F_0 J_0^2(\frac{\omega v}{v_0}) S(\frac{\omega v}{v_0}) \Gamma(\alpha, \lambda_I) - \sum_p \lambda_p \frac{\omega}{\omega^2} \int d^3 v F_0 J_0^2(\frac{\omega v}{v_0}) S(\frac{\omega v}{v_0}) \Gamma(\alpha, \lambda_p) & \\ = \lambda_{II} \cdot [1 - B_I] \cdot C[\lambda_{II}(z_2 - z_2)] & \end{aligned} \quad (84)$$

avec :

$$\begin{aligned} B_I(\lambda_I, \omega) &= \omega^2 \int d^3 v F_0 \sum_p \frac{J_0^2(\frac{\omega v}{v_0})}{(\alpha + \lambda v_0)^2} \\ H_0(S(\lambda_p)) &= \frac{S(\lambda_p)}{\alpha + \lambda v_0} + \Gamma(\alpha, \lambda) S(\frac{\omega v}{v_0}) \end{aligned} \quad (84')$$

en utilisant (14) et (21).

L'élimination de  $\varphi_0$  dans (84) fournit la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{II} S(\lambda_I z_2) [1 - B_I(\lambda_I, \omega)] + \sum_p \lambda_p \sigma_p S(\lambda_p z_2) [1 - B_I(\lambda_p, \omega)]}{C(\lambda_I z_2) + \sum_p \sigma_p C(\lambda_p z_2)} &= \lambda_{II} \frac{1 - B_I}{T[\lambda_{II}(z_2 - z_2)]} \\ (R') \cdot \frac{\sum_p \omega^2 \lambda_p \frac{\omega}{\omega^2} \int d^3 v F_0 J_0^2(\frac{\omega v}{v_0}) S(\frac{\omega v}{v_0}) \Gamma(\alpha, \lambda_I)}{C(\lambda_I z_2) + \sum_p \sigma_p C(\lambda_p z_2)} &+ \frac{\sum_p \omega^2 \lambda_p \frac{\omega}{\omega^2} \int d^3 v F_0 J_0^2(\frac{\omega v}{v_0}) S(\frac{\omega v}{v_0}) \Gamma(\alpha, \lambda_p)}{C(\lambda_I z_2) + \sum_p \sigma_p C(\lambda_p z_2)} \end{aligned}$$

(R') est de façon générale très complexe. Il est cependant possible de distinguer dans son expression plusieurs groupes de termes provenant de la prise en compte d'effets différents, dont la suppression sous certaines hypothèses fournit autant d'approximations.

23) A noter, lorsque  $\lambda v_0 \ll \omega$  qu'en ordre de grandeur :  $B_I \approx \frac{\omega^2}{c^2 v_0^2}$  qui est  $> 1$  pour  $\omega \lesssim \Omega_i$ .

mations de (R').

Ainsi, le dernier terme du second membre correspond à l'effet de la dimension finie sur les conditions aux limites pour les particules, alors que le premier terme correspond au même effet pour le champ électrostatique. Le deuxième terme du membre de gauche provient de la prise en compte de l'effet de la dimension finie sur la résolution de l'équation résolvente pour le potentiel.

D'après ce qui a été dit précédemment, le dernier terme du second membre est négligeable dès que :  $\tau_k \gg \tau_I$  <sup>24)</sup> (R') se simplifie alors en :

$$(R'_0) \frac{\lambda_I S(\lambda_I z_1) [1 - B_I] + \sum_k \omega_k^2 \lambda_I \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{dV}{dz} \right) \frac{S(\lambda_I z_1) \Gamma(\lambda_I)}{\lambda_I} + \sum_k \lambda_k \sigma_k S(\lambda_k z_1) [1 - B_I(\lambda_k)]}{C(\lambda_I z_1) + \sum_k \sigma_k C(\lambda_k z_1)} = \lambda_I \frac{1 - B_I}{\Gamma[\lambda_I(z_1 - z_2)]}$$

