CEA 2342 - GOUTTEFANGEAS M., KATZ A., RASTOIX G.

LE PERCUTEUR DE FAISCEAU DE SATURNE. Calcul du champ magnétiq et des trajectoires. Vérifications expérimentales (1963)

Sommaire.- Ce rapport décrit brièvement le dispositif percuteur de faisce mis en place sur le synchrotron Saturne. On y trouvera une analyse de so fonctionnement à partir de la théorie des échantillonnages. On indique égal ment deux méthodes de calcul du champ magnétique produit par un systèm de conducteurs indéfinis en présence d'un blindage conducteur parcouru pa des courants de Foucault : la première se ramène à la résolution d'une équation de Laplace à deux dimensions avec des conditions aux limites de première espèce (problème de Dirichlet), la seconde transpose en électromagnétisme la méthode des images électriques classique en électrostatiq et permet d'exprimer le champ magnétique sous la forme de la somme d'une série triple dans le cas général d'un système de conducteurs conten dans un blindage parallèlépipédique.

Pour terminer, on mentionne les résultats du calcul numérique de la perturbation de la trajectoire des particules sous l'effet du percuteur et o compare ces résultats aux résultats expérimentaux.

CEA 2342 - GOUTTEFANGEAS M., KATZ A., RASTOIX G.

THE BEAM-KICKER SYSTEM OF THE SYNCHROTRON SATURNE. Magnet field and particle orbit computations. Experimental results (1963)

Summary.- In this report is briefly described the beam-kicker system of the synchrotron Saturne. An analysis of its operation based on the sampli method is given, as well as two methods for computing the magnetic field produced by a set of endless conductors in the neighbourhood of a conducting shield where eddy currents are circulating. The first method leads to the resolution of a bi-dimensional Laplace equation with first kind boundar conditions (Dirichlet problem) ; the second one translates to electromagnetism the electrical images method currently used in electrostatics and yields the magnetic field as the sum of a triple series expansion in the g neral case of a set of conductors located in a parallelepipedic box.

Finally are given the results obtained in computing on IBM 7090 the perturbation of the particle motion due to the beam-kicker. These results are compared with the experimental data.

PREMIER MINISTRE
COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

LE PERCUTEUR DE FAISCEAU DE SATURNE
CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE
ET DES TRAJECTOIRES
VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

par

M. GOUTTEFANGEAS , A. KATZ , G. RASTOIX

Rapport C.E.A. n° 2342

1963

CENTRE D'ETUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY

- Rapport C.E.A n° 2342 -

Département SATURNE

LE PERCUTEUR DE FAISCEAU DE SATURNE
CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE ET DES TRAJECTOIRES
VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

par

M. GOUTTEFANGEAS, A. KATZ, G. RASTOIX

- 1963 -

S O M M A I R E

	PAGES
A - INTRODUCTION	1
B - DESCRIPTION DU PERCUTEUR	1
C - ETUDE DE L'ACTION DU PERCUTEUR A PARTIR DE LA THEORIE DES ECHANTILLONNAGES	2
I - Equation différentielle du mouvement radial	2
II - Intégration de l'équation différentielle du mouvement	4
D - RESULTATS NUMERIQUES	7
E - CALCUL DU CHAMP REEL DANS LE PERCUTEUR. EFFET D'ECRAN	8
I - Problème plan - Hypothèses de départ	8
1. Méthodes des images	9
2. Problème de Dirichlet	15
II - Champ dans l'espace	18
III - Contrôle expérimental	19
F - TRAJECTOIRES DES PARTICULES	22
I - Calcul des trajectoires	22
II - Contrôle expérimental	27

LE PERCUTEUR DE FAISCEAU DE SATURNE
CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE ET DES TRAJECTOIRES
VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

A - INTRODUCTION

La spiralisation naturelle du faisceau de protons, tension accélératrice coupée, donne sur les cibles internes des durées d'impact de l'ordre de 2 ms. Pour certaines expériences faites à la chambre à bulles, il est souhaitable de raccourcir notablement cette durée. On projette donc à cet effet de défléchir le faisceau à l'aide d'un champ magnétique perturbateur obtenu en déchargeant des capacités dans une boucle de couplage.

La présente note a pour objet de décrire brièvement le dispositif "percuteur" utilisé et d'analyser le mécanisme de son fonctionnement. On y trouvera un exposé de diverses méthodes de calcul du champ magnétique perturbateur et de la modification des trajectoires des particules sous l'effet de ce champ, ainsi qu'une mention des résultats expérimentaux obtenus.

B - DESCRIPTION DU PERCUTEUR

A l'aide d'un éclateur, lui-même commandé par un thyratron à hydrogène, on connecte un groupe de quatre condensateurs de 2,5 uF préalablement chargés à la tension nominale de 20 kV à une inductance de 7,2 µH constituée par deux spires disposées en série.

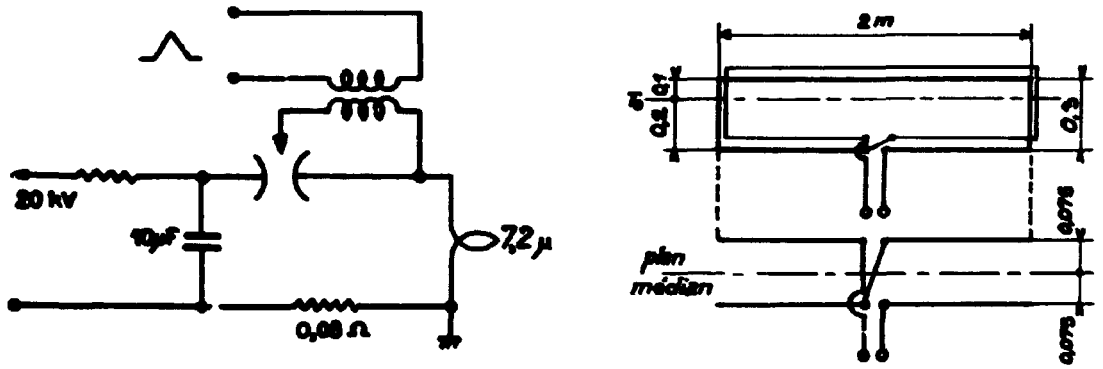


Fig. 1

Schéma du percuteur

Les mesures faites sur ce dispositif indiquent que le régime de décharge oscillatoire qui prend alors naissance, est très peu amorti : la constante de temps $\frac{2L}{r}$ est en effet égale à 180 µs alors que la pseudo-période ne vaut que 52 µs. Dans les calculs qui suivent, nous supposons donc que la décharge est sinusoïdale pure à l'échelle de la pseudo-période.

Les deux spires de couplage avec le faisceau ont une largeur de 30 cm et une longueur de 2 m, elles sont disposées dissymétriquement par rapport à l'orbite théorique entre les rayons $r_o + 10$ et $r_o - 20$. Enfin les cotes verticales sont de $\pm$ 7,5 cm par rapport au plan médian.

Le calcul montre que compte tenu des dimensions géométriques du circuit, l'induction magnétique dans le plan médian sera de 2.10^{-6} Tesla par ampère, à peu près constante dans une zone d'extension radiale égale à 16 cm.

Ce calcul a été fait en supposant le champ créé par 4 conducteurs rectilignes indéfinis en l'absence de tout matériau magnétique et de tout blindage.

Il en résulte donc qu'à la tension de charge de 20 kV, la valeur de crête de l'induction magnétique atteindra 0,095 Ts.

Enfin, il importe de remarquer que la longueur azimutale du percuteur (2 m) reste petite à la fois devant la longueur de la trajectoire moyenne (69 m) et devant la longueur d'onde attachée à l'oscillation bétatron horizontale (96 m). Nous considérerons donc par la suite que l'action du champ magnétique perturbateur sur une particule est purement localisée.

C - ETUDE DE L'ACTION DU PERCUTEUR A PARTIR DE LA THEORIE DES ECHANTILLONNAGES

I - Equation différentielle du mouvement radial

1. En supposant l'énergie de la particule constante dans l'intervalle de temps considéré, cette équation s'écrit :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = d(t) \qquad (\theta) \qquad\qquad (C1)$$

d (t) est la projection radiale de la force magnétique perturbatrice. Nous aurons donc dans l'approximation de Gauss :

$$d(t) = e\, v_o\, P(t) \qquad (C2)$$

P (t) étant l'induction magnétique perturbatrice, supposée réduite à sa composante verticale et comptée positivement si elle est de sens contraire à l'induction magnétique de guidage B.

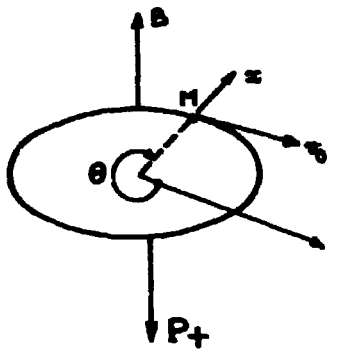


Fig. 2

(θ) est une fonction de l'azimut θ égale à l'unité dans le percuteur et nulle partout ailleurs.

En prenant pour origine des θ le centre du percuteur et pour origine des t l'instant où la particule considérée passe par l'origine des θ, on peut écrire (C1) sous la forme :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = d(t) V(t) \qquad (C3)$$

avec

$$V(t) = \sqrt{\left(\frac{v_o}{r_o} t\right)} \qquad (C4)$$

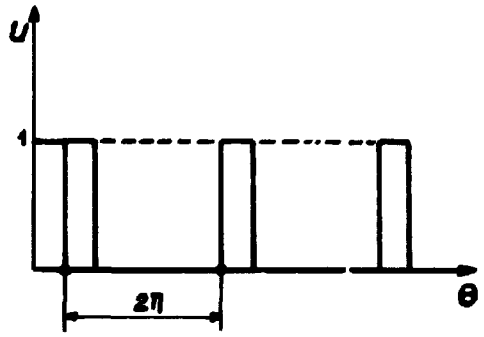


Fig. 3

2. Nous allons maintenant "idéaliser" la force perturbatrice d (t) V (t) qui intervient dans (C3) en supposant que le temps de transit τ à travers le percuteur est infiniment petit devant la période de rotation T.

