CEA 2337 — BOULIGAND Georges

SYSTEMES DIFFERENTIELS DES FLUX ET DES CONCENTRATIONS D'UN MELANGE EN SEPARATION PAR UNE USINE ETAGEE (1963)

Sommaire :

La recherche des régimes transitoires des flux et des concentrations d'un mélange en séparation par une usine étagée de forme quelconque conduit à étudier les solutions de certains types de systèmes différentiels. Ces systèmes sont déduits du graphe représentatif de l'usine, et apparaissent sous une forme structurée.

A l'aide du théorème d'Olga TAUSSKY et par l'introduction d'écarts orientés, les solutions de ces systèmes sont principalement examinées dans leur comportement asymptotique.

Un appendice montre que les solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles des usines en cascades à très faible séparation admettent des propriétés analogues.

92 pages

CEA 2337 — BOULIGAND Georges

DIFFERENTIAL SYSTEMS OF FLUX AND CONCENTRATIONS OF A MIXTURE IN THE SEPARATION BY A PLANT (1963)

Summary :

The study of transient flux and concentrations of a mixture in the separation by a plant with different interdependent stages leads to an examination of the solutions of certain types of differential systems. These systems are obtained from the representative graph of the plant and have a structural form.

By Olga TAUSSKY's theorem and the introduction of orientable distances, the solutions of these systems are chiefly examined in their asymptotic behaviour.

The appendice shows that solutions of partial differential equations relative to plants made of cascades with a slight separation have analogous properties.

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

CEA - R 2337

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DES FLUX ET DES CONCENTRATIONS D'UN MÉLANGE EN SÉPARATION PAR UNE USINE ÉTAGÉE

par

Georges-Marie BOULIGAND

Rapport CEA - R 2337

1964

CENTRE D'ÉTUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY

SÉRIE A, N° 4186
N° D'ORDRE
5037

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Georges-Marie BOULIGAND

PREMIÈRE THÈSE

Systèmes différentiels des flux et des concentrations d'un mélange en séparation par une usine étagée

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 20 Novembre 1963 devant la Commission d'examen

MM.	GRIVET	Président
	FORTET	Examinateurs
	BLAQUIÈRE	Examinateurs
	DEBIESSE	Membre invité

A mes Parents

Cette thèse, préparée sous la direction de Monsieur Blaquière, résulte entièrement de mes recherches effectuées au C. E. N. de Saclay dans le Service Etudes de Séparation des Isotopes de l'Uranium.

En vue de la séparation d'un mélange d'hexafluorure d'uranium $^{235}UF_6$, $^{238}UF_6$, par une usine étagée de diffusion gazeuse, et à propos de régimes transitoires des concentrations, je fus amené à me poser différents problèmes que j'ai résolus par la suite en déterminant assez généralement la structure des systèmes différentiels des flux et des concentrations d'un mélange en séparation par une usine quelconque.

Je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance aux professeurs Grivet, Fortet et Blaquière pour l'attention qu'ils ont accordée à ce modeste travail et leur exprime mes remerciements ainsi qu'à tous ceux qui m'ont encouragé à l'effectuer.

INTRODUCTION

Il existe souvent plusieurs procédés pour effectuer la séparation d'un mélange formé de corps simples distincts ou d'isotopes d'un même élément. Les uns conduisent à une séparation complète ; les autres à une séparation incomplète. Dans l'industrie les seconds se montrent moins onéreux. Ils sont répétés dans une usine de séparation $\mathcal{U}$, sur le mélange qui la traverse, un nombre de fois suffisant pour aboutir aux concentrations désirées.

C'est en cherchant à déterminer au cours du temps l'évolution des flux et des concentrations d'un mélange en séparation par une usine étagée de forme quelconque que nous sommes amenés à étudier certains types de systèmes différentiels et les propriétés de leurs solutions.

Pour préciser ces considérations nous conviendrons que le mélange est composé de plusieurs éléments e^k qui seront en réalité des corps simples ou les isotopes d'un même élément ... et nous rappellerons que la concentration de l'élément e^k d'un mélange homogène pris dans un échantillon est un nombre N de [0, 1] égal au rapport du nombre de mole v^k de cet élément au nombre total de moles $\sum\limits_{j=1}^{s} v^j$ contenues par cet échantillon. Ainsi, pour un mélange de s éléments distincts aux concentrations respectives $N^1, N^2, \ldots, N^s$, on a $\sum\limits_{k=1}^{s} N^k = 1$ et une enceinte, ou capacité, renfermant C moles de ce mélange renferme aussi $CN^1, CN^2, \ldots, CN^s$ moles des différents éléments. Les produits CN^k $(k = 1, \ldots, s)$ sont les capacités élémentaires de C ; C étant la somme de ses capacités élémentaires. De même étant donné un flux L de ce mélange, représentant le nombre de moles qui passent à travers une section, les produits LN^k $(k = 1, \ldots, s)$ représentent les flux élémentaires de L ; L étant la somme de ses flux élémentaires. D'autre part, une usine de séparation est un assemblage d'étages reliés entre eux par un processus plus ou moins compliqué, et en liaison avec le milieu extérieur par des entrées donnant accès aux alimentations du mélange à séparer, et des sorties permettant les soutirages du mélange élaboré. De cette façon, une usine $\mathcal{U}$ se décompose en deux ensembles complémentaires : le coeur U, et le milieu extérieur $\complement U$ contenant les alimentations et les soutirages de $\mathcal{U}$. On a donc :

$$\mathcal{U} = U \cup \complement U$$

les ensembles U et $\complement U$ étant à préciser par la suite.

En pratique, pour déterminer les flux et les concentrations d'une usine, on est obligé de la schématiser, ce qui va bien entendu au détriment de la réalité, mais les résultats obtenus seront vraisemblables. Dans cette schématisation on distingue divers objets : des arcs munis de flèches, des points de séparation (P.S), des points de mélange (P.M) et des capacités C à concentrations homogènes. Les arcs figurent les canalisations par où circulent les flux ; les capacités, les nombres de moles contenues dans les organes et les canalisations des étages.

Pour simplifier, on ne considère que des usines formées de points de séparation à trois ouvertures. Sous cette réserve, le chapitre 1 se rapporte à ces objets et donne des inégalités fondamentales sur les lois de séparation qui complètent ainsi la structure des systèmes différentiels des usines. Mais pour préserver cette structure dans des cas plutôt théoriques que physiques on précise les ensembles U et $\complement U$ en classant les capacités de $\mathcal{U}$ en capacités unipolaires et en capacités bipolaires ; les premières étant rejetées dans $\complement U$, les autres appartenant encore à U ou $\complement U$; enfin, en effectuant cette même opération sur les boîtes définies au chapitre 2.

Au chapitre 2, on construit le graphe de $\mathcal{U}$ permettant d'exprimer rationnellement tous les flux à l'aide d'un nombre réduit de flux dits flux principaux, et de coefficients de partage. A cette fin, on considère que chaque $(P.S)_j$ est alimenté par une capacité bipolaire C et on rassemble dans cette association $(P.S)_j$ et C dans une même boîte B ou $C \geqslant 0$ et $0 \leqslant \theta < 1$. On convient que les boîtes bipolaires appartiennent à U et que les boîtes unipolaires appartiennent à $\complement U$ (ce qui achève à tout instant la définition des ensembles U et $\complement U$). Dès lors le graphe de $\mathcal{U}$ apparaît en réduisant chaque B à un point. Par suite, la mise en équations d'une usine résulte de la connaissance de son graphe G : Pour tous les éléments qui composent le mélange à séparer, on forme en chaque point B de G la variation molaire élémentaire par unité de temps de la capacité correspondante, et on tient compte des lois de séparation pour ne conserver que les concentrations des capacités.

Ainsi, à toute usine $\mathcal{U}$ qui effectue la séparation d'un mélange de s éléments et dont le coeur comprend n boîtes, on associe s systèmes différentiels de n équations différentielles permettant de déterminer les n. s concentrations de U au cours du temps connaissant leurs valeurs initiales, les flux d'alimentation et leurs concentrations. Toutefois, les fonctions de ces systèmes différentiels dépendent des n flux principaux. Ceux-ci sont au préalable déterminés par un système d'équations qui se déduit ipsofacto de l'un quelconque des s systèmes en supposant que l'élément correspondant est à l'état pur. En définitive, ces flux dépendront des coefficients de partage, des flux d'alimentation et des variations des capacités au cours du temps lesquelles seront déterminées à leur tour par des agents physiques (pressions, températures, ...). Nous les supposerons strictement positifs quitte à modifier le graphe de $\mathcal{U}$ au cours du temps.

L'étude des solutions de ces systèmes différentiels fait l'objet des chapitres 3 et 4 où on se limite essentiellement à des mélanges binaires sauf à la fin du chapitre 4 où les propriétés manifestes de ces systèmes sont établies pour un mélange formé par un nombre quelconque d'éléments. On distinguera constamment les usines en production des usines en reflux total (ou en non production) car dans le système aux flux principaux le déterminant de leurs coefficients est positif pour les premières et nul pour les secondes.

Ainsi le chapitre 3 s'adresse exclusivement aux systèmes variationnels linéarisés. Il examine d'abord le cas des systèmes à coefficients constants en utilisant le critère de régularité d'Olga Taussky, ce qui édifie en même temps une base pour le chapitre 4. Précisément on établit : 1/deux théorèmes de localisation des composantes de la solution d'un système d'équations algébriques linéaires suivant que son déterminant est positif ou nul et qui démontrent que les flux principaux d'une usine irréductible à capacités constantes sont strictement positifs ; 2/ avec la même distinction, deux théorèmes de stabilité asymptotique concernant des systèmes différentiels linéaires et homogènes à coefficients constants, montrant que le système différentiel linéarisé des concentrations d'un mélange binaire en séparation par une usine irréductible à capacités constantes est asymptotiquement stable à droite au sens de Lyapunov ; on établit aussi que cette propriété s'étend à des systèmes mixtes résultant de l'annulation de certaines capacités (ou des coefficients en facteur avec les dérivées). Puis, on indique des résultats sur le comportement asymptotique de systèmes différentiels linéaires à coefficients variables pour faire apparaître la complexité de la question en général.

La théorie du chapitre 4 se rapporte à des systèmes qui peuvent être non-linéaires et qui englobent le cas du système différentiel des concentrations d'un mélange binaire traité par une usine de séparation. On a réduit les hypothèses de façon à étendre les résultats obtenus à des systèmes mixtes.

Les hypothèses posées comprennent d'abord des hypothèses préliminaires correspondant aux conditions du théorème d'existence de solutions absolument continues des systèmes différentiels généralisés au sens de Carathéodory ; puis l'hypothèse fondamentale H_1 sur la décroissance au sens large des fonctions de ces systèmes. Celle-ci généralise aux fonctions d'un système différentiel l'hypothèse de la décroissance au sens large par rapport à la variable dépendante x de la fonction f(t, x), qui n'est autre que la condition d'unicité à droite de Péano pour l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Cette hypothèse H_1 a pour effet que les écarts et la distance de deux solutions sont décroissantes du temps, ce qui implique aussi pour celles-ci un théorème d'unicité à droite. Enfin, il résulte par l'adjonction d'hypothèses complémentaires H_2 que les composantes des solutions varient sur l'intervalle [0, 1] lorsqu'elles s'y trouvent initialement.

On prouve ensuite que le système différentiel des concentrations d'un mélange binaire traité par une usine de séparation satisfait aux hypothèses précédentes. Ses solutions présentent donc les mêmes propriétés. Puis on suppose l'usine à fonctions indépendantes du temps, en distinguant ses deux régimes possibles (production ou reflux total) et l'on établit dans les deux cas l'unicité d'un régime permanent et la convergence des solutions du système vers ce régime permanent.

Enfin, on démontre que les concentrations $N_i^k(t)$ d'un mélange formé par un nombre quelconque d'éléments, aux différents étages d'une usine de séparation, suivent les relations :

$$N_i^k(t) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{s} N_i^k(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t > 0$$

lorsqu'il en est de même à l'instant initial t = 0.

Un appendice concerne les usines étagées en cascades et à gains de séparation très voisins de 1. Pour celles-ci, on substitue aux systèmes différentiels des flux et concentrations un système d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites dont les solutions satisfont à des propriétés analogues à celles de leurs systèmes différentiels.

CHAPITRE I

POINTS DE SÉPARATION, POINTS DE MÉLANGE ET CAPACITÉS

Ce chapitre indique les propriétés des principaux organes - points de séparation, points de mélange et capacités - qui demeurent dans une schématisation poussée d'une usine de séparation afin d'obtenir des équations qui gouvernent ses flux et ses concentrations.

Il se décompose en trois parties concernant :

1/ Les points de séparation auxquels correspondent des lois de séparation soumises à des inégalités d'origine physique qui compléteront la structure des systèmes différentiels des concentrations d'une usine ;

2/ Les points de mélange auxquels se rattachent les notions de flux global et de concentration moyenne ;

3/ Les capacités pour lesquelles on établit que leurs concentrations demeurent sur $[0, 1]$ et que leurs sommes restent égales à l'unité au cours du temps. Ce résultat facile à établir sera étendu par la suite, au chapitre 4, à toutes les concentrations de l'usine. Enfin, la classification des capacités en capacités unipolaires et capacités bipolaires, les premières étant rejetées dans le milieu extérieur $\complement\,\mathcal{U}$ est une précaution essentielle pour préserver dans tous les cas la structure des systèmes différentiels relatifs aux flux et aux concentrations de $\mathcal{U}$.

I - POINTS DE SEPARATION -

Parmi les différents organes de séparation que l'on puisse concevoir, les plus faciles à étudier sont ceux qui offrent le nombre minimum d'ouvertures. Ce nombre est trois comme on s'en rend compte aisément. Ils correspondent aux points de séparation à trois ouvertures $(P.S)_3$ lesquels seront les seuls considérés dans cette étude.

1/ <u>Fonctionnement d'un point de séparation à trois ouvertures</u>.

Un point de séparation $(P.S)_3$ comprend une entrée et deux sorties. Il a la propriété physique d'émettre des flux de sortie L' et L'' de concentrations différentes lorsque son flux d'entrée L est formé d'un mélange.

Désignons par $N^1, \ldots, N^s$ les concentrations du flux L constitué de s éléments. L est donc composé de s flux élémentaires :

$$L^k = LN^k \quad \text{tels que} \quad L = \sum_{k=1}^{s} L^k = \sum_{k=1}^{s} LN^k$$

avec

$$\sum_{k=1}^{s} N^k = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant N^k \leqslant 0 \quad (k=1, \ldots, s).$$

De même, désignons par $N'^1, \ldots, N'^s$ et $N''^1, \ldots, N''^s$ les concentrations respectives des flux L' et L''. Ceux-ci seront également composés des flux élémentaires $L'^k = L'N'^k$ et $L''^k = L''N''^k$ tels que :

$$L' = \sum_{k=1}^{s} L'^k = \sum_{k=1}^{s} L'N'^k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{s} N'^k = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant N'^k \leqslant 1$$

$$L'' = \sum_{k=1}^{s} L''^k = \sum_{k=1}^{s} L''N''^k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{s} N''^k = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant N''^k \leqslant 1$$

et, en général, on aura l'inégalité $\sum_{k=1}^{s} |N'^k - N''^k| > 0$.

En somme, le point de séparation scinde chaque flux élémentaire L^k en deux flux L'^k et L''^k tels que :

$$L^k = L'^k + L''^k \quad \text{de même que} \quad L = L' + L''.$$

C'est dans la mesure où les rapports :

$$\theta^k = \frac{L'^k}{L^k} \qquad (k=1, \ldots, s) \tag{1}$$

diffèrent d'un élément à l'autre qu'il existe une séparation. Les θ^k représentent les coefficients de partage élementaires de $(P.S)_3$. Puisque la séparation est incomplète, on admet que les θ^k satisfont à l'une des deux éventualités :

$$\theta^1 = \ldots = \theta^s = 0 \qquad \text{ou} \qquad 0 < \theta^k < 1 \qquad (k=1,\ldots,s)$$

la première ne donne aucune séparation et correspond à ce que nous appelons par la suite un point de séparation fictif ($L' = 0$), la seconde correspond à un vrai point de séparation ($L' > 0$, $L'' > 0$). De même, on introduit le coefficient de partage global

$$\theta = \frac{L'}{L} \tag{2}$$

Les relations $\theta = \frac{L'}{L} = \frac{\sum L'^k}{\sum L^k} = \frac{\sum \theta^k L^k}{\sum L^k}$ et $1 - \theta = \frac{\sum (1-\theta^k)L^k}{\sum L^k}$ montrent que $0 < \theta < 1$ pour un vrai $(P.S)_3$ et que $\theta = 0$ pour un $(P.S)_3$ fictif. Dans tous les cas on a donc :

$$0 \leqslant \theta < 1$$

Des relations (1) et (2) on déduit :

$$\theta^k = \theta \frac{N'^k}{N^k} \tag{3}$$

d'où :

$$\theta = \sum_{k=1}^{s} \theta^k N^k \tag{4}$$

ce qui est encore équivalent aux deux groupes de relations :

$$N'^k = \alpha^k N^k \tag{5}$$

et

$$\theta^k = \alpha^k \theta \quad \text{avec} \quad \alpha^k > 0 \tag{6}$$

où les α^k sont les gains élementaires de séparation. Dès lors, les conditions de séparation incomplète deviennent :

$$0 \leqslant \alpha^k \theta < 1 \qquad (k=1, \ldots, s)$$

avec

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha^k N^k = 1. \tag{7}$$

Par ailleurs on a aussi les relations suivantes :

$$L'' = (1-\theta)L, \qquad L''^k = (1-\theta^k) L^k;$$

les bilans élémentaires

$$N^k = \theta N'^k + (1-\theta)N''^k \tag{8}$$

qui impliquent que N^k est toujours compris entre N'^k et N''^k ; et :

$$(1-\theta)N''^k = (1-\alpha^k\theta)N^k = (1-\theta^k) N^k. \tag{9}$$

Remarques :

1/ Etant donné un mélange d'un nombre quelconque d'éléments, on a les éventualités suivantes, où Σ se rapporte aux mêmes éléments.

$$\left(0 < \Sigma N < 1\right) \Longleftrightarrow \left(0 < \Sigma N' < 1\right) \Longleftrightarrow \left(0 < \Sigma N'' < 1\right)$$
$$\left(\Sigma N = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\Sigma N' = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\Sigma N'' = 0\right)$$
$$\left(\Sigma N = 1\right) \Longleftrightarrow \left(\Sigma N' = 1\right) \Longleftrightarrow \left(\Sigma N'' = 1\right)$$

En particulier dans le cas d'un "mélange pur" :

$$N = N' = N'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad N = N' = N'' = 1 \quad \text{avec} \quad \alpha = 1$$

2/ Pour $\alpha^k = 1$, il n'y a aucune séparation de l'élément e^k :

$$N^k = N'^k = N''^k.$$

3/ Lorsque tous les coefficients de partage élémentaires θ^k sont égaux, la relation (4) donne $\theta^k = \theta$ et la relation (3) $N'^k = N^k$. Il n'y a donc pas de séparation.

4/ Lorsque $\theta = 0$, on a $L' = 0$, il n'y a pas de flux séparé et les bilans élémentaires se réduisent à $N^k = N''^k$. C'est le $(P.S)_3$ fictif. Par raison de symétrie on pourrait considérer des $(P.S)_3$ à $\theta = 1$ correspondant à $L'' = 0$ et pour lesquels les bilans élémentaires se réduisent à $N^k = N'^k$ et impliquent aussi $\alpha^k = 1$ et $\alpha^k\theta = 1$. Ces derniers $(P.S)_3$ sont fictifs mais ne seront pas considérés par la suite puisqu'ils ne satisfont pas aux conditions de séparation incomplète.

En général les fonctions θ^k, α^k, ou N'^k et N''^k sont assez compliquées, elles dépendent du point de séparation lui-même, des conditions physiques dans lesquelles il se trouve, des éléments à séparer et de leurs concentrations $N^1, \ldots, N^s$ en admettant des dérivées partielles premières continues par rapport à celles-ci.

Compte tenu du bilan $\sum_{k=1}^{s} N^k = 1$, on pourra toujours exprimer ces fonctions à l'aide des $s-1$ premières concentrations $N^1, \ldots, N^{s-1}$. Au chapitre 2 nous verrons que les $n(s-1)$ concentrations N_i^k ($i=1,\ldots,n$; $k = 1,\ldots, s-1$) d'une usine de n étages sont reliées par $s-1$ systèmes différentiels d'ordre n relatifs aux $s-1$ premiers éléments du mélange, et par un système de n équations qui relient les flux globaux aux dérivées des capacités par rapport au temps. Pour établir les propriétés manifestes de ces systèmes, à savoir que les composantes N_i^k($i=1, \ldots, n$; $k=1, \ldots, s-1$) de la solution demeurent comprises entre 0 et 1 et qu'elles satisfont aux relations $\sum_{k=1}^{s-1} N_i^k(t) < 1$ pour

$t > 0$ lorsqu'il en est de même à l'instant initial $t = 0$, on prolongera les définitions physiques des fonctions $N_i'^k (N_i^1, \ldots, N_i^{s-1})$ et $N_i''^k (N_i^1, \ldots, N_i^{s-1})$ en dehors du pavé $[0, 1]^{s-1}$ par des relations mathématiques telles qu'en définitive, quel que soit l'ensemble $\mathcal{E} \subset (1, \ldots, s-1)$, $\sum_{k\in\mathcal{E}} N_i'^k$ et $\sum_{k\in\mathcal{E}} N_i''^k$ soient du signe de $\sum_{k\in\mathcal{E}} N_i^k$ au sens strict et que $1-\sum_{k\in\mathcal{E}} N_i'^k$ et $1-\sum_{k\in\mathcal{E}} N_i''^k$ soient du signe de $1 - \sum_{k\in\mathcal{E}} N_i^k$ au sens strict.

Par ailleurs d'autres considérations physiques conduisent à de nouvelles inégalités sur les lois de séparation qui de ce fait entraînent pour les mélanges binaires une propriété remarquable des solutions du système des concentrations comme nous le verrons. En principe, on admet que N'^k et N''^k sont des fonctions croissantes d'un accroissement $\partial \nu^k$ du nombre de molécules de l'élément e^k ajoutées au mélange, et presque toujours des fonctions décroissantes d'accroissements $\partial \nu^j$ des nombres de molécules des éléments $e^j \neq e^k$ ajoutées au mélange. (Voir la note du chapitre I). De

$$N^i = \frac{\nu^i}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k} \quad \text{on a} \quad \frac{\partial N^i}{\partial \nu^i} = \frac{\sum_{k=1}^{s} \nu^k - \nu^i}{\left(\sum_{k=1}^{s} \nu^k\right)^2} = \frac{1 - N^i}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k}$$

et de :

$$N^j = \frac{\nu^j}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k} \quad \text{on a} \quad \frac{\partial N^j}{\partial \nu^i} = \frac{-\nu^j}{\left(\sum_{k=1}^{s} \nu^k\right)^2} = \frac{-N^j}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k}$$

Ainsi, dans un rapport élémentaire $\partial \nu^i$ de l'élément e^i, on a :

$$\partial N^i = \frac{\partial \nu^i}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k}(1-N^i) \qquad \text{et} \qquad \partial N^j = -\frac{\partial \nu^i}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k} N^j \quad (j \neq i)$$

Ces relations se mettent sous la forme matricielle :

$$\|\overrightarrow{\partial N}\| = \begin{Vmatrix} \partial N^1 \\ \partial N^2 \\ \ldots \\ \partial N^s \end{Vmatrix} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k} \begin{Vmatrix} 1-N^1 & -N^1 & \ldots & -N^1 \\ -N^2 & 1-N^2 & \ldots & -N^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -N^s & -N^s & & 1-N^s \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \partial \nu^1 \\ \partial \nu^2 \\ \\ \partial \nu^s \end{Vmatrix}$$

et l'on en déduit sous une forme très générale :

$$\|\overrightarrow{\partial N'}\| = \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k} \times \begin{Vmatrix} \frac{\partial N'^1}{\partial N^1} & \frac{\partial N'^1}{\partial N^2} & \ldots & \frac{\partial N'^1}{\partial N^s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial N'^s}{\partial N^1} & \frac{\partial N'^s}{\partial N^2} & & \frac{\partial N'^s}{\partial N^s} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1-N^1 & -N^1 & \ldots & -N^1 \\ -N^2 & 1-N^2 & \ldots & -N^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -N^s & -N^s & \ldots & 1-N^s \end{Vmatrix} \times \|\overrightarrow{\partial \nu}\|$$

soit :

$$\|\overrightarrow{\partial N'}\|^s = \|T'\|^s \frac{\|\overrightarrow{\partial \nu}\|^s}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k}$$

et de même :

$$\|\overrightarrow{\partial N''}\|^s = \|T''\|^s \frac{\|\overrightarrow{\partial \nu}\|^s}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k}$$

où les matrices carrées d'ordre s, $\|T'\|^s$ et $\|T''\|^s$, ont presque toujours leurs éléments négatifs sauf ceux de la diagonale principale qui sont positifs en vertu du principe précédemment admis, et la somme des éléments de chaque colonne nulle comme il en est des matrices $\left\|\frac{\partial N'}{\partial N}\right\|$ et $\left\|\frac{\partial N''}{\partial N}\right\|$.
Par suite, lorsqu'on élimine N^s, N'^s, N''^s à l'aide des bilans :

$$\sum_{k=1}^{s} N^k = \sum_{k=1}^{s} N'^k = \sum_{k=1}^{s} N''^k = 1$$

les relations précédentes se transforment en :

$$\|\overrightarrow{\delta N'}\|^{s-1} = \|T'\|^{s-1} \frac{\|\overrightarrow{\delta \nu}\|^{s-1}}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{\delta N''}\|^{s-1} = \|T''\|^{s-1} \frac{\|\overrightarrow{\delta \nu}\|^{s-1}}{\sum_{k=1}^{s} \nu^k}$$

où les matrices carrées d'ordre s-1, $\|T'\|^{s-1}$ et $\|T''\|^{s-1}$, ont presque toujours leurs éléments négatifs sauf ceux de la diagonale principale qui sont positifs, et la somme des éléments de chaque colonne positive lorsque N^s n'est pas nul ; ces conditions étant équivalentes aux précédentes. Dans le cas d'un mélange binaire on pose :

$$N = N^1 \quad \text{et} \quad 1 - N = N^2$$

alors on est conduit aux deux inégalités où $\alpha = \alpha^1$:

$$\frac{\partial N'}{\partial N} > 0 \quad \text{ou} \quad \alpha + N \frac{\partial \alpha}{\partial N} > 0$$

$$\frac{\partial N''}{\partial N} > 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \theta \left(\alpha + N \frac{\partial \alpha}{\partial N}\right) > 0.$$

II - POINTS DE MELANGE

Le mélange constitue l'opération inverse de la séparation. Précisément, étant donné des flux positifs ou nuls $F_1, \ldots, F_n$ avec $\sum_{i=1}^{n} F_i > 0$ de concentrations $N_1^k, \ldots, N_n^k$ par rapport à un élément e^k, on leur associe, suivant un principe de conservation, un flux $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ dit flux global des flux F_i et de concentrations moyennes $N^k = \sum_{i=1}^{n} N_i^k F_i / \sum_{i=1}^{n} F_i$, que ces flux soient mélangés ou non ; dans l'affirmative, le lieu de la rencontre simultanée de ces flux constitue le point de mélange.

THEOREME

La concentration moyenne N^k d'un flux global est située sur l'intervalle $[\underline{N}^k, \bar{N}^k]$ délimité par l'enveloppe inférieure $\underline{N}^k$ et l'enveloppe supérieure $\bar{N}^k$ des concentrations N_i^k des flux F_i qui le composent ; elle est donc située sur [0, 1]. La somme de ses concentrations est égale à l'unité.

Démonstration.

$\underline{N}^k$ étant la valeur minima atteinte par les N_i^k (i=1, ..., n) et $\bar{N}^k$ la valeur maxima atteinte par les N_i^k (i=1, ..., n), on a :

$$\underline{N}^k = \frac{\sum F_i \underline{N}^k}{\sum F_i} \leqslant \frac{\sum F_i N_i^k}{\sum F_i} = N^k \leqslant \frac{\sum F_i \bar{N}^k}{\sum F_i} = \bar{N}^k$$

En particulier lorsque $\underline{N}^k$ et $\bar{N}^k$ ont un sens physique ; on a :

$$0 \leqslant \underline{N}^k \leqslant N^k \leqslant \bar{N}^k \leqslant 1.$$

Enfin, $\sum_{k=1}^{s} N^k = 1$ implique $\sum_{k=1}^{s} N^k = 1$ C. q. f. d.

III - CAPACITES

1/ Description et propriétés :

Chaque capacité considérée est formée d'une enceinte remplie d'un mélange supposé à concentrations homogènes $\bar{N}$. La quantité $C > 0$ de moles du mélange qu'elle contient représente sa capacité. De plus, l'enceinte peut être munie de plusieurs orifices donnant accès à un flux global d'entrée $K > 0$ de concentrations moyennes $\bar{x}$ et à un flux global de sortie $L \geqslant 0$ de concentration $\bar{N}$ égales à celles de la capacité. Sous l'action de ces flux, les valeurs de la capacité et des concentrations varient au cours du temps selon les relations :

$$\frac{dC}{dt} = K - L \qquad \begin{array}{c} L \uparrow N^k \\ \boxed{C, N^k} \\ K \uparrow x^k \end{array} \tag{1}$$

$$\frac{dN^kC}{dt} = Kx^k - LN^k \tag{2}^k$$

qui expriment respectivement les variations molaires totale et élémentaire de C par unité de temps. De (1) et $(2)^k$ on déduit la relation :

$$C\frac{dN^k}{dt} = K(x^k - N^k) \tag{3}^k$$

qui permet d'établir le théorème suivant :

THEOREME

La concentration $N^k(t)$ d'une capacité $C(t) \geqslant 0$ reste au cours du temps sur l'intervalle $[\underline{x}^k, \bar{x}^k]$ délimité par les bornes inférieure $\underline{x}^k$ et supérieure $\bar{x}^k$ de la concentration $x^k(t)$ de son flux global d'entrée $K(t) > 0$ à partir de l'instant t_o où elle se trouve sur cet intervalle ; elle est donc située sur $[0, 1]$. La somme de ses concentrations est égale à l'unité au cours du temps.

Démonstration.

En effet, les trois cas possibles se présentent :

a) Lorsque $C(t) = 0$, la relation (1) donne $K(t) = L(t)$ et la relation (3) donne $N(t) = x(t)$ pour $K > 0$.

b) Lorsque $C(t) > 0$, l'équation (3) se met sous la forme :

$$\frac{dN}{dt} + u(t)N = u(t)x(t) \qquad \text{avec} \qquad u(t) = \frac{K(t)}{C(t)} \geqslant 0$$

Sa solution est :

$$N(t) = N(t_o)e^{-\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha} + e^{-\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha} \cdot \int_{t_o}^{t} u(s)x(s)\, e^{\int_{t_o}^{s}u(\alpha)d\alpha}\, ds$$

Or, en supposant que $x(t) \leqslant \bar{x}$, on a l'inégalité :

$$N(t) \leqslant N(t_o)e^{-\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha} + \bar{x}e^{-\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha} \cdot \int_{t_o}^{t} u(s)e^{\int_{t_o}^{s}u(\alpha)d\alpha} \cdot ds = N(t_o)e^{-\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha} + \bar{x}e^{-\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha}\left[e^{\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha} - 1\right]$$

$$= \bar{x} - [\bar{x} - N(t_o)]\, e^{-\int_{t_o}^{t}u(\alpha)d\alpha}$$

On montrerait de même que

$$\underline{x} \leqslant x(t) \Longrightarrow \underline{x} + [N(t_o) - \underline{x}]\, e^{-\int_{t_o}^{t} u(\alpha)d\alpha} \leqslant N(t)\ .$$

Ainsi, la double inégalité pour $\underline{x} \leqslant x(t) \leqslant \bar{x}$,

$$\underline{x} + [N(t_o) - \underline{x}]\, e^{-\int_{t_o}^{t}\frac{K(\alpha)}{C(\alpha)}d\alpha} \leqslant N(t) \leqslant \bar{x} - [\bar{x} - N(t_o)]\, e^{-\int_{t_o}^{t}\frac{K(\alpha)}{C(\alpha)}d\alpha}$$

montre bien que N(t) reste compris entre les bornes de x(t).

c) Lorsque C(t) est continu et qu'il existe un plus petit instant $\bar{t} > t_o$ tel que $\int_{t_o}^{\bar{t}} u(\alpha)d\alpha = +\infty$, on a $C(\bar{t}) = 0$ et $N(\bar{t})$ admet une vraie valeur

$$N(\bar{t}) = \int_{t_o}^{\bar{t}} u(s)x(s)\, e^{-\int_{s}^{\bar{t}} u(\alpha)d\alpha}\, ds = \lim_{t \to \bar{t}} \int_{t_o}^{t} u(s)x(s)\, e^{-\int_{s}^{\bar{t}} u(\alpha)d\alpha}$$

que l'on détermine en remarquant que la fonction à intégrer :

$$u(s)x(s)\, e^{-\int_{s}^{\bar{t}} u(\alpha)d\alpha}$$

est constamment nulle sauf dans un intervalle $\bar{t} - \eta < s < \bar{t}$ si petit soit-il. En supposant x(t) continu pour $t=\bar{t}$, cette limite est égale à :

$$x(\bar{t}) \lim_{t \to \bar{t}} \int_{t_o}^{t} u(s)\, e^{-\int_{s}^{t} u(\alpha)d\alpha}\, ds = x(\bar{t}) \lim_{t \to \bar{t}} \left[1 - e^{-\int_{s}^{t} u(\alpha)d\alpha} \right] = x(\bar{t})\ .$$

En particulier, lorsque $\underline{x}^k$ et $\bar{x}^k$ ont un sens physique, on a pour les trois cas considérés :

$$0 \leqslant \underline{x}^k \leqslant N^k \leqslant \bar{x}^k \leqslant 1$$

conformément à l'énoncé du théorème.

Enfin, en additionnant membre à membre toutes les équations $(3)^k$, on a, puisque $\Sigma\ x^k = 1$, l'équation différentielle :

$$C\frac{d}{dt}(\Sigma\ N^k) = K(1 - \Sigma\ N^k)$$

qui se déduit de $(3)^k$ en posant $x^k(t) = 1$. Etant donné que $\Sigma\ N^k(0) = 1$, le raisonnement précédent montre que $\Sigma\ N^k\ (t) = 1$. C. q. f. d.

Remarque -

Bien que la démonstration précédente s'applique dans tous les cas, il y en a deux qui nous permettront de classer les capacités d'une usine de séparation. Ces cas correspondent à :

1/ K(t) = 0 dans un intervalle $[t_o,\ t_1]$. L'équation (3) donne immédiatement $N(t) = N(t_o)$; et d'après l'équation (1) :

$$\frac{dC}{dt} = -L(t) \leqslant 0 \qquad \text{soit} \qquad C(t) = C(t_o) - \int_{t_o}^{t} L(s)\, ds$$

c'est-à-dire que la capacité est une fonction décroissante au sens large ou qu'elle se vide.

2/ L(t) = 0 dans un intervalle $[t_o,\ t_1]$ L'équation (1) entraîne $C(t) = C(t_o) + \int_{t_o}^{t} K(s)ds$, ce qui signifie que la capacité est une fonction croissante au sens large ou qu'elle se remplit. De même l'équation (2) implique :

$$N(t)C(t) = N(t_o)C(t_o) + \int_{t_o}^{t} K(s)x(s)\, ds$$

On en déduit l'expression de la concentration au cours du temps :

$$N(t) = \frac{N(t_0)C(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(s)x(s)ds}{C(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(s)ds}$$

et qui correspond à une concentration moyenne ou de mélange.