Si de plus,  $\lambda_I z_1 \ll \omega$  <sup>25)</sup> pour tous les  $\mu$ , on peut dans tous les dénominateurs des quantités  $B_I(\lambda, \omega)$  négliger le terme  $\lambda z_1$ , et il vient :

$$(R'_0) \frac{\lambda_I S(\lambda_I z_1) + \sum_k \lambda_k \sigma_k S(\lambda_k z_1)}{C(\lambda_I z_1) + \sum_k \sigma_k C(\lambda_k z_1)} = \frac{B_I - 1}{B_I - 1} \cdot \frac{\lambda_I}{\Gamma[\lambda_I(z_1 - z_2)]}$$

avec :

$$B_I = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int \frac{F_0 \sum_k \frac{d^2}{dz^2}}{\alpha^2} dz \quad (85)$$

Enfin, si on suppose que tous les  $\sigma_k$  sont nuls quel que soit  $\mu$ , on retrouve la relation de dispersion (D) donnée dans / 12 / <sup>26)</sup>. Bien entendu, du fait de la consistance du traitement, on peut maintenant procéder à une autre approximation

24) Il faut aussi s'assurer que les pôles pouvant figurer dans l'expression de ce terme ne jouent pas dans le domaine étudié.

25) En vue des instabilités tendant vers les instabilités à  $k \rightarrow 0$  quand  $z_1 \rightarrow \infty$  par exemple.

26) On a changé  $\sqrt{k}$  en  $\lambda$ .

qui est de choisir la base  $\{\lambda_k\}$  sur laquelle est faite la sommation sur  $\mu$ , en fonction de diverses conditions. Par exemple, si on suppose que tous les  $\sigma_k$  sont nuls (la base  $\{\sigma_k \lambda_k\}$  se réduit au seul mode  $\sigma_k \lambda_k$ ), on obtient l'approximation du mode dominant déjà mentionné au paragraphe III-4-4, et si l'on ne retient que deux  $\lambda_k$  liés de façon consistante par la forme simplifiée correspondante de  $\mathcal{D}(\lambda)$ , on a l'approximation du double faisceau.

On voit ainsi les divers ordres d'approximation à partir du système supposé infini pour les ondes et pour les particules habituellement utilisé :

1 - Le milieu reste infini pour les particules mais devient fini pour les ondes. C'est le cas discuté dans / 12 /.

2 - Le milieu devient fini pour les ondes et les particules mais les conditions aux limites sont finies seulement pour les ondes. Ceci conduit à la relation de dispersion (R').

3 - Le milieu et les conditions aux limites sont finis, ce qui donne (R').

Si l'on ne peut utiliser que la forme en série de Fourier (52) de la solution de (27), au lieu de la forme (83), on a :

$$\mathcal{D}(z) = \sum_n c_n C\left(\frac{n\pi z}{z_2}\right) \quad (83')$$

et il suffit de remplacer dans (R<sub>0</sub>) ou (R')  $\mu$  par  $n$  et  $\lambda$  par  $\frac{n\pi}{z_2}$ .

Une autre simplification importante se produit lorsqu'il n'y a pas de plasma froid,  $z_1 = z_2$ , le plasma étudié étant en contact direct avec les parois <sup>27)</sup>.

27) Le plasma n'est alors plus "chaud".

Ceci correspond à de nombreuses expériences de physique dans des tubes ou des machines à interactions de deux faisceaux (ou encore faisceaux-plasma) que nous reprendrons ailleurs.

Il suffit dans ce cas de satisfaire aux conditions aux limites ( $L_3$ ) soit, en utilisant la forme (39) de  $\varphi(z)$ :

$$\varphi^+ [ \exp(i\lambda z_2 + S^+(\pm z_2)) ] + \varphi^- [ \exp(\mp i\lambda z_2 + S^{\mp}(\pm z_2)) ] = 0 \quad (86)$$

d'où par élimination de  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$ , la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \exp(2i\lambda z_2) - \exp(-2i\lambda z_2) + \exp(i\lambda z_2) [ S^+(z_2) - S^{\mp}(-z_2) ] \\ - \exp(-i\lambda z_2) [ S^{\mp}(-z_2) + S^+(z_2) ] = 0 \end{aligned} \quad (87)$$

soit encore :

$$(R_0) \quad S'(2\lambda z_2) + \sum_p (\sigma_p^+ + \sigma_p^-) S((\lambda + i\sigma_p) z_2) = 0$$

Si l'on se limitait aux seules solutions de (27) paires en  $z$ , on aurait la relation de dispersion :

$$C(\lambda z_2) + \sum_p \sigma_p C(\lambda_p z_2) = 0 \quad 28) \quad (88)$$

En se limitant à l'approximation du mode dominant, (88) par exemple se résoud en :

$$\lambda = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{z_2}$$

28) Si de plus  $\lambda_p z_2 \ll 1$ , on peut développer C et S dans (R<sub>0</sub>) ou (88).