Ceci va nous conduire à remplacer la fonction V (t) par une nouvelle fonction α I (t) composée d'impulsions de Dirac α δ'(t-n T)

On obtiendra le coefficient multiplicateur α en écrivant que les percussions des forces réelle d (t) V (t) et "idéalisée" α d (t) I (t) au cours d'un passage quelconque de la particule à travers le percuteur sont égales ; on trouve ainsi :

$$\alpha = \tau \qquad (C5)$$

d'où finalement

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = \tau\, d(t)\, I(t) \qquad (C6)$$

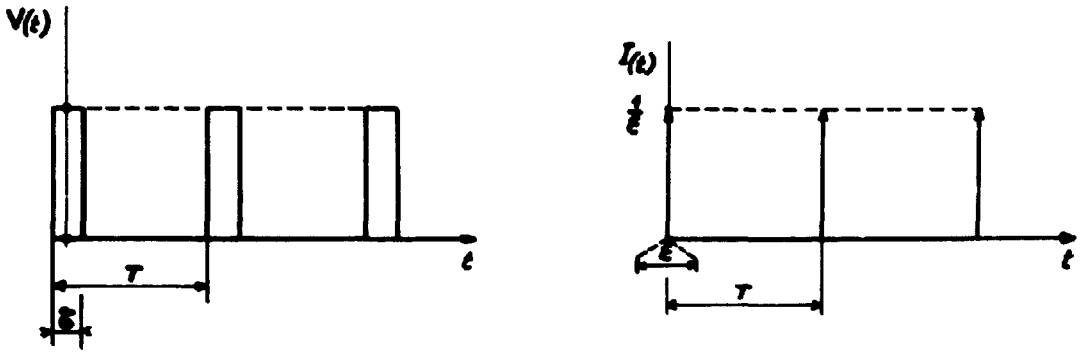


Fig. 4

II - Intégration de l'équation différentielle du mouvement

Nous allons rechercher la solution de l'équation (C6) dont les conditions initiales sont :

$$x\ (0) = x_o \qquad \text{(C7)}$$

$$\dot{x}\ (0) = x_o \qquad \text{(C8)}$$

l'équation (C6) étant linéaire, cette solution sera obtenue en additionnant l'intégrale particulière de (C6), sans second membre, satisfaisant aux conditions initiales (C7) et (C8) et l'intégrale particulière de l'équation (C6) complète dont les conditions initiales sont :

$$x\ (0) = 0 \qquad \text{(C9)}$$

$$\dot{x}\ (0) = 0 \qquad \text{(C10)}$$

1. L'oscillation libre

Il s'agit de trouver l'intégrale de l'équation homogène :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k^2\ x = 0 \qquad \text{(C11)}$$

dont les conditions initiales sont x_o et $\dot{x}_o$. Un calcul classique donne la solution :

$$x\ (t) = \sqrt{x_o^2 + \frac{\dot{x}_o^2}{Q^2\,\Omega^2}}\ \sin\left[Q\,\Omega t + \text{Arctg}\ Q\Omega \frac{x_o}{\dot{x}_o}\right] \qquad \text{(C12)}$$

$Q\Omega$ étant la pulsation de l'oscillation bétatron horizontale :

$$Q\ \Omega = \frac{k}{\sqrt{m}} \qquad \text{(C13)}$$

la vitesse angulaire de rotation de la particule étant désignée par la notation Ω .

2. L'oscillation forcée

Il s'agit de trouver l'intégrale x (t) de (C6) déterminée par les conditions initiales (C9) et (C10). En fait, ainsi que la suite le montrera, nous allons restreindre notre ambition au calcul d'une fonction x' (t) qui coïncide avec la solution x (t) aux instants O, T, ... n T, ... etc.

a) Transformation de Laplace en p

Elle nous permet de mettre le problème sous la forme symbolique :

$$X\ (p) = \frac{\tau}{m}\ \frac{L\,[d\ (t)\ I\ (t)]}{p^2 + Q^2\Omega^2} \qquad \text{(C14)}$$

en introduisant la fonction de "transfert" H (p) de l'oscillation

$$H(p) = \frac{\tau}{m} \quad \frac{1}{p^2 + Q^2\Omega^2} \qquad \text{(C15)}$$

la relation précédente s'écrit :

$$H(p) = H(p)\, L\left[d(t)\, I(t) \right]$$

Remarquons alors que la fonction d (t) I (t) n'est pas autre chose que la fonction d (t) I (t) échantillonnée à la cadence $\frac{1}{T}$, fonction désignée de façon classique par la notation $d^*(t)$, on a donc finalement la correspondance fonctionnelle :

$$X(p) = H(p).D^*(p) \qquad \text{(C16)}$$

en posant :

$$D^*(p) = L \quad d^*(t) \qquad \text{(C17)}$$

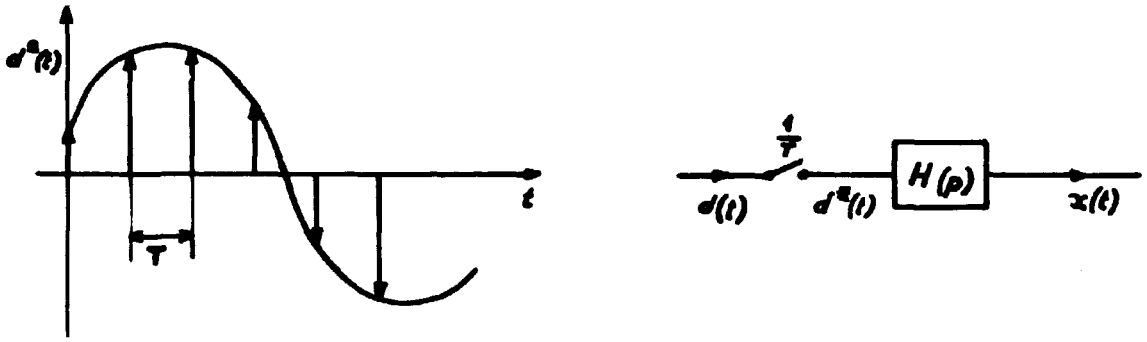


Fig. 5

b) Transformation de Laplace en z

Si on se limite à la détermination de la fonction x (t) aux instants d'échantillonnage O, T, ... nT, ... (positions radiales de la particules à ses passages successifs dans le percuteur) en renonçant à la connaissance complète de l'intégrale x (t) recherchée, on sait qu'on a la relation symbolique :

$$X^*(p) = H^*(p)\, D^*(p) \qquad \text{(C18)}$$

$H^*(p)$ étant la fonction de transfert échantillonnée du système.

En prenant une nouvelle variable symbolique z, définie par

$$z = e^{Tp} \qquad \text{(C19)}$$

la correspondance (C18) devient

$$X(z) = H(z).D(z) \qquad \text{(C20)}$$

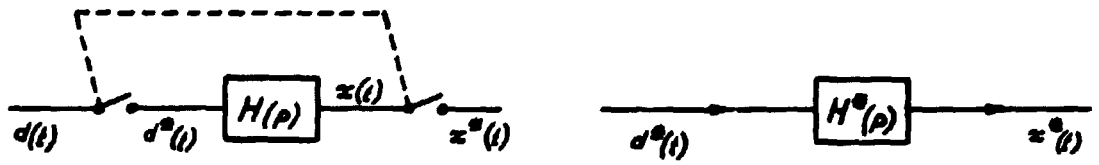


Fig. 6

En consultant une table de transformées en z[1] on voit que :

$$H(z) = \frac{\tau}{mQ\Omega} \times \frac{z \sin Q\Omega T}{z^2 - 2z \cos Q\Omega T + 1}$$

c'est-à-dire puisque vitesse angulaire et période de rotation sont liées par :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$H(z) = \frac{\tau}{mQ\Omega} \times \frac{z \sin 2\pi Q}{z^2 - 2z \cos 2\pi Q + 1}$$

Par ailleurs si l'expression de la force magnétique perturbatrice est :

$$d(t) = D \sin \left[\omega t + \varphi\right]$$

sa transformée en z a pour valeur :

$$D(z) = D \frac{z\left[z \sin\varphi + \sin(\omega T - \varphi)\right]}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

d'où finalement

$$X(z) = \frac{\tau D \sin 2\pi Q}{m Q \Omega} \times \frac{z^2\left[z \sin\varphi + \sin(\omega T - \varphi)\right]}{(z^2 - 2z \cos Q\Omega T + 1)(z^2 - 2z \cos\omega T + 1} \qquad \text{(C21)}$$

En décomposant la fraction rationnelle $\frac{X(z)}{z}$ en éléments simples et en consultant une table d'inversion de la transformation en z, on aboutit à :

$$x'(t) = \frac{\tau D \left[\sin\varphi \sin Q(\Omega t + 2\pi) + \sin(\omega t - \varphi) \sin Q\Omega t - \sin 2\pi Q \sin(\omega t + \varphi)\right]}{2m Q\Omega (\cos 2\pi Q - \cos \omega T)} \qquad \text{(C22)}$$

Soulignons que la fraction x' (t) définie par (C22) n'est pas l'intégrale particulière x (t) de l'équation différentielle (C6) satisfaisant aux conditions initiales (C9) et (C10), mais coïncide seulement avec cette intégrale aux instants O, T, ... nT, ... où la particule observée traverse le percuteur.

---

[1] voir par exemple J. RAGAZZINI et C. FRANKLIN : Sampled data control system. (Mc GRAW HILL)

Il résulte de la formule (C22) que la fonction x' (t) se présente comme la superposition de deux termes oscillatoires de pulsations $Q\Omega$ et ω ; la suite va nous montrer que le terme en ω est nettement prédominant dans le cas de notre machine.

D - RESULTATS NUMERIQUES

I - Les mesures faites à Saturne ont montré qu'aux énergies élevées, l'amplitude maximale de l'oscillation bétatron libre était de l'ordre de 3 cm.

II - L'expression de la fonction x' (t) peut se mettre sous la forme suivante plus commode pour les calculs :

$$x'(t) = \frac{\lambda(1+k)}{2Q(\cos 2\pi Q - \cos\omega T)} \times \frac{P}{B}\left[\sin\varphi \sin Q(\Omega t + 2\pi)\sin(\omega T - \varphi)\sin Q\Omega t - \sin 2\pi Q \sin(\omega t + \varphi)\right] \quad (D1)$$

λ représentant la longueur azimutale du percuteur, P la valeur de crête de l'induction magnétique perturbatrice et k étant le facteur de forme de l'accélérateur.

1. Approximation : la pulsation ω de la perturbation et la période de rotation T de la particule aux énergies élevées ont des valeurs telles que l'angle ωT est très petit : 0,12 radian à partir d'un champ de guidage de 1 Tesla. Le déphasage initial φ qui satisfait évidemment à la double inégalité :

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \omega T$$

est donc également très petit.

Par contre, le sinus de l'angle $2\pi Q$ avec Q = 0,72 vaut 0,98. Il en résulte qu'aux grandes amplitudes une excellente approximation de x' (t) sera :

$$x'(t) = \frac{-\lambda(1+k)\sin 2\pi Q}{2Q(\cos 2\pi Q - 1)} \quad \frac{P}{B} \sin\omega t \quad (D2)$$

ou numériquement :

$$x'(t)\ \text{cm} = -150\,\frac{P}{B}\sin\omega t \quad (D3)$$

Les expressions (D2) ou (D3) prouvent que les grandes oscillations forcées sont cohérentes.

Une particule quelconque du faisceau atteindra son maximum d'élongation X au droit du percuteur au passage de rang $n \simeq \frac{\Omega}{4\omega}$ soit environ 13,4 µs après le déclenchement de la décharge. Ce maximum X sera proportionnel à l'induction magnétique perturbatrice, donc à la tension initiale des capacités, et inversement proportionnel au champ principal de guidage, donc aussi à la quantité de mouvement des particules.

A titre d'exemple, la formule (D3) indique que pour une induction magnétique B de 1,5 Tesla et une tension de charge des capacités de 20 kV la déviation maximale X sera

de 9,5 cm.

L'oscillation bétatron libre qui reste petite devant l'oscillation forcée cohérente ne changera donc pas sensiblement ce résultat. Par contre, elle interviendra pour étaler dans le temps l'impact du faisceau sur une cible épaisse située au droit du percuteur.

Le temps de balayage d'une telle cible résulte évidemment de la dérivation par rapport au temps des formules (D2) ou (D3) : on voit donc que pour éviter un allongement prohibitif, on sera conduit à "utiliser" le faisceau avant que l'amplitude maximale X soit atteinte.

2. Conséquences : il résulte de la formule approchée (D2) qu'en raison de la dissymétrie de la boucle de couplage du percuteur par rapport à l'orbite théorique, il sera préférable de fixer les polarités de façon que l'induction magnétique perturbatrice P et l'induction de guidage B soient de sens opposés.