2/ Classification des capacités d'une usine -

Parmi les capacités qui sont rattachées à une usine de séparation on peut distinguer celles qui sont dépourvues de flux global d'entrée et celles qui sont dépourvues de flux global de sortie sur tout un intervalle de temps. Ce sont les capacités que nous venons de considérer précédemment. Nous les appellerons capacités unipolaires. On peut dire qu'elles appartiennent au milieu extérieur $\complement U$ sur l'intervalle de temps considéré :

Les premières alimentent l'usine et appartiennent à l'ensemble E des points d'entrée de l'usine ;

Les secondes déchargent l'usine et appartiennent à l'ensemble S des points de sortie de l'usine.

Enfin, les autres capacités qui sont donc pourvues d'un flux global d'entrée $K > 0$ et d'un flux global de sortie $L > 0$ seront dites capacités bipolaires et appartenant à U ou à $\complement U$ comme nous le verrons par la suite.

NOTE DU CHAPITRE 1

LOIS DE SEPARATION D'UN MELANGE GAZEUX DE n ELEMENTS PAR DIFFUSION HOMOGENE PHENOMENE D'ENTRAINEMENT.

La diffusion d'un mélange gazeux à travers une membrane poreuse conduit à une séparation incomplète de ses éléments. La loi des débits de Knudsen donne pour un mélange quelconque de n éléments n lois de séparation non indépendantes mais encore assez simples en diffusion homogène, lorsque l'on suppose les concentrations homogènes dans le compartiment haute pression (H. P.) ; alors celles du compartiment basse pression (B. p.) le sont aussi. Dans ces conditions on vérifie que ces lois satisfont aux propriétés physiques du chapitre 1 où les rares cas d'exception correspondent au phénomène d'entraînement.

1/ Lois de séparation en diffusion homogène.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les concentrations molaires du compartiment à haute pression P ; $y_1, \ldots, y_n$ celles du compartiment à basse pression p ; $r = p/P$ le rapport des pressions et T la température absolue du mélange.

La membrane du diffuseur, de surface S, est le siège de 2n flux élémentaires exprimés par la loi de Knudsen dans laquelle μ est une constante ne dépendent que des caractéristiques de la membrane :

Les uns proviennent du compartiment (H. P.)

$$F_i = \mu \frac{SP}{\sqrt{T}} \frac{x_i}{\sqrt{M_i}}$$

et sont opposés aux autres provenant du compartiment (B. p.)

$$f_i = \mu \frac{Sp}{\sqrt{T}} \frac{y_i}{\sqrt{M_i}}$$

Ainsi, les concentrations y_i du compartiment (B. p.) résultent du mélange des n flux apparents $F_i - f_i$ traversant la membrane de la haute pression vers la basse pression. On a donc les relations

$$\frac{F_i - f_i}{y_i} = \sum_{j=1}^{n} (F_j - f_j) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

que la loi de Knudsen transforme en

$$\frac{\sqrt{T}}{\mu PS} \sum_{j=1}^{n} (F_j - f_j) = \frac{x_i - ry_i}{\sqrt{M_i}\, y_i} = \frac{1 - r}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{M_j}\, y_j}$$

d'où l'on a les n lois de séparation non indépendantes

$$x_i = ry_i + (1-r) \frac{\sqrt{M_i}\, y_i}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{M_j}\, y_j}$$

qui expriment les concentrations du compartiment (H. P.) à partir des concentrations du compartiment (B. p.).

2/ Propriétés physiques des lois précédentes.

Nous vérifions que y_k est une fonction croissante d'un accroissement $\delta \nu^k$ du nombre de molécules de l'élément e^k ajoutées au mélange du compartiment (H. P.). Par suite la relation $\Sigma\, \delta y=0$ montre qu'il existe des concentrations y_j avec $j \neq k$ qui sont des fonctions décroissantes de $\delta \nu^k$, mais pour autant tous les y_j $(i \neq k)$ ne sont pas nécessairement des fonctions décroissantes de $\delta \nu^k$ pour un mélange de trois éléments au moins. Précisément selon l'état du diffuseur défini par le rapport des pressions r, les distributions des concentrations dans l'un des deux compartiments et des masses moléculaires du mélange, ou pose les définitions suivantes relatives au phénomène d'entraînement :

1/ L'élément e^k ne produit aucun entraînement dans un état lorsque tous les y_j $(i \neq k)$ sont des fonctions décroissantes de $\delta \nu^k$.

2/ L'élement e^k entraîne l'élément e^j dans un état lorsque y_j est une fonction croissante de $\delta \nu^k$.

Donnons donc aux concentrations x_i du compartiment (H. P.) des accroissements :

$$(1-x_1)\delta \nu_1, \; - x_2 \delta \nu_1, \; \ldots, \; - x_n \delta \nu_1 \qquad \text{avec} \qquad \delta \nu_1 > 0$$

représentant un apport de molécules de l'élément e_1 et différentions les lois de séparation. D'où les équations :

$$\left[r + (1-r) \frac{\sqrt{M_i}}{\Sigma \sqrt{M}\, y} \right] \delta y_{1i} - (1-r) \sqrt{M_i}\, y_i \frac{\Sigma \sqrt{M}\, \delta y}{(\Sigma \sqrt{M}\, y)^2} = \begin{cases} (1 - x_1)\, \delta \nu_1 & \text{pour } i=1 \\ - x_i\, \delta \nu_1 & \text{pour } i \neq 1 \end{cases} \tag{1}$$

dont la somme donne $r \Sigma\, \delta\, y_{1i} = 0$ ou $\Sigma \delta y = 0$.

Tenant compte des lois de séparation, ces équations sont équivalentes à :

$$\left.\begin{aligned} \delta y_{11} &= (1-r) \frac{\sqrt{M_1}\, y_1^2}{x_1} \frac{\Sigma \sqrt{M}\, \delta y}{(\Sigma \sqrt{M}\, y)^2} + \frac{y_1}{x_1} (1-x_1)\, \delta \nu_1 \\ \delta y_{1i} &= (1-r) \frac{\sqrt{M_i}\, y_i^2}{x_i} \frac{\Sigma \sqrt{M}\, \delta y}{(\Sigma \sqrt{M}\, y)^2} - y_i\, \delta \nu_1 \quad \text{pour } i \neq 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dont la somme conduit à

$$(1-r)\, \Sigma \frac{\sqrt{M}\, y^2}{x} \cdot \frac{\Sigma \sqrt{M}\, \delta y}{(\Sigma \sqrt{M}\, y)^2} = \left(1 - \frac{y_1}{x_1}\, \delta \nu_1\right) \tag{3}$$

Ainsi les relations (2) donnent les accroissements δy_{1i} connaissant la valeur de $\Sigma \sqrt{M}\, \delta y$ résultant de (3).

Il apparait immédiatement que $\delta y_{11} > 0$:

Soit que $y_1 < x_1$ et $(3) \Longrightarrow \Sigma \sqrt{M}\, \delta y > 0$ d'où $\delta y_{11} > 0$;

Soit que $y_1 > x_1$ et $(3) \Longrightarrow \Sigma \sqrt{M}\, \delta y < 0$, par suite $\delta y_{1i} < 0$ pour $i \neq 1$ et par complémentarité $\delta y_{11} > 0$. C. q. f. d.

D'autre part des lois de séparation on a

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{\Sigma \sqrt{M}\, y}{(1-r) \sqrt{M_i}} \frac{1}{1 + \frac{r}{1-r} \frac{\Sigma \sqrt{M}\, y}{\sqrt{M_i}}} \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{y_1}{x_1} = \frac{1 - \frac{\Sigma \sqrt{M}\, y}{\sqrt{M_1}}}{1 + \frac{r}{1-r} \frac{\Sigma \sqrt{M}\, y}{\sqrt{M_1}}}$$

d'où l'expression de δy_{1i}

$$\delta y_{1i} = \frac{y_i \, \Sigma \sqrt{M} \, y}{(1-r)\, \Sigma \sqrt{M} \, \underset{x}{\Sigma}^2} \left[\frac{1 - \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\Sigma \sqrt{M_1}}}{\left(1 + \frac{r}{(1-r)} \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M_i}}\right)\left(1 + \frac{r}{(1-r)} \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M_1}}\right)} - \Sigma \frac{y}{1 + \frac{r}{(1-r)} \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M}}} \right] \delta v_1$$

où le plus grand crochet de δy_{1i} s'obtient en identifiant M_1 à la masse moléculaire la plus lourde et M_i à la suivante M_2 prise dans l'ordre décroissant.

Condition suffisante de non entraînement.

En posant $C = \frac{r}{1-r} \Sigma \sqrt{M} \, y$, le plus grand crochet précédent devient :

$$\frac{1}{1 + \frac{C}{\sqrt{M_2}}} \; \frac{1 - \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M_1}}}{\frac{C}{\sqrt{M_1}}} - \frac{y_1}{1 + \frac{C}{\sqrt{M_1}}} - \frac{y_2}{1 + \frac{C}{\sqrt{M_2}}} - \dots - \frac{y_n}{1 + \frac{C}{\sqrt{M_n}}}$$

et, en raison des inégalités $\sqrt{M_n} < \Sigma \sqrt{M} \, y < \sqrt{M_1}$, est inférieur à

$$\frac{1}{1 + \frac{C}{\sqrt{M_2}}} \; \frac{1 - \sqrt{\frac{M}{M_1}}}{1 + \frac{C}{\sqrt{M_1}}} - \frac{1}{1 + \frac{C}{\sqrt{M_n}}}$$

quantité qui est négative lorsque la condition suffisante de non entraînement

$$\frac{C^2}{\sqrt{M_1 \, M_2}} + \left(\frac{2}{\sqrt{M_1}} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} - \frac{1}{\sqrt{M_n}}\right) C + \sqrt{\frac{M_n}{M_1}} > 0$$

est remplie.

Exemple.

Pour un mélange UF^6, ClF^3, N^2, où respectivement :

$$M_1 = 352 \quad ; \quad M_2 = 92,5 \quad ; \quad M_3 = 29$$
$$\sqrt{M_1} = 18,79 \; ; \; \sqrt{M_2} = 9,62 \; ; \; \sqrt{M_3} = 5,29$$

on a :

$$\frac{2}{\sqrt{M_1}} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} - \frac{1}{\sqrt{M_3}} = 0,1066 + 0,1040 - 0,1890 = 0,0216 > 0$$

et il n'y a pas d'entrainement : tous les δy_{ij} $(i \neq j)$ sont négatifs.

Pour un mélange d'éléments quelconques la condition précédente est toujours vérifiée pour C positif suffisamment petit et pour C suffisamment grand.

Existence du phénomène d'entrainement pour le mélange. UF^6, N^2, He

Ici $M_1 = 352$, $M_2 = 28$, $M_3 = 4$ avec $\sqrt{M_1} = 18,76$; $\sqrt{M_2} = 9,62$; $\sqrt{M_3} = 2$.

On a donc $2 < \Sigma \sqrt{M} \, y < 18,76$. Pour $r = 0,5$, le plus grand crochet devient :

$$\frac{1 - \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M_1}}}{\left(1 + \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M_2}}\right)\left(1 + \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M_1}}\right)} - \Sigma \frac{y_i}{1 + \frac{\Sigma \sqrt{M} \, y}{\sqrt{M_i}}}$$

expression qui est inférieure à :

$$\frac{1}{1+\frac{\Sigma}{\sqrt{M_2}}}\;\frac{1-\frac{\Sigma}{\sqrt{M_1}}}{1+\frac{\Sigma}{\sqrt{M_1}}}-\frac{1}{1+\frac{\Sigma}{\sqrt{M_3}}}$$

cette dernière quantité étant négative lorsque

$$\frac{1}{\sqrt{M_3}}-\frac{2}{\sqrt{M_1}}-\frac{1}{\sqrt{M_2}}-\left(\frac{1}{\sqrt{M_1 M_3}}+\frac{1}{\sqrt{M_1 M_2}}\right)\Sigma\sqrt{M}\,y<0$$

On doit donc trouver un exemple où $0,2144 - 0,0322\ \Sigma\sqrt{M}\,y > 0$ ce qui a lieu en choisissant $\Sigma\sqrt{M}\,y = 4$. Ainsi, en prenant :

$$y_1 = 0,074\ ;\ y_2 = 0,1\ ;\ y_3 = 0,826$$

on a :

$$\frac{1}{1+\frac{4}{9,62}}\cdot\frac{1-\frac{4}{18,76}}{1+\frac{4}{18,76}}-\frac{0,074}{1+\frac{4}{18,76}}-\frac{0,1}{1+\frac{4}{9,62}}-\frac{0,826}{1+\frac{4}{2}}$$

$$= 0,548 - 0,061 - 0,071 - 0,275 = 0,051 > 0 \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Remarque :

Il est clair que ces propos s'appliquent au cas où l'on effectue les manipulations considérées sur le mélange d'entrée : il suffit de changer dans les relations précédentes r en $\theta + (1-\theta)r$ ou θ est le coefficient de partage du diffuseúr.

CHAPITRE II

STRUCTURE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS RELATIFS AUX USINES

Une fois définies les boîtes unipolaires et les boîtes bipolaires provenant de la réunion d'une capacité et d'un point de séparation en aval de celle-ci - les premières étant rejetées dans le milieu extérieur $\complement U$, les deuxièmes définissant U le coeur de l'usine - on forme le graphe $G(X,\Gamma)$ de l'usine en réduisant chacune des boîtes à un point. Ce graphe étant anoté permet dans chaque cas d'avoir une représentation suffisante de l'usine à étudier ; entre autre, il met en évidence sa connexité ou sa non connexité, son irréductibilité ou sa réductibilité, enfin il permet de distinguer les usines en production des usines en reflux total.

La mise en équations de ces usines résulte de la généralisation des coefficients de partage des flux. Tout d'abord les flux se déduisent des flux principaux L_i qui sont rattachés aux coefficients de partage et aux variations des capacités par un système d'équations structurées permettant de les déterminer au cours du temps selon les théorèmes du chapitre 3. Ils sont positifs, tandis que $G(X,\Gamma)$ peut varier au cours du temps. A leur tour, les concentrations de chaque élément du mélange sont liées par un système différentiel structuré dont les solutions seront étudiées dans les chapitre 3 et 4, essentiellement pour un mélange binaire.

I - GRAPHE D'UNE USINE -

Lorsqu'on schématise une usine par des points de séparation, des points de mélange, des capacités et des arcs munis de flèches pour représenter les canalisations et le sens de l'écoulement, on réalise un graphe. Pour qu'un graphe participe à la résolution d'une question posée au sujet de cette usine, il faut qu'il soit bien représenté, c'est-à-dire de la manière la plus simple et d'une façon systématique. Il ne doit comporter que les signes ou symboles se rapportant à la dite question. Ainsi conçoit-on l'existence de plusieurs graphes pour l'étude d'une même usine.

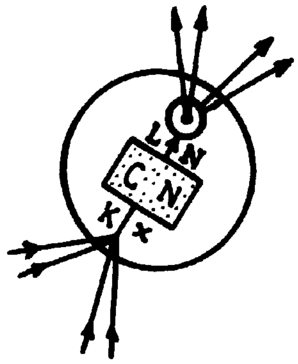
Ici l'utilité de ces graphes est d'éclaircir certaines questions d'ordre général : d'àbord de définir le champ des usines, de distinguer dans ce champ différents montages, de les dénombrer (Voir Note 1) et d'étendre le cas échéant des propriétés observables sur des usines simples (faciles à étudier) au champ des usines ou à un sous ensemble.

1/ Graphes d'usines de points de séparation à trois ouvertures.

D'après ce qui précède, on peut dire que sur un certain intervalle de temps $[t_0, t_1]$ le coeur d'usine U est formé de points de séparation et de capacités bipolaires liés les uns aux autres par des connexions, avec des entrées et des sorties dans le milieu extérieur $\complement U$. En général dans cet assemblage chaque point de séparation est alimenté par une capacité, dans le cas contraire on pourrait en placer une de valeur nulle ou du moins égale à la capacité résiduelle de connexion ; de même chaque capacité bipolaire alimente un point de séparation, dans le cas contraire on pourrait placer un point de séparation fictif avec un coefficient de partage θ nul. De cette façon, une usine devient un assemblage de boîtes schématisées sur la figure ci contre, où chacune d'elles est composée essentiellement d'une capacité bipolaire, alimentée par le flux global $K > 0$ des flux d'entrée de la boite, et d'un point de séparation, alimenté par le flux de sortie $L > 0$ de la capacité. On voit que le flux global de sortie d'une boîte est égal au flux L d'entrée de son point de séparation suivant le principe de la conservation des flux.

Précisons encore la nature des flux d'entrée et de sortie d'une boîte :

1/ Les flux d'entrée qui composent le flux global K peuvent provenir directement du milieu extérieur $\complement U$ ou des flux de sortie des boîtes de U. Les premiers seront dits flux d'alimentation extérieure ; les seconds, flux d'alimentation intérieure.



2/ Les flux qui composent le flux global de sortie L peuvent être envoyés dans $\complement U$ ou bien être utilisés comme flux d'alimentation intérieure. Dans la première alternative ces flux sont des flux de soutirage extérieur ; dans l'autre, des soutirages intérieurs.

De plus, étant donné que le point de séparation de la boîte scinde son flux d'entrée L en un flux(') L' et un flux('') L'', il y a lieu de distinguer quatre sortes de soutirages :

a) Le soutirage extérieur (') et les soutirages intérieurs (') de même concentration N' ;

b) Le soutirage extérieur ('') et les soutirages intérieurs ('') de même concentration N'' ;

Remarque :

Dans un mélange binaire où $N' > N > N''$, les signes (') et ('') signifient respectivement riche et pauvre.

Enfin, de même que nous avons fait une classification des capacités en capacités unipolaires et bipolaires, il convient de distinguer des boites unipolaires et des boites bipolaires. On aura aussi deux types de boîtes unipolaires et que l'on considérera comme appartenant au milieu extérieur $\complement U$:

1/ Les boîtes pour lesquelles le flux global d'entrée K est composé uniquement par des flux de soutirage de la boîte à laquelle appartient K, feront partie de l'ensemble E des points d'entrée de l'usine ;

2/ Les boîtes pour lesquelles tous les flux de sortie (et dont la somme est L) rentrent dans la composition du flux global d'entrée K (ou sont renvoyés à l'entrée de la boite) appartiendront à l'ensemble S des points de sortie de l'usine.

Les autres boîtes seront dites bipolaires et appartiendront à U (le coeur de l'usine).

Avec les définitions précédentes, le coeur d'usine devient sur un certain intervalle de temps un assemblage de n boîtes bipolaires liées les unes aux autres en connectant les flux de soutirage intérieur au flux d'alimentation intérieure et en reliant certaines d'entre-elles avec l'extérieur par des alimentations extérieures ou des soutirages extérieurs.

De cette représentation de l'usine on déduit un graphe qui intervient souvent dans les problèmes, en réduisant chaque boîte bipolaire à un point et en portant sur les arcs orientés, qui schématisent les connexions, l'un des cinq symboles +, ', '', $\underline{'}$, $\underline{''}$, se rapportant à leur classification et aux acceptions respectives :

+ pour alimentation extérieure de $\complement U$ vers U ;
' pour soutirage intérieur (') appartenant à U
'' pour soutirage intérieur ('') appartenant à U
$\underline{'}$ pour soutirage extérieur (') de U vers $\complement U$;
$\underline{''}$ pour soutirage extérieur ('') de U vers $\complement U$.

Ce graphe est simple en soi et donne à certains points de vue une représentation suffisante de l'usine sans faire intervenir explicitement les points de mélange.

2/ Propriétés du graphe précédent -

En se référant aux définitions données dans la "Théorie des graphes et ses applications" (chapitre 1) de Berge (1), ce graphe $G=(X,\Gamma)$ est défini par l'ensemble X des points représentatifs des boîtes bipolaires, des points d'entrée et des points de sortie de U vers le milieu extérieur $\complement U$ et par l'application Γ de X dans X définie par l'ensemble des arcs orientés et particularisés par l'un des cinq symboles +, ', ", $^{\perp}$, $^{\perp\perp}$.

Posons précisément :

$$X = E + P + S \qquad \text{avec} \qquad S = S' + S''$$

où :

E représente l'ensemble des points d'entrées du milieu extérieur vers le coeur (ou de $\complement U$ vers U) ;

P représente l'ensemble des n boîtes bipolaires du coeur U ;

$S^{\perp}$ représente l'ensemble des points de sorties (') du coeur vers le milieu extérieur (ou de U vers $\complement U$) ;

$S^{\perp\perp}$ représente l'ensemble des points de sorties (") du coeur vers le milieu extérieur (ou de U vers $\complement U$).

On a les trois relations :

$$\Gamma E \subset P \qquad \Gamma^{-1}(S) \subset P \qquad \text{et} \qquad \Gamma(P) = P + S$$

Par la suite, on dira que le coeur de l'usine (ou que l'usine) est "en production" lorsque $S \neq \emptyset$ et qu'il est "en reflux-total" lorsque $S = \emptyset$.

3/ Réductibilité et irréductibilité -

On dit que sur un intervalle de temps donné une usine ou bien $G=(X,\Gamma)$ est réductible lorsqu'on peut trouver dans G un sous-graphe dont les arcs incidents vers l'intérieur à ce sous-graphe ne proviennent que de l'ensemble E. Dans le cas contraire, l'usine ou G est irréductible.

Il est clair qu'une usine non connexe est réductible et qu'elle correspond plutôt à un ensemble d'usines indépendantes que l'on peut étudier séparément. Dans la suite on se limitera par conséquent aux usines connexes ; c'est-à-dire que pour tout couple de sommets il existe une chaîne allant de l'un à l'autre, ou que G n'a qu'une seule composante, ou enfin que l'usine ne peut être partagée en usines partielles sans rupture de flux ou d'arcs.

Enfin, une usine connexe et réductible peut être étudiée de proche en proche par les méthodes appliquées aux usines connexes irréductibles en commençant par la résolution des systèmes associés aux plus petits sous-graphes irréductibles de $G=(X,\Gamma)$ et indépendants du reste de l'usine, puis en plongeant ceux-ci dans le milieu extérieur ; l'étude se poursuit ainsi jusqu'à l'immersion complète de l'usine dans le milieu extérieur.

4/ Exemples.

La figure 1 représente une petite usine de séparation de six étages. De gauche à droite on a :

a) Le schéma réel de l'installation comprenant six réservoirs où s'effectue la séparation, et les connexions qui mettent en évidence au moins six points de mélange éventuels ;

b) Le graphe de cette usine où ne subsistent que six points de séparation, l'entrée E, les deux sorties $S^{\perp}$ et $S^{\perp\perp}$ et les différents arcs orientés ;

c) Une image de l'usine réduite à son coeur U, figuré par un rectangle, et au milieu extérieur $\complement U$, composé par l'entrée E et les deux sorties $S^{\perp}$ et $S^{\perp\perp}$.

La figure 2 correspond à des assemblages de coeurs d'usines interconnectés et rattachés avec le milieu extérieur. Il peut en résulter des usines irréductibles (figure de gauche) ou réductibles (figure de droite) et même non connexes.

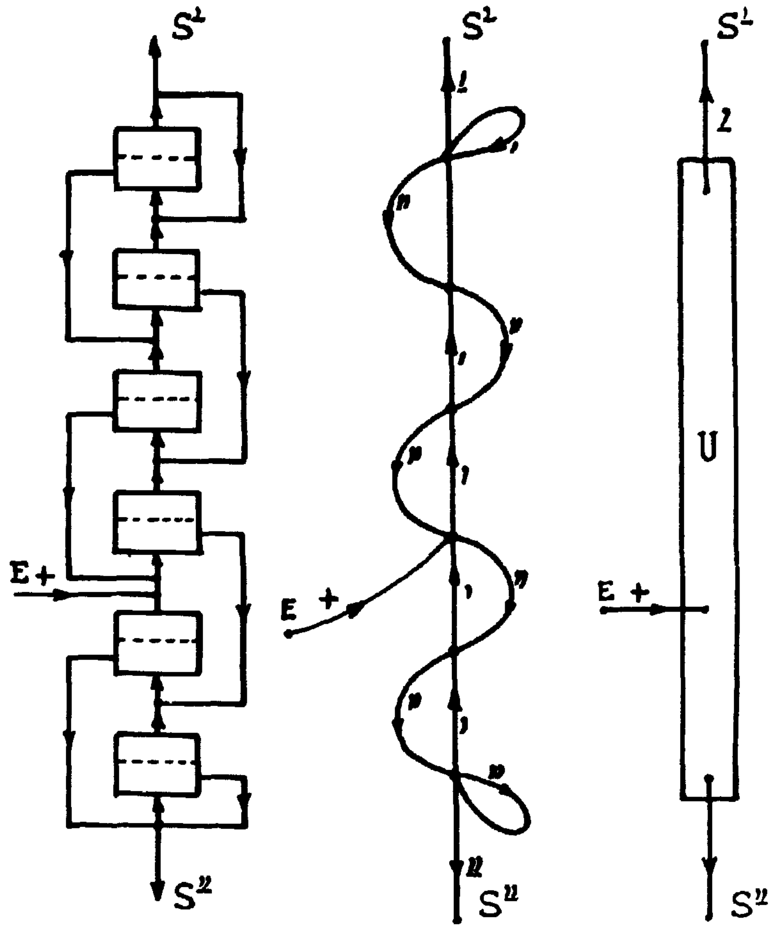


Fig. 1

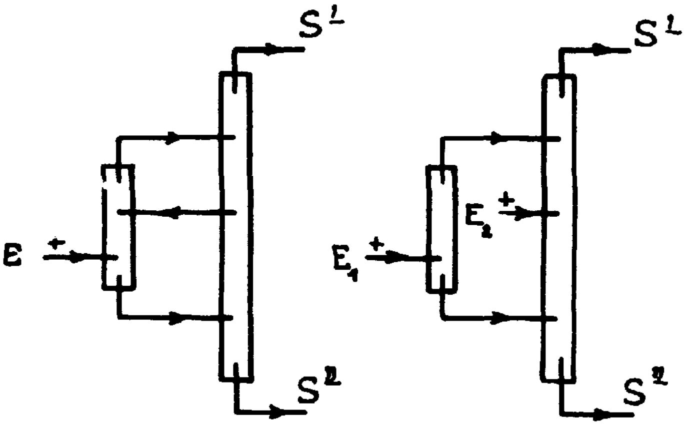
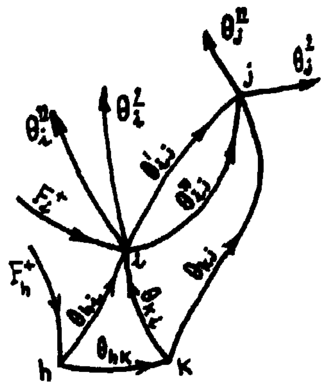


Fig. 2

5/ <u>Coefficients de partage d'une usine</u> -

Pour dénommer les flux d'une usine on systématise l'emploi des coefficients de partage. En désignant par i et j deux sommets appartenant, à l'instant t, à l'ensemble P, on pose que le flux (') et le flux (") allant du sommet i au sommet j sont respectivement $L_i \theta'_{ij}$ et $L_i \theta''_{ij}$, que le flux (') et le flux (") allant du sommet i vers le milieu extérieur sont $L_i \theta_i^{\ell}$ et $L_i \theta_i^{\ell\ell}$. Tant que i et j appartiennent à P au cours du temps, les coefficients θ'_{ij}, θ''_{ij}, θ_i^{ℓ}, $\theta_i^{\ell\ell}$ ont un sens et sont positifs ou nuls. Ils seront dits coefficients de partage partiels du graphe ou de l'usine. Il est entendu que les <u>coefficients de partage partiels</u> qui sont nuls correspondent à des arcs qui n'existent pas sur $G=(X, \Gamma)$. Pour simplifier l'écriture on posera encore :

$$\theta_{ij} = \theta'_{ij} + \theta''_{ij} \qquad \text{et} \qquad \theta_i^- = \theta_i^{\ell} + \theta_i^{\ell\ell}$$



Selon le chapitre 1, en désignant par θ_i le coefficient de partage du point de séparation de la boîte i, et par n le nombre de points distincts de l'ensemble P, on a les relations :

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{n} \theta'_{ij} + \theta_i^{I} \qquad \text{et} \qquad 1 - \theta_i = \sum_{j=1}^{n} \theta''_{ij} + \theta_i^{II}$$

qui expriment le principe de la conservation des flux.

Ainsi, θ_i peut être considéré comme le coefficient de partage global de la boîte bipolaire i. Il sera donc encore intéressant d'exprimer les coefficients de partage partiels en fonction du coefficient de partage global θ_i à l'aide de nouveaux coefficients positifs ou nuls μ'_{ij}, μ''_{ij}, μ_i^{I}, μ_i^{II} tels que :

$$\theta'_{ij} = \theta_i \, \mu'_{ij} \qquad \text{et} \qquad \theta_i^{I} = \theta_i \, \mu_i^{I} \qquad \text{d'où} \qquad \mu_i^{I} + \sum_{j=1}^{n} \mu'_{ij} = 1$$

$$\theta''_{ij} = (1 - \theta_i)\, \mu''_{ij} \qquad \text{et} \qquad \theta_i^{II} = (1 - \theta_i)\, \mu_i^{II} \qquad \text{d'où} \qquad \mu_i^{II} + \sum_{j=1}^{n} \mu''_{ij} = 1$$

ces relations intervenant plus tard pour former les systèmes différentiels des concentrations.

II - DETERMINATION DES FLUX D'UNE USINE

On se propose de déterminer les flux d'une usine en fonction de ses flux d'alimentation extérieure, de ses coefficients de partage partiels et des variations de ses capacités au cours du temps.

1/ Flux principaux d'une usine.

On observe que si en tout sommet i de l'ensemble P des boîtes bipolaires de U on désigne par L_i son flux global de soutirage, les flux de soutirage de ce sommet sont désignés par le produit de L_i et de ses coefficients de partage partiels respectifs. Ainsi, on pressent l'importance de ces flux L_i que nous appellerons désormais flux principaux.

THEOREME

Les flux d'une usine sont tous désignés et d'une seule façon par F_i^{+} ($i \in P$) pour ses flux d'alimentation, et par les produits des flux principaux L_i et des coefficients de partage partiels pour ses flux de soutirage intérieur et extérieur.

Démonstration.

En effet, les arcs du graphe (X, Γ) sont des flux de soutirage ou des alimentations extérieures supposées données.

2/ Système structuré aux flux principaux.

La détermination des flux d'une usine comprenant n boîtes bipolaires consiste donc à trouver les n inconnues L_i connaissant les flux d'alimentation extérieure F_i^+, les différents coefficients de partage de l'usine et les variations des capacités bipolaires au cours du temps.

Les relations existant entre les flux L_i proviennent d'une part de la loi de composition des flux d'alimentation globale des points i de l'ensemble P, soit :

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ji} \; L_j + F_i^+ \tag{1}$$

et d'autre part de l'expression de la variation molaire totale des capacités C_i par unité de temps, soit :

$$\frac{dC_i}{dt} = K_i - L_i \; ; \tag{2}$$

où il est entendu que cette variation molaire est assujettie à la condition :

$$C_i(t) = C_i(o) + \int_o^t \frac{d\,C_i}{d\,t'}\,dt' \geq 0.$$

Entre les équations (1) et (2) on forme le système structuré aux flux principaux :

$$(1 - \theta_{ii})\, L_i - \sum_{j \in P-i} \theta_{ji} \; L_j = F_i^+ - \frac{d\,C_i}{d\,t} \qquad (i=1, \;\ldots,\; n \;;\; \text{ou } i \in P)$$

à partir duquel on pourra en général les déterminer et, par suite, tous les flux de l'usine à l'aide des données précédentes.

En additionnant toutes les équations de ce système, on a le bilan total :

$$\sum_{i \in P} \theta_i^- \; L_i = \sum_{i \in P} F_i^+ - \sum_{i \in P} \frac{d\,C_i}{d\,t} \geq 0$$

le premier membre résultant des relations manifeste entre les coefficients de partage.

$$1 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} = \theta_i^- \qquad (i \in P)$$

Ce bilan exprime que la somme des flux des alimentations extérieures de U est égale à la somme des flux de ses soutirages extérieurs augmentée de sa variation molaire totale par unité de temps. Il exprime aussi que dans le système les sommes des coefficients d'un même flux sont positives ou nulles.

3/ Résolution du système aux flux principaux.

1/ On établit généralement que le système aux n flux L_i admet une solution $\bar{L}$ de composantes L_i dans les deux possibilités suivantes :

a) Cas d'une usine en production $\sum_{i \in P} \theta_i^- > 0$

Lorsque l'usine est irréductible, la matrice des coefficients du système est irréductible (c'est-à dire qu'on ne peut pas déterminer directement un sous ensemble de composantes d'une solution indépendamment des autres). Le théorème de Taussky au chapitre 3 montre que le déterminant de cette matrice est positif et par suite que le système admet une et une seule solution. De même lorsque l'usine est connexe et réductible, ce théorème d'existence et d'unicité s'étend de proche en proche à toute l'usine à partir du plus petit sous-graphe irréductible pour lequel la somme de ses flux de soutirage extérieur est nécessairement positive en raison de la connexité.

b) Cas d'une usine en reflux total

$$\sum_{i \in P} \theta_i^- = 0 .$$

Tous les coefficients θ_i^- sont nuls et par suite les sommes des coefficients des colonnes du système (ou d'un même flux L_i) sont nulles aussi. En admettant que la condition de compatibilité $\sum_{i \in P} F_i^+ - \sum_{i \in P} \frac{d\,C_i}{d\,t} = 0$ soit remplie et que la matrice des coefficients soit irréductible, on pourra se fixer l'une des composantes $\bar{L}_i = 0$ par exemple et déterminer la solution particulière du système à n-1 équations obtenu en supprimant l'équation de rang i pour lequel le déterminant des coefficients des $\bar{L}_j$ ($j \neq i$) est positif d'après le théorème de Taussky. A cette solution particulière comprenant $\bar{L}_i = 0$, on pourra ajouter la solution générale du système homogène dont les composantes seront toutes du signe de L_i.

2/ On peut préciser davantage pour les usines irréductibles à capacités constantes au cours du temps, les flux d'alimentation $F_i^+(t)$ et les coefficients de partage pouvant encore varier. Dès lors les résultats suivants découlent immédiatement du chapitre 3 :

a) Pour $\sum_{i \in P} \theta_i^- > 0$, la solution est unique. Elle est manifestement nulle lorsque $\sum_{i \in P} F_i^+ = 0$ (Cas trivial dénué de sens physique) ; mais pour $\sum_{i \in P} F_i^+ > 0$ (strictement positif) et fini, les flux L_i sont strictement positifs (> 0) et finis.

b) Pour $\sum_{i \in P} \theta_i^- = 0$, on doit avoir $F_i^+ = 0$ ($i \in P$) d'après le bilan total. Les flux L_i sont définis à un facteur constant près et sont strictement positifs (> 0) et finis. (La solution $L = 0$ étant dénuée de sens physique).

4/ Modification de $G(X,\Gamma)$ au cours du temps.