Comme, d'autre part, d'après (53), l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  (cf (21)) est diagonal en représentation de Fourier, la relation de dispersion s'obtient à partir de la relation de dispersion en milieu infini en changeant  $\lambda$  en  $\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{z_2} = k_z$ , c'est-à-dire par "quantification" de  $k_z$ . Le milieu se comporte donc comme s'il était infini, ce qui est évident.

IV.3 Nous ne discuterons pas ici les diverses relations de dispersion  $(R)(R')$ .

$(R)$  obtenues ci-dessus, ce qui sera fait ailleurs dans des situations physiques bien précises, nous allons simplement pour terminer donner quelques propriétés générales de ces relations de dispersion et principalement indiquer les faits nouveaux par rapport aux relations de dispersion équivalentes établies précédemment / 12 /.

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné chap. II 3 en discutant l'équation (21) déterminant le potentiel électrostatique perturbé  $\varphi$ , cette équation contient de nouveaux termes caractéristiques de la prise en compte du mouvement de va et vient des particules, dont la principale propriété est de présenter en général des pôles nouveaux, de type "résonant", différents des pôles de Landau habituels, du type "propagation libre". Ces pôles vont se retrouver dans les relations de dispersion précédentes par les coefficients  $\sigma_p$  (ou  $\varphi_n$ ), d'après leur résolution à partir du système (41) ou (53). Ils apparaissent, dans les expressions  $A^{\pm}$  et  $B^{\pm}$ , lorsque leur dénominateur s'annule, c'est-à-dire d'après (12) et (17), lorsque :

$$1 - R^2 \exp - \frac{k_{\perp} z_2}{|v_{\perp}|} = 0 \quad (89)$$

soit encore en posant :

$$R = \exp - \gamma + i\beta \quad (90)$$

lorsque :

$$\gamma_{\text{m.w.}} = \frac{\gamma |v_{\perp}|}{2v_z}, \quad \beta_{\text{e.w.}} = \epsilon \beta_j + \frac{k_{\perp}}{2v_z} + \frac{2\omega v_{\perp}}{c} + \frac{\beta |v_{\perp}|}{2v_z} \quad 29) \quad (91)$$

29) Il va de soi qu'il faut appliquer (91) à l'espace pour laquelle l'effet d'aller et retour n'est pas négligeable.

en posant :

$$\omega_{kj} = \frac{e n_j |v_{kj}|}{2g_j} \quad (92)$$

n étant un nombre entier quelconque.

Il est déjà possible de déduire un certain nombre de propriétés physiques de (91). Cette relation signifie en effet qu'il existe, lorsqu'on tient compte du mouvement de va et vient des particules, un couplage en nombres entiers entre les diverses pulsations possibles du système, à un terme de déplacement d'ensemble  $\frac{\beta |v_{kj}|}{2g_j}$  près, provenant de la simulation dans le modèle des "plans" de réflexion des particules (cf fig. 5). Ceci est encore plus visible si on introduit la pulsation de précession gravitationnelle :

$$\omega_{gj} = \frac{g}{R_0 \Omega_j} \quad (93)$$

en posant :  $kz = \frac{m}{R_0}$ , m entier,  $R_0$  rayon du plasma. (91) s'écrit alors :

$$\rho_{ew} = \ell \Omega_j + m \omega_{gj} + n \omega_{kj} + \frac{\beta |v_{kj}|}{2g_j} \quad (91')$$

Supposons tout d'abord que la fonction de distribution des particules ait la forme (32) et que le champ magnétique soit uniforme, avec  $g=0$ .