Par ailleurs, pour profiter de la déviation x' (t) donnée par (D1) ou (D2), on peut tout aussi bien introduire dans ce cas une cible externe située azimutalement une demi-longueur d'onde bétatron après le percuteur (mises à part toutes difficultés pouvant provenir de la croissance du champ magnétique de guidage).

Enfin l'incrément par tour de x' (t) étant faible, il en résulte qu'au point diamétralement opposé au percuteur la position radiale du faisceau sera voisine de - 1,5 x' (t).

Les considérations sur l'élargissement de l'impact dû aux oscillations bétatron libres restent évidemment les mêmes que dans le cas de la cible placée au droit du percuteur.

E - CALCUL DU CHAMP REEL DANS LE PERCUTEUR. EFFET D'ECRAN

Les vérifications expérimentales (mesure de la déviation maximale des particules) ne se sont malheureusement pas avérées concorder avec les calculs exposés ci-dessus. Rappelons que ces calculs supposent un champ uniforme dans toute la zone utile du percuteur et d'intensité 2.10^{-6} Ts/A, c'est-à-dire qu'ils ne tiennent compte de la présence d'aucun blindage.

En fait, la section droite contenant le percuteur est presque exclusivement construite en duralumin. La distance des barres aux parois étant faible, des courants de Foucault relativement importants y prennent naissance, pouvant atténuer considérablement le champ dans la zone utile.

On s'est donc attaché à obtenir des méthodes de calcul approchées de plus en plus précises du champ dans le percuteur, afin de pouvoir ensuite calculer les trajectoires des particules compte tenu des effets de blindage. Tous les calculs qui vont suivre ont été effectués sur un ordinateur IBM 7090.

I - Problème plan - Hypothèses de départ

Dans un but de simplification, on a décidé dans une première étape de calculer le

champ magnétique existant dans le percuteur en considérant ce dernier azimutalement indéfini, afin de se ramener à un problème plan. On cherche à calculer le champ dans le plan médian z = o en fonction du rayon r.

L'origine des abscisses est prise sur l'orbite d'équilibre. Les abscisses positives sont comptées vers l'extérieur de la machine. On supposera que la paroi est un conducteur parfait à la fréquence considérée, c'est-à-dire que le champ sera partout tangent aux parois.

Deux méthodes de calcul ont été utilisées successivement et ont donné des résultats concordants.

1. Méthodes des images

Cette méthode de calcul du champ est la transposition d'une méthode très familière en électrostatique.

Considérons tout d'abord le champ créé par un conducteur rectiligne indéfini, en présence d'un plan P qui lui est parallèle et qui se comporte comme blindage parfait (résistance nulle aux courants de Foucault ou encore milieu à perméabilité magnétique nulle) à la fréquence du courant circulant dans le conducteur (fig. 7).

Fig. 7

Le champ créé dans tout l'espace à gauche du plan est le même que celui qui serait créé par ce conducteur auquel on adjoint un conducteur, "image" de celui-ci par rapport au plan, parcouru par un courant en un sens inverse du précédent. En effet, dans cette nouvelle configuration, le plan P est une "surface équipotentielle" pour les lignes de champ. Le champ en P est tangent à la paroi, et on ne modifie rien en "métallisant" cette surface, ce qui nous ramène à la première configuration. Les conditions aux limites étant les mêmes dans les deux cas, les deux systèmes sont bien équivalents.

Notons au passage que le système de deux conducteurs A, B, parcourus par des courants de même sens, serait équivalent à celui d'un conducteur unique A en présence d'un plan P de perméabilité infinie (voir fig. 8) ; cette remarque permettrait de traiter le cas d'un blindage magnétique.

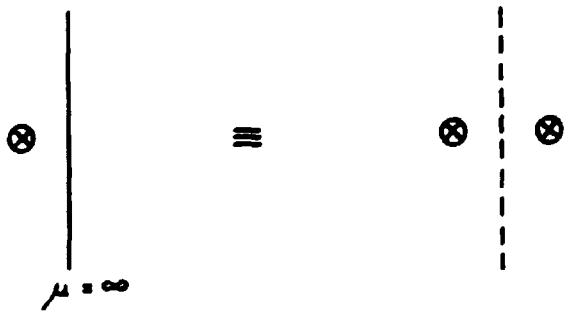


Fig. 8

Considérons maintenant le cas d'un conducteur toujours rectiligne et indéfini compris entre deux plans également indéfinis, parallèles entre eux et au conducteur. On peut considérer d'abord l'image A_1 de ce conducteur A_0 par rapport au plan P_1. Puis les images B_0 et B_1 de A_0, A_1 par rapport à P_2 puis les images A_2 A_3 de B_0, B_1 par rapport à P_1, les images B_2, B_3 de A_2, A_3 par rapport à P_2 et ainsi de suite indéfiniment (voir fig. 9).

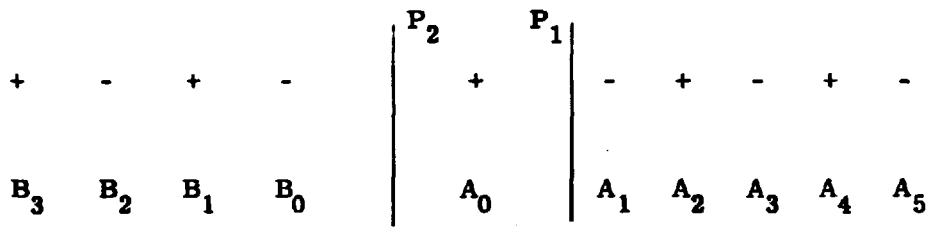


Fig. 9

Nous dirons alors que le champ en un point quelconque de la région comprise entre les plans P_1 et P_2 est représenté par la somme de la série dont les termes représentent les contributions des diverses images. On n'oubliera pas de changer le sens du courant, c'est-à-dire le "signe" de l'image à chaque symétrie par rapport à un plan.

On obtient, ainsi que le montre la figure 9, une série alternée.

Le problème qui nous occupe réellement, compte tenu de l'hypothèse simplificatrice d'une extension azimutale infinie du percuteur, peut être représenté schématiquement (fig. 10) où l'on trouve une coupe radiale de la section droite contenant les conducteurs.

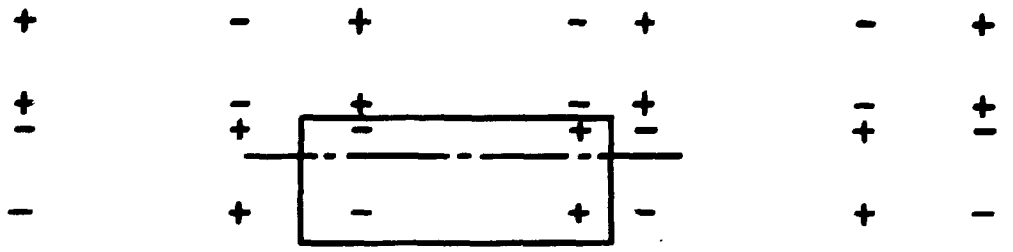


Fig. 10

Pour tenir compte de l'effet des parois horizontales de la section droite, nous utiliserons le même procédé que pour les parois verticales, nous prendrons une série infinie d'images de chaque terme de la série infinie "horizontale" avec les mêmes conventions de signe que précédemment. Ainsi l'induction en un point P du percuteur sera exprimée sous forme d'une série double

$$\vec{B} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{dB_{ij}}$$

$\overrightarrow{dB_{ij}}$ représentant la contribution de l'image ij.

Comme on s'intéresse exclusivement au champ dans le plan médian horizontal, il suffit du fait de la symétrie, de tenir compte de la moitié seulement des images (celles qui correspondent à des cotes Z positives, par exemple) et de doubler la valeur obtenue, en ne considérant d'ailleurs que la composante verticale dB_{ij} des inductions élémentaires puisque, toujours par symétrie, le champ dans le plan médian est vertical.

On aura donc $\vec{B} = 2 \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \overrightarrow{dB_{ij}}$

L'induction créée au point P de coordonnées (r,0) par une barre indéfinie dont la trace M_{ij} dans le plan (r,z) a pour coordonnées (r_i, z_i) est donnée par :

$$\left| \overrightarrow{dB_{ij}} \right| = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \quad \text{(B en Ts, I en A, R en m)} \quad \mu_o = 4\pi . 10^{-7}$$

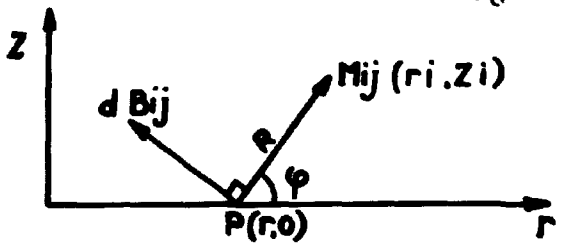


Fig. 11

En exprimant B en gauss, I en ampères, R en mm, il vient

$$\left| \overrightarrow{dB_{ij}} \right| = \frac{2I}{R}$$

soit encore

$$\left| \overrightarrow{dB_{ij}} \right| = \frac{2\ I}{\left[(r_i-r)^2+z_i^2\right]^{1/2}}$$

la composante verticale dB_{ij} s'écrira :

$$dB_{ij} = \frac{2\ I \cos\varphi}{\left[(r_i-r)^2+z_i^2\right]^{1/2}} = \frac{2\ I\ (r_i-r)}{(r_i-r)^2+z_i^2}$$

On voit figure 10 qu'en groupant les couches horizontales deux à deux on a encore une série alternée, ce qui assure la convergence du processus ; en effet, on remarquera en dérivant dB_{ij} par rapport à r_i que pour r, z, z_i donnés les dB_{ij} successifs sont décroissants si $r_i < r-z$ ou $r_i > r + z$.

A condition de prendre suffisamment de termes dans chaque couche horizontale, on est donc assuré de la convergence et le dernier terme calculé donne une limite supérieure de l'erreur commise.

Les positions successives des "images" des barres donnent lieu à une récurrence très simple qu'il semble inutile de mentionner ici.

Les calculs ont été menés de la façon suivante : pour tout point (r, 0) où l'on veut calculer le champ, on forme la série horizontale des "images" (c'est-à-dire les images par rapport aux parois verticales).

On continue la progression jusqu'à ce que le dernier terme ne représente que 1/1000 de la somme déjà calculée.

Pendant ce calcul, on compte le nombre i des images utilisées.

Puis on fait intervenir les diverses couches (en nombre j) horizontales, images de la couche précédente limitée à i éléments par rapports aux parois horizontales de la section droite. Les couches successives de même signe sont groupées pour obtenir une série simplement alternée. On arrête les calculs lorsque la contribution de la dernière double couche est égale à 1/100 de la valeur déjà calculée du champ.

On estime connaître alors le champ au point considéré à 10^{-2} près.

Les calculs devant être faits sur un ordinateur, on s'est attaché surtout à obtenir un test simple pouvant être effectué rapidement à chaque cycle de calcul plutôt qu'une limitation précise de l'erreur commise sur la somme de la série double qui, étant donné sa complexité relative, aurait donné lieu à un test plus long.

Le nombre total d' "images" dont on a effectivement tenu compte dépend ainsi du point où l'on calcule le champ.