On peut penser que les résultats précédents sont encore valables pour des petites variations des capacités au cours du temps. Cependant lorsque celles-ci $C_i(t) \geqslant 0$, les coefficients de partage $\theta_{ij}(t)$, $\theta_i^-(t) \geqslant 0$ liés par les relations $1 = \sum_{j \in P} \theta_{ij} + \theta_i^-$ et les alimentations $F_i^+(t) \geqslant 0$ sont données arbitrairement sous réserve des conditions précédentes, les composantes $L_i(t\,,\,t_0)$ d'une solution du système formé à partir de l'ensemble $P(t_0)$ ne sont pas pourvues nécessairement d'un signe permanent au cours du temps. Néanmoins, par définition de l'ensemble $P(t_0)$, il existe toujours un intervalle arbitrairement petit $]t_0\,,\,t_0+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ sur lequel les flux $L_i(t) > 0$ $[i \in P(t_0)]$. Par suite, si pour $\bar{t} > t_0$ l'une ou plusieurs des composantes $L_i(\bar{t}\,,\,t_0)$ de la solution du système d'équations relatif à $P(t_0)$ sont négatives ou nulles, il faut réviser l'ensemble $P(t_0)$ à partir de l'instant t_1 le plus proche de t_0 où l'on voit au moins l'un des flux $L_i(t_1\,,\,t_0)$ nul $[i \in P(t_0)]$ pour définir s'il y a lieu un nouvel ensemble $P(t_1)$ tel que $L_j(t) > 0$ pour $t > t_1$ et $j \in P(t_1)$. Dans ce cas on aura $P(t_0) \neq P(t_1)$ sinon t_1 serait un instant isolé intérieur à un intervalle où les flux $L_i(t)$ seraient strictement positifs excepté pour $t=t_1$. Après quoi, on prolongera, avec le système formé sur $P(t_1)$, la solution à droite de t_1 jusqu'à un nouvel instant t_2 où il y aura lieu de définir $P(t_2) \neq P(t_1)$ et ainsi de suite. De cette façon les graphes successifs de l'usine seront définis sur des intervalles $]t_0\,,\,t_1[\,,\,]t_1\,,\,t_2[\,,\,]t_2\,,\,t_3[\,,\ldots$

En fait, les variations de $P(t)$ sont attribuables à de nombreuses causes. Par exemple, des points de séparation peuvent devenir des points de mélange et inversement. La raison physique de cette transfomation correspondrait à un dérangement inopiné de l'usine ou à une opération de maintenance. Mais la première éventualité serait évitée en disposant sur les flux des clapets de sécurité qui leur attribuent un sens permanent ; alors les variations des capacités, les flux d'alimentation extérieure et les coefficients de partage perdraient encore une part d'arbitraire. La seconde éventualité ayant lieu en pleine clairvoyance correspondrait à une modification dirigée de la structure de l'usine aux instants $t_1\,,\,t_2\,,\ldots$ lesquels formeraient un ensemble fini sur tout intervalle de temps fini.

En définitive, on supposera les flux $L_i(t)$ strictement positifs et nuls au plus sur un ensemble (de mesure nulle) non dense, par exemple en définissant $G(X,\Gamma)$ par intervalles de temps d'une durée supérieure ou égale à un temps donné positif.

III - SYSTEMES DIFFERENTIELS DES CONCENTRATIONS D'UNE USINE -

1/ Mise en équations.

Les systèmes différentiels des concentrations d'une usine à capacités variables au cours du temps s'obtiennent en formant relativement à chaque élément du mélange et pour chaque capacité de l'ensemble P (défini p. 18) sa variation molaire élémentaire par unité de temps. Pour l'élément e^k cette variation est :

$$\frac{dC_i N_i^k}{dt} = \sum_{j\in P} L_j\ \theta'_{ji}\ N_j'^k + \sum_{j\in P} L_j\ \theta''_{ji}\ N_j''^k + F_i^*\ N_i^{*k} - L_i\ N_i^k$$

Compte tenu du bilan élémentaire du point i :

$$N_i^k = \theta_i\ N_i'^k + (1 - \theta_i)\ N_i''^k$$

et en introduisant les coefficients μ de la p. 24, on a l'équation structurée $(1)_i^k$ ($i\in P$) du système différentiel des n concentrations de l'usine par rapport à l'élément e^k :

$$\frac{dC_i N_i^k}{dt} + [(1 - \mu'_{ii})\,\theta_i\ N_i'^k + (1 - \mu''_{ii})\,(1 - \theta_i) N_i''^k]\ L_i$$

$$- \sum_{j\in P-i} [\mu'_{ji}\ \theta_j\ N_j'^k + \mu''_{ji}\ (1 - \theta_j)\ N_j''^k]\ L_j = F_i^*\ N_i^{*k}$$

où les $N_i'^k$, $N_i''^k$ (et à la rigueur les θ_i) doivent être regardés comme des fonctions données des s-1 concentrations $N_i^1, \dots, N_i^{s-1}$. Les équations de ce système prennent la forme équivalente.

$$\frac{dC_i N_i^k}{dt} + [(1 - \mu'_{ii})\ \theta_i\ \alpha_i^k + (1 - \mu''_{ii})\ (1 - \theta_i\ \alpha_i^k)]\ L_i\ N_i^k$$

$$- \sum_{j\in P-i} [\mu'_{ji}\ \theta_j\ \alpha_j^k + \mu''_{ji}\ (1 - \theta_j\ \alpha_j^k)]\ L_j\ N_j^k = F_i^*\ N_i^{*k}$$

2/ Structure des équations.

Outre les propriétés des fonctions $N_i'^k$ et $N_i''^k$ que nous rappelons :

$$\Big(0 < \sum_{k\in\mathcal{S}} N^k < 1\Big) \Longleftrightarrow \Big(0 < \sum_{k\in\mathcal{S}} N'^k < 1\Big) \Longleftrightarrow \Big(0 < \sum_{k\in\mathcal{S}} N''^k < 1\Big)$$

$$\Big(\sum_{k\in\mathcal{S}} N^k = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k\in\mathcal{S}} N'^k = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k\in\mathcal{S}} N''^k = 0\Big)$$

$$\Big(\sum_{k\in\mathcal{S}} N^k = 1\Big) \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k\in\mathcal{S}} N'^k = 1\Big) \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k\in\mathcal{S}} N''^k = 1\Big)$$

quel que soit $\mathcal{S} \subset (1, \dots, s-1)$.

on vérifie que le coefficient de L_i est positif pour $N_i > 0$. En effet, $1-\mu'_{ii}\geq 0$, $1-\mu''_{ii}$ 0 et $0<\theta_i<1$; cependant il serait nul pour $1-\mu''_{ii} = 0$ et $\theta_i = 0$ ou $1-\mu'_{ii} = 0$, mais le point i correspondrait à une boîte unipolaire de sortie de l'usine et n'appartiendrait pas à l'ensemble P. Puis ce même coefficient est inférieur ou égal à :

$$(1 - \mu'_{ii})\,\theta_i + (1 - \mu''_{ii})\,(1 - \theta_i) = 1 - \mu'_{ii}\,\theta_i - \mu''_{ii}\,(1 - \theta_i) = 1 - \theta'_{ii} - \theta''_{ii} = 1 - \theta_{ii}$$

Le coefficient de L_j est négatif ou nul, et, en valeur absolue inférieur à :

$$\mu'_{ji}\ \theta_j + \mu''_{ji}\ (1 - \theta_j) = \theta'_{ji} + \theta''_{ji} = \theta_{ji}$$

Bien entendu, les capacités $C_i(t)$ et les seconds membres $F_i^*(t)\ N_i^*(t)$ de ces équations différentielles sont positifs ou nuls.

D'autre part, en additionnant toutes les équations $(1)_i^k$ ou $(2)_i^k$ du système, on parvient au bilan élémentaire :

$$\sum_{i\in P} \frac{dC_i N_i^k}{dt} + \sum_{i\in P} [\theta_i \alpha_i \mu_i^{\prime} + (1 - \theta_i \alpha_i) \mu_i^{\prime\prime}] L_i N_i^k = \sum_{i\in P} F_i^* N_i^{*k}$$

$$\sum_{i\in P} \frac{dC_i N_i^k}{dt} + \sum_{i\in P} [\mu_i^{\prime} \theta_i N_i^{\prime k} + \mu_i^{\prime\prime} (1 - \theta_i) N_i^{\prime\prime k}] L_i = \sum_{i\in P} F_i^* N_i^{*k}$$

provenant des relations manifestes entre les coefficients de partage :

$$1 - \sum_{j\in P} \mu_{ij}^{\prime} = \mu_i^{\prime} \qquad \text{et} \qquad 1 - \sum_{j\in P} \mu_{ij}^{\prime\prime} = \mu_i^{\prime\prime}$$

qui exprime que l'alimentation élémentaire de l'usine est égale à son soutirage élémentaire augmenté de sa variation molaire élémentaire par unité de temps. De plus, il montre que toutes les sommes $d_i (N_i^k)$ des fonctions se rapportant à un même indice i sont positives ou nulles puisque les flux sont positifs.

Enfin, pour un mélange binaire, on vérifie immédiatement d'après les deux inégalités de la page 12 que sur le domaine $0 < N_i < 1$, $(i \in P)$, les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_{ii} (N_i) = [(1 - \mu_{ii}^{\prime}) \theta_i N_i^{\prime} + (1 - \mu_{ii}^{\prime\prime}) (1 - \theta_i) N_i^{\prime\prime}] L_i$$

$$f_{ij} (N_j) = [\mu_{ji}^{\prime} \theta_j N_j^{\prime} + \mu_{ji}^{\prime\prime} (1 - \theta_j) N_j^{\prime\prime}] L_j$$

$$d_i (N_i) = f_{ii} (N_i) - \sum_{j\in P-i} f_{ji} (N_i) = [\mu_i^{\prime} \theta_i N_i^{\prime} + \mu_i^{\prime\prime} (1 - \theta_i) N_i^{\prime\prime}] L_i$$

par rapport aux concentrations sont strictement positives pour les premières, positives ou nulles pour les autres et, par conséquent, sont des fonctions croissantes des concentrations lorsqu'elles ne sont pas identiquement nulles. De plus ces dérivées sont bornées supérieurement par les flux principaux tandis que les fonctions elles-mêmes sont bornées supérieurement par les flux principaux élémentaires. (Il suffit de poser $\mu_{ii}^{\prime} = \mu_{ii}^{\prime\prime} = 0$ et $\mu_{ji}^{\prime} = \mu_{ji}^{\prime\prime} = 1$ pour s'en rendre compte).

3/ Système variationnel linéarisé d'une usine en mélange binaire.

Soit $\overrightarrow{N^*(t)}$ une solution du système différentiel (1) p. 27. On pose dans les équations :

$$N_i (t) = N_i^* (t) + \delta_i (t) \qquad (i \in P)$$

et on ne garde que les termes linéaires, ce qui conduit pour une usine en mélange binaire au système variationnel linéarisé :

$$\frac{d}{dt} [C_i (t) \delta_i] + \left[(1 - \mu_{ii}^{\prime}) \theta_i \left(\frac{\partial N_i^{\prime}}{\partial N_i}\right)^* + (1 - \mu_{ii}^{\prime\prime}) (1 - \theta_i) \left(\frac{\partial N_i^{\prime\prime}}{\partial N_i}\right)^*\right] L_i \delta_i$$

$$- \sum_{j\in P-i} \left[\mu_{ji}^{\prime} \theta_j \left(\frac{\partial N_j^{\prime}}{\partial N_j}\right)^* + \mu_{ji}^{\prime\prime} (1 - \theta_j) \left(\frac{\partial N_j^{\prime\prime}}{\partial N_j}\right)^*\right] L_j \delta_j = 0$$

dont la structure est manifeste.

IV - DISTINCTION DES USINES EN PRODUCTION DES USINES EN REFLUX TOTAL.

En vue des applications du chapitre 4, le théorème suivant permet de distinguer les usines en production des usines en reflux total :

THEOREME

Les sommes $\sum_{i\in P} \theta_i^-$ et $\sum_{i\in P} d_i(N_i^k)$ pour $N_i^k > 0$ sont simultanément nulles ou simultanément positives presque partout au cours du temps.

Démonstration.

1/ Lorsque $\sum_{i\in P} d_i(N_i^k) = 0$, on a quel que soit $i \in P$

$$[\mu_i^l \, \theta_i \, N_i'^k + \mu_i^{u} \, (1 - \theta_i) \, N_i''^k] \, L_i = 0$$

et puisque $N_i^k > 0$ et $L_i > 0$ presque partout au cours du temps, on a aussi $N_i'^k > 0$ et $N_i''^k > 0$, ce qui implique $\mu_i^l \, \theta_i = \theta_i^l = 0$ et $\mu_i^u = 0$, soit $\theta_i^u = (1 - \theta_i) \, \mu_i^u = 0$; d'où $\theta_i^- = \theta_i^l + \theta_i^u = 0$ quel que soit $i \in P$: et $\sum_{i\in P} \theta_i^- = 0$. C. q. f. d.

2/ Lorsque $\sum_{i\in P} d_i(N_i^k) > 0$, il existe au moins un indice i tel que :

$$0 < [\mu_i^l \, \theta_i \, N_i'^k + \mu_i^u \, (1 - \theta_i) \, N_i''^k] \, L_i$$

et a fortiori, on a donc

$$0 < [\theta_i \, \mu_i^l + (1 - \theta_i) \, \mu_i^u] \, L_i = \theta_i^- \, L_i$$

soit $0 < \theta_i^- \, L_i$ et $\theta_i^- > 0$; par suite $\sum_{i\in P} \theta_i^- > 0$. C. q. f. d.

Les réciproques s'établissent par l'absurde.

$\left(\sum_{i\in P} \theta_i^- = 0 \Longrightarrow \sum_{\substack{i\in P \\ (N_i^k > 0)}} d_i(N_i^k) = 0\right.$, sinon le 1° $\Longrightarrow \sum_{i\in P} \theta_i^- > 0$ ce qui est absurde.

NOTE DU CHAPITRE 2

I - DENOMBREMENT DES USINES ISOLEES DU MILIEU EXTERIEUR

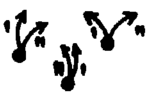
A titre d'application de la notion de graphe, on peut dénombrer les usines isolées du milieu extérieur et n'ayant que des points de séparation à trois ouvertures (une entrée, une sortie (') et une sortie ("). Il y a deux cas intéressants à distinguer : celui où les boîtes de P ont des capacités de valeurs distinctes et celui où elles ont la même valeur.

1/ Usines de capacités inégales.

Soit $\mathcal{N}(n)$ le nombre d'usines distinctes isolées que l'on peut former avec n boîtes bipolaires de capacités différentes. Pour les construire on peut numéroter les n boîtes par ordre de capacités croissantes et les placer chacune à leur tour dans l'usine formée par les précédentes. Ainsi,

$$\mathcal{N}(n + 1) = \mathcal{N}(n) \;.\; 2n \;.\; 2 \;.\; (n + 1)$$

En effet, on obtient une usine à (n+1) boîtes en choisissant l'une des $\mathcal{N}(n)$ usines distinctes, puis en plaçant sur l'un de ses 2n arcs une boîte de capacité plus grande que les n premières autres et que l'on peut fixer de deux manières différentes, et enfin en reliant le flux libre (') ou (") de cette $(n+1)^{ième}$ boîte à l'une des n+1 entrées.



n boîtes
et 2n arcs

De $\mathcal{N}(1) = 1$, on obtient aisément :

$$\mathcal{N}(n) = 4^{n-1} \,[(n-1)\,!\,]^2 \,.\, n$$

2/ Usines de capacités identiques.

Soit N(n) le nombre d'usines distinctes isolées que l'on peut former avec n boîtes de capacités identiques. Par l'artifice d'un numérotage de ces boîtes on pourrait distinguer $\mathcal{N}(n)$ usines. Mais à présent, parmi ces dernières, celles qui ne diffèrent que par une permutation de leurs boîtes doivent être considérées comme semblables ; elles sont en nombre de n ! Par suite, le nombre d'usines distinctes à capacités identiques est :

$$N(n) = \frac{\mathcal{N}(n)}{n\,!} = 4^{n-1}\,(n-1)\,!$$

D'où N(1) = 1, N(2) = 4, N(3) = 32, N(4) = 384, N(5) = 6144, ... Ce nombre croît très rapidement avec n. Il soulève le problème du choix. En général on se borne aux usines en cascades (2).

BIBLIOGRAPHIE

(1) BERGE - Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris 1958.

(2) BOULIGAND - Comparaison des cascades à flux total minimum, Rapport C.E.A. N°

CHAPITRE III

SYSTÈMES DIFFERENTIELS LINÉAIRES

Les résultats que nous rassemblons dans ce chapitre découlent en partie du critère de régularité de certaines matrices donné par Hadamard, puis par Olga Taussky. Cependant les matrices que nous rencontrons étant plus particulières, nous en déduisons des théorèmes de localisation des composantes de la solution de systèmes d'équations linéaires analogues à ceux qui définissent les flux principaux d'une usine, et des théorèmes de stabilité des solutions de systèmes différentiels linéaires et homogènes à coefficients constants semblables au système variationnel des concentrations d'une usine en mélange binaire. Ces derniers théorèmes sont étendus à des systèmes différentiels mixtes résultant de l'annulation de certains coefficients jouant le rôle de capacités. Enfin, en anticipant un peu sur les résultats du chapitre 4, nous avons donné des théorèmes concernant des systèmes différentiels à coefficients variables montrant différentes possibilités au sujet du comportement asymptotique de leurs solutions. (Voir la Note II du Ch. IV, p. 88 qui donne quelques définitions sur la stabilité).

I - CRITERE DE REGULARITE DE CERTAINES MATRICES

Sans avoir recours au critère de Routh et Hurwitz (1) p. 21, le théorème d'Olga Taussky (2) permet d'établir pour un ensemble de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants que leurs racines caractéristiques ne sont jamais situées à droite de l'axe imaginaire, ce qui entraînera la stabilité asymptotique de leurs solutions. Ce théorème prouve la régularité de certaines matrices qui s'associent à ces systèmes différentiels ou à des systèmes d'équations linéaires qui, de ce fait, admettent une et une seule solution.

1/ Théorème d'Olga Taussky.

L'énoncé du théorème de Taussky fait intervenir les notions de réductibilité et d'irréductibilité d'une matrice, ces notions ayant leur pendant en théorie des graphes.

Définitions.

Une matrice carrée A est réductible lorsqu'elle peut, après une même permutation des lignes et des colonnes, se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$$

P et Q étant des matrices carrées et O une matrice rectangle nulle.

Une matrice carrée qui n'est pas réductible est irréductible.

THEOREME

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que pour chacune de ses lignes on ait :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1, \dots, n) \tag{1}$$

avec l'égalité pour n-1 de ces relations au plus. Si la matrice A est irréductible, elle est régulière.

Démonstration. (Voir (2), p. 18).

Supposons au contraire que le déterminant de la matrice A soit nul et envisageons le système des n équations linéaires et homogènes, d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{2}$$

On peut affirmer qu'il existe au moins une valeur de j pour laquelle on a :

$$|x_k| > |x_j|$$

x_k étant la composante de module maximum du système (2).

- En effet, en supposant par exemple que la première des relations (1) se présente comme une inégalité :

$$|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} a_{1j}$$

D'autre part, on a :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

d'où :

$$|a_{11}|\,|x_1| \leq |a_{12}|\,|x_2| + \ldots + |a_{1n}|\,|x_n|$$

et en admettant au contraire que $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| \neq 0$, il viendrait après simplification :

$$|a_{11}| \leq \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

ce qui est contradictoire. -

Compte tenu de cette affirmation, la $k^{ième}$ équation du système (2) permet d'écrire :

$$|a_{kk}|\,|x_k| < \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,|x_j|$$

et, par suite,

$$|a_{kk}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

sans qu'il y ait nécessairement contradiction. Mais s'il en est ainsi, la $k^{ième}$ ligne du système (2) contient n-s coefficients nuls, s étant le nombre des indices d pour lesquels $|x_k| = |x_d|$, et de même les s lignes correspondantes de la matrice A contiennent n-s zéros aux mêmes places. Dès lors, la matrice est du type qui a été exclu. C. q. f. d.

Corollaire 1.

Lorsque la matrice A vérifie les hypothèses du théorème de Taussky et que les éléments de sa diagonale principale sont positifs, les autres étant réels, le déterminant de cette matrice est positif (2), p. 17.

Démonstration.

En effet, en multipliant tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à sa diagonale principale par un paramètre λ pris dans l'intervalle [0, 1], son déterminant est un polynome réel continu en λ qui n'est jamais nul et qui est positif pour $\lambda = 0$. C. q. f. d.

2/ Condition de régularité d'une matrice réductible.

Etant donnée une matrice réductible A qui se met donc sous la forme :

$$\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$$

après une même permutation des lignes et des colonnes, son déterminant $|A|$ est inchangé par cette même permutation et $|A| = |P| \cdot |Q|$. Par conséquent, A est régulière si P et Q sont régulières. Il se peut que P ou Q ou bien P et Q soient réductibles lesquelles se décomposent à nouveau en sous matrices.

En poursuivant le processus des mêmes permutations des lignes et des colonnes on arrive à mettre $|A|$ sous la forme d'un produit de déterminants de matrices irréductibles. Ainsi, lorsque les conditions du théorème de Taussky se vérrifient sur chacune de ces matrices, la matrice A est régulière ; sinon $|A|$ est nul.

Application.

Toute chaîne de mineurs construite sur la diagonale principale d'une matrice de Taussky irréductible est formée de matrices régulières.

En effet, si le déterminant de l'une de ces matrices était nul on pourrait le transformer en un produit de déterminants de matrices irréductibles après une même permutation des lignes et des colonnes, dont l'un serait nul. Pour celui-ci les relations de Taussky seraient vérifiées. Il en résulterait que la matrice de Taussky dont on considère la chaîne de mineurs est réductible contrairement à ce qui est admis.

II - THEOREMES DE LOCALISATION DES COMPOSANTES DE LA SOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES.

En application du théorème de Taussky résultent deux théorèmes relatifs à la situation des composantes de la solution x de systèmes d'équations linéaires.

1/ Le jacobien $|A|$ du systèmes est positif.

THEOREME

Le système d'équations linéaires :

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n = b_1 \\ - a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - \dots - a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ - a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{array}$$

admet une et une seule solution, et cette solution a ses composantes strictement positives lorsqu'il est supposé que :

1/ La matrice A du tableau des a_{ij} est irréductible.

2/ Tous les a_{ij} sont réels et satisfont aux conditions :

$$a_{ii} > 0, \qquad a_{ij} \geq 0 \qquad (i \neq j = 1, \dots, n),$$

et pour chaque colonne j de A :

$$a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \geq 0$$

avec le signe d'inégalité pour l'une au moins de ces sommes ;

3/ $b_i \geq 0$ $(i=1, \dots, n)$ avec $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$.

Démonstration.

D'après le théorème de Taussky la matrice A est régulière, ce qui entraîne que le système admet une et une seule solution. Il reste à établir que ses composantes sont plus grandes que zéro.

Supposons qu'il existe un ensemble $E \subsetneq (1, \dots, n)$ tel que :

$$\forall \alpha \in E \longleftrightarrow x_\alpha < 0$$

on aurait en additionnant les équations du système associé à l'ensemble E :

$$\sum_{\alpha \in E} (a_{\alpha\alpha} - \sum_{\alpha' \in E-\alpha} a_{\alpha'\alpha})\, x_\alpha - \sum_{\beta \notin E} \sum_{\alpha \in E} a_{\alpha\beta}\, x_\beta = \sum_{\alpha \in E} b_\alpha$$

Mais le second membre de cette relation serait ≥ 0 tandis que le premier serait < 0 par la présence de $\sum_{\alpha \in E} (a_{\alpha\alpha} - \sum_{\alpha' \in E-\alpha} a_{\alpha'\alpha})\, x_\alpha$ qui est négatif : parce que si $E \neq (1, \dots, n)$ les expressions $a_{\alpha\alpha} - \sum_{\alpha' \in E-\alpha} a_{\alpha'\alpha}$ sont manifestement ≥ 0 et l'une d'entre elles au moins est > 0 sinon le système serait réductible, et si $E = (1, \dots, n)$ on a par hypothèse que l'une des sommes $a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}$ est positive. D'où $E = \emptyset$.

L'impossibilité précédente étant écartée, supposons qu'il existe un ensemble $E' \subsetneq (1, \dots, n)$ tel que :

$$\forall \gamma \in E' \longleftrightarrow x_\gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall \beta \in \complement E' \longleftrightarrow x_\beta > 0$$

En additionnant les équations associées à E' on aurait les relations :

$$-\sum_{\beta \in \complement E'} \sum_{\gamma \in E'} a_{\gamma\beta}\, x_\beta = \sum_{\gamma \in E'} b_\gamma$$

Mais pour $E' \neq (1, \dots, n)$ le second membre serait ≥ 0 tandis que le premier serait négatif en raison de l'irréductibilité de A ; et pour $E' = (1, \dots, n)$ le premier membre serait nul et le second positif par hypothèse.

Il en résulte bien que la solution a toutes ses composantes positives. C. q. f. d.

Applications :

Ce théorème montre que dans une usine irréductible à capacités constantes et en production les flux principaux sont strictement positifs et finis ; d'autre part il suggère que les concentrations permanentes sont positives et finies. Ces propriétés s'étendent aux usines réductibles et connexes (Voir la remarque 1).

Corollaire 1.

Avec les conditions du théorème précédent, les n matrices obtenues en remplaçant dans A une colonne ou une ligne par les composantes de $\vec{b}$ sont régulières ; leurs déterminants étant positifs.

Remarque 1.

Le théorème précédent s'étend au cas des matrices A réductibles $\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$ satisfaisant aux conditions du 2/ pourvu que les matrices P et Q soient régulières, que $\vec{b}_p \neq 0$ et que $\vec{b}_q \neq 0$ pour $R = 0$.

En effet, P étant régulière, toutes les sommes des colonnes de P ne sont pas nulles ; elles sont donc ≥ 0 d'après le 2/, et l'une d'elles au moins est positive. Autrement dit les colonnes de P vérifient aussi les conditions du 2/.

En admettant d'abord que P est irréductible, on pourra appliquer le théorème 1 à la résolution du système linéaire $P\vec{x}_p = \vec{b}_p \neq 0$: Les composantes de $\vec{x}_p$ sont > 0. Puis en admettant aussi que Q est irréductible, on pourra appliquer le théorème 1 à la résolution du système $Q\vec{x}_q = \vec{b}_q + (-R)\vec{x}_p$ où tous les éléments de la matrice R sont ≤ 0 et où, par conséquent, le second membre représente un vecteur dont les composantes sont ≥ 0 et dont la somme est positive selon les hypothèses posées. Ainsi, lorsque P et Q sont irréductibles, le système se résout en deux étapes.

Si P ou Q, ou P et Q étaient réductibles, on procéderait de même en plusieurs étapes dont le nombre est inférieur ou égal à n, chacune de ces étapes livrant la solution d'un certain nombre de composantes de $\mathfrak{X}$.

Corollaire 2.

Les composantes des solutions sont des *fonctions* croissantes au sens strict des composantes du second membre du système.

Démonstration.

En effet, $\frac{\partial x_i}{\partial b_j}$ est, en raison de la linéarité, égal à la valeur positive que prend x_i lorsque les composantes du second membre sont $b_k = \delta_{kj}$.

2/ Le jacobien $|A|$ du système est nul.

THEOREME 1.

Le système d'équations linéaires et homogènes :

$$\begin{array}{r}
a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n = 0 \\
- a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - \dots - a_{2n} x_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
- a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \dots + a_{nn} x_n = 0
\end{array}$$

admet une seule solution $\mathfrak{X}$ non identiquement nulle définie à un facteur prés.

Cette solution a toutes ses composantes de même signe et aucune d'elles n'est nulle lorsque $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0$ et que :

1/ La matrice A des coefficients a_{ij} est irréductible ;

2/ Les éléments a_{ij} sont réels et satisfont aux conditions :

$$a_{ii} > 0, \; a_{ij} \geq 0 \qquad (i \neq j = 1, \dots, n);$$

3/ Les sommes des colonnes de A sont nulles.

$$a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} = 0 \qquad (j = 1, \dots, n).$$

De plus, si on ajoute au système précédent l'équation :

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = b$$

avec :

$$C_i \geq 0 \qquad (i = 1, \dots, n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} C_i > 0$$

la solution est unique, ses composantes sont du signe de b ; elles sont nulles pour b = 0.

Démonstration.

Il est clair que le déterminant de A est nul puisque les sommes des éléments de ses colonnes sont nulles ; mais les chaînes de mineurs construites sur la diagonale principale de A sont positives en raison de l'irréductibilité de A et du critère de régularité p. 46. Par suite, on peut se fixer l'une des composantes x_i par exemple et déterminer les autres en fonction de x_i à l'aide du système des n-1 équations ne contenant pas a_{ii} ; le théorème précédent montre qu'elles sont $\neq 0$ et du signe de x_i.

Lorsqu'on ajoute au système homogène l'équation complémentaire $\sum_{i=1}^{n} C_i x_i = b$ avec $C_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} C_i > 0$, la solution est unique puisque selon le premier corollaire précédent la matrice des coefficients du système obtenu en remplaçant l'une des équations homogènes par l'équation complémentaire est régulière. Enfin l'équation complémentaire montre que l'un des x_i au moins est du signe de b. Ceci démontre la seconde partie du théorème.

Applications.

La première partie de ce théorème montre que dans une usine irréductible à capacités constantes et en reflux total les flux principaux sont strictement positifs et finis ; la seconde partie suggère que ses concentrations permanentes sont strictement positives et finies lorsqu'elles ne sont pas toutes nulles.

Corollaire 1.

Les composantes de la solution sont des fonctions continues et croissantes au sens strict par rapport à b.

Démonstration.

La dérivée $\frac{dx_i}{db}$ est identique à la valeur positive que prend x_i pour $b = 1$.

III - STABILITE DE SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES ET HOMOGENES A COEFFICIENTS CONSTANTS -

Le théorème de Taussky permet de démontrer les théorèmes suivants se rapportant au comportement des solutions de systèmes différentiels linéaires et homogènes à coefficients constants soumis à certaines inégalités.

1/ Le jacobien $|A|$ du système est positif.

THEOREME 1.

Le système différentiel linéaire et homogène à coefficients constants :

$$C_1 \frac{dx_1}{dt} + a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n = 0$$

$$C_2 \frac{dx_2}{dt} - a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - \dots - a_{2n} x_n = 0$$

....

$$C_n \frac{dx_n}{dt} - a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \dots + a_{nn} x_n = 0$$

admet la propriété que toutes ses solutions $\overrightarrow{x(t)}$ convergent vers zéro quand t croît indéfiniment et lorsqu'il est supposé que :

1/ La matrice A du tableau des a_{ij} est irréductible ;

2/ Les a_{ii} sont positifs : $a_{ii} > 0$ pour $(i=1, \dots, n)$, et pour chaque colonne j de A :

$$a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \geq 0$$

avec l'égalité pour $n - 1$ de ces relations au plus ;

3/ Tous les coefficients C_i sont positifs : $C_i > 0$ pour $(i=1, \dots, n)$.

Démonstration.

Le système différentiel proposé se ramène à la forme normale par le changement de variables

$$C_i\ x_i = y_i \qquad \text{puisque} \qquad C_i \neq 0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)$$

et le changement de coefficients

$$\frac{a_{ij}}{C_j} = b_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$$

Comme les C_i sont > 0, les inégalités imposées aux a_{ij} se transmettent aux coefficients b_{ij}. Autrement dit on peut réduire le système donné à un autre du même type dans lequel les C_i seraient égaux à 1, et qui se représente par l'équation matricielle :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} + B\vec{y} = 0 \tag{1}$$

On sait que le déterminant caractéristique de (1) est égal à :

$$\begin{vmatrix} r + b_{11} & -b_{12} & \ldots & -b_{1n} \\ -b_{21} & r + b_{22} & \ldots & -b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \ldots & r + b_{nn} \end{vmatrix}$$

et que ses racines r_i donnent des solutions $\vec{y_i}\,(t)$ multiples de $e^{r_i t}$. Or, la matrice B étant irréductible, le théorème de Taussky permet d'affirmer qu'il n'est pas nul pour $r = 0$, $i\omega$, ou un nombre à partie réelle positive. Ses racines sont donc à parties réelles négatives.

Précisément, en désignant par μ un nombre positif tel que :

$$\mathcal{R}(r_i) < -\mu \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)$$

(les r_i peuvent être simples ou multiples) il existe une constante $K > 0$ dépendant de B et de μ, $K = K(B,\ \mu)$ telle que la norme de $\overrightarrow{y(t)}$ vérifie l'inégalité.

$$\|\overrightarrow{y(t)}\| < K\|\overrightarrow{y(0)}\|\ e^{-\mu t} \qquad \text{Voir (1) p. 21.}$$

Ainsi, les solutions $\overrightarrow{y(t)}$ et par suite $\overrightarrow{x(t)}$ convergent vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

Applications.

Ce théorème s'applique au système variationnel linéarisé des concentrations d'un mélange binaire traité par une usine irréductible à capacités et coefficients constants en état de production et également à celui d'une même usine connexe réductible selon le théorème 2 suivant :

THEOREME 2

Lorsque la matrice constante A est réductible et ramenée à la forme $\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$ les solutions du système précédent convergent vers zéro quand t croît indéfiniment, lorsque les matrices carrées P et Q sont du type précédent ; la matrice rectangle R étant arbitraire.

Démonstration.

En effet, l'équation caractéristique de A, soit $f_A(r) = 0$, devient :

$$f_P(r)\ .\ f_Q(r) = 0$$

D'après le théorème précédent les racines de $f_P(r) = 0$ et de $f_Q(r) = 0$ sont à parties réelles négatives, et par suite les solutions $\overrightarrow{x(t)}$ convergent vers zéro lorsque $t \to +\infty$. Ce résultat est indépendant de la nature de la matrice R constante.

2/ Le jacobien $|A|$ du système est nul.

THEOREME 1

Le système d'équations différentielles à coefficients constants :

$$C_1 \frac{dx_1}{dt} + a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_n \frac{dx_n}{dt} - a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \dots + a_{nn} x_n = 0$$

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = 0$$

admet la propriété que toutes ses solutions convergent vers zéro quand t croît indéfiniment lorsqu'il est supposé que :

1/ La matrice A est irréductible ;

2/ Tous les a_{ij} sont réels et satisfont aux conditions :

$$a_{ii} > 0, \; a_{ij} \geq 0 \qquad (i \neq j = 1, \dots, n)$$

et pour chaque colonne j de A :

$$a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} = 0$$

3/ Les coefficients C_i sont tous positifs :

$$C_i > 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Démonstration.

En utilisant la remarque faite au départ de la démonstration précédente, on peut réduire le système proposé à un autre système où les C_i sont égaux à 1. Nous raisonnerons sur le système réduit.

En additionnant les équations différentielles on obtient la relation :

$$\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \dots + \frac{dy_n}{dt} = 0$$

à laquelle correspond une intégrale première. :

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = C^{te} = 0$$

où la constante est nulle pour satisfaire à la dernière équation ordinaire du système. Ainsi, le déterminant caractéristique de B est nul pour $r = 0$, mais la matrice B étant irréductible, les mineurs de la diagonale principale de B ne sont pas nuls en application du critère de régularité p. 46 et par conséquent $r = 0$ est racine simple de ce déterminant caractéristique (puisque sa dérivée par rapport à r pour $r = 0$ est égale à la somme des premiers mineurs de la diagonale principale). A cette racine simple correspondrait une solution constante vérifiant le système des équations du théorème II. 2/1 p. 35 , mais cette solution est alors identiquement nulle.

Comme précédemment $r = i\,\omega$ ou un nombre à partie réelle positive n'est pas racine de ce déterminant. Par conséquent mis à part la racine $r = 0$, les autres racines du déterminant caractéristique de B sont à parties réelles négatives.

Ainsi, en désignant par μ un nombre positif tel que $\mathcal{R}(r_i) < -\mu (r \neq 0)$, il existe aussi une constante positive K dépendant de B et de μ telle que

$$\|\overrightarrow{y(t)}\| < K \|\overrightarrow{y(0)}\| \, e^{-\mu t}$$

Cette inégalité implique que les solutions $\overline{y(t)}$ et par suite $\overline{x(t)}$ convergent vers zéro lorsque t croît indéfiniment. C. q. f. d.

Application.