Alors, il résulte d'un théorème d'arithmétique que l'ensemble des  $\rho_{ew}$  définis par (91'), avec  $\omega_{gj} \neq 0$ , lorsque  $\ell$  et  $n$  parcourent les entiers, n'est discret que si  $\Omega_j$  et  $\omega_{kj}$  sont dans un rapport rationnel. Dans ce cas, on doit observer un spectre de raies, dont on peut essayer d'identifier les nombres  $\ell$  et  $n$  qui les caractérisent par un décompte habituel. Par contre, si  $\Omega_j$  et  $\omega_{kj}$  sont dans un rapport irrationnel, on devrait au contraire voir un spectre continu (ou de bande, s'il y a des zones "interdites"), puisque, dans ce cas, l'ensemble des  $\rho_{ew}$  remplit théoriquement de façon dense la droite réelle.

En fait, les raies correspondant à des nombres  $\ell, n, \nu$  élevés risquent d'être d'autant plus affaiblies que ces nombres sont plus grands, suivant divers effets <sup>30)</sup>

---

30) Par exemple, convergence de la série solution (52) ou effets non linéaires.

et donc se fondre à partir d'un certain rang dans le spectre du bruit. Par conséquent, on observera plutôt les premières combinaisons de (91') mais plus étalées que dans le cas précédent. Ce phénomène semble avoir été observé <sup>31)</sup>.

Si maintenant le terme de gravité n'est pas nul, les couplages vont se faire suivant le même schéma entre les trois pulsations  $\{\Omega_j, \omega_{kj}, \omega_{gj}\}$ . Mais si par exemple :  $\omega_{gj} \ll \{\Omega_j, \omega_{kj}\}$ , la remarque ci-dessus s'applique et on ne verra que les principaux couplages entre  $\omega_{kj}$  et  $\Omega_j$  escortés que quelques harmoniques de  $\omega_{gj}$  de part et d'autre qui élargiront les raies.

Si, de plus, les particules ont une certaine dispersion  $\Delta |v_{kj}|$  en  $|v_{kj}|$  revenant à la distribution (F), les raies ne peuvent être observées que si :

$$\Delta \omega_{kj} < \text{Inf.} \{ \omega_{kj}, \Omega_j \} \quad (94)$$

avec  $\Delta \omega_{kj} = \frac{2n \Delta |v_{kj}|}{2g_j}$  <sup>32)</sup> afin que celles-ci conservent leur "individualité"; elles se présenteront alors sous forme de pics d'autant plus étalés que  $\Delta |v_{kj}|$  est plus grand. Nous les appellerons des "quasi-raies".

De tels couplages décrits dans cette rapide discussion paraissent avoir été observés dans diverses situations : indiquons le DCXI, / 13 / (couplage entre  $\Omega_i$  et  $\omega_{ki}$ , avec  $\Omega_i \approx 3 \omega_{ki}$  et spectre de raies), les tubes à vide, les systèmes faisceaux plasma.

Une étude plus poussée de ces spectres semble souhaitable, afin de vérifier la

---

31) Expérience Eclair - Communication privée de C. Etiévant.

32) Ceci pourrait fournir une mesure de la température de l'espèce j.

validité de (91') et, également, s'assurer que la représentation des réflexions des particules par un changement de signe de la vitesse et un coefficient de déphasage est valable, en cherchant à l'estimer dans (91').

Il est à noter que si on se limite à la classe des perturbations  $\varphi(z)$  solutions de (22) paires en  $z$ ,  $I^{\epsilon+}(\varphi) = I^{\epsilon-}(\varphi)$  (équ. (19)) et par suite :

$$\begin{pmatrix} A^{\epsilon\epsilon'} \cdot I^{\epsilon\epsilon'}(\varphi) \\ \epsilon A^{\epsilon\epsilon'} \cdot I^{\epsilon\epsilon'}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) \end{pmatrix} = \frac{R \exp - \frac{2i\alpha z_0}{\hbar\omega}}{1 - R \exp - \frac{2i\alpha z_0}{\hbar\omega}} I^{\epsilon} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{d\varphi}{dz} \end{pmatrix} \quad (95)$$

dont le dénominateur s'annule lorsque :

$$1 - R \exp - \frac{2i\alpha z_0}{\hbar\omega} = 0 \quad (89')$$

ce qui entraîne, au lieu de (91')

$$\text{Re } \omega_{zn} = -\ell \omega_j + n \omega_{qj} + n \omega_{kj} + \frac{\ell \omega_j}{2\alpha} \quad (96)$$

dont la seule différence avec (91') est le coefficient de  $\omega_{kj}$ , ici  $n$ , au lieu de  $\frac{n}{2}$ .