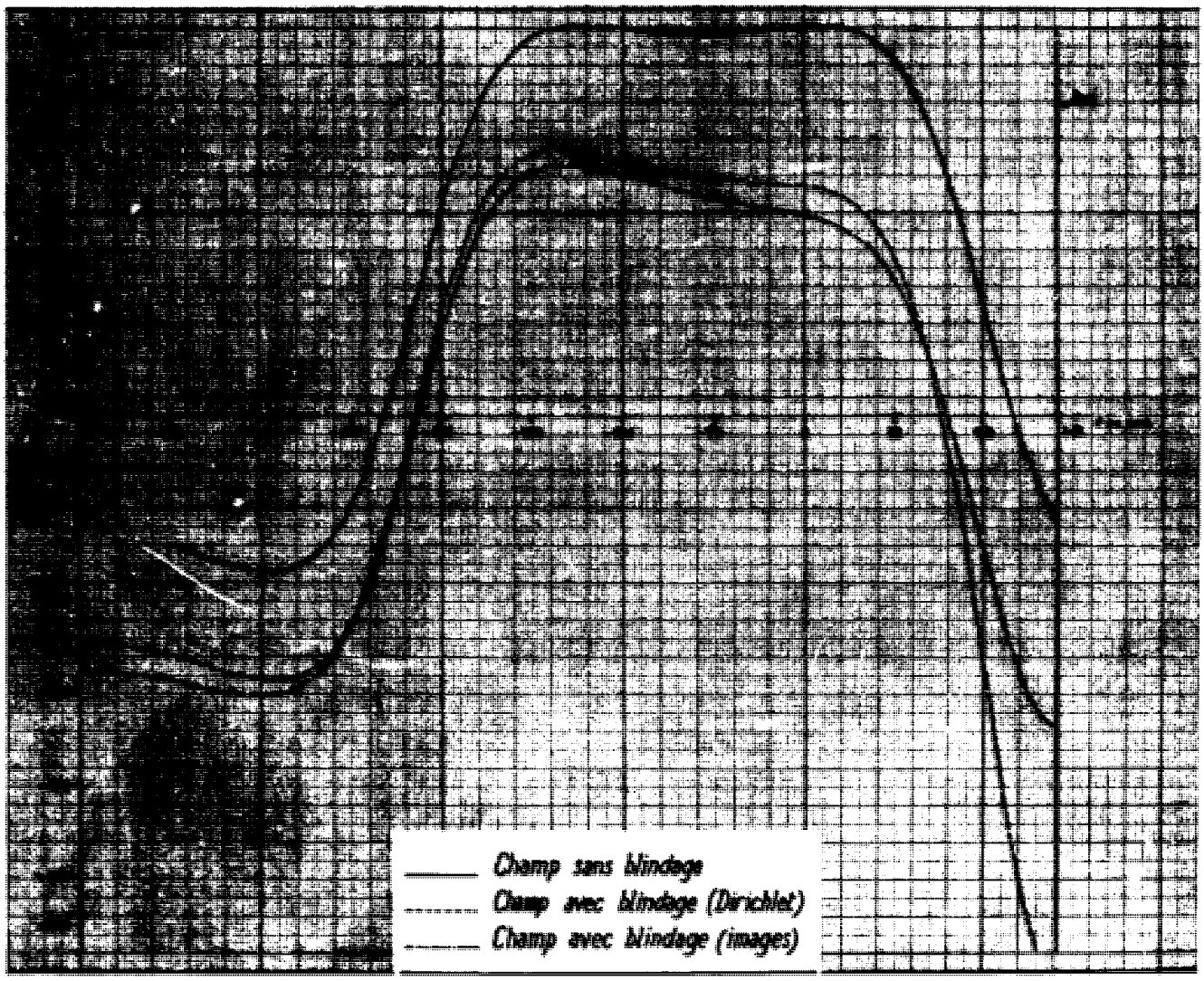


Figure 12 - CHAMP AVEC ET SANS BLINDAGE
Problème Plan
I = 10 000 A

Dans notre cas il était compris entre quelques centaines et environ 10 000.

Nous avons constaté expérimentalement une difficulté dans ce calcul : en un point où le champ total est très faible, la convergence est très lente. Le calcul du champ en ces points peut prendre un temps considérable. Etant donné que l'on s'intéresse essentiellement au champ dans les régions où celui-ci est relativement important, un critère de valeur absolue pour le $n^{ème}$ terme de la série semblerait mieux adapté.

Un autre critère a été utilisé, tant pour estimer l'erreur commise sur le calcul du champ, que pour juger de la validité de la méthode.

Il se fonde sur les considérations suivantes : si le problème du calcul du champ a bien été résolu, on doit retrouver les conditions aux limites du problème physique, à savoir un champ tangent aux parois, pour tous les points de ces dernières.

On calculera donc en même temps que le champ dans le plan médian, les deux composantes du champ (en prenant le même nombre de termes dans la série) en quelques points tests de la paroi, et on évalue le rapport de la composante "résiduelle" normale à la composante tangente de la paroi.

Ces contrôles effectués en quelques points de la paroi ont conduit toujours à des rapports largement inférieurs à 10^{-3}.

La figure 12 montre la courbe de champ dans le plan médian du percuteur, avec et sans blindage, pour un courant de 10 000 A dans chaque conducteur du percuteur (voir p. 13)

La figure 13 donne les cotes de la section droite.

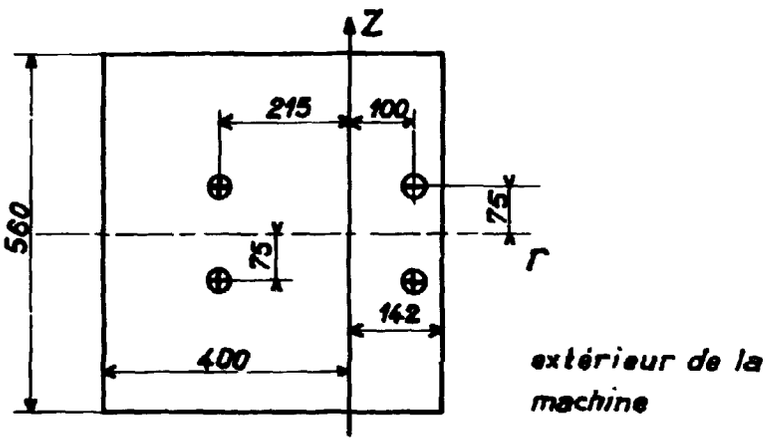


Fig. 13

Toutes les cotes sont indiquées en mm.

L'origine des r correspond à l'orbite d'équilibre.

2. Calcul du champ ramené à un problème de Dirichlet

Afin de confirmer les résultats obtenus au chapitre précédent, on a décidé de reprendre le calcul du champ dans les mêmes hypothèses, mais en utilisant une méthode toute différente, permettant de se ramener à la résolution d'un problème de Dirichlet.

Pour cela, on remarquera que, compte tenu des hypothèses, la répartition du champ magnétique est la même que celle qui existerait dans un guide d'ondes de mêmes dimensions, où se propagerait dans le sens longitudinal une onde TEM.

Dans un tel guide supposé infini, pour se ramener à un problème plan, le champ électrique E dérive d'un potentiel scalaire V qui vérifie l'équation de Laplace partout à l'extérieur des conducteurs, avec les conditions aux limites $V = 0$ sur les parois et $V = \pm V_o$ = constante sur les conducteurs, V_o étant une constante à déterminer en fonction de l'intensité circulant dans les barres, les signes + et - correspondant respectivement aux conducteurs "aller" et "retour".

Si l'on commence par prendre pour V_o une valeur arbitraire, il faut résoudre un problème de Dirichlet pour déterminer V partout ; en effet, il faut déterminer une fonction V vérifiant $V = 0$ dans un domaine fermé, et prenant des valeurs déterminées sur les frontières du domaine.

Nous verrons plus loin comment on peut résoudre ce problème.

Ayant déterminé V dans le domaine, on peut calculer E par :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{grad\ V}$$

et H par :

$$H = - \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\ \vec{E} \wedge \vec{z}$$

$\vec{z}$ étant le vecteur unitaire dans la direction de propagation.

Nous déterminerons la valeur de V_o, et par conséquent les valeurs de V partout, en valeur absolue (elles n'étaient connues jusqu'à présent qu'à un coefficient multiplicatif près dépendant de V_o), en écrivant que sur un contour C intérieur au domaine fermé et entourant complètement un seul conducteur,

$$\int_C H\, dl = I$$

I étant l'intensité circulant dans le conducteur.

Pour résoudre le problème de Dirichlet, on utilise une méthode classique : l'approximation par itération (cf DURAND Electrostatique et Magnétostatique p. 443).

Cette méthode nous a paru plus facile à adapter au calcul électronique que la méthode de relaxation (cf SOUTHWELL "Relaxation Methods"), qui converge en principe plus rapidement mais donne lieu à un programme plus complexe, si bien que le gain de temps machine ne semble pas évident.

Nous avons suivi strictement la méthode exposée par DURAND, en prenant un réseau à maille carrée de 1 cm de côté, qui comprenait donc 55 x 57 = 3 135 points.

Les contours extérieurs de la cavité passaient ainsi exactement par les sommets du réseau. Les barres ont été représentées de façon approchée par des conducteurs de section de 1 cm de côté, disposés également aux sommets du réseau. Plusieurs essais ont été tentés pour améliorer la convergence par l'emploi de la fonction différence et extrapolation (DURAND p. 445).

La difficulté de l'utilisation de cette fonction en calcul automatique réside dans le choix du "critère d'extrapolation", c'est-à-dire du nombre de cycles élémentaires après lequel on fait une extrapolation. Il semble difficile de trouver un critère simple ne demandant qu'un temps de calcul négligeable devant la durée du cycle d'itération.

Une étude expérimentale nous a conduit, dans le cas particulier étudié ici, à faire une extrapolation tous les 50 cycles.

L'itération a été poursuivie sur environ 900 cycles.

On sait que la précision du résultat obtenu est fonction d'une part du pas du réseau, d'autre part du nombre d'itérations effectuées.

Il faut donc déterminer l'instant à partir duquel on n'améliore plus les résultats sans passer à un réseau plus fin.

Là encore un critère automatique conduirait à une perte de temps considérable en machine et à une complication exagérée du programme.

Nous avons finalement utilisé comme critère la comparaison des cartes des "écarts" au premier et second ordre en tous les points du réseau (critère indiqué par DURAND).

L'écart au premier ordre est défini en un point o du réseau par :

$$\delta_1 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4\,V_o$$

(voir figure 14)

Les quantités δ_1 sont les résidus obtenus en utilisant la formule à 4 termes. L'écart au second ordre est défini par :

$$\delta_2 = 4(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 - 20\,V_o$$

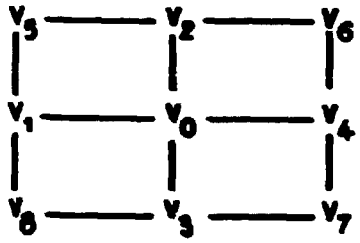


Fig. 14

les δ_2 sont les résidus obtenus en utilisant la formule à 8 termes.

On considère qu'il faut arrêter le calcul (ou passer à un réseau plus fin) lorsque tous les δ_2 sont du même ordre de grandeur que les δ_1 correspondants.

Nous avons vérifié effectivement qu'il en était ainsi dans notre cas après 900 itérations et que la précision des résultats ne pouvait donc être améliorée qu'en passant à un réseau à mailles plus fines.

D'une façon générale, il semble d'ailleurs avantageux de démarrer les calculs avec une maille très lâche pour ensuite passer progressivement à un pas plus fin, au moins dans la région où l'on calculera ensuite le champ. L'ordinateur I.B.M. 7090 semble bien adapté à ce genre de calcul.