Ce théorème s'applique au système variationnel linéarisé des concentrations d'un mélange binaire dans une usine irréductible en reflux total à capacités et coefficients constants.

3/ Systèmes mixtes.

Les systèmes mixtes présentent un intérêt pratique dans l'étude numérique des usines en cascades à un grand nombre d'étages. En effet, pour celles-ci le système différentiel des transports et des concentrations est assimilable à un système associé d'équations aux dérivées partielles et de conditions limites. On constate alors que le système d'équations aux dérivées partielles est quasiment conservé en remplaçant le système différentiel de la cascade par un système mixte (d'ordre moins élevé) où les coefficients des dérivées proviennent d'une répartition des capacités. (Voir l'appendice p. 77).

Définition.

Lorsqu'on annule identiquement dans un système différentiel certains des coefficients C qui sont en facteur avec les dérivées des fonctions inconnues, on obtient un système d'équations ordinaires et d'équations différentielles constituant un système mixte.

THEOREME 1.

Les théorèmes 1/1 et 2/1 sont encore vrais pour les systèmes mixtes.

Démonstration.

Il suffit d'établir qu'à chaque élimination d'un x_j correspondant à un C_j donné nul, la matrice des coefficients du système se transforme en une nouvelle matrice d'ordre réduit d'une unité et douée des mêmes propriétés. Précisément elle se déduit de la matrice "cofacteur" de a_{jj}, obtenue en supprimant dans A la ligne j et la colonne j. De cette façon on se ramène aux théorèmes indiqués lorsque les éliminations sont achevées.

A titre d'exemple supposons que $C_1 = 0$. On aura donc :

$$a_{11} x_1 = a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

d'où l'on déduit le nouveau système d'équations quels que soient $C_2 > 0, \dots, C_n > 0$:

$$C_2 \frac{dx_2}{dt} + \left(a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 - \left(a_{23} + a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) x_3 - \dots - \left(a_{2n} + a_{21} \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = 0$$

$$C_3 \frac{dx_3}{dt} - \left(a_{32} + a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \left(a_{33} - a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) x_3 - \dots - \left(a_{3n} + a_{31} \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_n \frac{dx_n}{dt} - \left(a_{n2} + a_{n1} \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 - \left(a_{n3} + a_{n1} \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) x_3 - \dots + \left(a_{nn} - a_{n1} \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = 0$$

Sur ce dernier système on vérifie les propriétés qui suivent :

1/ Les coefficients extérieurs à la diagonale principale sont en valeur absolue plus grands ou égaux aux valeurs absolues des coefficients correspondants de la matrice cofacteur de a_{11}. Ils sont donc négatifs ou nuls.

2/ Les sommes des coefficients des colonnes sont > 0 : l'une d'elles au moins est positive s'il en existe une dans la matrice A ; elles sont nulles lorsque celles de A le sont aussi. Ceci résulte des observations suivantes :

a) Supposons $a_{11} - a_{21} - \dots - a_{n1} > 0$. On en déduit la somme des coefficients de la première colonne du nouveau tableau :

$$a_{22} - (a_{32} + \ldots + a_{n2}) - \frac{a_{12}}{a_{11}}(a_{21} + \ldots + a_{n1}) > a_{22} - (a_{32} + \ldots + a_{n2})$$

$$- \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{11} = a_{22} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} a_{i2} > 0$$

et des inégalités analogues pour les autres colonnes de ce tableau. Dans ces conditions, les sommes des colonnes de ce tableau sont supérieures aux sommes correspondantes de la matrice A. Elles sont donc positives.

b) Supposons $a_{11} - a_{21} - \ldots - a_{n1} = 0$. On en déduit cette fois que les sommes des colonnes du nouveau tableau sont égales aux sommes correspondantes de la matrice A.

3/ Les coefficients de la diagonale principale sont positifs. En effet, dans le cas contraire ils seraient nuls en raison de ce qui précède au 2/ et les éléments des colonnes correspondantes de ce tableau seraient identiquement nuls ; mais alors le tableau lui même serait réductible, ce qui est impossible lorsque A est irréductible, du moins c'est le dernier point à établir.

4/ La matrice du tableau de ce système est irréductible, sinon on pourrait après une même permutation des lignes et des colonnes faire apparaître une matrice rectangle nulle contiguë à la diagonale principale. Ceci implique deux éventualités : soit que les éléments correspondants de la 1ère colonne de A sont nuls ; soit que les éléments correspondants de la 1ère ligne de A sont nuls. Dans ces deux éventualités la matrice A serait réductible. - De même un graphe irréductible demeure irréductible par l'annihilation de points intérieurs étant donné que les arcs incidents vers l'intérieur à un sous-graphe sont conservés. -

IV - STABILITE DE SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES ET HOMOGENES A COEFFICIENTS VARIABLES.

On considère des systèmes ramenés à la forme canonique :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + A(t)\,\vec{x} = 0$$

où les coefficients $\Delta_{ij}\, a_{ij}(t)$ de la matrice $A(t)$ dépendent de la variable indépendante t. ($\Delta_{ij} = -1$ pour $i \neq j$ et 1 pour $i = j$). Précisément, les coefficients $a_{ij}(t)$ sont sommables sur tout intervalle fini et vérifient presque partout les inégalités :

$$a_{ij}(t) \geq 0 \ (i, j=1, \ldots, n) \qquad \text{et} \qquad a_{jj}(t) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}(t) \geq 0 \ (j=1, \ldots, n)$$

1/ Propriétés communes.

Le chapitre 4 montre qu'il existe entre deux solutions $\overrightarrow{u(t)}$, $\overrightarrow{x(t)}$ deux écarts orientés $[\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{x(t)}]$, $[\overrightarrow{x(t)}, \overrightarrow{u(t)}]$ et une distance $\|\overrightarrow{u(t)} - \overrightarrow{x(t)}\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i(t) - x_i(t)|$ qui sont des fonctions absolument continues de t et décroissantes au sens large. (Voir Remarque 1 au Ch. 4 § III. 2/ p. 63).

D'ailleurs, moyennant la sommabilité des coefficients $a_{ij}(t)$ sur tout intervalle fini, il existe (3) une solution $\vec{x}(t\ ;\ t_0,\ \vec{x}_0)$ absolument continue issue d'un vecteur quelconque $\vec{x}_0$ à l'instant t_0, et cette solution est unique d'après le lemme de Gronwall (4), p. 15.

Par conséquent $\overrightarrow{u(t)} = 0$ étant une solution, toute solution $\vec{x}(t,\ t_0,\ \vec{x}_0)$ est bornée quels que soient les signes des composantes de $\vec{x}_0$ et uniformément stable à droite d'après la non croissance de la distance. D'autre part les composantes de $\vec{x}(t_0\ ;\ t\ ,\ \vec{x}_0)$ sont non négatives sur $(t_0 < t < \infty)$ lorsque les composantes de $\vec{x}_0$ sont supérieures ou égales à zéro, ce qui découle du théorème I. 7/1, p. 57 du Ch. 4.

2/ Systèmes non asymptotiquement stables.

THEOREME 1

Le système différentiel linéaire considéré n'est pas asymptotiquement stable à droite au sens de Lyapunov lorsque :

$$0 < \int_0^\infty \sum_{i=1}^n a_{ii}\ (t)\ dt < \infty\ ,$$

mais chaque solution tend vers un vecteur constant (1), p. 43, dépendant du vecteur initial.

Démonstration.

Désignons par X(t) un système fondamental de solutions $\overrightarrow{x_h}(t)$ (h=1, ..., n). On sait que le déterminant de ce système varie d'après la relation :

$$\det X\ (t) = \det X\ (t_0)\ e^{-\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(\alpha)d\alpha}$$

Il en résulte que ce déterminant n'est jamais nul et par suite qu'aucune des solutions $\overrightarrow{x_h(t)}$ ne s'annule lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Ainsi le système n'est pas asymptotiquement stable.

Mais il y a plus, on a :

$$\|A(t)\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}\ (t)| \leq 2 \sum_{i=1}^n a_{ii}\ (t)$$

d'où également :

$$0 < \int_0^\infty \|A\ (t)\|\ dt < \infty$$

D'autre part selon (1), p. 43, on a :

$$\overrightarrow{x\ (t)} = \overrightarrow{x\ (0)} + \int_0^t A\ (\alpha)\ \overrightarrow{x\ (\alpha)}\ d\alpha$$

d'où :

$$\|\overrightarrow{x\ (t)}\| \leq \|\overrightarrow{x\ (0)}\| + \int_0^t \|A\ (\alpha)\|\ \|\overrightarrow{x\ (\alpha)}\|\ d\alpha$$

et d'après le lemme de Bellman (1), p. 35 :

$$\|\overrightarrow{x\ (t)}\| \leq \|\overrightarrow{x\ (0)}\|\ e^{\int_0^t \|A(\alpha)\|d\alpha}$$

Par suite $\overrightarrow{x(t)}$ tend bien vers un vecteur constant $\vec{c}$ si $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t A(\alpha)\ \overrightarrow{x(\alpha)}\ d\alpha$ existe. Pour établir ce dernier point, il suffit de vérifier que sa norme est intégrable sur $]0, +\infty[$. Or on a en effet :

$$\int_0^\infty \|A\vec{x}\|\ dt \leq \int_0^\infty \|A\|\ \|\vec{x}\|\ dt \leq \|\overrightarrow{x\ (0)}\| \int_0^\infty \|A\|\ e^{\int_0^t \|A(\alpha)\|d\alpha}\ dt$$

$$= \|\overrightarrow{x\ (0)}\| \cdot \left[e^{\int_0^\infty \|A\|dt} - 1\right] < \infty \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Application.

Ce théorème confirme que dans un arrêt de la circulation des flux d'une usine, la solution du système variationnel linéarisé de ses concentrations tend vers un vecteur constant. Il en est d'ailleurs de même de la solution du système (1), p. 27 , si les valeurs limites des capacités de l'usine sont strictement positives.

3/ Systèmes asymptotiquement stables.

THEOREME 1

Le système linéaire $\frac{d\vec{x}}{dt} + [U + V(t)]\,\vec{x} = 0$ est asymptotiquement stable à droite lorsque la matrice constante U satisfait aux conditions du théorème III. 1/1 p. 36 et que V(t) a une norme de moyenne temporelle inférieure à une borne dépendant de U.

Démonstration.

Y(t) représentant la matrice de l'équation matricielle :

$$\frac{dY}{dt} + UY(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad Y(0) = I$$

on a :

$$\overrightarrow{x(t)} = Y(t)\overrightarrow{x(0)} - \int_0^t Y(t-\alpha)V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}\,d\alpha$$

D'où :

$$\|\overrightarrow{x(t)}\| < \|Y(t)\overrightarrow{x(0)}\| + \int_0^t \|Y(t-\alpha)V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}\|\,d\alpha$$

Mais d'après le théorème III. 1/1, p. 37, la norme de $\overrightarrow{y(t)} = Y(t)\overrightarrow{x(0)}$ vérifie l'inégalité :

$$\|Y(t)\overrightarrow{x(0)}\| \leq Ke^{-\mu t}\|\overrightarrow{x(0)}\|$$

de même :

$$\|Y(t-\alpha)V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}\| \leq Ke^{-\mu(t-\alpha)}\|V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}\| \leq Ke^{-\mu(t-\alpha)}\|V(\alpha)\|\;\|\overrightarrow{x(\alpha)}\|$$

d'où :

$$\|\overrightarrow{x(t)}\| \leq Ke^{-\mu t}\|\overrightarrow{x(0)}\| + K\int_0^t e^{-\mu(t-\alpha)}\|V(\alpha)\|\;\|\overrightarrow{x(\alpha)}\|\,d\alpha$$

soit :

$$\|\overrightarrow{x(t)}\|\;e^{\mu t} \leq K\|\overrightarrow{x(0)}\| + K\int_0^t \|V(\alpha)\|\;\|\overrightarrow{x(\alpha)}\|\,e^{\mu\alpha}\,d\alpha$$

D'après le lemme de Bellman (1), p. 35 :

$$\|\overrightarrow{x(t)}\|\;e^{\mu t} \leq K\|\overrightarrow{x(0)}\|\;e^{K\int_0^t\|V(\alpha)\|d\alpha}$$

d'où :

$$\|\overrightarrow{x(t)}\| \leq K\|\overrightarrow{x(0)}\|\;e^{-[\mu-\frac{K}{t}\int_0^t\|V(\alpha)\|d\alpha]t}$$

Par suite il y a convergence asymptotique lorsque :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \|V(\alpha)\|\,d\alpha < \frac{\mu}{K}$$

puisque la norme de $\overrightarrow{x(t)}$ converge vers zéro.

THEOREME 2.

Lorsque la matrice constante U vérifie les conditions du théorème III. 2/1 p. 38 et que les sommes des colonnes de la matrice V(t) sont identiquement nulles, le système des équations formé par le système différentiel $\frac{d\vec{x}}{dt} + [(U + V(t)]\,\vec{x} = 0$ et l'équation linéaire $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ est asymptotiquement stable à droite à condition que la norme de V(t) ait une moyenne temporelle inférieure à une borne dépendant de U.

Démonstration.

Puisque les sommes des colonnes de U + V (t) sont nulles le système différentiel admet l'intégrale première $\sum_{i=1}^{n} x_i = C^{te}$. Ainsi les solutions considérées sont seulement celles pour lesquelles $C^{te} = 0$. Comme au théorème 1, on a :

$$\overrightarrow{x(t)} = Y(t)\overrightarrow{x(0)} - \int_0^t Y(t-\alpha)V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}\, d\alpha$$

D'après le théorème III. 2/1, p. 38, la norme de $\overrightarrow{y(t)} = Y(t)\overrightarrow{x(0)}$ vérifie l'inégalité :

$$\| Y(t)\overrightarrow{x(0)}\| < Ke^{-\mu t} \|\overrightarrow{x(0)}\| \qquad \text{puisque} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i(0) = 0 .$$

Etant donné que le vecteur $V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}$ a la somme de ses composantes nulle,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}(t)x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\sum_{i=1}^{n} V_{ij}(t) = 0 \qquad \text{puisque} \qquad \sum_{i=1}^{n} V_{ij}(t) = 0$$

on a de même :

$$\|Y(t-\alpha)V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}\| < Ke^{-\mu(t-\alpha)} \|V(\alpha)\overrightarrow{x(\alpha)}\| < Ke^{-\mu(t-\alpha)} \|V(\alpha)\| \; \|\overrightarrow{x(\alpha)}\|$$

et comme précédemment :

$$\|\overrightarrow{x(t)}\| < Ke^{-\mu t} \|\overrightarrow{x(0)}\| + K\int_0^t e^{-\mu(t-\alpha)} \|V(\alpha)\| \; \|\overrightarrow{x(\alpha)}\| \; d\alpha$$

ce qui entraîne la démonstration du théorème.

Application.

Ces deux derniers théorèmes expriment que le système variationnel linéarisé des concentrations d'un mélange binaire traité par une usine demeure asymptotiquement stable lorsque ses paramètres subissent des petites fluctuations les faisant varier autour des valeurs constantes, mais pourvu qu'elles soient suffisamment petites.

NOTE DU CHAPITRE 3

I - MATRICES REDUCTIBLES

Définition.

Une matrice carrée A est réductible lorsqu'elle se met sous la forme $\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$ après une même permutation des lignes et des colonnes où P et Q sont deux matrices carrées et O une matrice rectangle nulle.

THEOREME

Pour qu'une matrice carrée d'ordre n soit réductible il faut et il suffit qu'en désignant par k un entier tel que $0 < k < n$ il existe $k(n-k)$ zéros placés aux intersections de k lignes avec n-k colonnes et n'empiétant pas sur la diagonale principale.

Démonstration.

En effet lorsque sur la matrice $\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$, où P est d'ordre k et Q d'ordre n-k, on effectue une permutation des lignes ou une permutation des colonnes, il existe $k(n-k)$ zéros aux intersections de k lignes avec n-k colonnes et cette propriété se conserve au cours de différentes permutations des lignes et des colonnes. Plus particulièrement lorsqu'on effectue la même permutation des lignes et des colonnes, les éléments de la diagonale principale de A se conservent en changeant de place et les zéros de la matrice O se retrouvent bien aux intersections de k lignes avec n-k colonnes et n'empiètent pas sur la diagonale principale.

Réciproquement, étant donnée une matrice ayant $k(n-k)$ zéros aux intersections de k lignes et de n-k colonnes et n'empiétant pas sur la diagonale principale, cette matrice est réductible. En effet, il existe une même permutation des lignes et des colonnes permettant de passer directement de la matrice considérée à la matrice réduite $\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$ consistant à permuter parmi les k premières colonnes de la matrice celles qui portent les n - k zéros avec les colonnes des n - k dernières qui n'en portent pas, et d'effectuer la même permutation sur les lignes. (Il peut y avoir plusieurs solutions possibles suivant les cas).

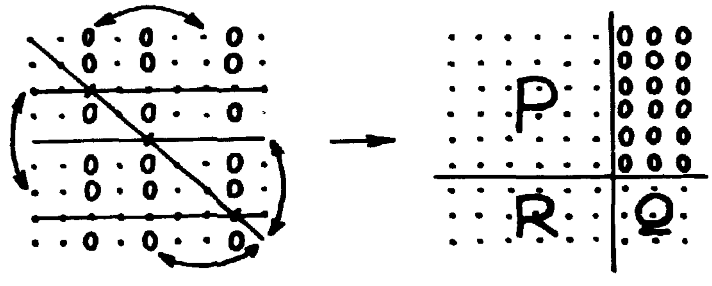


Figure : Disposition des zéros dans une matrice réductible.

La figure ci-avant représente deux matrices carrées d'ordre 9. Les arcs portés sur la matrice de gauche indiquent les permutations à effectuer sur les lignes et les colonnes pour passer à la matrice de droite qui se présente sous la forme $\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$.

II - MAJORANTS ET MINORANTS DE DETERMINANTS A ELEMENTS REELS.

Les déterminants D^n considérés sont définis quel que soit l'entier n. Ils se représentent par le tableau d'éléments réels :

$$D^n = \begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & +a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & +a_{nn} \end{vmatrix}$$

où les coefficients a_{ij} vérifient les inégalités :

$$a_{ij} \geqslant 0 \qquad (i,j=1,\dots,n) \qquad \text{et} \qquad a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \geqslant 0 \qquad (j=1,\dots,n)$$

(Dans chaque colonne, la somme des éléments est positive ou nulle).

On sait que D^n est positif ou nul. Précisément il est positif dans les conditions du théorème de Taussky ; également lorsque la matrice des coefficients étant réductible, le théorème de Taussky s'applique aux déterminants extraits de D^n et dont le produit est D^n ; sinon il est nul.

LEMME

Les cofacteurs des éléments de D^n sont positifs ou nuls.

__Corollaire.__

Tout déterminant T^n transformé de D^n en changeant les éléments d'une de ses lignes ou d'une de ses colonnes par des nombres > 0 est aussi > 0.

__Démonstration du lemme et de son corollaire.__

Il est clair que le lemme est vrai pour les cofacteurs de la diagonale principale puisqu'ils sont du type D^{n-1}. Il suffit donc de l'établir pour les éléments $(-a_{ij})$ avec $i \neq j$. Pour cela, nous raisonnerons par récurrence. Le lemme est manifestement vrai pour D^1, D^2. Admettons qu'il est vrai pour tout déterminant D^{n-1}. Il en résulte alors immédiatement que le corollaire est vrai pour tout T^{n-1} car son développement suivant cette ligne ou cette colonne transformée se compose de termes positifs ou nuls. Démontrons donc que le lemme est vrai pour D^{n-1}. A cette fin, considérons le cofacteur A_{ij} de l'élément $(-a_{ij})$ de D^n. On voit qu'en permutant les lignes i et j de D^n on obtient un déterminant $\mathcal{D}^n = -D^n$ où l'élément $(-a_{ij})$ est situé sur sa diagonale principale. Son cofacteur dans $\mathcal{D}^n$ est du type $-T^{n-1}$ étant donné qu'il se déduit d'un déterminant D^{n-1} où l'on aurait remplacé l'un des éléments de sa diagonale principale par un terme négatif ou nul. Il en résulte que le cofacteur de $(-a_{ij})$ dans D^n est du type T^{n-1} lequel est admis comme positif ou nul ; ce qui démontre le lemme et, par suite, son corollaire.

THEOREME 1.

D^n est majoré par le produit des éléments de sa diagonale principale.

__Démonstration.__

En développant D^n, par exemple, par rapport aux éléments de sa dernière colonne, on a immédiatement :

$$D^n = -a_{1n} A^{n-1}_{1n} - a_{2n} A^{n-1}_{2n} - \dots + a_{nn} A^{n-1}_{nn} \leq a_{nn} A^{n-1}_{nn}$$

puisque les cofacteurs de D^n sont tous positifs ou nuls. Mais A^{n-1}_{nn} est identique à D^{n-1}, et comme précédemment :

$$D^{n-1} \leq a_{n-1,\, n-1} A^{n-2}_{n-1,\, n-1} = a_{n-1,\, n-1} D^{n-2}$$

De proche en proche on a bien $D^n \leq a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn} = \prod_1^n a_{ii}$. C.q.f.d.

THEOREME 2.

D^n est minoré par les $n!$ produits de n facteurs formés à l'aide des éléments des colonnes de D^n de la façon suivante :

On effectue sur les indices $1, 2, \dots, n$ une permutation $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ puis on prend pour premier facteur $f_{\xi 1}$ égal à la somme des éléments de la colonne ξ_1 et l'on supprime la ligne ξ_1 du tableau des éléments de D^n. $f_{\xi 2}$ alors est égal à la somme des éléments restant dans la colonne ξ_2 puis on supprime à nouveau les éléments de la ligne ξ_2 de D^n. En poursuivant ce processus on aura

$$f_{\xi 1} \cdot f_{\xi 2} \dots f_{\xi n} \leq D^n$$

Démonstration.

On ne change pas la valeur de D^n en remplaçant les éléments de la ligne ξ_1 par les sommes correspondantes de ses colonnes lesquelles sont ≥ 0 par hypothèse. De cette façon on obtient un dé- déterminant du type T^n dont le cofacteur $A^{n-1}_{\xi 1 \xi 1}$ appartient au type D^{n-1}. Par conséquent :

$$D^n \geq f_{\xi 1} \cdot A^{n-1}_{\xi 1 \xi 1}$$

De même, en remplaçant chaque élément de la ligne ξ_2 (considérée dans D^n) par la somme correspondante des éléments des colonnes de $A^{n-1}_{\xi 1 \xi 1}$ on obtiendra un déterminant du type T^{n-1} conduisant encore à une inégalité :

$$A^{n-1}_{\xi 1 \xi 1} \geq f_{\xi 2} \cdot A^{n-2}_{\xi 2 \xi 2}$$

En poursuivant le processus on arrive donc aux inégalités :

$$\left[a_{\xi 1 \xi 1} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \xi 1}}^{n} a_{i \xi 1} \right] f_{\xi 2} \dots a_{\xi n \xi n} \leq D^n \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Ce dernier théorème permet de donner un critère de régularité des matrices dont les éléments sont ceux de D^n, qui est un peu différent de celui de Taussky dans la mesure où il englobe la condition d'irréductibilité.

CRITERE

D^n est positif lorsqu'il existe au moins un produit $f_{\xi_1} \cdot f_{\xi_2} \dots f_{\xi_n}$ positif ; sinon D^n est nul.

Démonstration.

Cette condition pourrait sembler assez longue à vérifier puisqu'il existe $n!$ produits distincts. Mais il suffit d'en trouver un seul. Pour cela on détermine les éléments $\xi_1, \dots, \xi_n$ de la permutation au fur et à mesure avec cette particularité que si les i premiers facteurs trouvés sont positifs les indices correspondants $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ débutent dans cet ordre une permutation conduisant à une conclusion. En effet, soit qu'il existe à partir de cet instant dans les $n-i$ dernières colonnes restantes au moins un indice ξ_{i+1} pour lequel $f_{\xi i+1} > 0$ et de proche en proche il se peut que l'on puisse obtenir ainsi $f_{\xi_n} = a_{\xi_n \xi_n} > 0$ au quel cas D^n est positif ; soit qu'il n'en existe pas, mais la matrice associée à D^n est réductible et de plus le déterminant Δ construit sur les $n-i$ colonnes restantes et avec les $n-i$ lignes restantes de D^n est nul puisque les sommes des éléments de ses colonnes sont nulles, il s'en suit que D^n est nul vu que les éléments de Δ jouent le rôle de la matrice Q après une même permutation des lignes et des colonnes.

Application.

Les chaînes de mineurs construites sur la diagonale principale de D^n sont positives lorsque D^n est irréductible. En effet, les mineurs de la diagonale principale sont >0, mais si l'un d'eux était nul il existerait d'après le critère précédent des sommes f nulles et D^n serait manifestement réductible. - Cependant tout mineur de D^n peut être réductible.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III

(1) Lamberto CESARI - Asymptotic behavior and Stability problems in ordinary differential equations Springer Verlag Berlin 1959.

(2) Maurice PARODI - La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications. Gauthier Villars Paris 1959.

(3) Georges Marie BOULIGAND - Systèmes différentiels à coefficients sommables. Rapport C. E. A.

(4) SANSONE e CONTI - Equazioni differenziali non lineari Edizioni Cremonese Roma 1956.

CHAPITRE IV

SYSTÈMES DIFFERENTIELS NON LINÉAIRES

Les systèmes différentiels non linéaires des usines en mélange binaire suscitent des propriétés qui peuvent être etendues à des systèmes différentiels généraux :

$$\frac{dC_i(t)\ X_i(t)}{dt} = g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n) \qquad (i=1,\ \dots,\ n)$$

où les $X_1(t),\ \dots,\ X_n(t)$ sont les fonctions inconnues de la variable indépendante t. Les fonctions $C_i(t)$ sont données positives ou nulles et les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$ obéissent à des inégalités qui complètent la structure de ces systèmes. En raison de la nullité éventuelle des $C_i(t)$ nous nous plaçons dans le cadre des conditions de Carathéodory qui assurent l'existence de solutions $C_i(t)X_i(t)$ absolument continues. Nous supposons d'abord les $C_i(t)$ $(i=1,\ \dots,\ n)$ positifs presque partout, ce qui correspond à l'étude d'un système différentiel $(S.D.)_n$ d'ordre n ; puis, nous établissons que lorsqu'un nombre quelconque $p < n$ de fonctions $C_i(t)$ sont identiquement nulles, le système mixte correspondant $(S.M.)_{n-p,n}$ se ramène à un système $(S.D.)_{n-p}$ dont les solutions sont douées des mêmes propriétés :

On démontre un théorème d'unicité à droite généralisant la condition de Péano pour une équation différentielle, et on établit que les $X_i(t)$ restent sur l'intervalle $[0,\ 1]$ lorsqu'ils s'y trouvent initialement.

Comme application, on prouve que le système différentiel des concentrations d'un mélange binaire traité par une usine appartient au type précédent, ce qui donne à leurs solutions les mêmes propriétés. Plus particulièrement, on considère les usines à fonctions indépendantes du temps en distinguant celles qui sont en production de celles qui sont en reflux total, et on démontre dans les deux cas l'unicité d'un régime permanent et la convergence des concentrations vers ce régime permanent. Enfin, on établit les propriétés générales des systèmes différentiels des concentrations d'une usine pour un mélange quelconque.

Dans ce chapitre nous utiliserons souvent des théorèmes empruntés à la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. Ces théorèmes sont numérotés et rassemblés dans la note I. Dans le texte les numéros entre crochets renvoient à ces théorèmes. La note II donne quelques définitions relatives à la stabilité.

I - SYSTEMES DIFFERENTIELS $(S.D.)_n$

On considère les systèmes différentiels :

$$(S.D.)_n\ :\ \frac{dC_i(t)X_i(t)}{dt} = g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n) \qquad (i=1,\ \dots,\ n) \tag{1}$$

où les fonctions $C_i(t)$ sont supposées positives et exceptionnellement nulles et infinies au plus sur un ensemble de valeurs de t de mesure nulle.

Le changement de fonctions :

$$C_i(t)\ .\ X_i(t) = x_i(t) \tag{2}$$

permet de ramener $(S.D.)_n$ à la forme canonique :

$$(s\ ;\ d)_n\ :\ \frac{dx_i}{dt} = f_i(t;\ x_1,\ \dots,\ x_n) \qquad (i=1,\ \dots,\ n) \tag{3}$$

où :

$$f_i(t\ ;\ x_1,\ \dots,\ x_n) \equiv g_i\left[t\ ;\ \frac{x_1}{C_1(t)},\ \dots,\ \frac{x_n}{C_n(t)}\right] \qquad (4)$$

En soumettant les fonctions $f_i(t\ ;\ \vec{x})$ aux conditions du théorème d'existence de Carathéodory (1), (2), (3), nous déduirons pour les fonctions $g_i(t\ ;\ \vec{X})$ et $C_i(t)$ des conditions préliminaires analogues assurant l'existence de solutions absolument continues $x_i(t) = C_i(t)X_i(t)$ de $(S.D.)_n$. Aussi nous rappelons le théorème de Carathéodory sous la forme qui nous sera utile. Voir aussi [14].

1/ Théorème d'existence de Carathéodory - (2) p. 140.

THEOREME

Etant données n fonctions $f_i(t\ ;\ x_1,\ \dots,\ x_n)$ $(i=1,\ \dots,\ n)$ de n+1 variables $t\ ;\ x_1,\ \dots,\ x_n$ définies dans le domaine D :

$$D\left[a < t < b \qquad \text{avec} \qquad b-a < 0\ ;\ -\infty \leq x_i \leq +\infty \qquad (i=1,\ \dots,\ n)\right]$$

où elles sont mesurables au sens de Lebesgue par rapport à t sur [a, b] pour tout système de valeurs fixes de $x_1,\ \dots,\ x_n$; continues par rapport à l'ensemble des variables $x_1,\ \dots,\ x_n$ pour presque toutes les valeurs fixes t de [a, b] ; et telles qu'il existe une fonction non négative M(t) sommable sur tout intervalle fini positif appartenant à]a, b[et vérifiant dans le domaine D les inégalités :

$$|f_i(t\ ;\ x_1,\ \dots,\ x_n)| \leq M(t)$$

en désignant par $t^\circ\ ;\ x_1^\circ,\ \dots,\ x_n^\circ$ un point de D, il existe sur]a, b[n fonctions absolument continues $x_1(t),\ \dots,\ x_n(t)$ qui vérifient le système des équations intégrales :

$$x_i(t) = x_i^\circ + \int_{t^\circ}^{t} f_i(s\ ;\ x_1(s),\ \dots,\ x_n(s))\, ds \qquad (i=1,\ \dots,\ n) \qquad (1)$$

et lesquelles vérifient le système différentiel :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t\ ;\ x_1,\ \dots,\ x_n) \qquad (i=1,\ \dots,\ n)$$

presque partout sur [a, b].

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME (2) p. 141

Etant donnée une fonction $f(t\ ;\ x_1,\ \dots,\ x_n)$ qui satisfait aux conditions ci-dessus imposées aux f_i, la fonction composée $f[t\ ;\ \varphi_1(t),\ \dots,\ \varphi_n(t)]$ est sommable sur tout intervalle fini positif de]a, b[lorsque les fonctions $\varphi_1(t),\ \dots,\ \varphi_n(t)$ sont finies presque partout et mesurables sur [a, b].

Démonstration.

Le lemme est vrai pour n = 1 : En fait si $\varphi(t) = \alpha$ = constante, $f(t,\ \alpha)$ est mesurable par hypothèse. Si $\varphi(t)$ n'est pas constant, il existe une suite $\overline{\varphi}_m(t)$ de fonctions mesurables [4] admettant chacune un nombre fini de valeurs telles que $\lim_{m\to\infty} \overline{\varphi}_m(t) = \varphi(t)$. Lorsque t est pris en dehors des ensembles de mesure nulle où $\varphi(t)$ est infini et $f(t\ ;\ x)$ discontinue, on a $\lim_{m\to\infty} f[t\ ;\ \overline{\varphi}_m(t)] = f[t\ ;\ \varphi(t)]$ et puisque la suite $f[t\ ;\ \overline{\varphi}_m(t)]$ est formée de fonctions mesurables, la fonction $f[t\ ;\ \varphi(t)]$ est mesurable [3]. L'inégalité $|f[t\ ;\ \varphi(t)]| \leq M(t)$ implique en outre la sommabilité de $f[t\ ;\ \varphi(t)]$ sur tout intervalle fini positif de]a, b[.

La démonstration se poursuit en raisonnant par récurrence : En admettant que le lemme est vrai pour n, établissons qu'il est vrai pour n+1. La fonction $f[t\ ;\ \varphi_1(t),\ \dots,\ \varphi_n(t),\ \overline{\varphi}_m(t)]$, où $\overline{\varphi}(t)$ est une fonction mesurable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, est une fonction mesurable.

Or, lorsque la suite des fonctions $\overline{\varphi}_m(t)$ est telle que $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\varphi}_m(t) = \varphi_{n+1}(t)$, il résulte du raisonnement précédent que $f[t\ ;\ \varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t),\ \varphi_{n+1}(t)]$ est mesurable ; et l'inégalité :

$$|f[t\ ;\ \varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}(t)]| \leqslant M(t)$$

implique sa sommabilité sur tout intervalle fini positif de $]a,\ b[$. C.q.f.d.

Démonstration du théorème de Carathéodory.

A présent nous établissons l'existence d'une solution de (1) sur l'intervalle $t^o \leqslant t < t^o + \delta$ avec $\delta = b - t^o$. (On opérerait d'une façon analogue sur l'intervalle $t^o - \Delta < t \leqslant t^o$ avec $\Delta = t^o - a$). Considérons les n suites des fonctions $x_1^m(t),\ \ldots,\ x_n^m(t)$ définies comme suit :

$$x_i^m(t) = x_i^o \qquad \text{pour} \qquad t^o \leqslant t \leqslant t^o + \frac{\delta}{m}$$

$$x_i^m(t) = x_i^o + \int_{t^o}^{t-\frac{\delta}{m}} f_i[s\ ;\ x_1^m(s),\ \ldots,\ x_n^m(s)]ds \qquad \text{pour} \qquad t^o + \frac{\delta}{m} \leqslant t < t^o + \delta$$

où les intégrales qui figurent dans ces relations ont une signification d'après le lemme précédent.

En convenant de poser :

$$\int_{t^o}^{t-\frac{\delta}{m}} f_i(s\ ;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)ds = 0 \qquad \text{pour} \qquad t - \frac{\delta}{m} < t^o$$

On a :

$$|x_i^m(t')-x_i^m(t'')| = \left|\int_{t''-\frac{\delta}{m}}^{t'-\frac{\delta}{m}} f_i[s\ ;\ x_1^m(s),\ \ldots,\ x_n^m(s)]ds\right| \leqslant \int_{t''-\frac{\delta}{m}}^{t'-\frac{\delta}{m}} M(t)dt$$

et en raison de l'absolue continuité de l'intégrale $\int_{t''-\frac{\delta}{m}}^{t'-\frac{\delta}{m}} M(s)ds$ les fonctions $x_1^m(t)\ ,\ \ldots,\ x_n^m(t)$ sont également continues et également limitées (3), p. 44, dans un intervalle quelconque I de $t^o \leqslant t < t^o + \delta$ (ou sur $]t^o,\ b[$). On peut donc extraire de ces fonctions n suites de fonctions $x_1^{m'}(t)\ ,\ \ldots,\ x_n^{m'}(t)$ qui convergent uniformément dans I vers n fonctions continues $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ qui satisfont à l'équation (1). On a en fait :

$$x_i^{m'}(t) = x_i^o + \int_{t^o}^{t} f_i[s\ ;\ x_1^{m'}(s),\ \ldots,\ x_n^{m'}(s)]ds - \int_{t-\frac{\delta}{m'}}^{t} f_i[s\ ;\ x_1^{m'}(s),\ \ldots,\ x_n^{m'}(s)]ds$$

où la seconde intégrale est inférieure ou égale en valeur absolue à $\int_{t-\frac{\delta}{m'}}^{t} M(s)ds$ et tend par conséquent vers zéro lorsque $m \longrightarrow +\infty$.