Une mesure expérimentale de l'espacement des raies (ou des "quasi-raies") permettrait donc de déterminer laquelle des relations (91') ou (96) s'applique au problème étudié. Ce point est important puisqu'il réduit l'étude de la relation de dispersion ( $R'$ ) à celle, plus simple, de ( $R$ ).

L'étude des diverses instabilités sur ( $R$ ), ou ( $R'$ ) sera faite ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

- / 1 / GERWIN R., NELSON D.J., Two Stream Instability in a Finite Length, Rapport Boeing D1-82-0332, Mars 1964
- / 2 / GUEST G.E., DORY R.A., Microinstabilities of a Mirror Confined Plasma, Phys. Fluids, 8, 10, 1853 (1965)
- / 3 / POST R.F., ROSENBLUTH M., Electrostatic Instabilities Infinite Mirror Confined Geometry, Rapport UCRL-14388 rev. 1
- / 4 / HALL L.S., HECKROTTE, KAMMASH T., Phys Rev. Letters, 13, 603 (1964)
- / 5 / AAMODT R.L., Critical Lengths and Reflection of Instable Convective Modes, Invited paper at 7th annual meeting of A.P.S., Plasma Physics Div., San Francisco, November 8-11 (1965)
- / 6 / KRALL N.A., ROSENBLUTH N.M., Low Frequency Stability of non Uniform Plasmas, Phys. Fluids, 6, 2, 254 (1963)
- / 7 / ROSENBLUTH N.M., KRALL N.A., ROSTOKER N., Finite Larmor Radius Stabilization, Salzburg Conf., Part 1, p. 143
- / 8 / KRALL N.A., ROSENBLUTH M.N., Universal Instability on Complex Field Geometries, Phys. Fluids, 8, 8, 1488
- / 9 / ROSENBLUTH N.M., In Plasma Physics, Lecture notes of Seminar, Trieste, 5-31 October 1964, p. 485, IAEA (1965)
- / 10 / HARKER K.J., Longitudinal Oscillations in Unbounded One-Dimensional Non Uniform Plasmas, Phys. Fluids, 8, 10, 1846 (1965)
- / 11 / GUEST G.E., BEASLEY C.O., Cold Plasma Effects in Finite Length Plasmas. To be published.
- / 12 / COTSAFTIS M., Stabilité électrostatique et Plasmas de longueur finie II Rapport EUR-CEA-369
- / 13 / NIELSEN C.E., Theory of Longitudinal Oscillations, ORNL 3652, p.23
- / 14 / MUSHKHELISHVILI N.L., Singular Integral Equations, Noordhoff (1953)
- / 15 / PETERS A.S., The Selection of Certain Integral Equations with Kernels  $K(x,y)$  Communication on Pure and Applied Math. vol. XVII, p. 129 (1965) 3-5

- / 16 / KRUSKAL M., Asymptotic Theory of Hamiltonian and other Systems with all Solutions Nearly Periodic, J. of Math. Phys., 3, 4, 806 (1962)
- / 17 / HASTIE R.J., TAYLOR J.B., HAAS F.A., Euratom Symp. on Theoretical Plasma Physics, Varena, Mai 1966, 1ère partie, p. 97.
- / 18 / ROSENBLUTH M.N., ROSTOKER N., Phys. Fluids, 2, 23 (1959)
- / 19 / KRUSKAL M.D., OBERMAN C.R., Phys. Fluids, 1, 275 (1958)