Ayant ainsi déterminé la répartition du potentiel aux sommets du réseau en fonction d'un potentiel V_o arbitraire sur les barres (nous avons pris ± 1 000 V) il ne reste plus qu'à "normer" les valeurs de V, c'est-à-dire en fait à relier V_o à l'intensité I circulant dans chaque barre.

Pour cela on a calculé :

$$\int_c H\,dl = I$$

c étant un contour carré de 15 cm de côté, entourant un conducteur.

Cette intégrale a été évaluée en utilisant la première règle de SIMPSON, les différentes valeurs de H ayant été calculées par les formules de différentiation à six points de BICKLEY (cf SOUTHWELL Relaxation methods in theoretical physics, appendice).

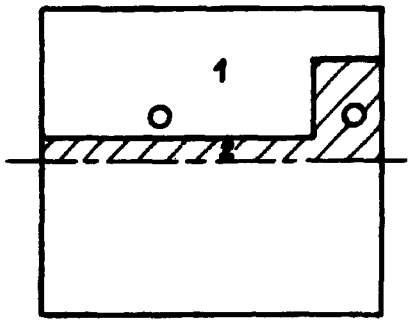
Après une série complète de calculs destinés à mettre au point cette méthode, nous avons obtenu les valeurs du potentiel dans tout le domaine avec une précision de quelques 10^{-3}.

Nous remarquerons cependant que cette méthode ne semble pas particulièrement adaptée au problème posé.

En effet, la grandeur calculée en dernier ressort est le champ et non le potentiel. De très faibles erreurs sur ce dernier peuvent conduire à des erreurs considérables sur sa dérivée. D'autre part, la précision n'est pas la même en tout point du réseau. Elle est moins bonne dans les zones à fort gradient, et très loin des parois, c'est-à-dire en particulier dans la zone intéressante au voisinage de l'orbite d'équilibre.

Malgré cela les résultats obtenus peuvent être considérés comme parfaitement satisfaisants, comme le montre la figure 12 où l'on peut comparer les valeurs de champ calculées par les deux méthodes.

Signalons cependant que la méthode des "images" est bien plus rapide. On peut constater que les écarts les plus importants ont lieu au voisinage de la paroi extérieure de la section droite. Cette constatation est tout à fait normale car dans cette région deux "mailles" seulement séparent de la paroi le conducteur porté au potentiel V_o. Des résultats plus précis auraient été obtenus en prenant localement dans cette zone un réseau plus fin.



REGION 1
réseau au pas de 1 cm

REGION 2
réseau plus fin

Fig. 15
Utilisation locale d'un réseau à pas plus fin

II - Calcul du champ dans l'espace. Méthode des images

Avant de reprendre le calcul des trajectoires des particules, on a décidé de s'attaquer au calcul du champ en un point quelconque du percuteur, en tenant compte de la longueur finie de celui-ci, et de l'effet des connexions frontales.

Pour ce faire, on a fait une fois de plus appel à la méthode des "images" (voir ci-dessus). Nous ne nous étendrons pas sur sa généralisation dans l'espace à trois dimensions; le champ en un point du percuteur sera considéré comme produit par une série infinie triple d' "images" d'une boucle "élémentaire". Cette série triple est obtenue comme précédemment, mais on adjoint à la série double utilisée plus haut une série d' "images" par rapport aux extrémités longitudinales de la section droite.

Pour simplifier le problème, on a considéré que la boucle du percuteur est rectangulaire, que l'épaisseur du conducteur est négligeable.

Chaque terme de la série triple représente le champ élémentaire dû à une "image".

Soient r,s,z les coordonnées du point M où on évalue le champ. Si les sommets de la boucle rectangulaire supposée parallèle au plan 0 r s, sont définis par leurs coordonnées r_1, s_1, r_2, s_2, z_1 (voir figure 16) la composante verticale (suivant 0z) du champ en M s'écrira :

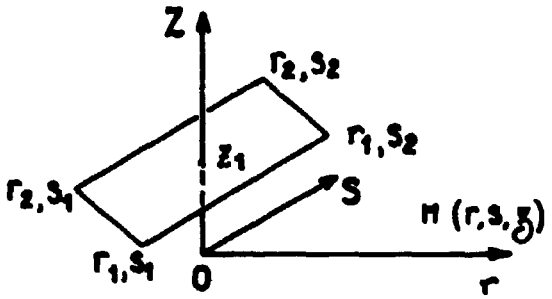


Fig. 16

$$H = \left\{ \left[\frac{(r_1-r)(s_2-s)}{\left[(r_1-r)^2+(s_2-s)^2+(z_1-z)^2\right]^{1/2}} \right] \left[\frac{1}{(r_1-r)^2+(z_1-z)^2} + \frac{1}{(s_2-s)^2+(z_1-z)^2} \right] \right.$$

$$+ \left[\frac{(r_1-r)(s-s_1)}{\left[(r_1-r)^2+(s_1-s)^2+(z_1-z)^2\right]^{1/2}} \right] \left[\frac{1}{(r_1-r)^2+(z_1-z)^2} + \frac{1}{(s_1-s)^2+(z_1-z)^2} \right]$$

$$+ \left[\frac{(r_2-r)(s_1-s)}{\left[(r_2-r)^2+(s_1-s)^2+(z_1-z)^2\right]^{1/2}} \right] \left[\frac{1}{(r_2-r)^2+(z_1-z)^2} + \frac{1}{(s_1-s)^2+(z_1-z)^2} \right]$$

$$\left. + \left[\frac{(r_2-r)(s-s_2)}{\left[(r_2-r)^2+(s_2-s)^2+(z_1-z)^2\right]^{1/2}} \right] \left[\frac{1}{(r_2-r)^2+(z_1-z)^2} + \frac{1}{(s_2-s)^2+(z_1-z)^2} \right] \right\} I$$

Etant donné la complexité du terme général de la série, l'évaluation de l'erreur commise sur le calcul de la série semble extrêmement difficile. On est cependant assuré de la convergence du processus à cause du caractère alterné de la série triple.

On a donc préféré évaluer expérimentalement l'erreur commise sur la somme en calculant successivement la série avec n puis n + 1 termes dans chacune des trois directions.

On a ainsi vérifié que les résultats étaient connus à 1 pour cent près.

Le temps de calcul nécessaire sur I.B.M. 7090 avec cette précision est d'environ 2 minutes pour 60 points ; seule la composante verticale est calculée.

Les figures 17 et 18 indiquent les valeurs de champ calculées suivant des coupes radiales ou longitudinales de la section droite.

L'abscisse s est comptée à partir de l'entrée du percuteur.

La figure 19 indique les cotes de la section droite et des conducteurs.

On constatera que l'approximation utilisée au chapitre précédent (percuteur de longueur indéfinie) permettait d'obtenir déjà d'excellents résultats.

III - Contrôle expérimental

On a mesuré l'induction en divers points du plan médian de la boucle à l'aide d'une bobine associée à un intégrateur.

L'appareil de mesure a ensuite été calibré de façon absolue en se référant à un champ magnétique connu.

Comme le montrent les figures 20 et 21 - coupe transversale à proximité du plan de symétrie et coupe longitudinale sur R_o - l'accord est satisfaisant entre les considérations théoriques développées au paragraphe E.II et les relevés expérimentaux, eu égard à la faible précision de nos mesures.