D'autre part on a presque partout sur $[t^o,\ b]$:

$$\lim_{m'\to\infty} f_i[t\ ;\ x_1^{m'}(t),\ \ldots,\ x_n^{m'}(t)] = f_i[t\ ;\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)]$$

et en vertu de l'inégalité $|f_i[t\ ;\ x_1^{m'}(t),\ \ldots,\ x_n^{m'}(t)]| \leqslant M(t)$ où $M(t)$ est sommable sur $[t^o,\ b[$, le passage à la limite sous le signe d'intégration est licite d'après le théorème de convergence de Lebesgue [6].

2/ Hypothèses préléminaires sur les fonctions d'un $(S.D.)_n$ -

Ces hypothèses ont pour rôle d'assurer l'existence de fonctions absolument continues :

$$C_i(t)X_i(t)\ (i=1,\ \ldots,\ n)\ \text{de}\ (S.D.)_n$$

Par conséquent, selon le lemme et le théorème de Carathéodory nous supposerons les fonctions $C_i(t)$ mesurables, et en outre positives et finies presque partout.

D'autre part bien que nous ne nous intéressions qu'à des solutions $X_i(t)$ susceptibles de varier entre 0 et 1 seulement, il serait suffisant à priori de définir les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_n)$ sur tout le demi cylindre $\mathcal{C}[t^o \leqslant t < \infty\ ;\ 0 \leqslant X_i \leqslant 1\ ;\ (i=1,\ \ldots,\ n)]$ de base $\mathcal{B}[0 \leqslant X_i \leqslant 1\ ;\ (i=1,\ \ldots,\ n)]$

où elles ne sont d'ailleurs connues effectivement (ou physiquement) que sur ce cylindre ; mais étant donné que le théorème de Carathéodory [14] ne permet pas de prolonger la solution $\vec{X}(t)$ à partir de l'instant où elle atteint la frontière de ce cylindre $\mathcal{C}$, nous prolongeons la définition des fonctions $g_i(t, \vec{X})$ dans un voisinage de $\mathcal{C}$, par exemple sur tout le domaine :

$$D[t^\circ \leq t \leq \infty \ ; -\infty \leq X_i \leq +\infty \ (i=1, \ldots, n)]$$

et, à titre d'exemple, comme suit :

A tout vecteur $\vec{X}$ de $R^n [-\infty \leq X_i \leq +\infty \ (i=1, \ldots, n)]$ on associe une partition des indices $(1, \ldots, n)$ composée des trois ensembles disjoints E, F, G, tels que :

$$\forall \alpha \in E \Longleftrightarrow X_\alpha < 0$$
$$\forall \beta \in F \Longleftrightarrow 0 \leq X_\beta \leq 1$$
$$\forall \gamma \in G \Longleftrightarrow 1 < X_\gamma$$

puis au vecteur $\vec{X}$ on fait correspondre un vecteur $\overrightarrow{U(\vec{X})}$ de $\mathcal{B}$ tel que :

$$\forall \alpha \in E \Longrightarrow U_\alpha = 0 \ ; \ \forall \beta \in F \Longrightarrow U_\beta = X_\beta \ ; \ \forall \gamma \in G \Longrightarrow U_\gamma = 1 \ ;$$

et on pose :

$$g_i(t \ ; \vec{X}) = g_i(t \ ; \vec{U}) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

De cette façon en admettant que les fonctions $g(t, \vec{X})$ sont d'abord données dans $\mathcal{C}$, mesurables par rapport à t pour tout vecteur fixe de $\mathcal{B}$, continues sur $\mathcal{B}$ par rapport à $\vec{X}$ (ou l'ensemble des variables $X_1, \ldots, X_n$) pour presque toutes les valeurs fixes de t et telles qu'il existe une fonction non négative M(t) sommable sur tout intervalle de temps fini conduisant aux inégalités :

$$|g_i(t, \vec{X})| \leq M(t) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

elles continueront de vérifier ces mêmes conditions à l'intérieur du domaine :

$$D[t^\circ \leq t \leq \infty, \ \vec{X} \in R^n]$$

Toutes ces conditions constituent les hypothèses préliminaires. On vérifie bien que les fonctions :

$$f_i(t \ ; x_1, \ldots, x_n) = g_i\left[t \ ; \frac{x_1}{C_1(t)}, \ldots, \frac{x_n}{C_n(t)}\right]$$

sont continues par rapport à $\vec{x}$ pour toutes les valeurs fixes de t qui n'annulent aucune des fonctions $C_i(t)$; qu'elles satisfont à l'inégalité :

$$|f_i(t, \vec{x})| = |g_i(t \ ; \vec{X})| = |g_i(t \ ; \vec{U})| \leq M(t) \ ;$$

enfin qu'elles sont mesurables par rapport à t en vertu du lemme précédent et de ce que les fonctions $1/C_i(t)$ sont mesurables [2].

<u>Remarque.</u>

Il est clair que les solutions de $(S.D.)_n$ s'étendent sur toutes la demi-droite $t^\circ \leq t \leq +\infty$. En effet, dans le cas contraire M(t) ne serait pas sommable sur un intervalle fini.

3/ <u>Terminologie.</u>

Pour rappeler que nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses du théorème d'existence de Carathéodory, nous dirons que le système différentiel $(S.D.)_n$ est généralisé au sens de Carathéodory.

Dans le but de définir à chaque instant une distance entre deux vecteurs $\overrightarrow{U(t)}$ et $\overrightarrow{X(t)}$ de R^n, arbitraires ou solutions de $(S.D.)_n$, nous définissons les écarts orientés de ces vecteurs. Ainsi :

1/ <u>On appelle écart orienté</u> $[U_i(t), X_i(t)]$ <u>de deux composantes</u> respectives $U_i(t)$ et $X_i(t)$ de deux solutions $\overrightarrow{U(t)}$ et $\overrightarrow{X(t)}$ de $(S.D.)_n$ la fonction de t définie par les deux implications suivantes :

$$[U_i(t),\ X_i(t)] = C_i(t)[U_i(t) - X_i(t)] \qquad \text{pour} \qquad U_i(t) - X_i(t) > 0$$
$$[U_i(t),\ X_i(t)] = 0 \qquad \text{pour} \qquad U_i(t) - X_i(t) \leq 0$$

2/ On appelle <u>écart orienté</u> $[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}]$ de deux solutions $\overrightarrow{U(t)}$, $\overrightarrow{X(t)}$ de (S. D.)$_n$ la somme de tous les écarts orientés des composantes respectives de ces deux solutions :

$$[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}] = \sum_{i=1}^{n} [U_i(t),\ X_i(t)].$$

<u>Remarque</u>.

Quel que soit le signe de la différence $U_i(t) - X_i(t)$, on a :

$$[U_i(t),\ X_i(t)] = C_i(t)\ \frac{U_i(t) - X_i(t) + |U_i(t) - X_i(t)|}{2}$$

d'où résulte l'inégalité triangulaire :

$$[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{Z(t)}] \leq [\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}] + [\overrightarrow{X(t)},\ \overrightarrow{Z(t)}]$$

en raison des inégalités manifestes :

$$\frac{U_i - Z_i + |U_i - Z_i|}{2} \leq \frac{U_i - X_i + |U_i - X_i|}{2} + \frac{X_i - Z_i + |X_i - Z_i|}{2}$$

De la définition de l'écart orienté de deux solutions $\overrightarrow{U(t)}$, $\overrightarrow{X(t)}$ de (S. D.)$_n$, il suit que la <u>distance</u> $\mathcal{D}[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}]$ de ces deux solutions se définit à son tour comme la somme des deux écarts orientés construits avec $\overrightarrow{U(t)}$ et $\overrightarrow{X(t)}$. On a donc :

$$\mathcal{D}[\vec{U},\ \vec{X}] = [\vec{U},\ \vec{X}] + [\vec{X},\ \vec{U}] = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)|U_i(t) - X_i(t)|$$

D'autre part les écarts orientés de deux vecteurs variables $\overrightarrow{U(t)}$, $\overrightarrow{X(t)}$ peuvent être définis d'une façon plus suggestive en effectuant à chaque instant t une partition des indices (1, ..., n) en deux ensembles :

$$E\{\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}\} \qquad \text{et} \qquad \complement E\{\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}\}$$

tels que :

$$\forall\ \alpha \in \quad E\{\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}\} \Longleftrightarrow U_\alpha(t) > X_\alpha(t)$$
$$\forall\ \beta \in \quad \complement E\{\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}\} \Longleftrightarrow U_\beta(t) \leq X_\beta(t)$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité possible on notera simplement :

$$E\{\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}\} = E(t) \text{ ou } E$$

Par suite, on a immédiatement :

$$[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}] = \sum_{\alpha \in E(t)} C_\alpha(t)\ [U_\alpha(t) - X_\alpha(t)]$$

4/ <u>Lemmes sur des fonctions absolument continues.</u>

LEMME 1

F(t) étant une fonction absolument continue de t sur un intervalle quelconque [a, b], l'ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel les quatre propositions suivantes sont simultanément réalisées :

$$t \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \{t \in [a,\ b]\ ;\ F(t) = 0,\ F'(t) \text{ existe},\ F'(t) \neq 0\}$$

est un ensemble de mesure nulle.

Démonstration.

Il est clair que, $F(t)$ étant une fonction absolument continue, $F'(t)$ existe presque partout [9]; [10], [11].

Supposons d'abord l'intervalle $[a, b]$ fini. L'ensemble $\mathcal{E}$ peut être regardé comme la réunion des ensembles disjoints $E_0^+, E_1^+, \ldots, E_n^+, \ldots, E_n^-, \ldots, E_1^-, E_0^-$ de $[a, b]$, où n est un entier variant de 1 à $+\infty$, définis par les implications suivantes :

$$\forall\, t \in E_0 \Longleftrightarrow \left\{F(t) = 0,\ F'(t) \text{ existe},\qquad \frac{dF}{dt} > 1\right\}$$

$$\forall\, t \in E_n^+ \Longleftrightarrow \left\{F(t) = 0,\ F'(t) \text{ existe},\quad 0 < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{dF}{dt} < \frac{1}{n}\right\}$$

$$\forall\, t \in E_n^- \Longleftrightarrow \left\{F(t) = 0,\ F'(t) \text{ existe},\quad \frac{-1}{n} < \frac{dF}{dt} \leqslant \frac{-1}{n+1} < 0\right\}$$

$$\forall\, t \in E_0^- \Longleftrightarrow \left\{F(t) = 0,\ F'(t) \text{ existe},\qquad \frac{dF}{dt} \leqslant -1\right\}$$

On établit que les ensembles $E_0^+, \ldots, E_n^+, \ldots, E_n^-, \ldots, E_0^-$ sont mesurables comme étant chacun sur l'intervalle fini $[a, b]$ l'intersection de trois ensembles mesurables satisfaisant à l'une des trois conditions imposées ci-dessus. Ces trois ensembles sont mesurables car $F(t)$ étant une fonction continue $F(t)$ est mesurable [5] et par suite aussi l'ensemble sur lequel $F(t) = 0$; puis l'ensemble où $F'(t)$ existe est mesurable [8]. A présent chacun des ensembles $E_0^+, \ldots, E_n^+, \ldots, E_n^-, \ldots, E_0^-$ est de mesure nulle. En effet, $F'(t)$ est sommable [9] et le théorème de la moyenne donne les inégalités pour les ensembles E^+ :

$$\int_{E_0^+} \frac{dF}{dt}\, dt \geqslant m(E_0^+) = (\text{mesure de } E_0^+)$$

$$\frac{1}{n+1}\, m(E_n^+) \leqslant \int_{E_n^+} \frac{dF}{dt}\, dt < \frac{1}{n}\, m(E_n^+) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

D'autre part, $F(t)$ étant une fonction absolument continue, l'intégrale :

$$\int_{E_n^+} \frac{dF}{dt}\, dt = \int_{E_n^+} \left|\frac{dF}{dt}\right| dt \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

est égale à la variation totale de $F(t)$ sur E_n^+ [13] laquelle est identiquement nulle puisque $\forall\, t \in E_n^+ \Longrightarrow F(t) = 0$. Il en résulte que $m(E_n^+) = 0$ pour $n \geqslant 0$. On verrait de même que $m(E_n^-) = 0$ pour $n \geqslant 0$. Par suite,

$$m(\mathcal{E}) = \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n^+) + \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n^-) = 0 \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Supposons maintenant l'intervalle $[a, b]$ infini. On peut le considérer comme la réunion d'une suite dénombrable d'intervalles finis pour lesquels le lemme précédent s'applique. Il s'en suit que le lemme est vrai quel que soit l'intervalle $[a, b]$. C. q. f. d.

LEMME 2

Etant donné un système différentiel :

$$(\text{S. D.})_n \qquad \frac{dC_i X_i}{dt} = g_i(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_n) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)$$

généralisé au sens de Carathéodory, l'écart orienté $[U_i(t),\ X_i(t)]$ entre deux mêmes composantes $U_i(t)$, $X_i(t)$ de deux solutions respectives $\overrightarrow{U(t)}$ et $\overrightarrow{X(t)}$ de $(\text{S. D.})_n$ est une fonction absolument continue de la variable indépendante t admettant une dérivée, à un ensemble $\mathcal{H}_i$ près d'instants t de mesure nulle, égale à :

$$\begin{array}{lll} g_i(t\ ;\ U_1,\ \ldots,\ U_n) - g_i(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_n) & \text{pour} & U_i(t) - X_i(t) > 0, \\ 0 & \text{pour} & U_i(t) - X_i(t) \leqslant 0. \end{array}$$

Démonstration.

Pour simplifier l'écriture, on peut ramener $(S.D.)_n$ à la forme canonique :

$$(s.d.)_n \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t\ ;\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \qquad \text{avec} \qquad x_i(t) = C_i(t)X_i(t) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n).$$

Ainsi, $u_i(t)$ et $x_i(t)$ étant des fonctions absolument continues, leur différence est une fonction absolument continue et a fortiori le module de leur différence. Par suite :

$$[u_i(t),\ x_i(t)] = \frac{u_i(t)-x_i(t) + |u_i(t)-x_i(t)|}{2}$$

est une fonction absolument continue. Elle admet donc une dérivée presque partout puisqu'une fonction absolument continue est à variation bornée [11] et qu'une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes au sens large [10] lesquelles admettent presque partout une dérivée [9].

Précisément soit $D[\overrightarrow{x(t)}\ ;\ t_1,\ t_2]$ l'ensemble des instants appartenant à un intervalle fini positif $[t_1,\ t_2]$ sur lequel les dérivées des composantes de $\overrightarrow{x(t)}$ existent et vérifient les équations du système différentiel $(s.d)_n$. D'après le théorème de Carathéodory la mesure de cet ensemble est égale à celle de l'intervalle $[t_1,\ t_2]$; soit $m\{D[\overrightarrow{x(t)}\ ;\ t_1,\ t_2]\} = t_2 - t_1$. De même soit $D[\overrightarrow{u(t)}\ ;\ t_1,\ t_2]$ l'ensemble relatif à la solution $\overrightarrow{u(t)}$. L'intersection $I[\overrightarrow{u(t)},\ \overrightarrow{x(t)}\ ;\ t_1,\ t_2]$ de ces deux ensembles est mesurable et a pour mesure $t_2 - t_1$. Ceci étant posé, on a les trois cas suivants à examiner :

1/ Soit $t \in I[\overrightarrow{u(t)},\ \overrightarrow{x(t)}\ ;\ t_1,\ t_2]$ et tel que $u_i(t) - x_i(t) > 0$. Les fonctions $u_i(t)$ et $x_i(t)$ étant continues, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que pour $|h| \leq \eta$, $u_i(t+h) - x_i(t+h) > 0$. Par suite sur l'intervalle $[t-\eta \leq t' \leq t+\eta]$ l'écart orienté $[u_i(t') - x_i(t')]$ est positif. D'autre part t appartenant à I, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{[u_i(t+h),\ x_i(t+h)] - [u_i(t),\ x_i(t)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[u_i(t+h) - x_i(t+h)] - [u_i(t) - x_i(t)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u_i(t+h) - u_i(t) - [x_i(t+h) - x_i(t)]}{h} = u_i'(t) - x_i'(t) = f_i[t\ ;\ \overrightarrow{u(t)}] - f_i[t\ ;\ \overrightarrow{x(t)}]$$

conformément à l'énoncé de ce lemme.

2/ Soit t un instant de $[t_1,\ t_2]$ tel que $u_i(t) - x_i(t) < 0$. Les fonctions $u_i(t)$ et $x_i(t)$ étant continues, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que pour $|h| \leq \eta$, $u_i(t+h) - x_i(t+h) < 0$. Par suite sur l'intervalle $[t-\eta \leq t' \leq t+\eta]$, l'écart orienté $[u_i(t'),\ x_i(t')]$ est nul et par conséquent sa dérivée est nulle conformément à l'énoncé de ce lemme.

3/ Considérons l'ensemble pour lequel $t \in I[\overrightarrow{u(t)},\ \overrightarrow{x(t)}\ ;\ t_1,\ t_2]$ et $u_i(t) = x_i(t)$. Sur cet ensemble l'écart orienté $[u_i(t),\ x_i(t)]$ est nul et sa dérivée est la limite de l'expression $\frac{1}{h}[u_i(t+h), x_i(t+h)]$ lorsque h tend vers zéro ; soit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_i(t+h) - x_i(t+h) + |u_i(t+h) - x_i(t+h)|}{2h} = \frac{u_i'(t) - x_i'(t) + |u_i'(t) - x_i'(t)|}{2}$$

L'ensemble ainsi considéré se partage en deux nouveaux ensembles : l'un tel que $u_i'(t) = x_i'(t)$ conduisant à $\frac{d}{dt}[u_i(t),\ x_i(t)] = 0$ conformément à l'énoncé du lemme ; l'autre tel que $u_i'(t) - x_i'(t) \neq 0$ et correspondant à un ensemble sur un intervalle $[t_1,\ t_2]$ où il existe une fonction absolument continue $F(t) = u_i(t) - x_i(t)$ nulle sur cet ensemble et dont la dérivée $F'(t) = u_i'(t) - x_i'(t) \neq 0$, mais cet ensemble est de mesure nulle d'après le lemme 1. Le lemme 2 est donc complètement démontré.

LEMME 3

Etant donné un système différentiel généralisé au sens de Carathéodory :

$$(S.D.)_n \qquad \frac{dC_i(t)X_i(t)}{dt} = g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n) \qquad (i=1,\ \dots,\ n)$$

l'écart orienté $[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}]$ de deux solutions $\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}$ de $(S.D.)_n$ est une fonction absolument continue de t qui admet presque partout une dérivée égale à :

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}] = \sum_{\alpha\in E(t)} g_\alpha(t\ ;\ U_1,\ \dots,\ U_n) - g_\alpha(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n).$$

Démonstration.

En effet, l'écart orienté $[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}]$ étant la somme de n fonctions absolument continues $[U_i(t),\ X_i(t)]$ $(i=1,\ \dots,\ n)$ est une fonction absolument continue de t. Cet écart admet donc une dérivée, à un ensemble de mesure nulle près $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i$, égale à $\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}[U_i(t),\ X_i(t)]$. Mais d'après le lemme 2 lorsque $t \notin \mathcal{K}$:

$$\frac{d}{dt}[U_i(t),\ X_i(t)] = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \in \complement E(t) \qquad \text{et}$$

$$\frac{d}{dt}[U_i(t),\ X_i(t)] = g_i(t\ ;\ \vec{U}) - g_i(t\ ;\ \vec{X}) \qquad \text{pour} \qquad i \in E(t)$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)}] = \sum_{\alpha\in E(t)} \frac{d}{dt}[U_\alpha(t),\ X_\alpha(t)]$$

$$= \sum_{\alpha\in E(t)} [g_\alpha(t\ ;\ \vec{U}) - g_\alpha(t\ ;\ \vec{X})], \qquad \text{C. q. f. d.}$$

5/ Hypothèse fondamentale $(H)_1$ sur la décroissance des fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$ -

Les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$ étant déjà continues par rapport à l'ensemble des variables $X_1,\ \dots,\ X_n$, pour presque toutes les valeurs fixes de t, on admet qu'elles vérifient sur la base $\mathcal{B}$ et son prolongement, pour presque toutes les valeurs de t, l'inégalité :

$$(H)_1 \qquad \sum_{\alpha\in E(\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)})} g_\alpha(t\ ;\ U_1,\ \dots,\ U_n) - g_\alpha(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n) \leq 0$$

Par la suite on dira que les fonctions $g_i(t\ ;\ \vec{X})$ $(i=1,\ \dots,\ n)$ vérifient l'hypothèse $(H)_1$.

Propriétés.

Pour réduire l'écriture dans la justification des propriétés qui suivent, nous conviendrons ici que les points de suspension employés dans les fonctions g représentent des composantes du vecteur $\vec{X}(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$ placées dans l'ordre naturel des indices.

Moyennant l'inégalité $(H)_1$, chaque fonction $g_\alpha(t,\ \vec{X})$ est décroissante au sens large à droite de X_α puisque pour $\Delta_\alpha > 0$ on a :

$$g_\alpha(t\ ;\ \dots,\ X_\alpha + \Delta_\alpha,\ \dots) - g_\alpha(t\ ;\ \dots,\ X_\alpha,\ \dots) \leq 0\ ;$$

puis, la somme $g_i(t\ ;\ \vec{X}) + g_j(t\ ;\ \vec{X})$ avec $i \neq j$ est décroissante au sens large à droite de l'ensemble des variables X_i et X_j ; ..., ce qui découle des inégalités :

$$g_i(t\ ;\ \dots,\ X_i + \Delta_i,\ \dots,\ X_j + \Delta_j,\ \dots) + g_j(t\ ;\ \dots,\ X_i + \Delta_i,\ \dots,\ X_j + \Delta_j,\ \dots)$$
$$- g_i(t\ ;\ \dots,\ X_i,\ \dots,\ X_j,\ \dots) - g_j(t\ ;\ \dots,\ X_i,\ \dots,\ X_j,\ \dots) \leq 0$$

pour $\Delta_i > 0$ et $\Delta_j > 0$. etc.

De plus lorsque les fonctions $g_i(t\ ;\ \vec{X})$ sont différentiables par rapport aux composantes de $\vec{X}$, leurs dérivées partielles premières vérifient toutes les inégalités :

$$\frac{\partial}{\partial X_e} \sum_{s \in E} g_s(t\ ;\ \vec{X}) \leq 0, \qquad E \subseteq (1, \ldots, n),$$

en prenant pour E tous les ensembles d'indices différents contenus au sens large dans $(1, \ldots, n)$. On le voit en différentiant la suite des inégalités précédentes qui doivent avoir lieu quels que soient les accroissements positifs $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Evidemment, ces dernières inégalités ne sont pas suffisantes pour entraîner $(H)_1$ car nous avons supposé tous les accroissements $\Delta_i (i=1, \ldots, n)$ positifs ou nuls.

Exemple.

Les fonctions g_i qui composent les systèmes différentiels des usines en mélange binaire vérifient $(H)_1$ (Voir § III, p. 62) et il en est de même pour celles qui se déduisent des systèmes différentiels linéaires que nous avons considérés au chapitre 3.

6/ Propriétés des solutions des systèmes différentiels soumis à l'hypothèse $(H)_1$ -

Ces propriétés font l'objet des deux théorèmes suivants :

THEOREME 1

Etant donné le système différentiel généralisé au sens de Carathéodory :

$$(S.D.)_n \qquad \frac{dC_i(t)X_i(t)}{dt} = g_i(t\ ;\ X_1, \ldots, X_n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

où les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1, \ldots, X_n)$ vérifient l'hypothèse $(H)_1$, les écarts orientés et la distance de deux solutions $\overrightarrow{U(t)}$ et $\overrightarrow{X(t)}$ de $(S.D.)_n$ sont des fonctions de t absolument continues et décroissantes au sens large.

Démonstration.

Pour l'écart $[\overrightarrow{U(t)}, \overrightarrow{X(t)}]$ il suffit d'établir que $\frac{d}{dt}[\overrightarrow{U(t)}, \overrightarrow{X(t)}] \leq 0$ pour $t \notin \mathcal{N}$. S'il en est ainsi, le théorème est vrai parce que l'écart orienté de deux solutions de $(S.D.)_n$ est une fonction absolument contenue de t et par suite est égal à l'intégrale indéfinie de sa dérivée [12] :

$$[\overrightarrow{U(t)}, \overrightarrow{X(t)}] = [\overrightarrow{U(t_0)}, \overrightarrow{X(t_0)}] + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}[\overrightarrow{U(s)}, \overrightarrow{X(s)}]\, ds$$

et que l'intégrale indéfinie d'une fonction non positive est une fonction décroissante au sens large. Mais d'après le lemme 4/3 p. 55 et compte tenu de l'hypothèse $(H)_1$, on a bien :

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{U(t)}, \overrightarrow{X(t)}] = \sum_{s \in I(t)} g_s(t\ ;\ U_1, \ldots, U_n) - g_s(t\ ;\ X_1, \ldots, X_n) \leq 0$$

sauf au plus sur un ensemble $\mathcal{N}$ de mesure nulle.

On montrerait de même que l'écart orienté $[\overrightarrow{X(t)}, \overrightarrow{U(t)}]$ est une fonction de t absolument continue et décroissante au sens large.

Il en résulte que la distance $\mathcal{D}[\overrightarrow{U(t)}, \overrightarrow{X(t)}]$ de deux solutions de $(S.D.)_n$, égale à la somme des deux écarts orientés de ces deux solutions, est aussi une fonction de t décroissante au sens large. C. q. f. d.

Corollaire.

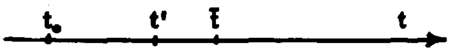
Les systèmes différentiels $\frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, \ldots, n)$ où les fonctions $g(t, \vec{x})$ vérifient l'hypothèse $(H)_1$ sont uniformément stables à droite.

THOREME D'UNICITE A DROITE

Lorsqu'il existe entre tout couple de solutions absolument continues $\overrightarrow{C(t).X(t)}$, $\overrightarrow{C(t).U(t)}$ d'un système différentiel $(S.D.)_n$ une distance $\mathcal{D}[\overrightarrow{X(t)}, \overrightarrow{U(t)}] = \mathcal{D}(t)$ décroissante au sens large, $(S.D.)_n$ n'admet qu'une solution $\overrightarrow{C(t).X(t)}$ à droite issue d'un vecteur initial $\overrightarrow{C(t_0).X(t_0)}$ donné à l'instant t_0 ; $\overrightarrow{X(t)}$ peut ne pas être défini au plus sur un ensemble de mesure nulle.

<u>Démonstration.</u>

En effet (8), supposons qu'il existe une autre solution $\overrightarrow{C(t).U(t)}$ telle que $\overrightarrow{C(t_0).U(t_0)} = \overrightarrow{C(t_0)X(t_0)}$. On aurait $\mathcal{D}(t_0) = 0$ et il existerait un instant $\bar{t} > t_0$ pour lequel $\overrightarrow{C(\bar{t}).U(\bar{t})} \neq \overrightarrow{C(\bar{t}).X(\bar{t})}$ d'où $\mathcal{D}(\bar{t}) > 0$. Désignons alors par t' l'instant le plus éloigné de t_0 tel que $t_0 \leq t' < \bar{t}$ et $\overrightarrow{C(t').U(t')} = \overrightarrow{C(t').X(t')}$. Par conséquent $\mathcal{D}(t') = 0$. Mais on aurait la contradiction $0 = \mathcal{D}(t') \geq \mathcal{D}(\bar{t}) > 0$ puisque la distance de deux solutions est une fonction de t décroissante au sens large. C. q. f. d.



7/ <u>Hypothèses complémentaires $(H)_2$ et leurs conséquences.</u>

Le concept d'usine de séparation incite à introduire deux nouvelles hypothèses sur les fonctions du système $(S.D.)_n$ qui impliquent pour certaines solutions : l'une, un théorème de minoration, l'autre, un théorème de majoration.

Ces hypothèses s'expriment par les inégalités suivantes vérifiées presque partout :

1/ $g_i(t\ ;\ \vec{0}) \geq 0 \qquad (i=1, \ldots, n)$

(Les fonctions $g_i(t\ ;\ 0, \ldots, 0)$ sont positives ou nulles.) ;

2/ $g(t\ ;\ \vec{1}) \leq \frac{dC_i}{dt} \qquad (i=1, \ldots, n)$

(Les fonctions $g_i(t\ ;\ 1, \ldots, 1)$ sont identiquement inférieures ou égales aux dérivées des fonctions $C_i(t)$.) ; et par la supposition que les fonctions $C_i(t)$ sont <u>absolument continues</u> pour utiliser encore la propriété de la décroissance au sens large des écarts orientés.

Ces nouvelles hypothèses seront désignées par $(H)_2$. Elles entraînent les deux théorèmes suivants :

THEOREME 1

Etant donné le système différentiel généralisé au sens de Carathéodory.

$$(S.D.)_n \qquad \frac{dC_i(t)X_i(t)}{dt} = g_i(t\ ;\ X_1, \ldots, X_n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

où l'on suppose en outre que :

1/ Les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1, \ldots, X_n)$ satisfont à l'hypothèse $(H)_1$;

2/ Les inégalités $g_i(t\ ;\ 0, \ldots, C_i) \geq 0$ sont vérifiées presque partout ; les composantes $X_i(t)$ de toute solution $\overrightarrow{X(t)}$ de $(S.D.)_n$ demeurent supérieures ou égales à 0 lorsqu'elles le sont à l'instant initial t_0.

Démonstration.

L'écart orienté $[\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}] = -\sum_{\alpha\in\{\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}\}} C_\alpha(t)X_\alpha(t)$ qui est une fonction absolument continue de t admet presque partout une dérivée :

$$\frac{d}{dt}[\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}] = -\sum_{\alpha\in\{\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}\}} \frac{dC_\alpha X_\alpha}{dt} = -\sum_{\alpha\in\varepsilon} g_\alpha(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n).$$

Mais en vertu de l'hypothèse $(H)_1$ on a l'inégalité :

$$\sum_{\alpha\in\varepsilon} g_\alpha(t,\ 0,\ \dots,\ 0) \leqslant \sum_{\alpha\in\varepsilon} g_\alpha(t,\ X_1,\ \dots,\ X_n)$$

qui doit être respectée dans tous procédé de prolongement des fonctions g à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Elle entraîne :

$$\frac{d}{dt}[\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}] \leqslant -\sum_{\alpha\in\varepsilon} g_\alpha(t\ ;\ 0,\ \dots,\ 0)$$

d'où compte tenu de la deuxième condition :

$$\frac{d}{dt}[\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}] \leqslant 0.$$

Mais $[\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}]$ étant une fonction absolument continue et nulle à l'instant initial t_0, il résulte de [12] que :

$$[\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}] = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}[\vec{0},\ \overrightarrow{X(s)}]\,ds \leqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad t > t_0.$$

D'où nécessairement $[\vec{0},\ \overrightarrow{X(t)}] = 0$ et $X_i(t) \geqslant 0$ $\quad (i=1,\ \dots,\ n)$ $\quad$ C. q. f. d.

THEOREME 2

Etant donné le système différentiel généralisé au sens de Carathéodory :

$$(S.\ D.)_0 \qquad \frac{dC_i(t)X_i(t)}{dt} = g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n) \qquad (i=1,\ \dots,\ n)$$

où l'on suppose en outre que :

1/ Les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$ satisfont à l'hypothèse $(H)_1$;

2/ Les inégalités $g_i(t\ ;\ 1,\ \dots,\ 1) \leqslant \frac{dC_i}{dt}$ sont satisfaites presque partout ;

3/ Les fonctions $C_i(t)$ sont absolument continues ; les composantes de toute solution $\overrightarrow{X(t)}$ de $(S.\ D.)_0$ demeurent inférieures ou égales à 1 lorsqu'elles le sont à l'instant initial t_0.

Démonstration.

L'écart orienté :

$$[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}] = \sum_{\alpha\in\{\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}\}} C_\alpha(t)\,[X_\alpha(t) - 1],$$

en raison de la 3ème condition, est une fonction de t absolument continue qui admet presque partout une dérivée :

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}] = \sum_{\alpha\in\{\vec{x},\ \vec{1}\}} g_\alpha(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n) - \frac{dC_\alpha}{dt}$$

inférieure ou égale à zéro en vertu de l'hypothèse $(H)_1$. Celle-ci s'exprime par l'inégalité :

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{E}} g_\alpha(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_n) \leq \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} g_\alpha(t\ ;\ 1,\ \ldots,\ 1),$$

qui doit être aussi respectée dans tout procédé de prolongement des fonctions g à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Elle entraîne en effet :

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}] \leq \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} g_\alpha(t\ ;\ 1,\ \ldots,\ 1) - \frac{dC_\alpha}{dt}$$

puis :

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}] \leq 0$$

compte tenu de la deuxième condition.

D'ailleurs $[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}]$ étant absolument continu et nul à l'instant initial t_o, on a selon [12] :

$$[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}] = \int_{t_o}^{t} \frac{d}{ds}[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}]ds \leq 0 \qquad \text{pour} \qquad t > t_o.$$

D'où nécessairement :

$$[\overrightarrow{X(t)},\ \vec{1}] = 0 \qquad \text{et} \qquad X_i(t) \leq 1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \qquad \text{C.q.f.d.}$$

<u>Remarque.</u>

On aurait pu poser les hypothèses $(H)_2$ en utilisant deux vecteurs quelconques $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de R^n au lieu des vecteurs $\vec{0}$ et $\vec{1}$, et on aurait obtenu deux théorèmes analogues ; mais dans les conditions précédentes on voit immédiatement que les composantes des solutions de $(S.D.)_n$, soumis aux hypothèses $(H)_1 + (H)_2$, demeurent comprises entre 0 et 1 lorsqu'elles le sont toutes à l'instant initial t_o ; ce qui est primordial dans nos applications. Ceci s'exprime encore en disant que les hypothèses $(H)_1 + (H)_2$ assurent l'existence et l'unicité à droite des solutions $\overrightarrow{X(t)}$ dans le cylindre :

$$\mathcal{C}[t_o \leq t \leq \infty\ ;\ 0 \leq X_i(t) \leq 1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)].$$

II - SYSTEMES DIFFERENTIELS MIXTES $(S.M.)_{m,n}$ -

Nous étendons les propriétés des solutions des systèmes différentiels $(S.D.)_n$ - celles qui restent à l'intérieur du cylindre :

$$\mathcal{C}[t_o \leq t \leq \infty\ ;\ 0 \leq X_i(t) \leq 1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)] -$$

à des systèmes différentiels plus généraux dans la mesure où ils se déduisent d'un $(S.D.)_n$ en annulant identiquement un certain nombre de fonctions $C_i(t)$. Si n-m est ce nombre, on a de la sorte un système mixte $(S.M.)_{m,n}$ de m équations différentielles et de n-m équations implicites. D'ailleurs on peut toujours supposer, en changeant au besoin l'ordre des équations, que les n-m dernières fonctions $C_q(t)$ $(q=m+1,\ \ldots,\ n)$ sont identiquement nulles.

1/ <u>Hypothèses</u> -

Pour parvenir à cette extension nous sommes obligés de faire quelques hypothèses supplémentaires sur les fonctions $g_i(t\ ;\ \vec{X})$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$.