Manuscrit reçu le 10 janvier 1967

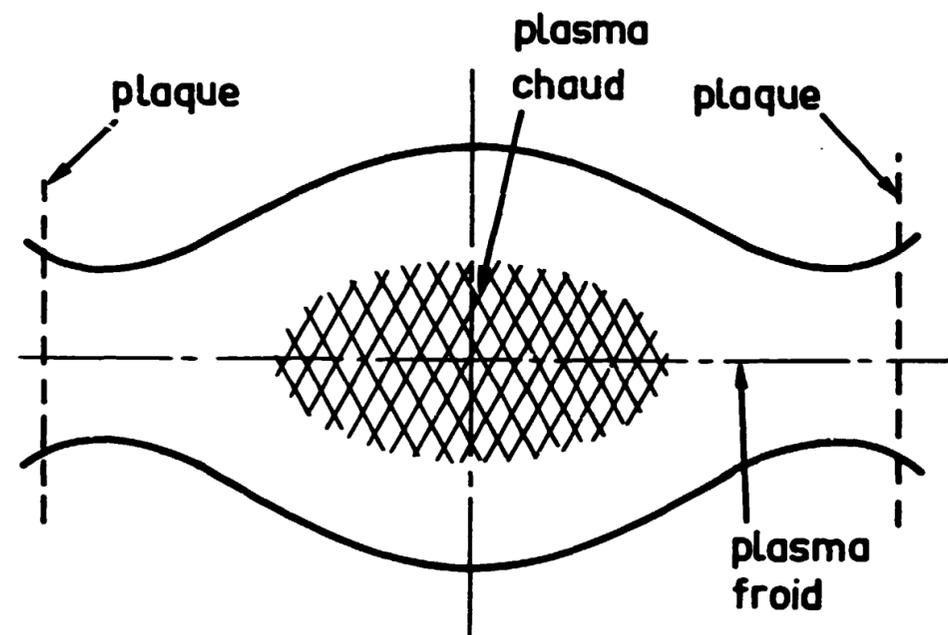


Fig. 1

Plan médian

Plaque conductrice

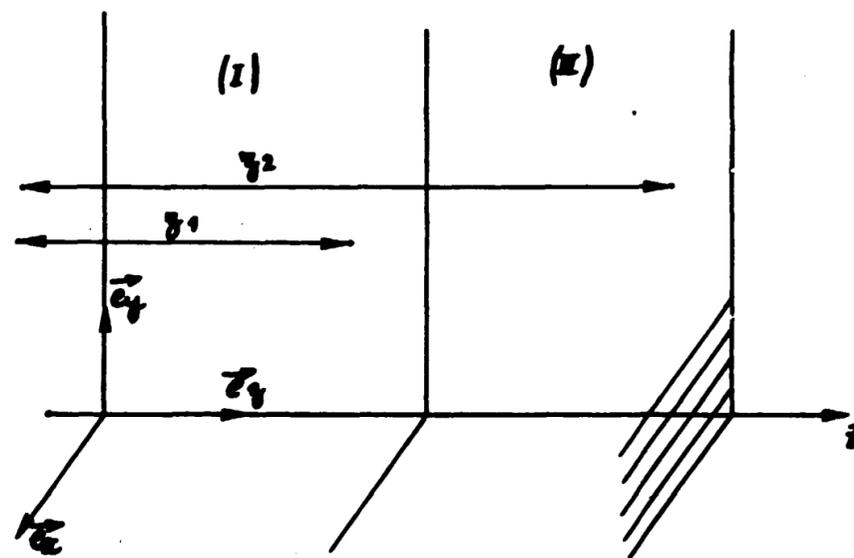


Fig 2 : Description Géométrique du système (S)