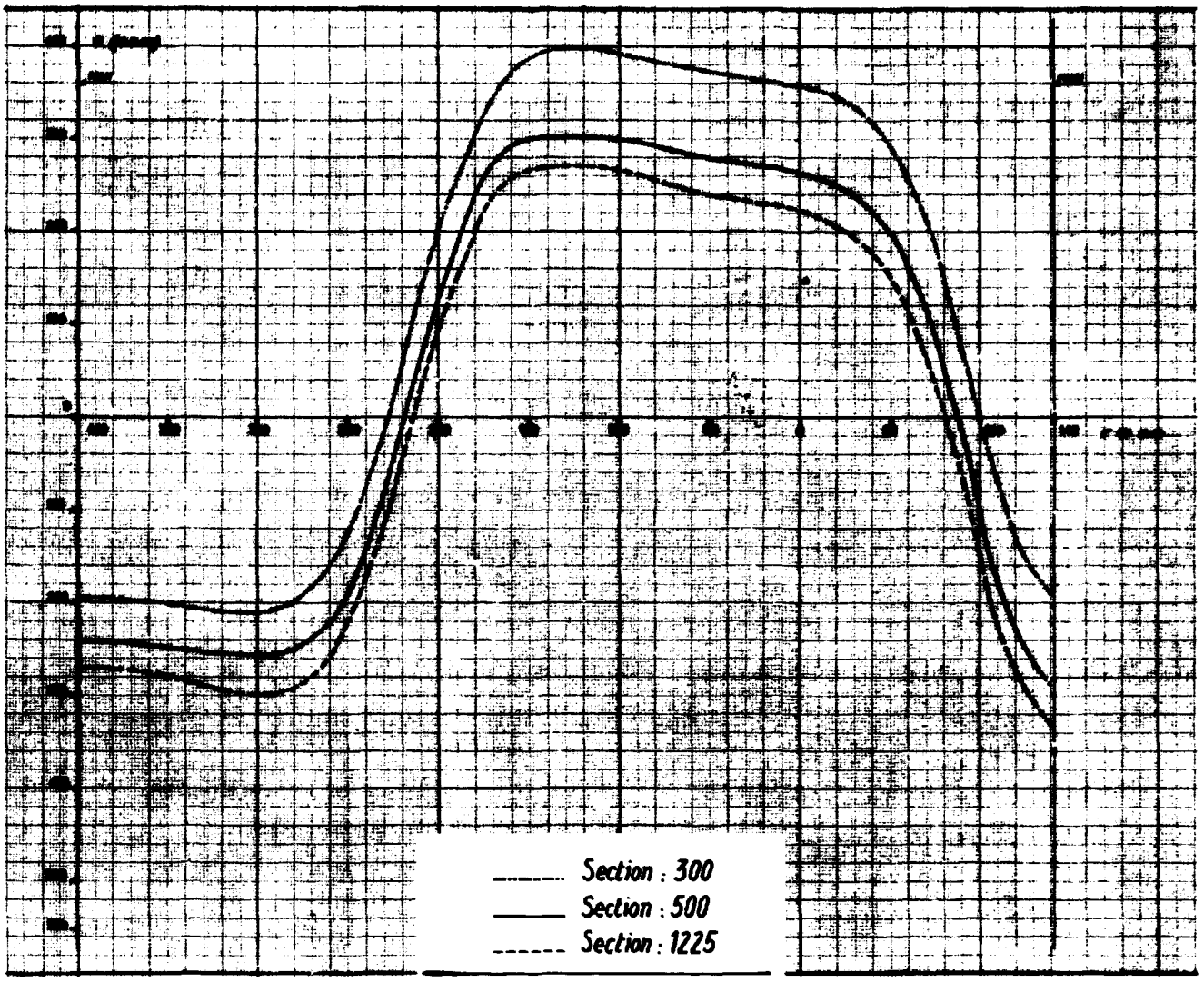


Figure 17 - COMPOSANTE VERTICALE DU CHAMP AVEC BLINDAGE

Calcul en trois dimensions

Coupes radiales de la section droite

I = 10 000 A

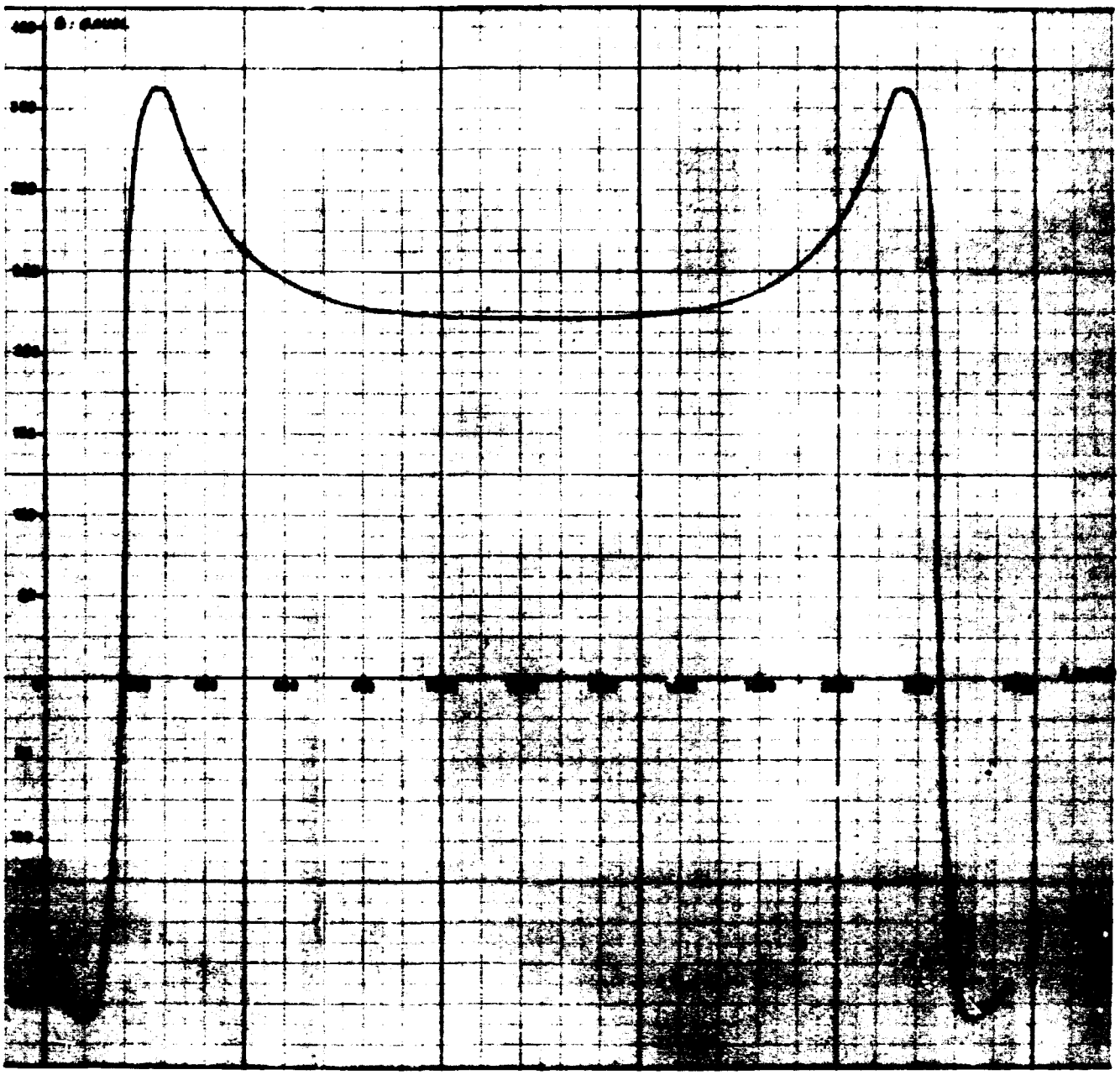


Figure 18 - COMPOSANTE VERTICALE DU CHAMP AVEC BLINDAGE

Calcul en trois dimensions -

Coupe longitudinale de la section droite

I = 10 000 A - R = Ro Z = o

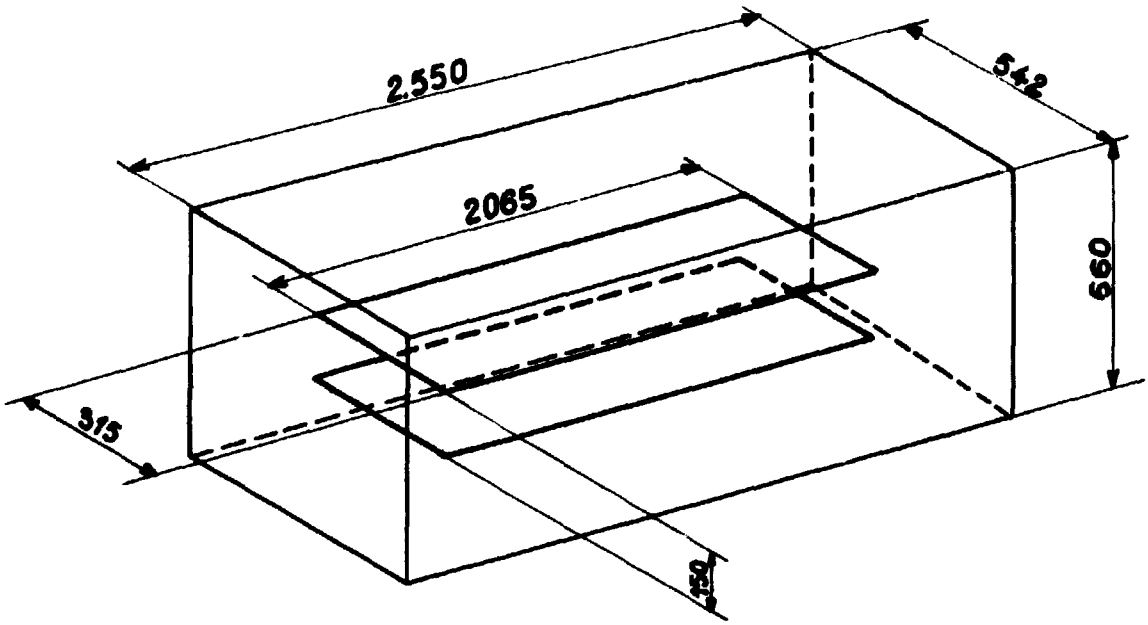


Fig. 19

F - TRAJECTOIRES DES PARTICULES

I - Calcul des trajectoires

En admettant que l'induction magnétique P dans le percuteur est uniforme et a pour expression :

$$P = Po \sin \frac{2\pi t}{T_1}$$

(T_1 = période de la décharge dans le percuteur), et en ne tenant pas compte explicitement de l'existence des sections droites dans la machine, les oscillations bétatroniques radiales sont régies par les équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{e\,v\,P}{m} \qquad (2)$$

en utilisant les notations classiques, avec $\omega = \frac{2\pi Q}{T}$

L'équation (2) est valable dans le percuteur, l'équation (1) partout ailleurs.

Pour tenir compte de l'inhomogénéité de l'induction dans le percuteur, on décompose celui-ci azimutalement en neuf sections, soit quatre sections de 10 cm de long à l'entrée, une section centrale de 165 cm, quatre sections de 10 cm à la sortie.