Ainsi, considérons le système mixte $(S.M.)_{m,n}$ avec $m \geq 1$:

$$\frac{dC_1(t)X_1(t)}{dt} = g_1(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_m,\ X_{m+1},\ \ldots,\ X_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dC_m(t)X_m(t)}{dt} = g_m(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_m,\ X_{m+1},\ \ldots,\ X_n)$$

$$0 \quad = g_{m+1}(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_m,\ X_{m+1},\ \ldots,\ X_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 \quad = g_n(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_m,\ X_{m+1},\ \ldots,\ X_n)$$

où les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_n)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ sont réduites en général par les relations :

$$C_q(t) = 0,\ \frac{dC_q}{dt} = 0,\ \ldots \qquad (q=m+1,\ \ldots,\ n)$$

et dans lequel on suppose que :

1/ Les fonctions $C_p(t)$ $(p=1,\ \ldots,\ m)$ sont absolument continues de t et positives presque partout.

2/ Les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_n)$ sont définies dans le cylindre :

$$\mathcal{C}[t_0 < t < \infty\ ;\ 0 \leq X_i \leq 1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)]$$

et étendues à tout le domaine :

$$D[t_0 \leq t < \infty\ ;\ -\infty < X_i < +\infty \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)]$$

par le procédé indiqué au I.2/p. 51, où elles sont mesurables par rapport à t pour tout système de valeurs fixes $X_1,\ \ldots,\ X_n$, et continues par rapport à l'ensemble des variables $X_1, \ldots, X_n$ pour presque toutes les valeurs fixes de t. D'autre part elles satisfont à l'hypothèse $(H)_1$.

3/ Les fonctions $g_p(t,\ X_1,\ \ldots,\ X_m,\ X_{m+1},\ \ldots,\ X_n)$ $(p=1,\ \ldots,\ m)$ vérifient les hypothèses (H_2) et sont <u>croissantes</u> au sens large par rapport aux $X_q(q=m+1,\ \ldots,\ n)$. Il existe aussi une fonction M(t) sommable sur tout intervalle fini positif, telle que :

$$|g_p(t,\ X_1,\ \ldots,\ X_n)| \leq M(t) \qquad (p=1,\ \ldots,\ m)$$

4/ La base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ étant considérée comme le produit $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_{n-m}$ des deux espaces :

$$\mathcal{B}_m[0 \leq X_p \leq 1 \quad (p=1,\ \ldots,\ m)],\ \mathcal{B}_{n-m}\ [0 \leq X_q \leq 1 \quad (q=m+1,\ \ldots,\ n)]$$

il existe presque partout sur $\mathcal{C}$ une variété linéaire de $\mathcal{B}$ telle qu'à tout point de $\mathcal{B}_m$ correspond un seul point de $\mathcal{B}_{n-m}$ où les fonctions $g_q(t,\ X_1,\ \ldots,\ X_n)$ s'annulent et où elles admettent des dérivées partielles premières $\partial g_q/\partial X_l$ $(q,\ l=m+1,\ \ldots,\ n)$ continues par rapport à l'ensemble des variables $X_1,\ \ldots,\ X_n$ (bien entendu, ces dérivées partielles sont mesurables par rapport à t [7]). Enfin, le jacobien ou déterminant fonctionnel J des $g_q(t,\ X_1,\ \ldots,\ X_n)$ par rapport aux $X_l(l=m+1,\ \ldots,\ n)$ n'est pas nul quels que soient $X_1,\ \ldots,\ X_n$ sur $\mathcal{B}$ pour presque toutes les valeurs de t.

2/ <u>Propriétés des systèmes mixtes</u> -

Dans les conditions précédentes et pour presque toutes les valeurs de t on peut déterminer sur $\mathcal{B}_{n-m}$ d'une seule manière les fonctions $X_{m+1},\ \ldots,\ X_n$ à l'aide de $X_1,\ \ldots,\ X_m$; fonctions qui sont continues en $X_1,\ \ldots,\ X_m$ pour presque toutes les valeurs de t, et mesurables par rapport à t pour tout système de valeurs fixes de $X_1,\ \ldots,\ X_m$, comme étant limites de fonctions mesurables lesquelles résultent de la méthode des approximations successives (9) p. 244. En reportant leurs expressions dans les m premières fonctions $g_p(t\ ;\ X_1,\ \ldots,\ X_n)$ $(p=1,\ \ldots,\ m)$ on parvient au système différentiel:

$$\frac{dC_1(t)X_1(t)}{dt} = \mathfrak{g}_1(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m) = g_1(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dC_m(t)X_m(t)}{dt} = \mathfrak{g}_m(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m) = g_m(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$$

qui est du type $(S.D.)_m$. Précisément, les fonctions $\mathfrak{g}_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m)$ sont définies sur R^m où elles vérifient les relations de la page 51 et satisfont aux propriétés suivantes :

1/ Il existe une fonction M(t) sommable sur tout intervalle fini positif telle que :

$$|\mathfrak{g}_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m)| \leqslant M(t) \qquad (p=1,\ \dots,\ m)$$

en raison de l'identité $\mathfrak{g}_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m) = g_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$ et de l'inégalité $|g_p| \leqslant M(t)$.

2/ Les fonctions $\mathfrak{g}_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m)$ sont mesurables par rapport à t pour tout système de valeurs fixes $X_1,\ \dots,\ X_m$ en raison du lemme de Carathéodory I. 1/p. 49 appliqué aux fonctions $g_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m,\ X_{m+1},\ \dots,\ X_n)$ dans lesquelles on remplace les X_q $(q=m+1,\ \dots,\ n)$ par des fonctions mesurables de t. Elles sont aussi continues par rapport à l'ensemble des variables $X_1,\ \dots,X_m$ pour presque toutes les valeurs fixes de t puisqu'on les obtient en remplaçant dans les $g_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m,\ X_{m+1},\ \dots,\ X_n)$ les $X_q(q=m+1,\ \dots,\ n)$ par des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables $X_1,\ \dots,\ X_m$.

3/ Les fonctions $\mathfrak{g}_p(t,\ X_1,\ \dots,\ X_m)$ $(p=1,\ \dots,\ m)$ vérifient l'hypothèse (H_1) :

En effet, en désignant par $\overrightarrow{U_n(t)}$ et $\overrightarrow{X_n(t)}$ deux vecteurs de l'espace R^n et par $\overrightarrow{U_m(t)}$ et $\overrightarrow{X_m(t)}$ leurs projections respectives dans R^m, on peut considérer à chaque instant t les partitions $E_n\{\overrightarrow{U_n(t)},\ \overrightarrow{X_n(t)}\}$ et $E_m\{\overrightarrow{U_m(t)},\ \overrightarrow{X_m(t)}\}$ qui donnent lieu aux relations :

$$\sum_{\alpha\in E_m} \mathfrak{g}_\alpha(t\ ;\ \vec{U}_m) - \mathfrak{g}_\alpha(t\ ;\ \vec{X}_m) = \sum_{\alpha\in E_m} g_\alpha(t\ ;\ \vec{U}_n) - g_\alpha(t\ ;\ \vec{X}_n)$$

mais $E_m \subsetneq E_n$, et d'autre part les éléments γ de E_n qui n'appartiennent pas à E_m correspondent à $g_\gamma(t\ ;\ \vec{U}_n) = g_\gamma(t_\gamma;\ \vec{X}_n) = 0$ d'où :

$$\sum_{\alpha\in E_m} \mathfrak{g}_\alpha(t\ ;\ \vec{U}_m) - \mathfrak{g}_\alpha(t\ ;\ \vec{X}_m) = \sum_{\alpha\in E_n} g_\alpha(t\ ;\ \vec{U}_n) - g_\alpha(t\ ;\ \vec{X}_n) \leqslant 0$$

puisque les fonctions $g_i(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_n)$ $(i=1,\ \dots,\ n)$ vérifient l'hypothèse (H_1) : laquelle se transmet donc aux fonctions $\mathfrak{g}_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m)$ $(p=1,\ \dots,\ m)$ de $(S.D.)_m$.

4/ Les fonctions $\mathfrak{g}_p(t\ ;\ X_1,\ \dots,\ X_m)$ vérifient l'ensemble des hypothèses (H_2) :

En effet, on a d'une part :

$$\mathfrak{g}_p(t\ ;\ \vec{0}_m) = g_p(t\ ;\ 0,\ \dots,\ 0,\ X_{m+1},\ \dots,\ X_n) \geqslant g_p(t\ ;\ \vec{0}_n) \geqslant 0$$

en raison de la croissance au sens large des fonctions g_p $(p=1,\ \dots,\ m)$ par rapport aux $X_{m+1},\ \dots,X_n$ et de la dernière inégalité vérifiée par les fonctions $g_p(t\ ;\ \vec{0}_n)$ qui se transmet ainsi aux fonctions $\mathfrak{g}_p(t\ ;\ \vec{0}_m)$ $(p=1,\ \dots,\ m)$ de $(S.D.)_m$; et d'autre part :

$$\mathfrak{g}_p(t\ ;\ \vec{1}_m) = g_p(t\ ;\ 1,\ \dots\ 1\ ;\ X_{m+1},\ \dots,\ X_n) \leqslant g_p\ t\ ;\ \vec{1}_n) \leqslant \frac{dC_p}{dt}$$

en raison de la croissance au sens large des fonctions $g_p(p=1,\ \dots,\ m)$ par rapport aux $X_{m+1},\ \dots,\ X_n$ et de la dernière inégalité vérifiée par les fonctions $g_p(t\ ;\ \vec{1}_n)$ qui se transmet ainsi aux fonctions $\mathfrak{g}_p(t\ ;\ \vec{1}_m)$ $(p=1,\ \dots,\ m)$ de $(S.D.)_m$.

De ces quatre propriétés il résulte qu'entre deux solutions quelconques de $(S.D.)_m$ il existe deux écarts orientés et une distance qui sont des fonctions de t absolument continues et décroissantes au sens large, ce qui entraîne l'unicité à droite des solutions. D'autre part elles demeurent comprises entre 0 et 1 lorsqu'elles le sont à l'instant initial. Quant aux composantes $X_{s+1}, \ldots, X_n$, elles sont aussi comprises entre 0 et 1 puisqu'à tout point de $\mathcal{B}_n$ correspond un seul point de $\mathcal{B}_{n-s}$ où les fonctions g_i s'annulent comme il est supposé au 4/ de la page 60.

III - APPLICATIONS AUX SYSTEMES DIFFERENTIELS DES CONCENTRATIONS DES USINES EN MELANGE BINAIRE.

Le III. 2/p. 28 du chapitre 2 montre que les systèmes différentiels des concentrations des usines en mélange binaire se ramènent à la forme générale :

$$\frac{dC_i(t)N_i(t)}{dt} + f_{ii}(t,\ N_i) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ N_j) = \left[f_{ii}(t,\ 1) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} f_{ij}\,(t,1) + \frac{dC_i}{dt}\right]N_i^*(t) \qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$$

où les fonctions $C_i(t)$, $N_i^*(t)$, $f_{ij}(t,\ N_j)$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ sont définies dans le cylindre $\mathcal{C}\,[t_0 \leq t \leq \infty\ ;\ 0 \leq N_i \leq 1,\ (i=1,\ \ldots,\ n)]$, et prolongées à l'extérieur de $\mathcal{C}$ selon le procédé indiqué p.51.

1/ Hypothèses.

Dans ce cylindre $\mathcal{C}$ on admet que les fonctions du système différentiel précédent vérifient les hypothèses suivantes :

1/ Les fonctions $C_i(t)$ sont absolument continues et positives presque partout.

2/ Les fonctions $N_i^*(t)$ sont mesurables et données dans l'intervalle $[0,\ 1]$.

3/ Les fonctions $f_{ij}(t,\ N_j)\,(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ sont mesurables par rapport à t pour toute valeur fixe de N_j, continues par rapport à N_j pour presque toutes les valeurs fixes de t, croissantes au sens large par rapport à N_j et identiquement nulles pour $N_j = 0$.

4/ Les fonctions $d_j(t,\ N_j) = f_{jj}(t,\ N_j) - \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} f_{ij}(t,\ N_j)$ sont croissantes au sens large par rapport à N_j.

5/ Les dérivées dC_i/dt satisfont presque partout aux inégalités :

$$f_{ii}(t,\ 1) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt} \geq 0$$

6/ Les fonctions $f_{ii}(t,\ 1)$ sont sommables sur tout intervalle de temps fini positif.

Ces hypothèses découlent des observations du chapitre 2 (III. 2/p. 28). Toutefois, il reste à justifier dans les applications les deux points que nous avons prématurément admis :

1/ Les fonctions $f_{ij}(t,\ N_j)$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ sont mesurables par rapport à t ;

2/ Les fonctions $f_{ii}(t,\ 1)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ sont sommables sur tout intervalle de temps fini positif.

Du moins, nous donnerons en temps utile des conditions pour qu'il en soit ainsi.

Remarques.

1/ Toutes les fonctions $f_{ij}(t,\ N_j)$ sont positives ou nulles. En effet, elles sont nulles pour $N_j = 0$ et croissantes au sens large par rapport à N_j.

2/ Les fonctions $f_{ij}(t,\ N_j)$ sont inférieures à une fonction :

$$m(t) = \sum_{s=1}^{n} f_{ss}(t,\ 1)$$

sommable sur tout intervalle fini positif. Ceci résulte des inégalités :

$$0 \leq f_{ij}(t,\ N_j) \leq f_{jj}(t,\ N_j) \leq f_{jj}(t,\ 1) \leq m(t).$$

3/ En désignant par E un sous-ensemble quelconque de l'ensemble des indices (1, ..., n) toutes les expressions :

$$f_{jj}(t,\ N_j) - \sum_{i \in E-j} f_{ij}(t,\ N_j)$$

sont croissantes au sens large par rapport à N_j. On le voit d'après l'identité :

$$f_{jj}(t,\ N_j) - \sum_{i \in E-j} f_{ij}(t,\ N_j) = d_j(t,\ N_j) + \sum_{k \notin E} f_{kj}(t,\ N_j)$$

où le second membre est par hypothèse une somme de fonctions croissantes au sens large de N_j.

2/ Propriétés.

En posant

$$g_i(t\,;N_1,\ \dots,\ N_n) = \left[f_{ii}(t,\ 1) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt}\right] N_i^\circ(t) - f_{ii}(t,\ N_i) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ N_j)$$

on observe que les fonctions $g_i(t,\ \vec{N})$ $(i=1,\ \dots,\ n)$ satisfont aux propriétés suivantes :

1/ Les hypothèses préliminaires du I. 2/p. 50 sont remplies :

a) Du moins, $g_i(t\ ;\ N_1,\ \dots,\ N_n)$ est mesurable par rapport à t et continue par rapport à l'ensemble des variables $N_1,\ \dots,\ N_n$.

b) La condition de Carathéodory est remplie :

$$|g_i(t,\ \vec{N})| \le f_{ii}(t,\ 1) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt} + f_{ii}(t,\ N_i) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ N_j)$$

$$\le 2f_{ii}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt} \le \sum_{i=1}^{n}\left[2f_{ii}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt}\right] = M(t)$$

2/ L'hypothèse $(H)_1$ est vérifiée :

$$g_\alpha(t,\ \vec{U}) - g_\alpha(t,\ \vec{X}) = -f_{\alpha\alpha}(t,\ U_\alpha) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n} f_{\alpha j}(t,\ U_j) + f_{\alpha\alpha}(t,\ X_\alpha) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n} f_{\alpha j}(t,\ X_j)$$

d'où en désignant par $E = E(\overrightarrow{U(t)},\ \overrightarrow{X(t)})$ la partition définie au I. 3/p. 52 :

$$\sum_{\alpha\in E}[g_\alpha(t,\ \vec{U}) - g_\alpha(t,\ \vec{X})] = \sum_{\alpha\in E}\ \sum_{\beta\notin E} [f_{\alpha\beta}(t,\ U_\beta) - f_{\alpha\beta}(t,\ X_\beta)]$$

$$-\sum_{\alpha\in E}\left\{\left[f_{\alpha\alpha}(t,\ U_\alpha) - \sum_{\alpha'\in E-\alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ U_\alpha)\right] - \left[f_{\alpha\alpha}(t,\ X_\alpha) - \sum_{\alpha'\in E-\alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ X_\alpha)\right]\right\} \le 0,$$

le second membre de cette identité (écrit sur deux lignes) étant bien inférieur ou égal à zéro puisque $f_{\alpha\alpha}(t,\ X_\alpha) - \sum_{\alpha'\in E-\alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ X_\alpha)$ et $f_{\alpha\beta}(t,\ X_\beta)$ sont des fonctions croissantes au sens large de X_α et de X_β.

Remarque.

Les propriétés ci-dessus sont vérifiées en prenant $f_{ij}(t,\ x_j) = \Delta_{ij}\, a_{ij}(t)\, x_j$ avec $\Delta_{ij} = -1$ pour $i\neq j$ et 1 pour $i = j$, et où les coefficients $a_{ij}(t)$ sont sommables et satisfont aux inégalités :

$$a_{ij}(t) \ge 0 \qquad \text{et} \qquad a_{jj}(t) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} a_{ij}(t) \ge 0\ .$$

Entre deux solutions quelconques des systèmes différentiels linéaires correspondants il existe donc deux écarts orientés et une distance qui sont des fonctions de t absolument continues et décroissantes au sens large.

3/ Le système d'hypothèses $(H)_2$ est satisfait :

a) $g_i(t\ ;\ 0,\ \ldots,\ 0) =$

$$\left[f_{ii}(t,\ 1) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt}\right] N_i^*(t) \geq 0$$

b) $g_i(t\ ;\ 1,\ \ldots,\ 1) =$

$$\left[f_{ii}(t,\ 1) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt}\right] N_i^*(t) - f_{ii}(t,\ 1) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1)$$

$$\leq f_{ii}(t,\ 1) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1) + \frac{dC_i}{dt} - f_{ii}(t,\ 1) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(t,\ 1) = \frac{dC_i}{dt}$$

Par conséquent, avec ces premières hypothèses exprimées par les 1/, ..., 6/, les solutions du système proposé sont douées des propriétés faisant l'objet des théorèmes des § I. 6/ et I. 7/p. 56

3/ Suite des hypothèses.

A présent nous complétons la liste des hypothèses du § III. 1/ p. 62 en posant que les fonctions $f_{ij}(t,\ N_j)$ satisfont aussi aux conditions :

7/ $f_{ii}(t,\ N_i) > 0$ pour $N_i > 0$ (i=1, ..., n), soit $\frac{1}{N_i} f_{ii}(t,\ N_i) > 0$ sur $N_i \in [0,\ 1]$.

8/ La matrice des fonctions $\frac{1}{N_j} f_{ij}(t,\ N_j)$ est irréductible sur $N_j \in [0,\ 1]$ (j=1, ..., n).

9/ Les fonctions $f_{ij}(t,\ N_j)$, $d_j(t,\ N_j)$ admettent des dérivées partielles premières $\frac{\partial f_{ij}(t,\ N_j)}{\partial N_j}$, $\frac{\partial d_j(t,\ N_j)}{\partial N_j}$ continues par rapport à N_j et qui sont nulles ou positives en même temps que les fonctions $\frac{1}{N_j} f_{ij}(t,\ N_j)$, $\frac{1}{N_j} d_j(t,\ N_j)$ respectivement.

Remarque.

Les conditions 7ème et 8ème ne suppriment aucune généralité, elles nous permettront d'utiliser le théorème de Taussky. Précisément la condition 8ème exprime que l'usine est irréductible (Voir chapitre 2. § I. 3/p. 22) ; la condition 7ème, que le point i n'est pas un point unipolaire de sortie de l'usine ; de même la condition d'irréductibilité implique qu'un point i de l'usine n'est pas un point unipolaire d'entrée de l'usine. En somme le système considéré est limité à ses boîtes bipolaires. D'autre part une usine, ou un système réductible serait étudié de proche en proche comme il a été dit à la fin du Ch. 2. § I. 3/p. 22.

4/ Suite des propriétés.

Moyennant cette suite d'hypothèses, les solutions des systèmes mixtes des usines vérifient encore les propriétés du § II. 2/p. 60. Pour s'en assurer, il reste à vérifier les conditions contenues dans les 3ème et 4ème du § II. 1/p. 60.

On remarque qu'on pourrait noter plus précisément les fonctions g_i par $g_i\left(t,\ \frac{dC_i}{dt}\ ;\ N_1,\ \ldots,\ N_n\right)$ (i=1, ..., n). Celles-ci sont manifestement croissantes au sens large par rapport aux $N_k (k \neq i)$ au même titre que les fonctions $f_{ik}(t,\ N_k)$, ce qui établit le 3/. Par conséquent, il reste à établir que tout système d'équations :

$$g_\alpha(t,\ 0\ ;\ N_1,\ \ldots,\ N_n) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in E \neq (1,\ \ldots,\ n)$$

est résoluble d'une façon unique par rapport aux N_β avec $\beta \in \complement E$ et que les composantes de cette solution sont comprises entre 0 et 1.

Sans perte de généralité, on suppose pour simplifier l'écriture que ce système résulte de l'annulation des m premières fonctions $C_j(t)$. Le système à étudier se met donc sous la forme :

$$f_{1,1}(t,\ N_1) - f_{1,2}(t,\ N_2) - \dots - f_{1,m}(t,\ N_m) = f_{1,m+1}(t,\ N_{m+1}) + \dots + f_{1,n}(t,\ N_n)$$
$$+ \left[f_{1,1}(t,\ 1) - \sum_{i=2}^{n} f_{1,i}(t,\ 1) \right] N_1^+(t).$$

$$- f_{2,1}(t,\ N_1) + f_{2,2}(t,\ N_2) - \dots - f_{2m}(t,\ N_m) = f_{2,m+1}(t,\ N_{m+1}) + \dots + f_{2,n}(t,\ N_n)$$
$$+ \left[f_{2,2}(t,\ 1) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} f_{2,i}(t,\ 1) \right] N_2^+(t)$$

....

$$- f_{m,1}(t,\ N_1) - f_{m,2}(t,\ N_2) - \dots + f_{m,m}(t,\ N_m) = f_{m,m+1}(t,\ N_{m+1}) + \dots + f_{m,n}(t,\ N_n)$$
$$+ \left[f_{m,m}(t,\ 1) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{n} f_{m,i}(t,\ 1) \right] N_m^+(t).$$

Le jacobien de ce système :

$$J = \begin{vmatrix} + \dfrac{\partial f_{11}(t,\ N_1)}{\partial N_1}, & - \dfrac{\partial f_{12}(t,\ N_2)}{\partial N_2}, & \dots, & - \dfrac{\partial f_{1m}(t,\ N_m)}{\partial N_m} \\ - \dfrac{\partial f_{21}(t,\ N_1)}{\partial N_1}, & + \dfrac{\partial f_{22}(t,\ N_2)}{\partial N_2}, & \dots, & - \dfrac{\partial f_{2m}(t,\ N_m)}{\partial N_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ - \dfrac{\partial f_{m1}(t,\ N_1)}{\partial N_1}, & - \dfrac{\partial f_{m2}(t,\ N_2)}{\partial N_2}, & \dots, & + \dfrac{\partial f_{mm}(t,\ N_m)}{\partial N_m} \end{vmatrix}$$

est positif comme mineur d'ordre m sur la diagonale principale d'une matrice d'ordre n irréductible en application du critère de régularité (Voir p.46). Par conséquent, si ce système admet une solution $N_1, \dots, N_m$ pour un vecteur $\vec{N}$ de composantes $N_1^+, \dots, N_m^+, N_{m+1}, \dots, N_n$, il ne peut y en avoir qu'une dans un certain voisinage de $\vec{N}$. Or pour $\vec{N} = 0$ les seconds membres de ce système sont nuls et le système admet la solution manifeste $N_1 = \dots = N_m = 0$; c'est d'ailleurs la seule solution car pour tout autre système de valeurs $N_1 \geq 0, \dots, N_m \geq 0$ avec $N_1 + \dots + N_m > 0$, on aurait en additionnant les équations α pour lesquelles $N_\alpha > 0$:

$$\sum_{\alpha \in I} \left[f_{\alpha\alpha}(t,\ N_\alpha) - \sum_{\alpha' \in I - \alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ N_\alpha) \right] = 0$$

ce qui est impossible à cause de l'irréductibilité. De même pour $\vec{N} = \vec{1}$ les seconds membres de ce système se réduisent aux premiers pour $N_1 = \dots = N_m = 1$ ce qui correspond à la solution : c'est également la seule solution, car pour tout autre solution $N_1 \leq 1, \dots, N_m \leq 1$ avec $N_1 + \dots + N_m < m$, on aurait en additionnant les équations α pour lesquelles $N_\alpha < 1$:

$$\sum_{\alpha \in I} \left[f_{\alpha\alpha}(t,\ N_\alpha) - \sum_{\alpha' \in I - \alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ N_\alpha) \right] = \sum_{\alpha \in I} \left[f_{\alpha\alpha}(t,\ 1) - \sum_{\alpha' \in I - \alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ 1) \right]$$

ce qui est impossible puisque le premier membre est une expression toujours croissante de l'un au moins des N_α sinon le jacobien J serait nul. D'autre part, les composantes $N_1, \dots, N_m$ sont des fonctions continues et croissantes au sens large des composantes de $\vec{N}$ en raison du théorème 1 au Ch. 3. § II.1/p. 33, appliqué au système différentié du système de ces m premières équations. Par conséquent, en faisant varier continûment et toujours dans le même sens les composantes du vecteur

5

$\tilde{N}$ de 0 à 1 et de manière à leur donner les valeurs requises $N_1^*, \ldots, N_m^*, N_{m+1}, \ldots, N_n$, les composantes $N_1^*, \ldots, N_m^*$ qui vérifient le système au cours de cette variation sont des fonctions continues, croissantes au sens large, variant de 0 à 1 en passant par les valeurs cherchées et uniques $N_1, \ldots, N_m$. C. q. f. d.

5/ Justification de la sommabilité des fonctions $f_{ij}(t, N_j)$ par rapport à t.

On justifie les deux points précédemment admis au § III. 1/p. 62 à savoir que :

1/ Les fonctions $f_{ij}(t, N_j)$ sont mesurables par rapport à t ;

2/ Les fonctions $f_{ii}(t, N_i)$ sont sommables sur tout intervalle de temps fini.

Au chapitre 2. § III. 2/p. 28 on a vu que :

$$f_{ii}(t, N_i) = [\theta_i \alpha_i (1 - \mu'_{ii}) + (1 - \theta_i \alpha_i)(1 - \mu''_{ii})] L_i N_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

$$f_{ij}(t, N_j) = [\theta_j \alpha_j \mu'_j + (1 - \theta_j \alpha_j) \mu''_{ji}] L_j N_j \qquad (i \neq j=1, \ldots, n)$$

où l'on suppose que tous les coefficients de partage θ_i, μ'_{ij}, μ''_{ij} sont des fonctions mesurables de t, et les gains de séparation $\alpha_i(N_i)$ des fonctions admettant une dérivée $\partial\alpha_i/\partial N_i$ continue. Ainsi il reste à établir que les flux $L_i (i=1, \ldots, n)$ sont mesurables et sommables puisque les crochets sont compris entre 0 et 1. Or les L_i sont les composantes de la solution du système d'équations linéaires :

$$L_i(1 - \theta_{ii}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \theta_{ji} L_j = F_i^* - \frac{dC_i}{dt}$$

à coefficients $\theta_{ij}(t)$ mesurables et bornés, à flux d'alimentation $F_i^*(t)$ mesurables et sommables sur tout intervalle fini positif, et où, bien entendu, les dC_i/dt sont mesurables [8] et sommables [12] :

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dC_i}{dt}\, dt = C_i(t_1) - C_i(t_0)$$

puisque les fonctions $C_i(t)$ sont absolument continues.

Dans ces conditions, et en se limitant aux usines irréductibles, il y a deux cas à envisager correspondant à la distinction des deux types d'usines (Voir Ch. 2. § I. 2/p. 22).

1/ Pour les usines en production : $\sum_{i\in P} \theta_i^- > 0$; le déterminant D^* du système n'est pas nul d'après le théorème de Taussky, et les composantes L_i de sa solution sont mesurables. Mais il n'est pas prouvé qu'elles soient sommables, car D^* peut devenir aussi petit qu'on le veut lorsque les $\theta_i(t)$ varient d'une façon quelconque. Néanmoins cette sommabilité sera assurée lorsque l'un des n! minorants de D^* (Voir Ch. 3. Note II. p. 46) demeure supérieur ou égal à une constante positive. Il en est bien ainsi pour les systèmes à coefficients de partage indépendants du temps.

2/ Pour les usines en reflux total :

$$\sum_{i\in P} \theta_i^- = 0 \text{ et } \sum_{i\in P} \left(F_i^* - \frac{dC_i}{dt} = 0\right);$$

la solution du système homogène, définie à un facteur constant près, est sommable ; ses composantes étant respectivement proportionnelles aux cofacteurs des éléments d'une même ligne du déterminant D^* de ses coefficients. Quant à la solution particulière, elle donne lieu aux mêmes difficultés que dans le cas précédent. Elle s'obtient par la résolution d'un système régulier à n-1 équations (Ch. 2. § II. 3/p. 26). Sa sommabilité sera assurée de même lorsqu'il existe pour l'un des cofacteurs de la diagonale principale de D^* un minorant supérieur ou égal à une constante positive. Ceci a lieu pour les usines à coefficients de partage indépendants du temps.

6/ Critère de distinction des usines en production des usines en reflux total.

Le théorème au Ch. 2. § IV. p. 28 permet de distinguer les usines en production $\left(\sum_{i\in P} \theta_i^- > 0\right)$ des usines en reflux total $\left(\sum_{i\in P} \theta_i^- = 0\right)$ et conduit au critère suivant :

CRITERE

Lorsque la somme $\sum_{i\in P} d_i(t, N_i) = \sum_{i\in P}\left[f_{ii}(t, N_i) - \sum_{j\in P-i} f_{ji}(t, N_i)\right]$, pour $N_i > 0$ ($i \in P$), est positive presque partout au cours du temps, l'usine est en production ; sinon, elle est nulle, et l'usine est en reflux total.

7/ Dégénérescence complète des systèmes différentiels des concentrations en systèmes d'équations implicites. Régimes permanents.

Lorsqu'on annule identiquement toutes les capacités du système représentatif des concentrations de l'usine ; $C_i(t) = 0$ ($i=1, \ldots, n$), on parvient à un système de n équations implicites $(S.I)_n$:

$$
\begin{array}{l}
+ f_{11}(t, N_1) - f_{12}(t, N_2) - \ldots - f_{1n}(t, N_n) = [+ f_{11}(t, 1) - \ldots - f_{1n}(t, 1)]\ N_1^+ \\
- f_{21}(t, N_1) + f_{22}(t, N_2) - \ldots - f_{2n}(t, N_n) = [- f_{21}(t, 1) + f_{22}(t, 1) - \ldots]\ N_2^+ \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- f_{n1}(t, N_1) - f_{n2}(t, N_2) - \ldots + f_{nn}(t, N_n) = [- f_{n1}(t, 1) - \ldots + f_{nn}(t, 1)]\ N_n^+
\end{array}
$$

En restant dans le cadre des hypothèses 2/, ..., 9/ des § 1/ et 3/ p. 62 et 64 on a les deux théorèmes suivants se rapportant aux deux types d'usines et dont les démonstrations sont analogues à celle du § 4/ p. 65 . Alors deux corollaires se rapportant aux régimes permanents des concentrations des usines à coefficients constants en résultent.

THEOREME 1

Pour une usine irréductible en production $(S.I)_n$ admet à chaque instant t une seule solution et les composantes de cette solution sont comprises entre zéro et un.

Démonstration.

On procède comme au § 4/ en posant m=n ; le jacobien du système étant positif moyennant l'inégalité $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial d_j(t, N_j)}{\partial N_j} > 0$. Toutefois pour justifier que $N_1 = \ldots = N_n = 0$ est la seule solution qui correspond à $N_1^+ = \ldots = N_n^+ = 0$, on procède de même en additionnant les équations α pour lesquelles $N_\alpha > 0$, ce qui conduit à l'impossibilité :

$$\sum_{\alpha\in E} f_{\alpha\alpha}(t, N_\alpha) - \sum_{\alpha'\notin E-\alpha} f_{\alpha'\alpha}(t, N_\alpha) = 0 \qquad \text{pour} \qquad E \neq (1, \ldots, n)$$

en raison de l'irréductibilité, et pour E = (1, ..., n), puisque l'usine est en production (Critère de distinction).

Corollaire 1.

Pour une usine irréductible en production à fonctions constantes, le système différentiel :

$$
\begin{array}{l}
C_1 \dfrac{dN_1}{dt} + f_{1,1}(N_1) - \ldots - f_{1,n}(N_n) = [+ f_{1,1}(1) - \ldots - f_{1,n}(1)]\ N_1^+ \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_n \dfrac{dN_n}{dt} - f_{n,1}(N_1) - \ldots + f_{n,n}(N_n) = [- f_{n,1}(1) - \ldots + f_{n,n}(1)]\ N_n^+
\end{array}
$$

où $C_i \geq 0$ ($i=1, \ldots, n$), admet une et une seule solution constante. Les composantes N_i de cette solution $\bar{N}(N^+)$ sont comprises entre zéro et un.

THEOREME 2

Le système d'équations $(S.I)_n$ correspondant à une usine irréductible en reflux total, et complété par le bilan élémentaire :

$$C_1N_1 + \ldots + C_nN_n = (C_1 + \ldots + C_n)N^* \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{n} C_i > 0$$

admet une seule solution et les composantes de cette solution sont comprises entre zéro et un.

Démonstration.

En effet, les n équations $(S.I.)_n$ sont linéairement dépendantes, leur somme étant identiquement nulle. (Les seconds membres de ces équations sont nuls). On peut donc remplacer l'une quelconque d'elles par le bilan élémentaire $\sum_{i=1}^{n} C_iN_i = N^* \sum_{i=1}^{n} C_i$. Le Jacobien d'ordre n du système ainsi formé est positif d'après le théorème 1 du Ch. 3 § II. 2/p. 35 . Par conséquent, il n'y a qu'une solution $\vec{N}(N^*)$ dans un voisinage de $\vec{N}$. Or pour $N^* = 0$, ce système admet la solution manifeste $\vec{N} = 0$; c'est d'ailleurs la seule solution car, pour tout autre système de valeurs $N_1 \geq 0, \ldots, N_n \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^{n} N_i > 0$, on aurait en additionnant les équations α pour lesquelles $N_\alpha > 0$:

$$\sum_{\alpha\epsilon E}\left[f_{\alpha\alpha}(t,\ N_\alpha) - \sum_{\alpha'\epsilon E-\alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ N_\alpha)\right] = 0$$

ce qui est impossible pour $E \neq (1, \ldots, n)$ en raison de l'irréductibilité, et pour $E = (1, \ldots, n)$ car le bilan élémentaire ne serait pas vérifié. De même pour $N^* = 1$ le système admet la solution manifeste $N_1 = \ldots = N_n = 1$ car pour ces valeurs les premiers membres de $(S.I)_n$ s'identifient avec les seconds lesquels sont à présent identiquement nuls, et que le bilan élementaire est vérifié. C'est également la seule solution, car, pour tout autre système de valeurs $N_1 \leq 1, \ldots, N_n \leq 1$ avec $\sum_{i=1}^{n} N_n < n$, on aurait en additionnant les équations α pour lesquelles $N_\alpha < 1$:

$$\sum_{\alpha\epsilon E}\left[f_{\alpha\alpha}(t,\ N_\alpha) - \sum_{\alpha'\epsilon E-\alpha} f_{\alpha'\alpha}(t,\ N_\alpha)\right] = \sum_{\beta\notin E} f_{\alpha\beta}(t,\ 1)$$

ce qui est impossible pour $E \neq (1, \ldots, n)$ puisque le premier membre de cette identité est une expression toujours croissante de l'un au moins des N_α sinon le jacobien de $(S.I.)_n$ serait réductible, et pour $E = (1, \ldots, n)$ puisque le bilan élémentaire ne serait pas vérifié. D'autre part les composantes $N_1, \ldots, N_n$ sont des fonctions continues et strictement croissantes par rapport à N^* en raison du corollaire 1 du Ch. 2 § II. 2/p. 36 appliqué au système différentié du système formé par le bilan élémentaire et n-1 équations de $(S.I.)_n$. D'après ce qui précède, lorsque N^* varie uniformément de 0 à 1, les fonctions $N_i(N^*)$ qui vérifient ce système au cours de cette variation sont des fonctions continues et qui croissent au sens strict de 0 à 1. Ainsi, à la concentration moyenne N^* de l'usine correspond une solution unique de concentrations $N_1, \ldots, N_n$ comprises entre 0 et 1. C.q.f.d.