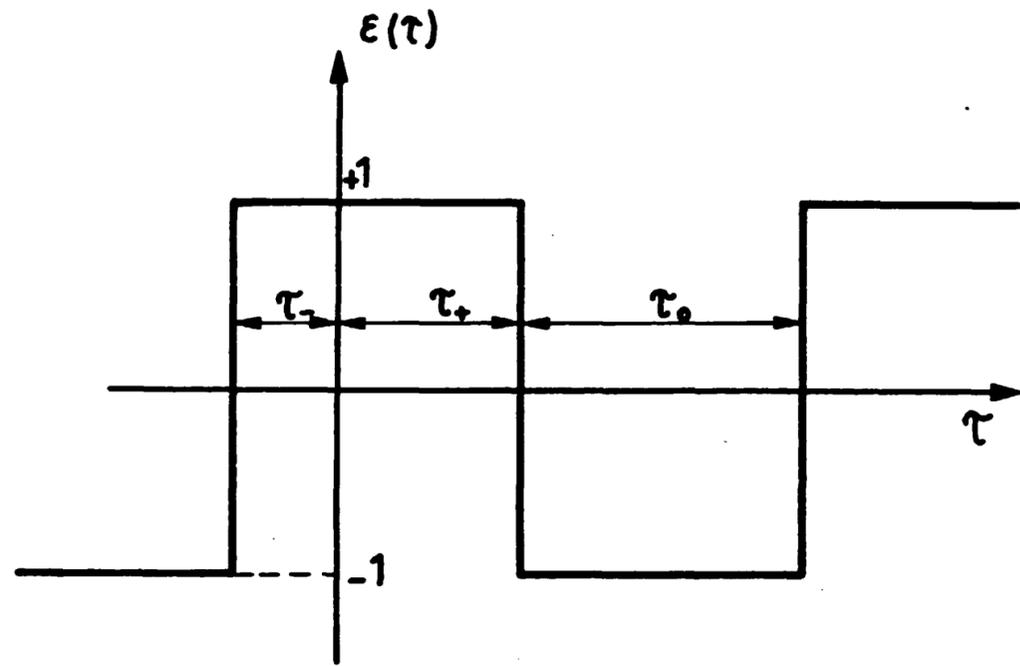


Fig. 3

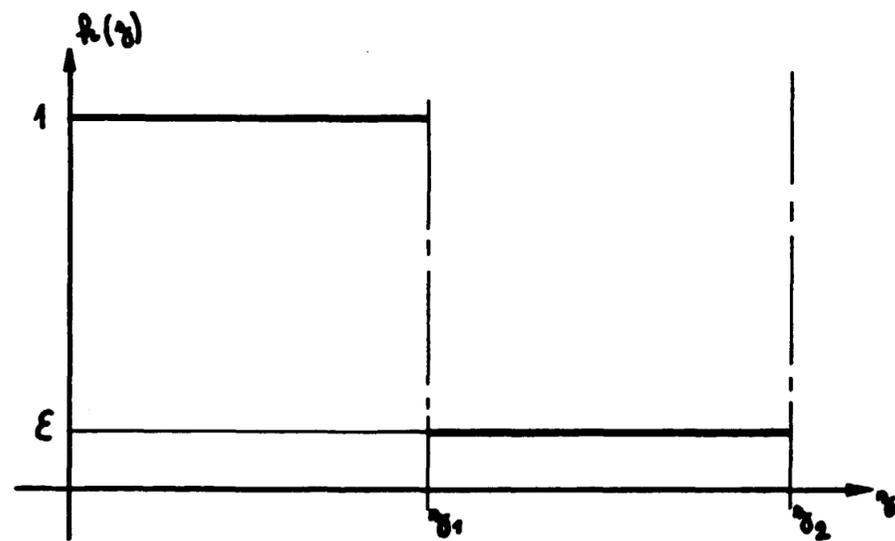


Fig. 4

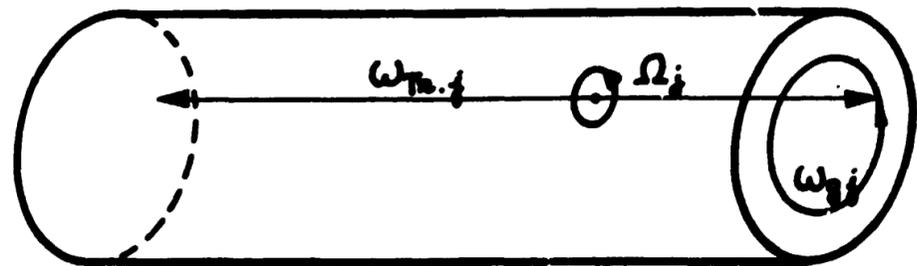


Fig. 5

Edité par  
le Service de Documentation du C. E. A.  
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Boîte Postale n° 2  
91 - GIF - sur - YVETTE (France)