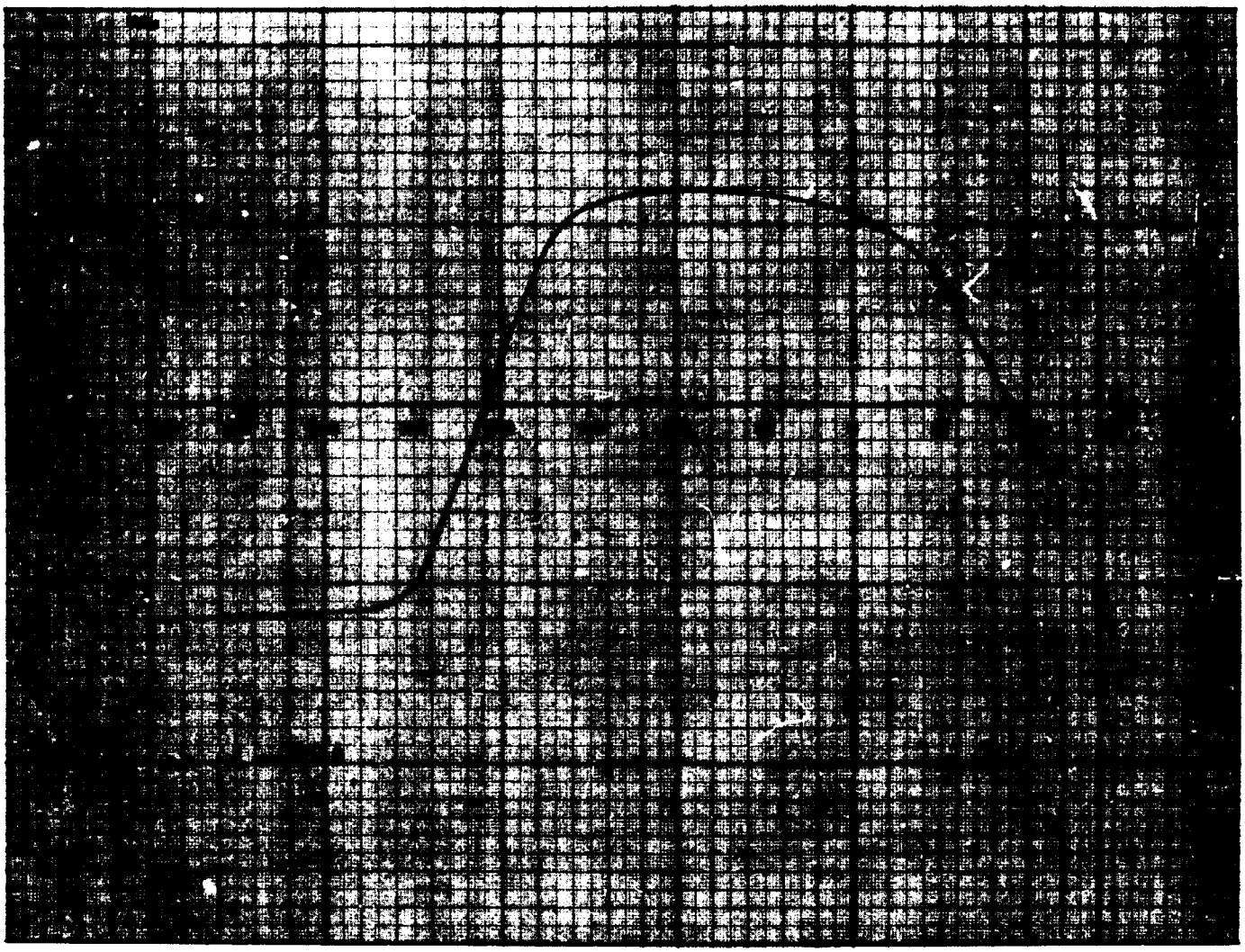


Figure 20 - CHAMP MAGNETIQUE DU PERCUTEUR

MESURE EXPERIMENTALE

Coupe radiale à 17 cm du plan de symétrie de la section droite

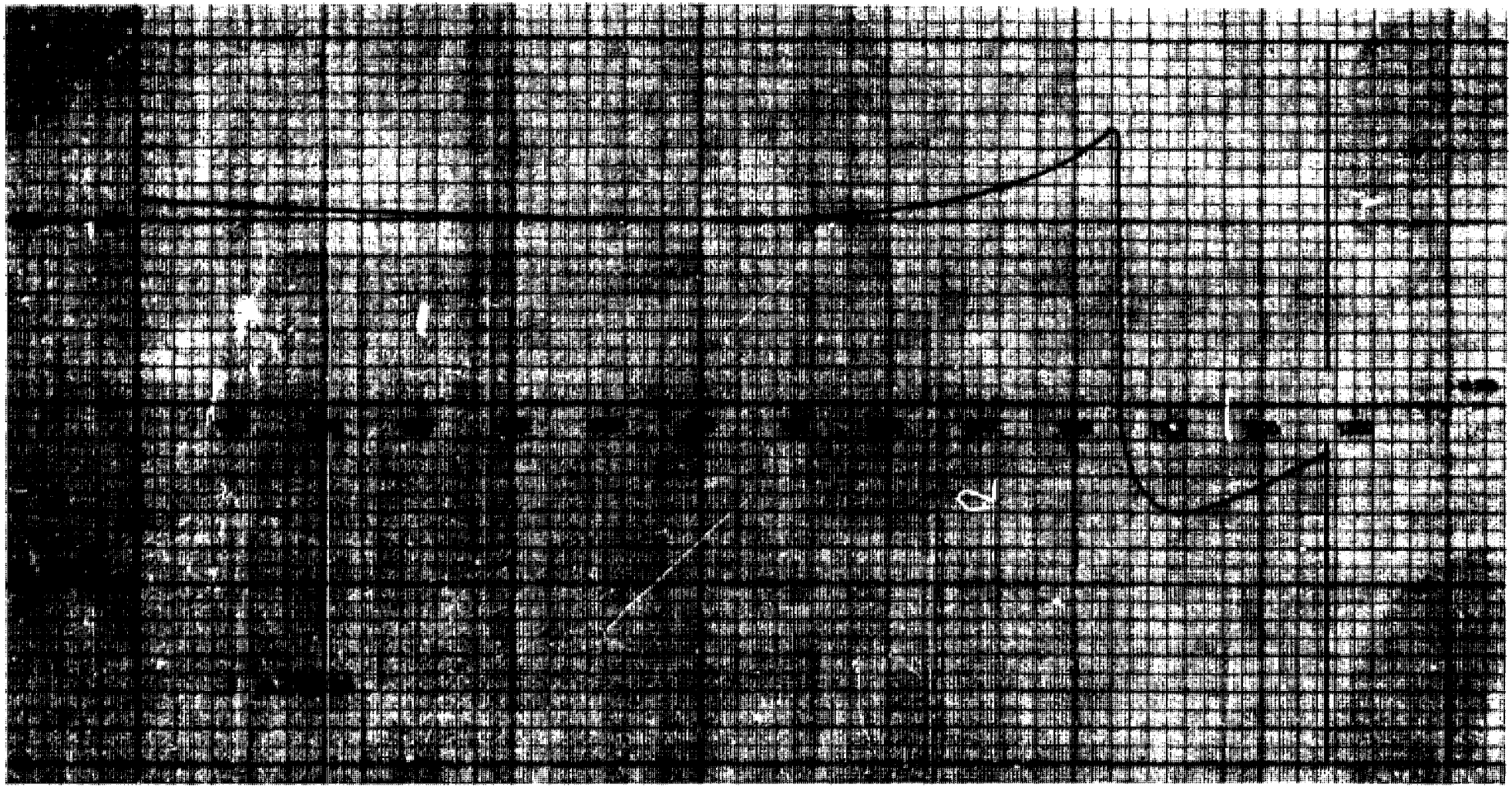


Figure 21 - CHAMP MAGNETIQUE DU PERCUTEUR

MESURE EXPERIMENTALE

Coupe longitudinale sur r_o

On calcule successivement dans chacune d'elles, à l'aide de l'équation (2), la déviation subie par la particule, en considérant le champ comme uniforme dans chaque région ; sa valeur est la moyenne du champ à l'entrée et à la sortie de cette zone, calculée par la méthode ci-dessus, et en tenant compte de la position radiale réelle de la particule à l'instant considéré.

Après sa sortie du percuteur, on calcule la trajectoire sur un tour de machine à l'aide de l'équation (1), pour obtenir les nouvelles conditions initiales à l'entrée du percuteur. On admet que la variation de P en fonction du temps est négligeable pendant une traversée du percuteur par la particule.

Le découpage en sections inégales est justifié par la variation importante du champ à l'entrée et à la sortie du percuteur, et faible dans la partie centrale (cf fig. 18).

Les calculs ont été faits en prenant :

- induction dans l'aimant principal de Saturne $B = 1,5$ Ts
- période de décharge dans le percuteur $T_1 = 52$ µs
- période de ré olution d'une particule $T = 0,237$ µs
- intensité maximale dans le percuteur $I = 25$ kA
- nombre de longueurs d'onde bétatron par tour $Q = 0,6$ et $Q = 0,72$

Dans chaque cas on a considéré les deux sens possibles de l'induction P, les résultats n'étant pas identiques à cause de la dissymétrie du champ par rapport à l'orbite d'équilibre (cf fig. 17).

Les résultats obtenus pour les 50 premiers tours, correspondant à un quart de la pseudo-période, sont reproduits dans les tableaux 1, 2, 3 et 4. On y trouve pour chaque tour :

- l'élongation X entrée à l'entrée du percuteur
- l'élongation X sortie à la sortie du percuteur
- l'amplitude A de l'oscillation bétatron horizontale,
- l'élongation XSD2 au niveau de la section droite d'observation, soit 3/4 de tour de machine après le percuteur.

Les calculs sont faits pour une particule synchrone dépourvue au départ d'oscillations bétatron.

On constatera que dans tous les cas, la déviation maximale observée en SD2 est de l'ordre de 3 à 4 cm. Les résultats obtenus semblent concorder raisonnablement avec les mesures effectuées.

Signalons que le temps machine nécessaire à ce genre de calcul est de l'ordre de 20 minutes sur un ordinateur IBM 7090 pour 100 tours.

Cette série de calculs a été terminée par l'évaluation du champ dans la section radiale centrale du percuteur à une cote Z = + 10 mm au-dessus du plan médian (fig. 22).

Nous désirions connaître l'influence sur les trajectoires d'un éventuel décalage du faisceau par rapport au plan médian.

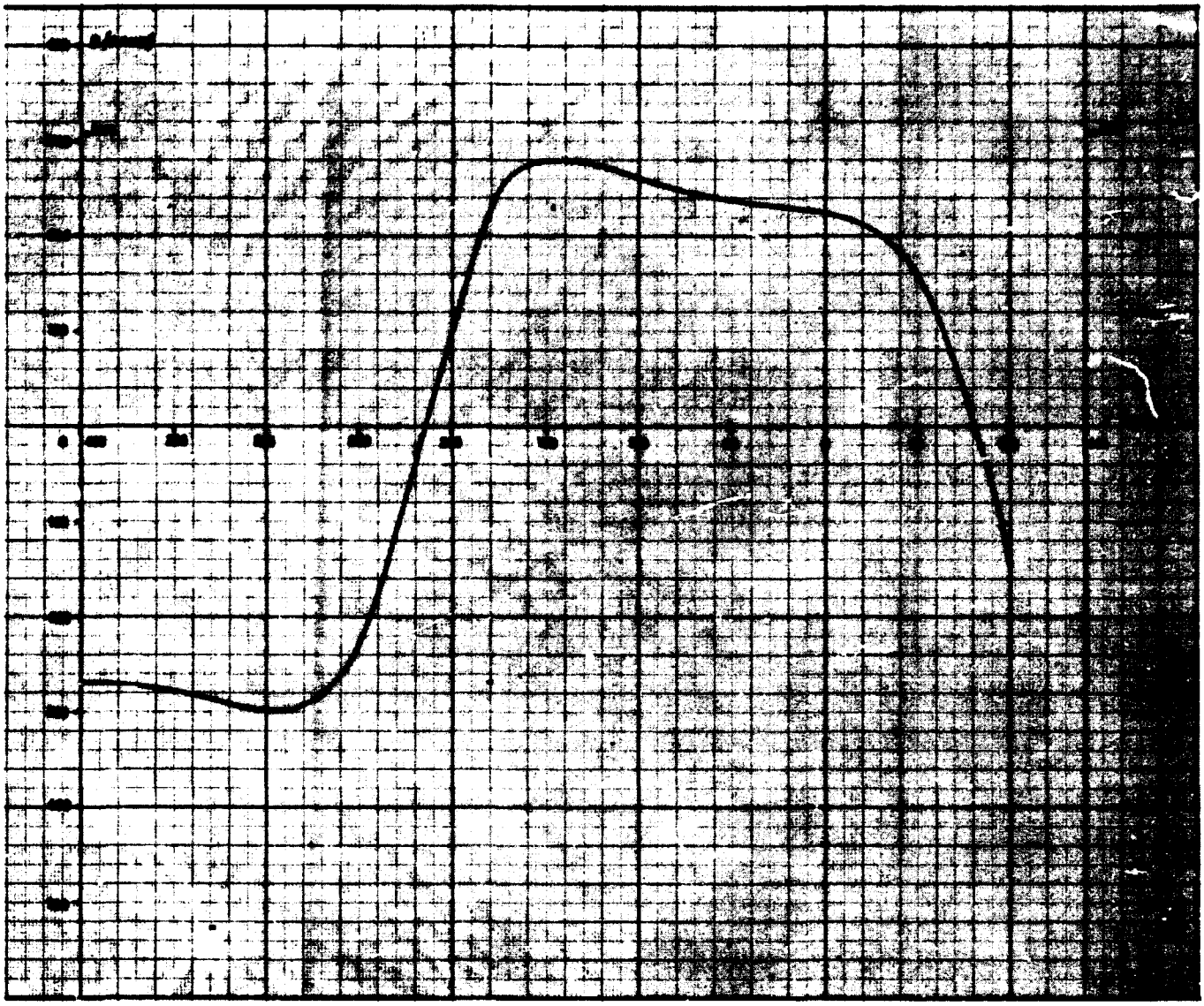


Figure 22 - COMPOSANTE VERTICALE DU CHAMP AVEC BLINDAGE
Calcul en 3 dimensions - coupe radiale de la section droite
I = 10 000 A - S = 1225 nm Z = 10

Les faibles différences observées par rapport au champ dans le plan médian (1 à 2 pour cent) nous ont conduit à renoncer à ce nouveau calcul de trajectoires.

De même, il semble sans intérêt majeur de reprendre les calculs avec la maille réelle de Saturne, c'est-à-dire en tenant compte explicitement de l'influence des sections droites.

II - Contrôle expérimental

Les vérifications ont été faites grâce aux électrodes de position radiale situées dans la section droite n° 2. Les photos reproduites (cf fig. 23 et 23 bis) montrent qu'il existe un assez bon accord entre les valeurs théoriques calculées et les mesures effectivement faites.

Il importe cependant de noter que pour les grandes oscillations horizontales (amplitudes supérieures à 5 cm) il se produit, environ 250 µs après l'application du champ magnétique perturbateur, des pertes de particules dues selon toute vraisemblance à un mécanisme synchrotron.