Corollaire 2.

Pour une usine irréductible en reflux total à fonctions constantes, le système différentiel :

$$C_1 \frac{dN_1}{dt} + f_{11}(N_1) - \ldots - f_{1n}(N_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n \frac{dN_n}{dt} - f_{n1}(N_1) - \ldots + f_{nn}(N_n) = 0$$

satisfaisant aux hypothèses du théorème précédent, et accompagné du bilan élémentaire :

$$\sum_{i=1}^{n} C_i N_i = N^* \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad \text{où} \qquad C_i \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} C_i > 0,$$

admet une seule solution constante. Les composantes de cette solution $\vec{N}(N^*)$ sont comprises entre 0 et 1.

8/ <u>Comportement asymptotique des concentrations des usines à fonctions indépendantes du temps.</u>

En général les problèmes relatifs au comportement asymptotique des solutions de systèmes différentiels liés à l'évolution des concentrations des usines sont difficiles lorsque ces systèmes sont à fonctions variables ; pour s'en rendre compte il suffit de se reporter au théorème 1. Ch. 3, § I. IV. V. 2/p. 41. Cependant les concentrations des usines à fonctions indépendantes du temps convergent asymptotiquement quelles que soient leurs valeurs initiales vers les composantes de la solution constante. Cette stabilité dans $\mathcal{C}$ est due au lemme qui va suivre et à la stabilité asymptotique à droite de la solution constante.

LEMME

Lorsqu'il existe entre deux solutions quelconques $\overrightarrow{u(t)}$, $\overrightarrow{x(t)}$ d'un système différentiel une distance décroissante au sens large, la stabilité asymptotique de l'une d'elles $\overrightarrow{x(t)}$ entraîne la convergence de toutes les autres $\overrightarrow{u(t)}$ vers $x(t)$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$.

<u>Démonstration.</u>

$\|\overrightarrow{u(t)}-\overrightarrow{x(t)}\|$ représentant la distance $\mathcal{D}(t)$ de deux solutions $\overrightarrow{u(t)}$, $\overrightarrow{x(t)}$ du système différentiel, par hypothèse $\mathcal{D}(t) = \|\overrightarrow{u(t)}-\overrightarrow{x(t)}\|$ est une fonction décroissante au sens large qui généralement varie de $\mathcal{D}(t_0)$ à k avec $0 \leqslant k \leqslant \mathcal{D}(t_0)$ lorsque t varie de t_0 à $+\infty$. Il suffit donc d'établir que $k = 0$; ou que $k > 0$ est contradictoire.

Pour $\varepsilon = \frac{k}{p}$, p étant un entier très grand, on peut prendre un vecteur initial $\overrightarrow{y(t_0)}$ dont les composantes $y_i(t_0)$ sont comprises entre $u_i(t_0)$ et $x_i(t_0)$ respectivement et de telle façon que :

$$\frac{k}{p+1} < \|\overrightarrow{y(t_0)} - \overrightarrow{x(t_0)}\| < \frac{k}{p}.$$

En raison de la stabilité asymptotique de $\overrightarrow{x(t)}$ on a donc $\|\overrightarrow{y(t)} - \overrightarrow{x(t)}\| \leqslant \varepsilon = \frac{k}{p}$ sur l'intervalle $t_0 < t < \infty$ et $\lim\limits_{t\to\infty} \|\overrightarrow{y(t)} - \overrightarrow{x(t)}\| = 0$.

De la façon même dont a été choisi le vecteur initial $\overrightarrow{y(t_0)}$ on a les inégalités :

$$\mathcal{D}(t_0) - \frac{k}{p} \leqslant \|\overrightarrow{u(t_0)} - \overrightarrow{y(t_0)}\| \leqslant \mathcal{D}(t_0) - \frac{k}{p+1}$$

la première résultant de l'inégalité triangulaire, la seconde de la linéarité de la distance.

D'autre part en faisant varier t de t_0 à $+\infty$, $\|\overrightarrow{u(t)} - \overrightarrow{y(t)}\|$ varie de $\|\overrightarrow{u(t_0)} - \overrightarrow{y(t_0)}\|$ à k puisque $\lim\limits_{t\to\infty} \overrightarrow{y(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \overrightarrow{x(t)}$. Mais en choisissant t suffisamment grand pour que $0 < \mathcal{D}(t_0) - k < \frac{k}{p+1}$ on obtiendrait $\|\overrightarrow{u(t_0)} - \overrightarrow{y(t_0)}\| < k$ et contrairement à ce qui est admis que la distance des deux solutions $\overrightarrow{u(t)}$, $\overrightarrow{y(t)}$ est croissante sur (t_0, ∞). On a donc $k = 0$. C.q.f.d.

$x_i(t_0) \qquad y_i(t_0) \qquad u_i(t_0)$

En séparant les deux types d'usines, on est conduit aux deux théorèmes suivants :

THEOREME 1

Le système différentiel des concentrations d'une usine irréductible en production à capacités et fonctions indépendantes du temps, admet des solutions qui convergent toutes asymptotiquement vers la solution permanente.

Démonstration.

En vertu du lemme précédent, il suffit d'établir que la solution constante et unique $(\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_n)$ du système différentiel :

$$C_i \frac{dN_i}{dt} + f_{ii}(N_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(N_j) = f_{ii}(1) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} f_{ij}(1) \quad N_i^* \qquad (i=1, \ldots, n)$$

est asymptotiquement stable à droite au sens de Lyapunov. Pour cela, posons :

$$N_i(t) = \bar{N}_i + z_i(t) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Il en résulte le système d'équations :

$$C_i \frac{dz_i}{dt} + f_{ii}(\bar{N}_i+z_i) - f_{ii}(\bar{N}_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} [f_{ij}(\bar{N}_j+z_j) - f_{ij}(\bar{N}_j)] = 0$$

Or, en raison de la dérivabilité des fonctions $f_{ij}(N_j)$ $(i, j=1, \ldots, n)$ on a :

$$f_{ij}(\bar{N}_j+z_j) - f_{ij}(\bar{N}_j) = z_j\left[\frac{df_{ij}(\bar{N}_j)}{d\bar{N}_j} + \eta_{ij}(z_j)\right],$$

avec :

$$\lim_{z_j\to 0} \eta_{ij}(z_j) = 0 \qquad (i, j=1, \ldots, n)$$

Par suite, en supposant tous les $C_i > 0$, on peut se ramener à un système équivalent à :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} + U\vec{z} + \eta(\vec{z})\vec{z} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\vec{z}\to 0} \|\eta(\vec{z})\| = 0$$

où la matrice constante U vérifie les conditions indiquées dans le théorème 1 au Ch. 3. § III.1/p. 36. Dès lors la démonstration s'achève comme dans la référence (10) p. 95 :

De :

$$\overrightarrow{z(t)} = Y(t)\overrightarrow{z(0)} - \int_0^t Y(t-\alpha)\,\eta[\overrightarrow{z(\alpha)}]\,\overrightarrow{z(\alpha)}\,d\alpha$$

puis, en tenant compte de l'inégalité formée à la fin de ce théorème 1 :

$$\|\overrightarrow{z(t)}\| \leqslant Ke^{-\mu t}\,\|\overrightarrow{z(0)}\| + K\int_0^t e^{-\mu(t-\alpha)}\,\|\eta[\overrightarrow{z(\alpha)}]\|\,\|\overrightarrow{z(\alpha)}\|\,d\alpha$$

et en choisissant $\|\overrightarrow{z(0)}\|<d$ pour que $\|\eta[\overrightarrow{z(\alpha)}]\| < c$ sur $0 \leqslant t < \bar{t}$ on aura dans l'intervalle $[0, \bar{t}]$:

$$\|\overrightarrow{z(t)}\|\,e^{\mu t} \leqslant K\|\overrightarrow{z(0)}\| + Kc\int_0^t \|\overrightarrow{z(\alpha)}\|\,e^{\mu\alpha}\,d\alpha$$

et d'après le lemme de Bellman [15] ou (10) p. 35 :

$$\|\overrightarrow{z(t)}\|\,e^{\mu t} \leqslant K\|\overrightarrow{z(0)}\|\,e^{Kct}$$

soit :

$$\|\overrightarrow{z(t)}\| < K\|\overrightarrow{z(0)}\|\,e^{-(\mu-Kc)t}$$

Dès lors la solution est prolongeable et sa norme tend vers zéro lorsque μ-Kc > 0. C.q.f.d.

THEOREME 2

Le système différentiel des concentrations d'une usine irréductible en reflux total à capacités et fonctions indépendantes du temps admet des solutions qui convergent toutes asymptotiquement vers la solution permanente.

Démonstration.

Il suffit d'établir que la solution constante est asymptotiquement stable à droite. Comme précédemment, en supposant tous les $C_i > 0$, le système différentiel des concentrations se ramène au système équivalent :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} + U\vec{z} + \eta(\vec{z})\vec{z} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\vec{z}\to 0} \|\eta(\vec{z})\| = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{s} z_i = 0$$

et où la matrice constante U vérifie les conditions admises dans le théorème 1 au Ch. 3. § III. 2 /p. 38, tandis que la somme des composantes de $\eta(\vec{z})\vec{z}$ est identiquement nulle. Dans ces conditions on a encore l'inégalité :

$$\|\overrightarrow{z(t)}\| < Ke^{-\mu t}\|\overrightarrow{z(0)}\| + K\int_0^t e^{-\mu(t-\alpha)}\|\eta[\overrightarrow{z(\alpha)}]\| \; \|\overrightarrow{z(\alpha)}\| \, d\alpha$$

qui entraîne la convergence de $\overrightarrow{z(t)}$ vers 0 lorsque $t\to+\infty$ dès que $\|\overrightarrow{z(0)}\|$ est suffisamment petit. C.q.f.d.

Remarque.

Dans les démonstrations des deux théorèmes précédents nous avons admis que tous les C_i étaient positifs ; mais ces théorèmes sont vrais lorsque certains des C_i sont nuls. Pour l'établir, nous devons montrer que les propriétés de la matrice jacobien du système mixte se transmettent à la matrice jacobien du système réduit.

A titre d'exemple, considérons le système mixte $(S.\ M.)_{3,5}$ à fonctions indépendantes du temps et douées de dérivées premières continues :

$$\begin{aligned}
C_1\frac{dN_1}{dt} + f_{11}(N_1) - f_{12}(N_2) - f_{13}(N_3) - f_{14}(N_4) - f_{15}(N_5) &= F_1^+N_1^+\\
C_2\frac{dN_2}{dt} - f_{21}(N_1) + f_{22}(N_2) - f_{23}(N_3) - f_{24}(N_4) - f_{25}(N_5) &= F_2^+N_2^+\\
C_3\frac{dN_3}{dt} - f_{31}(N_1) - f_{32}(N_2) + f_{33}(N_3) - f_{34}(N_4) - f_{35}(N_5) &= F_3^+N_3^+\\
- f_{41}(N_1) - f_{42}(N_2) - f_{43}(N_3) + f_{44}(N_4) - f_{45}(N_5) &= F_4^+N_4^+\\
- f_{51}(N_1) - f_{52}(N_2) - f_{53}(N_3) - f_{54}(N_4) + f_{55}(N_5) &= F_5^+N_5^+
\end{aligned}$$

On sait que l'on peut ramener $(S.M.)_{3,5}$ à un système différentiel $(S.D.)_3$:

$$\begin{aligned}
C_1\frac{dN_1}{dt} + \mathfrak{F}_1(N_1, N_2, N_3) &= 0\\
C_2\frac{dN_2}{dt} + \mathfrak{F}_2(N_1, N_2, N_3) &= 0\\
C_3\frac{dN_3}{dt} + \mathfrak{F}_3(N_1, N_2, N_3) &= 0
\end{aligned}$$

en éliminant les concentrations N_4, N_5 au moyen des deux dernières équations de $(S.M.)_{3,5}$, étant donné que le déterminant fonctionnel :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{44}}{\partial N_4} & -\dfrac{\partial f_{45}}{\partial N_5} \\ -\dfrac{\partial f_{54}}{\partial N_4} & \dfrac{\partial f_{55}}{\partial N_5} \end{vmatrix}$$

est positif en raison de l'irréductibilité de la matrice jacobien de $(S.M.)_{3,5}$ et du critère de régularité de la p. 46 .

Le jacobien de $(S.D.)_3$ ou jacobien réduit est identique à :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial N_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial N_2} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial N_3} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial N_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial N_2} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial N_3} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial N_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial N_2} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial N_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\dfrac{\partial}{\partial N_1}(f_{11}-f_{14}-f_{15}), & -\dfrac{\partial}{\partial N_2}(f_{12}+f_{14}+f_{15}), & -\dfrac{\partial}{\partial N_3}(f_{13}+f_{14}+f_{15}) \\ -\dfrac{\partial}{\partial N_1}(f_{21}+f_{24}+f_{25}), & +\dfrac{\partial}{\partial N_2}(f_{22}-f_{24}-f_{25}), & -\dfrac{\partial}{\partial N_3}(f_{23}+f_{24}+f_{25}) \\ -\dfrac{\partial}{\partial N_1}(f_{31}+f_{34}+f_{35}), & -\dfrac{\partial}{\partial N_2}(f_{32}+f_{34}+f_{35}), & +\dfrac{\partial}{\partial N_3}(f_{33}-f_{34}-f_{35}) \end{vmatrix}$$

et l'on vérifie ses propriétés :

1/ Les coefficients extérieurs à sa diagonale principale sont en valeur absolue plus grands ou égaux aux valeurs absolues des coefficients correspondants du tableau de mêmes dimensions placé à l'intersection des équations différentielles et des colonnes relatives (en N_1, N_2, N_3). Ils sont donc négatifs ou nuls.

2/ Les sommes des éléments de ses colonnes sont $\geqslant 0$: l'une d'elles au moins est positive s'il en existe une dans la matrice jacobien initiale ; elles sont nulles lorsque celles de la matrice jacobien initiale le sont aussi. Ceci résulte des observations suivantes :

a) Supposons $\dfrac{\partial d_4}{\partial N_4} + \dfrac{\partial d_5}{\partial N_5} > 0$, on aura pour sa première colonne :

$$\frac{\partial}{\partial N_1}(f_{14}+f_{24}+f_{34}) = \frac{\partial}{\partial N_4}(f_{14}+f_{24}+f_{34})\frac{\partial N_4}{\partial N_1} \leqslant \frac{\partial}{\partial N_4}(f_{44}-f_{54})\frac{\partial N_4}{\partial N_1} = \frac{\partial}{\partial N_1}(f_{44}-f_{54})$$

$$\frac{\partial}{\partial N_1}(f_{15}+f_{25}+f_{35}) = \frac{\partial}{\partial N_5}(f_{15}+f_{25}+f_{35})\frac{\partial N_5}{\partial N_1} \leqslant \frac{\partial}{\partial N_5}(f_{55}-f_{45})\frac{\partial N_5}{\partial N_1} = \frac{\partial}{\partial N_1}(f_{55}-f_{45})$$

avec le signe d'inégalité au moins une fois en raison de ce qui est admis ; par suite :

$$\frac{\partial}{\partial N_1}(f_{14}+f_{24}+f_{34}+f_{15}+f_{25}+f_{35}) < \frac{\partial}{\partial N_1}[(f_{44}-f_{45})+(f_{55}-f_{54})] = \frac{\partial f_{41}}{\partial N_1} + \frac{\partial f_{51}}{\partial N_1}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial N_1}(f_{11}-f_{21}-f_{31}-f_{14}-f_{24}-f_{34}-f_{15}-f_{25}-f_{35}) > \frac{\partial}{\partial N_1}(f_{11}-f_{21}-f_{31}-f_{41}-f_{51}) \geqslant 0.$$

Ainsi, les sommes des colonnes de la matrice jacobien réduite sont supérieures aux sommes correspondantes de la matrice jacobien initiale. Elles sont donc positives.

b) Supposons $\dfrac{\partial d_4}{\partial N_4} + \dfrac{\partial d_5}{\partial N_5} = 0$, on en déduit cette fois que les sommes des colonnes de la matrice jacobien réduite sont égales aux sommes correspondantes de la matrice jacobien initiale.

3/ Les coefficients de la diagonale principale sont positifs sinon ils seraient nuls d'après le 2/ et les éléments des colonnes correspondantes seraient nuls, mais alors cette matrice réduite serait réductible ce qui est impossible lorsque la matrice initiale est irréductible selon le 4/ suivant .

4/ La nullité d'un de ses termes en dehors de la diagonale principale implique dans la matrice jacobien initiale que le terme correspondant est nul et deux éventualités possibles : soit que les termes de la ligne correspondante, et situés en dehors de l'espace de la matrice réduite sont nuls ; soit que les termes de la colonne correspondante, et situés en dehors de l'espace de la matrice réduite sont nuls. - En effet, la relation $\frac{\partial}{\partial N_3}(f_{13}+f_{14}+f_{15}) = 0$ implique d'une part $\frac{\partial f_{13}}{\partial N_3} = 0$ et d'autre part :

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial N_4}\frac{\partial N_4}{\partial N_3} = 0, \qquad \frac{\partial f_{15}}{\partial N_5}\frac{\partial N_5}{\partial N_3} = 0 ;$$

mais le déterminant fonctionnel J n'étant pas nul, le système d'équations :

$$\frac{\partial f_{44}}{\partial N_4}\frac{\partial N_4}{\partial N_3} - \frac{\partial f_{45}}{\partial N_5}\frac{\partial N_5}{\partial N_3} = \frac{\partial f_{43}}{\partial N_3}$$

$$-\frac{\partial f_{54}}{\partial N_4}\frac{\partial N_4}{\partial N_3} + \frac{\partial f_{55}}{\partial N_5}\frac{\partial N_5}{\partial N_3} = \frac{\partial f_{53}}{\partial N_3}$$

vérifie le théorème 1 au Ch. 3. § II. 1/p. 33 et par suite admet : une solution de composantes simultanément nulles lorsque $\frac{\partial f_{43}}{\partial N_3} = \frac{\partial f_{53}}{\partial N_3} = 0$ et dans ces conditions la seconde éventualité est réalisée ; ou une solution de composantes positives lorsque $\frac{\partial}{\partial N_3}(f_{43}+f_{53}) > 0$, alors on a $\frac{\partial f_{14}}{\partial N_4} = \frac{\partial f_{15}}{\partial N_5} = 0$ et la première éventualité est réalisée. - Il en résulte que la matrice jacobien initiale est réductible lorsque la matrice jacobien réduite est réductible ; la réciproque n'étant pas vraie lorsque l'intersection des termes nuls de la matrice jacobien initiale avec l'espace de la matrice jacobien réduite est vide. Il en résulte donc que la matrice jacobien réduite est irréductible lorsque la matrice jacobien initiale est irréductible.

On sait aussi que les fonctions $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, de $(S.D.)_3$ admettent des dérivées partielles premières continues par rapport à N_1, N_2, N_3, et qu'elles satisfont aux hypothèses $(H)_1$ et $(H)_2$.

Lorsque l'usine est en production, $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5)$ désignant la solution constante et unique de $(S.I.)_5$, on a identiquement :

$$\mathcal{F}_1(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3) = 0 ; \mathcal{F}_2(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3) = 0 ; \mathcal{F}_3(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3) = 0$$

et ces trois dernières équations n'admettent que la seule solution $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)$ puisque leur jacobien est positif d'après le théorème de Taussky. Le théorème 1 au Ch. 3. § III. 1/p. 36 s'applique au système différentiel linéaire dont la matrice des coefficients est celle du jacobien réduit pour les valeurs particulières $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)$ des concentrations. Par conséquent, étant donné que les $\mathcal{F}_j(N_1, N_2, N_3)$ (j=1, 2, 3) admettent des dérivées partielles premières continues, elles sont différentiables d'où en posant $z_j = N_j - \bar{N}_j$ (j=1, 2, 3) on a :

$$\mathcal{F}_j(N_1, N_2, N_3) - \mathcal{F}_j(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial \bar{N}_1} + \eta_{j1}\right)z_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial \bar{N}_2} + \eta_{j2}\right)z_2$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial \bar{N}_3} + \eta_{j3}\right)z_3 \text{ avec } \lim_{\vec{z}\to 0} \eta_{jj'}(\vec{z}) = 0 \ (j, j'=1, 2, 3)$$

et les trois premières équations différentielles de $(S.M.)_{3,5}$ se ramènent au système du type :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} + U\vec{z} + \eta(\vec{z})\vec{z} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\vec{z}\to 0} \|\eta(\vec{z})\| = 0$$

pour lequel on a établi que la solution $\vec{z} = 0$ est asymptotiquement stable à droite au sens de Lyapunov.

Pour une usine en reflux total on procéderait de même en adjoignant au système différentiel $(S.D.)_3$:

$$C_j \frac{dN_j}{dt} + \mathcal{F}_j(N_1, N_2, N_3) = 0 \qquad (j=1, 2, 3)$$

le bilan élémentaire :

$$C_1N_1 + C_2N_2 + C_3N_3 = (C_1 + C_2 + C_3)\, N^+$$

étant donné que les fonctions $\mathcal{F}_j(N_1, N_2, N_3)$ $(j=1, 2, 3)$ sont manifestement liées par la rélation :

$$\mathcal{F}_1(N_1, N_2, N_3) + \mathcal{F}_2(N_1, N_2, N_3) + \mathcal{F}_3(N_1, N_2, N_3) = 0$$

D'autre part, ayant remarqué que le jacobien de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ est du type indiqué dans le théorème 1 au Ch. 3. § III. 2/p. 38, le système différentiel considéré se ramènera à un système de la forme

$$\frac{d\vec{z}}{dt} + U\vec{z} + \eta(\vec{z})\vec{z} = 0$$

avec :

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\vec{z}\to 0} \|\eta(\vec{z})\| = 0$$

en raison de la différentiabilité des fonctions $\mathcal{F}_j(N_1, N_2, N_3)$ $(j=1, 2, 3)$ et pour lequel on a établi que $\vec{z} = 0$ est une solution asymptotiquement stable à droite au sens de Lyapunov.

IV - PROPRIETES NOTOIRES DES SOLUTIONS DES SYSTEMES DIFFERENTIELS ASSOCIES AUX CONCENTRATIONS D'UN MELANGE QUELCONQUE EN TRAITEMENT PAR UNE USINE DE SEPARATION -

Nous nous proposons d'établir que les composantes $N_i^k(t)$ $(i=1, \dots, n\ ;\ k=1, \dots, s)$ des solutions des systèmes différentiels que nous avons associés à une usine de séparation pour prévoir ses concentrations au cours du temps, varient sur 0, 1 et qu'elles satisfont aux relations $\sum_{k=1}^{s} N_i^k(t) = 1$ pour $t > 0$ lorsqu'il en est de même à l'instant initial $t = 0$.

Précisément, on considère le système mixte d'équations aux flux principaux :

$$\frac{dC_i}{dt} + [(1-\mu'_{ii})\,\theta_i + (1-\mu''_{ii})\,(1-\theta_i)]\, L_i - \sum_{j\in P-i} [\mu'_{ji}\,\theta_j + \mu''_{ji}\,(1-\theta_j)]\, L_j = F_i^+ > 0 \qquad (1)_i$$

et les s-1 système différentiels mixtes k aux concentrations $N_i^k(t)$:

$$\frac{dC_iN_i^k}{dt} + [(1-\mu'_{ii})\,\theta_i\, N_i'^k + (1-\mu''_{ii})\,(1-\theta_i)\, N_i''^k]\, L_i - \sum_{j\in P-i} [\mu'_{ji}\,\theta_j\, N_j'^k + \mu''_{ji}\,(1-\theta_j)\, N_j''^k]\, L_j = F_i^+ N_i^{+k} \qquad (2)_i^k$$

où les m premières capacités $C_p(t)$ $(p=1, \dots, m)$ sont positives presque partout et les n-m dernières capacités $C_q(q=m+1, \dots, n)$ sont identiquement nulles. Dans ces systèmes, les $N_i'^k$ et $N_i''^k$ sont exprimés en fonction de $N_i^1, \dots, N_i^{s-1}$ physiquement sur un pavé $[0, 1]^{s-1}$ où elles satisfont aux implications de la page 27. Cependant on convient de les prolonger à l'extérieur de ce pavé de façon que quel que soit $\mathcal{S} \subset (1, \dots, s-1)$:

$$\begin{cases} (N_p^k < 0) \Longrightarrow (N_p'^k \leq 0 \quad \text{et} \quad N_p''^k \leq 0) & (p=1, \dots, m) \\ (N_q^k < 0) \Longrightarrow (N_q'^k < 0 \quad \text{et} \quad N_q''^k < 0) & (q=m+1, \dots, n) \end{cases} \qquad (3)^k$$

$$\begin{cases} (1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_p^k < 0) \longrightarrow (1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_p'^k < 0 \quad \text{et} \quad 1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_p''^k < 0) \\ (1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_q^k < 0) \longrightarrow (1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_q'^k < 0 \quad \text{et} \quad 1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_q''^k < 0) \end{cases} \qquad (4)^k$$

Dans ces conditions, on a les résultats suivants :

1/ Toutes les concentrations $N_i^k(t)$ ($i=1, \ldots, n$; $k=1, \ldots, s-1$) sont positives au sens large :

En effet, l'écart orienté $[\vec{0}, \overrightarrow{N^k(t)}]$:

$$[\vec{0}, \overrightarrow{N^k(t)}] = - \sum_{\alpha\in\{\vec{0}, \overrightarrow{N^k(t)}\}} C_\alpha(t) \cdot N_\alpha^k(t)$$

supposé absolument continu, admet presque partout une dérivée :

$$\frac{d}{dt}[\vec{0}, \overrightarrow{N^k(t)}] = \sum_{\alpha\in\varepsilon}\left[(1 - \sum_{\alpha'\in\varepsilon}\mu'_{\alpha\alpha'})\,\theta_\alpha\, N_\alpha'^k + (1 - \sum_{\alpha'\in\varepsilon}\mu''_{\alpha\alpha'})\,(1-\theta_\alpha)\, N_\alpha''^k\right]L_\alpha$$

$$- \sum_{\alpha\in\varepsilon}\left\{F_\alpha\, N_\alpha^{*k} + \sum_{\beta\in P-\varepsilon}\left[\mu'_{\beta\alpha}\,\theta_\beta\, N_\beta'^k + \mu''_{\beta\alpha}\,(1-\theta_\beta)\, N_\beta''^k\right]L_\beta\right\}$$

qui est négative au sens large. Il en résulte en suivant le raisonnement de la page 58 que les composantes $N_p^k(t)$ de la solution pour lesquelles $C_p(t) > 0$ sont positives au sens large.

Dès lors les autres composantes de la solution sont positives au sens large. En effet, en désignant par $Q \subset (m+1, \ldots, n)$ l'ensemble des indices q pour lesquels $N_q^k(t) < 0$, on aurait la relation, en additionnant les équations ordinaires correspondantes :

$$\sum_{q\in Q}\left[(1 - \sum_{q'\in Q}\mu'_{qq'})\,\theta_q\, N_q'^k + (1 - \sum_{q'\in Q}\mu''_{qq'})\,(1-\theta_q)\, N_q''^k\right]L_q =$$

$$\sum_{q\in Q}\left\{F_q\, N_q^{*k} + \sum_{\beta\in P-Q}\left[\mu'_{\beta q}\,\theta_\beta\, N_\beta'^k + \mu''_{\beta q}\,(1-\theta_\beta)\, N_\beta''^k\right]L_\beta\right\}$$

Elle donne une contradiction puisque son deuxième membre est > 0 tandis que son premier membre serait < 0 du moins pour une usine irréductible lorsque $Q \neq (1, \ldots, n)$. Cette contradiction subsiste avec $Q = (1, \ldots, n)$ pour une usine en production puisque le premier membre serait négatif ; elle disparaît pour une usine en reflux total dont la solution du système d'équations correspondant est indéterminée puisque l'usine serait dépourvue de capacités ! C.q.f.d.

2/ Toutes les expressions $1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_i^k(t)$ ($i=1, \ldots, n$) avec $\mathcal{S} \subset (1, \ldots, s-1)$, sont positives au sens large :

En effet, en retranchant la somme $\sum_{k\in\mathcal{S}}$ des équations $(2)_i^k$ de l'équation $(1)_i$, on forme l'équation i d'un système analogue aux s-1 systèmes k :

$$\frac{d}{dt}\left[C_i\,(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_i^k)\right] + \left[(1-\mu'_{ii})\,\theta_i\,(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_i'^k) + (1-\mu''_{ii})\,(1-\theta_i)\,(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_i''^k)\right]L_i$$

$$- \sum_{j\in P-i}\left[\mu'_{ji}\,\theta_j\,(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_j'^k) + \mu''_{ji}\,(1-\theta_j)\,(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_j''^k)\right]L_j = F_i^*\,(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_i^{*k}) \qquad (3)_i$$

et avec lequel on établit comme précédemment, en s'appuyant sur les relations $(4)^k$ que $1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N_i^k(t)$ est positif au sens large ($i=1, \ldots, n$) pour $t > 0$. C.q.f.d.

En particulier, pour $\mathcal{S} = (1, \ldots, s-1)$ les équations $(3)_i$ donnent le système différentiel des concentrations de l'élément s, en posant :

$$1 - \sum_{k=1}^{s-1} N_i^k = N_i^s, \quad 1 - \sum_{k=1}^{s-1} N_i'^k = N_i'^s, \quad 1 - \sum_{k=1}^{s-1} N_i''^k = N_i''^s$$

Il en résulte alors immédiatement, pour $t > 0$, les relations :

$$\sum_{k=1}^{s} N_i^k(t) = 1, \quad \sum_{k=1}^{s} N_i'^k(t) = 1, \quad \sum_{k=1}^{s} N_i''^k(t) = 1 \qquad \text{C. q. f. d.}$$

APPENDICE

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES USINES EN CASCADES

Aux usines de séparation construites en cascades, se rattachent les notions de transports élémentaires φ^k des éléments e^k composant le mélange traité, et de transport total $\Phi = \sum_{k=1}^{s} \varphi^k$ qui permettent de substituer au système différentiel des flux une équation aux dérivées partielles et au système différentiel des concentrations de chaque élément un système de deux équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites lorsque les flux et les concentrations varient peu d'un étage à l'autre :

1/ Pour un mélange binaire les écarts orientés et la distance de deux solutions quelconques sont des fonctions non croissantes du temps, ce qui implique un théorème d'unicité à droite des solutions.

2/ Pour un mélange quelconque les solutions représentatives des concentrations demeurent sur $[0, 1]$ et satisfont aux relations $\sum_{k=1}^{s} N_i^k(t) = 1$ pour $t > 0$ lorsqu'il en est de même à l'instant initial $t = 0$.

I - APPROXIMATION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'UNE CASCADE PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET DES CONDITIONS AUX LIMITES -

Pour des raisons de simplicité les usines de séparation sont agencées en cascades. Une cascade constitue une sorte de chaîne où il apparait des étages de même structure que l'on peut numéroter par un entier n variant de 1 à σ. Ces étages sont reliés aux voisins par plusieurs canalisations suivant le même processus. Celles-ci transportent les flux de liaison que nous classerons pour donner une nouvelle forme aux équations différentielles des flux et des concentrations de ces cascades dans l'usine.

Par suite les équations différentielles des concentrations d'un même élément composant un mélange en séparation dans une cascade se ressemblent ; précisément les équations relatives aux extrémités de la cascade diffèrent et correspondront aux conditions aux limites tandis que les "équations intermédiaires" comportent le même nombre de termes lesquels sont des fonctions du rang d'étage, et donneront naissance aux équations aux dérivées partielles.

1/ Décomposition des équations différentielles d'une cascade -

Les flux de liaison d'une cascade forment deux classes : la classe des flux ascendants $K_{i,n}$ $(i=1, \ldots, g)$ de concentrations $U_{i,n}^k$, par rapport à e^k, passant de l'étage n à l'étage n+i ; et la classe des flux descendants $L_{j,n}$ $(j=1, \ldots, h)$, de concentrations $V_{j,n}^k$, passant de l'étage n à l'étage n-j. Evidemment, à l'intérieur même de chaque étage, il peut exister des flux de circulation interne en boucles $J_{l,n}$ $(l=1, \ldots, e)$. On se rend compte aisément que les deux premières classes ne sont jamais vides sinon, en régime permanent, il ne pourrait y avoir progression des concentrations le long de la cascade. Par suite on définit :

Le flux global ascendant :

$$K_n = \sum_{p=1}^{g} \sum_{i=p}^{g} K_{i,n+1-p}$$

de concentration moyenne :

$$U_n^k = \frac{1}{K_n} \sum_{p=1}^{g} \sum_{i=p}^{g} K_{i,n+1-p} \cdot U_{i,n+1-p}^k \ ;$$

le flux global descendant :

$$L_n = \sum_{q=1}^{h} \sum_{j=q}^{h} L_{j,n+q}$$

de concentration moyenne :

$$V_n^k = \frac{1}{L_n} \sum_{q=1}^{h} \sum_{j=q}^{h} L_{j,n+q} \cdot V_{j\ n+q}^k$$

Les équations de la cascade se condensent alors en introduisant les notions de transports :

Le transport élémentaire φ_n^k est le flux molaire d'un élément passant de l'étage n à l'étage n+1 à travers une section fictive intermédiaire à ces deux étages.

Le transport total Φ est la somme des transports élémentaires φ_n^k relatifs au mélange.

On a donc :

$$\varphi_n^k = K_n U_n^k - L_n V_n^k = \sum_{p=1}^{g} \sum_{i=p}^{g} K_{i,n+1-p}\ U_{i,n+1-p}^k - \sum_{q=1}^{h} \sum_{j=q}^{h} L_{j,n+q}\ E_{j,n+q}^k$$

$$\Phi_n = K_n - L_n = \sum_{p=1}^{g} \sum_{i=p}^{g} K_{i,n+1-p} - \sum_{q=1}^{h} \sum_{j=q}^{h} L_{j,n+q}$$

Ainsi, les équations différentielles de la cascade deviennent équivalentes aux équations :

$$\frac{dC_n}{dt} = \Phi_{n-1} - \Phi_n \tag{1}$$

et :

$$\frac{dC_n N_n^k}{dt} = \varphi_{n-1}^k - \varphi_n^k \tag{2^k}$$

dans lesquelles C_n représente la capacité globale de l'étage n et où les transports φ_n^k et Φ_n se déduisent aisément du schéma de la cascade en fonction des flux, des coefficients de partage, des concentrations et des lois de séparation. Dès lors on vérifiera l'équivalence des équations générales avec cette nouvelle forme pour les cascades.

2/ Equations aux dérivées partielles des concentrations d'un mélange en séparation dans une cascade.