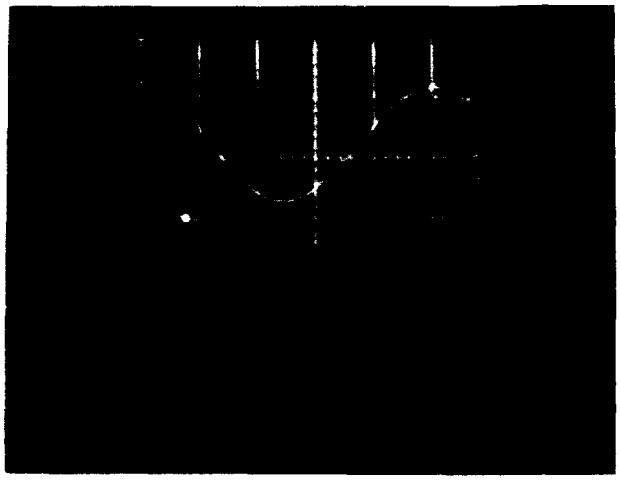


Fig. 23

t = 600 ms (B = 1,11 Ts)
(W = 2,02 GeV

tension de charge des capacités du percuteur 4,25 kV

balayage 10 µs/carreau

en haut : courant dans le percuteur
en bas : signal des électrodes radiales

amplitude de l'oscillation déduite de cette photographie 8,2 mm
amplitude calculée (Q = 0,72) 8,6 mm

Fig. 23 bis

t = 800 ms (B = 1,43 Ts)
(W = 2,79 GeV

tension de charge des capacités du percuteur : 5,5 kV

amplitude mesurée de l'oscillation 8,1 mm

amplitude calculée (Q = 0,72) 8,6 mm

TABLEAU 1

Q = 0,65 P/B > 0' I = 25 kA

Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2 mm	Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2 mm
1	0	-0,29	3,97	-0,6	26	19,5	19,2	50,7	-29,1
2	3,04	2,80	6,41	-4,01	27	20,1	20,1	30,4	-29,9
3	2,17	2,16	6,51	-3,46	28	19,0	18,9	52,5	-29,2
4	2,89	2,57	10,65	-4,79	29	21,9	21,8	54,0	-32,2
5	5,60	5,44	12,5	-7,80	30	20,1	20,1	54,0	-30,7
6	4,28	4,24	13,0	-6,86	31	21,9	21,6	56,7	-32,7
7	5,87	5,53	17,3	-9,02	32	22,4	22,5	56,4	-33,3
8	7,89	7,31	18,3	-11,3	33	21,3	21,2	58,3	-32,6
9	6,42	6,32	19,6	-10,3	34	24,0	24,0	59,2	-35,4
10	8,87	8,54	23,6	-13,2	35	21,9	21,9	59,5	-33,6
11	9,82	9,80	23,8	-14,4	36	24,3	24,1	61,5	-36,0
12	8,71	8,53	26,1	-13,8	37	23,7	23,7	61,0	-35,6
13	11,73	11,4	29,4	-17,2	38	23,7	23,5	63,0	-35,9
14	11,38	11,4	29,2	-17,0	39	25,4	25,4	62,9	-37,5
15	11,30	11,0	32,5	-17,5	40	23,5	23,4	64,0	-36,0
16	14,18	14,0	34,4	-20,6	41	26,4	26,3	64,7	-38,7
17	12,74	12,7	34,6	-19,5	42	24,0	24,0	64,9	-36,7
18	14,2	13,9	38,4	-21,5	43	26,4	26,3	66,2	-39,1
19	15,9	15,9	38,8	-23,3	44	25,2	25,2	65,8	-38,0
20	14,3	14,2	40,3	-22,2	45	25,9	25,8	67,2	-38,9
21	17,1	16,8	43,4	-25,3	46	26,4	26,5	66,7	-39,4
22	16,9	16,9	43,0	-25,2	47	25,4	25,3	67,8	-38,5
23	16,6	16,3	45,9	-25,4	48	27,4	27,4	67,6	-40,4
24	17,5	19,2	47,2	-28,2	49	25,1	25,0	68,2	-38,4
25	17,5	17,4	47,6	-26,8	50	28,0	28,0	68,3	-41,0

TABLEAU 2

Q = 0,72 P/B > 0 I = 25 kA

Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2 mm.	Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2 mm
1	0	-0,29	3,59	0,61	26	29,3	29,2	49,4	-25,4
2	3,46	3,00	7,33	-2,37	27	27,5	25,6	49,1	-23,7
3	5,27	5,17	8,20	-4,56	28	28,8	28,5	52,0	-24,4
4	4,21	4,15	8,87	-3,42	29	31,2	31,1	52,7	-27,1
5	5,95	5,52	13,2	-4,40	30	29,3	29,3	52,4	-25,3
6	9,37	9,07	15,9	-7,83	31	30,8	30,5	55,1	-26,2
7	9,21	9,23	15,8	-8,02	32	32,8	32,7	55,3	-28,5
8	8,90	8,65	18,3	-7,14	33	30,7	30,7	55,4	-26,4
9	12,2	11,8	22,4	-10,0	34	32,8	32,6	57,9	-28,0
10	13,9	13,8	23,1	-12,1	35	33,8	33,9	57,4	-29,5
11	12,7	12,6	23,7	-10,7	36	32,0	31,9	58,1	-27,4
12	14,5	14,1	27,8	-11,9	37	34,7	34,5	60,0	-29,9
13	17,6	17,4	29,9	-15,1	38	34,3	34,4	59,1	-29,8
14	16,9	16,9	29,5	-14,7	39	33,5	33,4	60,6	-28,6
15	17,0	16,7	32,4	-14,1	40	36,2	36,1	61,4	-31,4
16	20,4	20,1	35,7	-17,3	41	34,3	34,4	60,8	-29,6
17	20,8	20,9	35,4	-18,2	42	35,5	35,3	62,6	-30,4
18	19,8	14,6	36,9	-16,7	43	36,6	36,6	62,2	-31,9
19	22,6	22,2	40,5	-19,1	44	34,7	34,7	62,7	-29,7
20	24,2	24,2	40,8	-21,1	45	37,2	37,1	63,7	-32,2
21	22,6	22,6	41,2	-19,4	46	38,0	36,0	62,9	-31,2
22	24,7	24,3	44,7	-20,8	47	36,2	36,0	64,3	-31,0
23	27,0	26,9	45,5	-23,4	48	37,6	37,7	63,9	-32,8
24	25,3	25,3	45,6	-21,8	49	35,7	35,6	64,0	-30,6
25	26,8	26,4	48,5	-22,6	50	37,8	37,8	64,9	-32,8

TABLEAU 3

Q = 0,65 P/B < 0 I = 25 kA

Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2	Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2 mm
1	0	0,29	3,97	0,60	26	- 22,0	- 22,0	55,2	32,7
2	- 3,04	- 2,80	6,51	4,03	27	- 20,9	- 20,7	57,1	32,0
3	- 2,26	- 2,25	6,61	3,57	28	- 23,6	- 23,3	60,7	35,1
4	- 2,88	- 2,56	10,7	4,80	29	- 23,9	- 23,9	60,2	35,6
5	- 5,70	- 5,50	13,0	7,97	30	- 22,8	- 22,6	62,0	34,9
6	- 4,60	- 4,58	13,3	7,23	31	- 25,5	- 25,3	65,5	38,0
7	- 5,78	- 5,43	17,7	9,02	32	- 25,6	- 25,7	64,7	38,2
8	- 8,27	- 8,12	19,5	11,8	33	- 24,6	- 24,4	66,6	37,5
9	- 7,01	- 6,96	20,1	10,9	34	- 27,3	- 27,0	69,8	40,6
10	- 8,64	- 8,28	24,6	13,2	35	- 27,2	- 27,3	68,8	40,6
11	-10,8	-10,7	25,9	15,6	36	- 26,1	- 26,0	70,6	39,9
12	- 9,44	- 9,38	26,9	14,7	37	- 28,8	- 28,6	73,6	42,9
13	-11,4	-11,1	31,3	17,3	38	- 28,6	- 28,7	72,4	42,7
14	-13,2	-13,1	32,2	19,3	39	- 27,5	- 27,4	74,0	41,9
15	-11,9	-11,8	33,4	18,4	40	- 30,1	- 29,9	76,9	44,8
16	-14,1	-13,8	37,8	21,2	41	- 29,9	- 29,9	75,4	44,5
17	-15,5	-15,5	38,3	22,9	42	- 28,6	- 28,5	76,9	43,6
18	-14,3	-14,1	39,7	22,0	43	- 31,2	- 31,0	79,6	46,4
19	-16,7	-16,4	44,0	25,0	44	- 30,9	- 31,0	77,9	46,0
20	-17,8	-17,8	44,2	26,3	45	- 29,5	- 29,4	79,2	44,9
21	-16,6	-16,4	45,9	25,5	46	- 32,1	- 31,9	81,7	47,7
22	-19,2	-18,8	49,9	28,6	47	- 31,6	- 31,8	79,8	47,2
23	-19,9	-19,9	49,9	29,6	48	- 30,2	- 30,1	80,88	45,9
24	-18,8	-18,6	51,6	28,8	49	- 32,7	- 32,5	83,2	48,6
25	-21,5	-21,1	55,5	32,0	50	- 32,2	- 32,4	81,0	48,0

TABLEAU 4

Q = 0,72 P/B ∠ 0 I = 25 kA

Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2 mm	Nombre de tours	X entrée mm	X sortie mm	A mm	XSD2 mm
1	0	0,29	3,58	- 0,61	26	- 32,6	- 32,6	57,9	28,0
2	- 3,46	- 2,99	7,44	2,35	27	- 33,9	- 33,5	61,7	28,7
3	- 5,38	- 5,26	8,47	4,64	28	- 37,3	- 36,9	64,9	31,9
4	- 4,44	- 4,37	9,12	3,62	29	- 37,5	- 37,6	64,5	32,6
5	- 6,03	- 5,59	13,5	4,45	30	- 36,4	- 36,3	65,4	31,2
6	- 9,61	9,25	16,8	7,93	31	- 38,6	- 38,2	69,5	32,8
7	- 10,0	- 9,98	16,9	8,69	32	- 41,5	- 41,2	71,5	35,8
8	- 9,46	- 9,26	19,0	7,71	33	- 40,8	- 40,9	70,6	35,5
9	- 12,4	- 11,9	23,7	10,0	34	- 40,1	- 39,9	62,2	34,3
10	- 15,1	- 14,9	35,6	13,0	35	- 42,9	- 42,4	76,1	36,5
11	- 14,5	- 14,5	25,7	12,5	36	- 44,9	- 44,8	77,0	38,9
12	- 15,0	- 14,7	29,2	12,3	37	- 43,5	- 43,7	75,9	37,8
13	- 18,6	- 18,2	33,4	15,6	38	- 43,5	- 43,2	78,2	37,1
14	- 20,0	- 19,9	34,0	17,4	39	- 46,5	- 46,1	81,6	39,8
15	- 19,1	- 19,0	34,8	16,2	40	- 47,6	- 47,6	81,5	41,4
16	- 21,0	- 20,5	39,2	17,4	41	- 45,9	- 45,9	80,4	39,8
17	- 24,4	- 24,0	42,3	20,8	42	- 46,4	- 46,1	83,1	39,5
18	- 24,5	- 24,5	42,3	21,2	43	- 49,3	- 49,0	85,9	42,4
19	- 23,9	- 23,7	44,1	20,2	44	- 49,6	- 49,7	84,8	43,2
20	- 26,9	- 26,4	48,6	22,5	45	- 47,6	- 47,7	83,9	41,2
21	- 29,4	- 29,2	50,4	25,4	46	- 48,6	- 48,3	86,9	41,5
22	- 28,6	- 28,6	50,1	24,8	47	- 51,4	- 51,2	88,8	44,3
23	- 28,9	- 28,6	53,2	24,4	48	- 50,8	- 50,9	86,9	44,3
24	- 32,4	- 31,9	57,3	27,5	49	- 48,8	- 48,9	86,4	42,2
25	- 33,8	- 33,7	57,8	29,3	50	- 50,3	- 50,0	89,4	43,0

Manuscrit reçu le 24 juillet 1963

FIN