Lorsque la séparation par étage est faible, on peut faire une théorie valable pour toutes les cascades au moyen d'hypothèses qui en définissent et limitent le champ de validité. Ces hypothèses sont les suivantes :

1/ La séparation de chaque étage est infiniment petite autrement dit, on suppose que toutes les différences :

$$N'^k - N^k = G^k(N^1, \ldots, N^{s-1}) \qquad (k=1, \ldots, s-1) \tag{1^k}$$

sont des fonctions infiniment petites du premier ordre qui seront soumises aux conditions :

$$N^k \leqslant 0 \longrightarrow G^k = 0 \qquad (k=1, \ldots, s-1) \tag{2^k}$$

$$1 - \sum_{k \in \mathcal{S}} N^k \leqslant 0 \longrightarrow \sum_{k \in \mathcal{S}} G^k = 0 \qquad \text{quel que soit} \quad \mathcal{S} \subset (1, \ldots, (s-1) \tag{3^k}$$

2/ Il existe une régularité dans la variation des flux d'étages :

$$\frac{K_{i,n+1}}{K_{i,n}} - 1, \quad \frac{L_{j,n+1}}{L_{j,n}} - 1, \quad \frac{J_{l,n+1}}{J_{l,n}} - 1$$

sont aussi des infiniment petits du premier ordre.

3/ Φ_n/L_n est également un infiniment petit du premier ordre.

4/ En régime permanent, les transports Φ et φ sont appropriés aux effets cherchés.

Les flux et les concentrations variant peu d'un étage à l'autre, on va donc pouvoir substituer aux "équations intermédiaires" d'une cascade un système d'équations aux dérivées partielles dont les coefficients dépendent de sa structure et qui permettra d'atteindre approximativement les concentrations du mélange à des infiniment petits près du second ordre.

Cette substitution a pour origine de faire correspondre à toute fonction quelconque $f(t, n)$ définie sur l'ensemble des entiers n, une fonction $f^{*}(t, x)$ définie sur un intervalle. Dans la correspondance établie, on n'aura pas nécessairement $f(t, n) = f^{*}(t, n)$ mais on pourra espérer que $|f(t, n) - f^{*}(t, n)|$ soit assez petit pour que ce nouveau point de vue ait son intérêt.

Le passage des équations différentielles générales au système d'équations aux dérivées partielles s'effectue en changeant n en x et en substituant chaque fonction $f(t, n+j)$ de l'équation de rang n par un développement limité de Taylor : $f^{*}(t, x) + j\dfrac{\partial f^{*}}{\partial x} + \dfrac{j^2}{2}\dfrac{\partial^2 f^{*}}{\partial x^2}$, ici limité à trois termes à titre d'exemple.

Dans la mesure où la fonction $f(t, n+j)$ varie lentement avec n, la série précédente doit converger assez vite et le nombre de termes qui la composent n'est pas trop grand pour représenter correctement $f^{*}(t, x+j)$. Toutefois pour ne pas avoir un système trop compliqué à résoudre, on va réduire les termes de ces séries au minimum en interprétant les équations. De cette façon on a déjà les équations :

$$\frac{\partial C^{*}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^{*}}{\partial x} = 0 \qquad (1)^{*}$$

et :

$$\frac{\partial\, C^{*} N^{*k}}{\partial t} + \frac{\partial\, \varphi^{*k}}{\partial x} = 0 \qquad (2)^{*k}$$

En effet, en posant :

$$C_n(t) = \int_{n-1}^{n} C^{*}(t, x)\, dx$$

l'équation $(1)^{*}$ intégrée de n-1 à n redonne exactement l'équation (1) du § 1/. De même l'équation :

$$\frac{\partial\, C^{*}(t, x) N^{*k}(t, n)}{\partial t} + \frac{\partial\, \varphi^{*k}(t, x)}{\partial x} = 0$$

intégrée de n-1 à n, redonne exactement l'équation $(2)^{k}$ du § 1/ ; ce qui justifie l'équation $(2)^{*k}$, étant donné qu'elle coïncide avec cette dernière pour x = n.

Au passage on notera que $C^{*}(t, x)$ est une densité de capacité.

Par ailleurs on tire une troisième relation qui relie φ^{*k} au transport total Φ^{*} et à la concentration $N^{*k}(t, x)$ de la façon suivante :

Des définitions des transports, on déduit les relations :

$$\varphi_n^k - U_n^k \Phi_n = L_n(U_n^k - V_n^k) \qquad \text{et} \qquad \varphi_n^k - V_n^k \Phi_n = K_n(U_n^k - V_n^k)$$

La différence des concentrations $U_n^k - V_n^k$ étant vraisemblablement petite on peut prendre $N^{*k}(t, x)$ entre U_n^k et V_n^k ; par exemple :

$$N^{*k}(t, n) = \frac{K_n U_n^k + L_n V_n^k}{K_n + L_n}$$

donne :

$$\varphi_n^k - N^{*k}\Phi_n = \frac{2K_n L_n}{K_n + L_n} (U_n^k - V_n^k)$$

Alors il reste à interpréter la différence $U_n^k - V_n^k$ en fonction de N^{*k} pour atteindre la relation cherchée. A cette fin, nous remarquerons que :

1/ $\varphi^{*k}(x) - N^{*k}(x)\Phi^*(x)$, ou simplement $\varphi - N\Phi$ pour abréger les notations, est une fonction continue de x sauf au plus aux abscisses des points d'alimentation de la cascade. En effet, soit $\Phi^+(x)$ le flux d'alimentation et $N^+(x)$ sa concentration qui peut être différente de la concentration $N(x)$ de la cascade au point x. On a donc :

$$\Phi(x+0) = \Phi(x-0) + \Phi^+(x)$$
$$\varphi(x+0) = \varphi(x-0) + \Phi^+(x)N^+(x)$$
$$N(x+0) = N(x-0) = N(x)$$

d'où :

$$\varphi(x+0) - N(x)\Phi(x+0) = \varphi(x-0) - N(x)\Phi(x-0) + \Phi^+(x)\,[\,N^+(x) - N(x)]$$

Cette discontinuité disparait lorsque $N^+(x) = N(x)$. Il en résulte qu'en un point de soutirage $\varphi - N\Phi$ est continu car les relations ci-dessus sont conservées en changeant $\Phi^+(x)$ en $-\Phi^-(x)$ ou $\Phi^-(x)$ désigne un flux de soutirage.

2/ $\varphi - N\Phi$ est nul aux deux extrémités de l'usine.

3/ Dans une usine de cascades en régime permanent où G^k est positif, en général dN^k/dx est positif (tant pour les cascades d'enrichissement $\Phi > 0$ que pour les cascades d'appauvrissement $\Phi < 0$) du moins sur les deux intervalles limités par une extrémité de l'usine et l'alimentation qui en est la moins éloignée. Lorsque sur l'un de ces deux intervalles Φ est positif, $\varphi - N\Phi$ est une fonction décroissante de x et par suite $\varphi - N\Phi > 0$ puisqu'elle est nulle pour $\overline{\lim}$ x. De même lorsque sur l'un de ces deux intervalles Φ est négatif, $\varphi - N\Phi$ est une fonction croissante de x et par suite $\varphi - N\Phi > 0$ puisqu'elle est nulle pour $\underline{\lim}$ x. Il en est donc de même de $U-V > 0$.

Ceci montre que généralement dans une usine en cascade où les alimentations sont placées convenablement suivant les valeurs progressives de leurs concentrations, dN^k/dx et $U^k(x) - V^k(x)$ sont du signe de G^k.

Or, cette différence $U^k(x) - V^k(x)$ peut être considérée comme l'effet de deux causes antagonistes :

L'une est provoquée par le processus de séparation et se manifeste sur $U^k - V^k$ par l'action $p(t, x)G^k$ où la fonction $G^k = N'^k - N^k$;

L'autre est l'inclinaison du profil des concentrations qui interviennent sur la détermination des deux concentrations moyennes $U^k(x)$ et $V^k(x)$; celui-ci réduisant globalement $U^k(x) - V^k(x)$ de $q(t, x) \frac{\partial N^{*k}}{\partial x}$.

En définitive, on a :

$$U^k(t, x) - V^k(t, x) = p(t, x)G^k - q(t, x) \frac{\partial N^{*k}}{\partial x}$$

où $p(t, x)$ et $q(t, x)$ sont deux <u>coefficients positifs</u> dépendant de la structure de l'étage. Cette relation montre aussi que $\partial N^k/\partial x$ est un infiniment petit du premier ordre puisque $U^k - V^k$ est généralement du signe de G^k ; par suite $U^k - V^k$ est généralement un infiniment petit du premier ordre.

Ainsi, en négligeant dans la relation :

$$\varphi_n^k - N_n^{*k}\Phi_n = \frac{2K_nL_n}{K_n+L_n}(U_n^k - V_n^k)$$

les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on obtient immédiatement :

$$\frac{\varphi^{*k}(t,\ x) - N^{*k}(t,\ x)\ \Phi^*(t,\ x)}{L^*(t,\ x)} = p^*(t,\ x)G^k - q^*(t,\ x)\frac{\partial N^{*k}}{\partial x} \qquad (3)^{*k}$$

Les équations $(1)^*$, $(2)^{*k}$, $(3)^{*k}$ constituent les équations fondamentales de la séparation des isotopes. (Voir (1), p. 28).

II - PROPRIETES GENERALES DES SOLUTIONS DU SYSTEME D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES D'UNE USINE EN CASCADE.

En se limitant ici au cas d'une usine de cascades reliées bout à bout (et ne formant qu'un seul chemin) on est amené à faire l'étude des solutions du système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial C(t,\ x)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,\ x)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial CN^k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k(t,\ x)}{\partial x} = 0 \qquad (2)^k$$

$$\frac{1}{L(t,\ x)}[\varphi^k(t,\ x) - N^k(t,\ x)\Phi(t,\ x)] = p(t,\ x)G^k - q(t,\ x)\frac{\partial N^k}{\partial x} \qquad (3)^k$$

et de conditions aux limites, en un ensemble fini de points, exprimant les sauts $\delta f(x) = f(x+0) - f(x-0)$ des transports : d'une part aux points d'entrée e ou d'alimentation :

$$\delta\Phi(t,\ e) = F^+(t,\ e) > 0,\quad \delta\varphi^k(t,\ e) = F^+(t,\ e)\ N^{+k}(t,\ e) \geq 0, \qquad (4)$$

et d'autre part aux points de sortie s de soutirage :

$$\delta\Phi(t,\ s) = -F^-(t,\ s) < 0,\quad \delta\varphi^k(t,\ s) = -F^-(t,\ s)\ N^k(t,\ s) \qquad (5)$$

Si l'extrémité d'une usine est branchée sur un réservoir infini, les profils des concentrations admettent en cette extrémité des valeurs communes égales aux concentrations du réservoir. Par suite cette extrémité est toujours un point commun à deux profils quelconques de l'usine et qui sont relatifs au même élément e^k. (6)

Nous allons montrer que les solutions de ce système d'équations aux dérivées partielles avec ses conditions aux limites ont les mêmes propriétés que celles des systèmes différentiels dont nous sommes partis. Pour cela, nous nous inspirerons des méthodes du chapitre 4.

1/ Terminologie.

A deux fonctions U(t, x) et X(t, x) on associe deux écarts orientés et une distance de la manière suivante :

A chaque instant t on effectue une partition de l'intervalle de variation $[0,\ \sigma]$ de x en deux ensembles $E\{U(t,\ x),\ X(t,\ x)\}$ et $\complement E\{U(t,\ x),\ X(t,\ x)\}$ tels que :

$$\forall\ \alpha \in \quad E\{U(t,\ x),\ X(t,\ x)\} \Longleftrightarrow U(t,\ \alpha) > X(t,\ \alpha)$$
$$\forall\ \beta \in \quad \complement E\{U(t,\ x),\ X(t,\ x)\} \Longleftrightarrow U(t,\ \beta) \leq X(t,\ \beta)$$

et on prend pour écarts orientés de U(t, x) et X(t, x) les fonctions :

$$[U(t,\ x),\ X(t,\ x)] = \int_{\alpha\in\{u,x\}} C(t,\ \alpha)\ [U(t,\ \alpha) - X(t,\ \alpha)]\ d\alpha$$
$$[X(t,\ x),\ U(t,\ x)] = \int_{\beta\in\complement\{u,x\}} C(t,\ \beta)\ [X(t,\ \beta) - U(t,\ \beta)]\ d\beta$$

et pour distance $\mathcal{D}[U(t, x), X(t, x)]$ de $U(t, x)$ à $X(t, x)$ la somme de leurs deux écarts orientés, soit :

$$\mathcal{D}[U(t, x), X(t, x)] = [X(t, x), U(t, x)] + [U(t, x), X(t, x)]$$

Désormais, nous désignerons plus précisément par $\varphi_x(t, x)$ le transport élémentaire correspondant à un profil des concentrations $X(t, x)$.

2/ Lemmes sur les solutions $X(t, x)$ du système d'équations aux dérivées partielles relatif à un mélange binaire.

LEMME 1

En un point commun $(\bar{t}, \bar{x})$ à deux profils de concentrations $U(t, x)$, $X(t, x)$ de deux usines identiques en mélange binaire où l'on a par conséquent $U(\bar{t}, \bar{x}) = X(\bar{t}, \bar{x})$, on a aussi en ce même point et à ce même instant :

$$\frac{1}{L(\bar{t}, \bar{x})} [\varphi_u(\bar{t}, \bar{x}) - \varphi_x(\bar{t}, \bar{x})] = -q(\bar{t}, \bar{x}) \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}} .$$

Démonstration.

Cette relation découle manifestement de l'équation (1).

LEMME 2

Etant donné une fonction $f(t, x)$ admettant une dérivée partielle $\partial f/\partial t$, les fonctions $f(t, x)$ et $\partial f/\partial t$ étant continues par rapport à l'ensemble des variables t, x ; et deux fonctions $a(t)$, $b(t)$ dérivables ($|a'(t)| \neq \infty$ et $|b'(t)| \neq \infty$) on a la relation (Valiron - Théorie des fonctions p. 147).

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x)\, dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)\, dx + b'(t)\, f(t, b) - a'(t)\, f(t, a)$$

Si en outre la fonction $f(t, x)$ est nulle aux extrémités de l'intervalle $[a(t), b(t)]$ on a simplement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x)\, dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)\, dx \text{ pour } f(t, a) = f(t, b) = 0 \text{ et } \begin{cases} |a'(t)| \neq \infty \\ |b'(t)| \neq \infty \end{cases}$$

3/ Propriétés déduites de la comparaison de deux solutions -

Considérons deux solutions $U(t, x)$ et $X(t, x)$ du système d'équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites relatifs à un mélange binaire. Bien entendu on suppose que ces solutions sont continues par rapport à l'ensemble des variables (t, x) ainsi que leurs dérivées partielles premières par rapport à t et à x, ces dernières pouvant être discontinues sur un ensemble fini de valeurs de x. Dans ces conditions on se propose d'établir le théorème suivant :

THEOREME 1

Les écarts orientés et la distance de deux solutions $U(t, x)$ et $X(t, x)$ du système d'équations aux dérivées partielles (1), (2), (3) et de conditions aux limites (4), (5), (6) relatifs à un mélange binaire sont des fonctions de t décroissantes au sens large.

Démonstrations.

L'intervalle $[0, \sigma]$ se partage en général en intervalles partiels $]a_i(t), b_i(t)[$ dont les extrémités $a_i(t)$ et $b_i(t)$ sont les points communs aux deux solutions $U(t, x)$ et $X(t, x)$, et sur lesquels la différence $U(t, x) - X(t, x)$ est de même signe. En général les extrémités $a_i(t)$ et $b_i(t)$ de ces intervalles sont animées à l'instant t de vitesses finies ; du moins nous supposerons qu'il en est ainsi en écartant le cas exceptionnel d'extrémités pourvues de vitesses infinies à l'instant t.

Nous allons établir que sur chacun de ces intervalles, l'écart orienté de ces deux fonctions admet une dérivée par rapport au temps qui est négative ou nulle.

En effet, sur $]a_i(t), b_i(t)[$ on a par exemple $U(t, x) > X(t, x)$ et :

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(t, x), X(t, x)]_{a_i(t)}^{b_i(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{a_i(t)}^{b_i(t)} C(t, x)\,[U(t, x) - X(t, x)]\,dx$$

mais d'après les hypothèses faites et définitions posées, on a dans tous les cas :

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(t, x), X(t, x)]_{a_i(t)}^{b_i(t)} = \int_{a_i(t)}^{b_i(t)} \frac{\partial}{\partial t}\{C(t, x)\,[U(t, x) - X(t, x)]\}\,dx$$

que les extrémités d'intégration $a_i(t)$ et $b_i(t)$ soient fixes ou mobiles ; dans ce dernier cas cette relation provient du lemme 2 dont les conditions de validité sont remplies. Il en est toujours ainsi lorsque les fonctions $U(t, x)$ et $X(t, x)$ n'ont pas de point de contact. En effet, en différentiant la relation $U[t, a_i(t)] = X[t, a_i(t)]$ on déduit :

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t}[U(t, a_i) - X(t, a_i)]}{\frac{\partial}{\partial a_i}[U(t, a_i) - X(t, a_i)]}$$

qui est fini pour :

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} \neq \frac{\partial X}{\partial a_i}$$

L'équation (3) du système entraîne à son tour :

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(t, x), X(t, x)] = -\int_{a_i(t)}^{b_i(t)} \frac{\partial}{\partial x}[\varphi_u(t, x) - \varphi_x(t, x)]\,dx$$

$$= \sum_{e\in]a_i, b_i[} \delta[\varphi_u(t, e) - \varphi_x(t, e)] + \sum_{s\in]a_i, b_i[} \delta[\varphi_u(t, s) - \varphi_x(t, s)]$$
$$+ [\varphi_u(t, a_i) - \varphi_x(t, a_i)] - [\varphi_u(t, b_i) - \varphi_x(t, b_i)]$$

et ce second membre est $\leqslant 0$. En effet :

1/ $\sum_{e\in]a_i, b_i[} \delta[\varphi_u(t, e) - \varphi_x(t, e)] = 0$ parce que

$$\delta\varphi_u(t, e) = \delta\varphi_x(t, e) = N(t, e)\,.\,\delta\Phi(t, e).$$

2/ $\sum_{s\in]a_i, b_i[} \delta[\varphi_u(t, s) - \varphi_x(t, s)] = \sum_{s\in]a_i, b_i[} [U(t, s) - X(t, s)]\,.\,\delta\Phi(t, s) < 0$
puisque $\delta\Phi(t, s) < 0$ et que sur $]a_i, b_i[$ on admet que $U(t, x) - X(t, x) > 0$.

3/ Lorsque a_i est un point de $]0, \sigma[$, $U(t, a_i) = X(t, a_i)$ et $\frac{\partial U}{\partial a_i} > \frac{\partial X}{\partial a_i}$, d'où en conséquence du lemme 1 :

$$\varphi_u(t, a_i) - \varphi_x(t, a_i) = -L(t, a_i)\,q(t, a_i)\left(\frac{\partial U}{\partial a_i} - \frac{\partial X}{\partial a_i}\right) \leqslant 0$$

Pour $a_i = 0$, $\varphi_u(t, 0) - \varphi_x(t, 0)$ est inclu dans $\sum_e$ ou $\sum_s$ si 0 correspond à une entrée ou à une sortie. Lorsque l'extrémité 0 est branchée sur un réservoir infini et correspond à une extrémité a_i d'un intervalle, on se retrouve dans les conditions précédentes :

$$U(t,\ 0) = X(t,\ 0) \text{ et } \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} > \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=0}$$

4/ On montrerait comme au 3/ que $-[\varphi_U(t,\ b_i) - \varphi_X(t,\ b_i)] \leqslant 0$. C. q. f. d.

De ce qui précède, les écarts orientés de deux profils $U(t,\ x)$ et $X(t,\ x)$ se présentent comme des sommes finies ou infinies d'intégrales positives ou nulles dont les dérivées par rapport à t sont négatives ou nulles ; par suite les écarts orientés et la distance des fonctions $U(t,\ x)$ et $X(t,\ x)$ sont des *fonctions* de t décroissantes au sens large.

Remarques.

1/ Par hypothèse, la séparation est très faible, aussi N' et N'' sont en conséquence des fonctions croissantes au sens large de N. Cette conséquence n'intervient pas dans le raisonnement précédent ; mais l'hypothèse justifie le système d'équations aux dérivées partielles.

2/ Le signe de la fonction $p(t,\ x).G(N)$ n'intervient pas pour établir le théorème précédent. (Voir la dernière remarque de cet appendice).

THEOREME D'UNICITE A DROITE

Le système d'équations aux dérivées partielles (1), (2), (3) et de conditions aux limites (4), (5), (6), relatif à un mélange binaire, n'admet qu'une solution $N(t,\ x)$ pour $t > t_0$ issue d'un profil initial $N(t_0,\ x)$.

Démonstration.

Etant donné qu'entre deux solutions quelconques de ce système aux dérivées partielles il existe une distance *non* croissante de t, on peut refaire le raisonnement du § I-6/Ch. IV, p. 57.

4/ Propriétés notoires des solutions du système d'équations aux dérivées partielles.

Le théorème suivant et sa démonstration sont inspirés du § IV-Ch. 4, p. 74.

THEOREME

Les solutions $N^k(t,\ x)$, du système d'équations aux dérivées partielles (1), $(2)^k$, $(3)^k$ et de conditions aux limites (4), (5), (6) ($k=1,\ \dots,\ s-1$) varient sur $[0,\ 1]$ et satisfont aux relations :

$$\sum_{k=1}^{s} N^k(t,\ x) = 1 \qquad \text{pour} \qquad t > 0$$

lorsqu'il en est de même à l'instant initial $t = 0$.

Démonstration.

1/ Toutes les concentrations $N^k(t,\ x)$, ($k=1,\ \dots,\ s-1$) sont positives au sens large :

En effet, considérons l'écart orienté $[0,\ N^k(t,\ x)]$; il serait en général, à chaque instant t, formé d'intégrales partielles $\int_{a_i^k(t)}^{b_i^k(t)} C(t,\ x).[0 - N(t,\ x)]\,dx$ étendues à des intervalle $]a_i^k(t), b_i^k(t)[$ sur lesquels $N^k(t,\ x) < 0$ et aux extrémités desquels :

$$N^k(t,\ a_i^k) = N^k(t,\ b_i^k) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial N^k}{\partial a_i^k} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial N^k}{\partial b_i^k} \geqslant 0.$$

Mais les dérivées par rapport à t de ces intégrales sont négatives ou nulles :

Dans tous les cas possibles le lemme 2 donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}[0,\ N^k(t,\ x)]_{a_i^k(t)}^{b_i^k(t)} = -\int_{a_i^k(t)}^{b_i^k(t)} \frac{\partial}{\partial t}[C(t,\ x)\ N^k(t,\ x)]\,dx$$

que les extrémités $a_i^k(t)$ et $b_i^k(t)$ soient fixes ou mobiles.

D'autre part l'équation $(2)^k$ entraîne à son tour :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,[0,\ N^k(t,\ x)]_{a_i^k(t)}^{b_i^k(t)} = \int_{a_i^k(t)}^{b_i^k(t)} \frac{\partial}{\partial x}\,\varphi_n^k(t,\ x)\,dx = -\sum_{e\in]a_i^k,b_i^k[} \delta\varphi_n^k(t,\ e)$$

$$\sum_{s\in]a_i^k,b_i^k[} \delta\varphi_n^k(t,\ s) + \varphi_n^k(t,\ b_i^k-0) - \varphi_n^k(t,\ a_i^k+0)$$

et l'on vérifie, d'après les conditions aux limites, que ce second membre est négatif ou nul :

1/ $\sum_e \delta\varphi_n^k(t,\ e) = \sum_e N^{+k}(t,\ e)\ \delta\ \Phi(t,\ e) \geqslant 0$ car $N^{+k}(t,\ e) \geqslant 0$ et $\delta\Phi(t,\ e) > 0$.

2/ $\sum_s \delta\varphi_n^k(t,\ s) = \sum_s N^{-k}(t,\ s)\ \delta\ \Phi(t,\ s) \geqslant 0$ car $N^{-k}(t,\ s) < 0$ et $\delta\Phi(t,\ s) < 0$.

3/ Lorsque a_i^k est un point de $]0,\ \sigma[$, $N^k(t,\ a_i^k) = 0$ et $\frac{\partial N^k}{\partial a_i^k} \leqslant 0$; d'où en conséquence de l'équation $(3)^k$ puisque $G^k = 0$ pour $N^k = 0$.

$$\varphi_n^k(t,\ a^k) = -\ L(t,\ a_i^k)\ q(t,\ a_i^k)\ \frac{\partial N^k}{\partial a_i^k} \geqslant 0.$$

Pour $a_i^k = 0$, $\varphi_n^k(t,\ a_i^k+0)$ est inclu dans $\sum_e \delta\varphi_n^k$ ou $\sum_s \delta\varphi_n^k$ si 0 correspond à une entrée ou à une sortie. Lorsque l'extrémité 0 est branchée sur un réservoir infini et correspond à une extrémité a_i^k, on se retrouve dans les conditions précédentes : $N^k(t,\ 0) = 0$ et $\left(\frac{\partial N^k}{\partial x}\right)_{x=0} \leqslant = 0$.

4/ On montrerait comme au 3/ que $\varphi_n^k(t,\ b_i^k-0) \leqslant 0$.

Il en résulte que l'écart orienté $[0,\ N^k(t,\ x)]$. est une fonction non croissante de t. Etant donné que cet écart est positif ou nul par construction, et qu'il est pris nul à l'instant initial $t = 0$, il reste nul pour $t > 0$. Ceci implique $N^k(t,\ x) \geqslant 0$. C. q. f. d.

2/ Toutes les expressions $1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N^k(t,\ x)$ avec $\mathcal{S} \subset (1,\ \ldots,\ s-1)$ sont positives au sens large.

En effet, on se ramène au problème précédent en formant à partir des équations données un nouveau système d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites qui se déduit du premier en changeant directement N^k en $1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N^k(t,\ x)$ et φ^k en $\Phi - \sum_{k\in\mathcal{S}} \varphi^k$. Ce nouveau système s'obtient d'une part en formant la différence de l'équation (1) avec la somme $\sum_{k\in\mathcal{S}}$ des équations $(2)^k$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[C\left(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N^k\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi - \sum_{k\in\mathcal{S}} \varphi^k\right] = 0 \qquad (2)'$$

puis la somme des équations $(3)^k$:

$$\frac{1}{L}\left[(\Phi - \sum_{k\in\mathcal{S}}\varphi^k) - (1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N^k)\ \Phi\right] = -\ p\sum_{k\in\mathcal{S}} G^k - q\ \frac{\partial}{\partial x}\,(1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N^k) \qquad (3)'$$

d'autre part en conservant les conditions aux limites sur le transport total et en prenant les différences de celles-ci avec les sommes $\sum_{k\in\mathcal{S}}$ respectives des conditions aux limites sur les transports élémentaires, soit :

$$\delta\Phi(t,\ e) = F^+(t,\ e) > 0 \text{ et } \delta\left[\Phi - \sum_{k\in\mathcal{S}}\varphi^k(t,\ e)\right] = F^+(t,\ e)\left[1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N^{+k}(t,\ e)\right] > 0 \qquad (4)'$$

$$\delta\Phi(t,\ s) = -F^-(t,\ s) < 0 \text{ et } \delta\left[\Phi - \sum_{k\in\mathcal{S}}\varphi^k(t,\ s)\right] = -F^-(t,\ s)\left[1 - \sum_{k\in\mathcal{S}} N^k(t,\ s)\right] \qquad (5)'$$

En tenant compte de la relation $\left(1 - \sum_{k \in \mathscr{S}} N^k = 0\right) \longrightarrow \left(\sum_{k \in \mathscr{S}} G^k = 0\right)$ le raisonnement précédent montre que $1 - \sum_{k \in \mathscr{S}} N^k \geqslant 0$. C. q. f. d.

En particulier, pour $\mathscr{S} = (1, \ldots, s-1)$, les équations $(2)'$, $(3)'$, $(4)'$, $(5)'$ s'interprètent en changeant $\Phi(t, x) - \sum_{k=1}^{s-1} \varphi^k(t, x)$ en $\varphi^s(t, x)$, $1 - \sum_{k=1}^{s-1} N^k(t, x)$ en $N^s(t, x)$ et $- \sum_{k=1}^{s-1} G^k$ en G^s, comme les équations $(2)^s$, $(3)^s$, $(4)^s$, $(5)^s$ relatives à l'élément s. Par suite, la différence de (1) entre la somme $\sum_{k=1}^{s}$ des équations $(2)^k$ donne, compte tenu de la relation $\Phi(t, x) = \sum_{k=1}^{s} \varphi(t, x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[C\left(1 - \sum_{k=1}^{s} N^k\right)\right] = 0 \qquad \text{d'où} \qquad 1 - \sum_{k=1}^{s} N^k(t, x) = 1 - \sum_{k=1}^{s} N^k(0, x) = 0$$

et d'autre part, la somme $\sum_{k=1}^{s}$ des équations $(3)^k$, compte tenu de ce qui précède donne $0 = p(t, x) \sum_{k=1}^{s} G^k$ d'où $\sum_{k=1}^{s} G^k = 0$. C.q.f.d.

Remarque.

La démonstration de ce théorème est indépendante du signe des fonctions $G^k (k=1, \ldots, s-1)$ en accord avec la relation $\sum_{k=1}^{s} G^k = 0$ qui montre qu'il existe des G^k de signes contraires lorsqu'ils ne sont pas tous nuls.

BIBLIOGRAPHIE DE L'APPENDICE

(1) COHEN - The theory of isotope separation as applied to the large-scale production of U^{235}
Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY, London 1951.

NOTE DU CHAPITRE 4

I - THEOREMES SUR LA THEORIE DE LA MESURE ET DE L'INTEGRALE DE LEBESGUE

[1] Si une fonction $f(p)$, définie dans un ensemble E, y est mesurable, elle est aussi définie dans tout ensemble $E' \subset E$ et mesurable. (4), p. 569.

[2] Si F est une fonction mesurable qui s'annule au plus dans un ensemble de mesure nulle, $1/f$ est une fonction mesurable. (4), p. 568.

[3] Si $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$, ... est une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une limite $f(p)$, celle-ci est mesurable. (4), p. 569.

[4] Toute fonction mesurable non négative est limite d'une suite monotone croissante au sens large de fonctions étagées non négatives et finies. (4), p. 571.

[5] Toute fonction continue est mesurable. (4), p. 571.

[6] Théorème de convergence de Lebesgue. - Lorsqu'une suite $f_n(p)$ de fonctions sommables sur un ensemble E converge presque partout sur E vers une fonction $f(p)$, et qu'il existe une fonction non négative sommable $g(p)$ telle que $|f_n(p)| \leqslant g(p)$ quel que soit n, la fonction $f(p)$ est sommable, et son intégrale sur E est la limite des intégrales des f_n. (4), p. 582.

[7] Etant donnée une fonction $f(t, h)$ de deux variables t et h, la première à valeurs dans un ensemble mesurable E, la seconde à valeurs sur un intervalle $]p, q[$ et telle que pour toute valeur h de $]p, q[$ $f(t, h)$ est mesurable par rapport à t sur E, et, pour toute valeur t de E, continue en h sur $]p, q[$ excepté en un point h_0 de cet intervalle, les limites d'indétermination de $f(t, h)$ pour $h \to h_0$ sont des fonctions mesurables. (5), p. 151.

[8] Les quatre nombres dérivés d'une fonction continue dans un intervalle sont des fonctions mesurables. (5), p. 154.

[9] Si $f(x)$ est croissante au sens large sur $]a, b[$, elle a presque partout sur $]a, b[$ une dérivée $f'(x)$ (6), p. 358 et cette dérivée est sommable. (6), p. 361.

[10] Une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes au sens large. (4), p. 226.

[11] Une fonction absolument continue est à variation bornée. (6) p. 364.

[12] Une fonction absolument continue est l'intégrale indéfinie de sa dérivée. (6), p. 366.

[13] Théorème de Lebesgue. - Une fonction absolument continue est l'intégrale indéfinie de chacun de ses quatre nombres dérivés, sa variation totale est l'intégrale indéfinie de la valeur absolue de l'un quelconque de ses nombres dérivés. (7), p. 183.

[14] Théorème d'existence de Carathéodory. - Etant données n fonctions de n+1 variables $f_i(t ; x_1, \ldots x_n)$ $(i=1, \ldots, n)$ définies sur un cylindre $\mathcal{C}\,[a \leqslant t \leqslant b ; c_i \leqslant x_i \leqslant d_i\ (i=1, \ldots, n)]$ de hauteur $b-a > 0$ et de base $\mathcal{B}[c_i \leqslant x_i \leqslant d_i,\ d_i-c_i > 0\ (i=1, \ldots, n)]$ où elles sont mesurables au sens de Lebesgue par rapport à t sur $[a, b]$ pour tout système de valeurs fixes de $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à $\mathcal{B}$, continues sur $\mathcal{B}$ par rapport à l'ensemble des variables $(x_1, \ldots, x_n)$ pour presque toutes les valeurs fixes t de $[a, b]$, et telles qu'il existe une fonction non négative $M(t)$ sommable sur tout intervalle fini appartenant à $]a, b[$ et vérifiant dans $\mathcal{C}$ les inégalités :

$$|f_i(t ; x_1, \ldots, x_n)| \leqslant M(t) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

il existe n fonctions absolument continues $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de la variable indépendante t qui vérifient le système d'équations intégrales :

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_i(s\,;\,x_1(s),\ldots,x_n(s))\,ds \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

le point $[t\ ;\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)]$ appartenant à C sur tout un intervalle positif de variation de t $[t_{-1}, t_1]$ contenant $t_0(t_{-1} < t_0 < t_1)$ lorsque le point $[t_0\ ;\ x_1(t_0),\ \ldots,\ x_n(t_0)]$ est choisi à l'intérieur de C (en dehors de sa frontière).

Les extrémités de cet intervalle sont déterminées comme suit : l'instant t_{-1} est le plus grands des instants a et τ_{-1} où τ_{-1} est défini par la relation :

$$\int_{\tau_{-1}}^{t_0} M(t)dt = \text{minimum}\ [d_i - x_i(t_0),\ x_i(t_0) - c_i]\ (i=1,\ \ldots,\ n)$$

De même l'instant t_1 est le plut petit des instants b et τ_1 où τ_1 est défini par la relation :

$$\int_{t_0}^{\tau_1} M(t)dt = \text{minimum}\ [d_i - x_i(t_0),\ x_i(t_0) - c_i]\ (i=1,\ \ldots,\ n)$$

De plus dans les mêmes conditions, ces fonctions $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ vérifient presque partout le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t\ ;\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)],\ (i=1,\ \ldots,\ n)$$

sur l'intervalle $[t_{-1}, t_1]$.

[15] Lemme de Gronwall (11) p. 15. - Etant donné une fonction $\lambda(t)$ non négative et sommable sur un intervalle $]t_0, t_1[$ et deux fonctions $\varphi(t)$ et $u(t)$ qui sont des intégrales (ou des fonctions absolument continues), et si ces trois fonctions sont liées par la relation :

$$u(t) \ominus \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)u(\tau)d\tau + \varphi(t) \qquad \text{pour} \qquad t_0 < t < t_1$$

alors u(t) satisfait à la nouvelle relation :

$$u(t) \ominus \varphi(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} \frac{d\varphi}{d\tau}\, e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(\theta)d\theta}\, d\tau$$

où le signe $\ominus$ peut être remplacé successivement par <, = , >.

[16] Lorsque $\varphi(t)$ est constant, le lemme de Gronwall se réduit au lemme de Bellman.

II - DEFINITIONS DE LA STABILITE D'UN VECTEUR $\vec{x}(t,\ t_0,\ \vec{x}_0)$ - (11), p. 25, et (12), p. 74.

Soit E un espace vectoriel normé complet défini sur le corps des réels R, et D un domaine de l'espace R × E. Le vecteur $\vec{x}(t,\ t_0,\ \vec{x}_0)$ est défini dans D et à valeurs dans E. Il est absolument continu de t, continu par rapport au vecteur initial $\vec{x}_0$ choisi à l'instant t_0 dans E, et par conséquent vérifie l'identité :

$$\vec{x}(t_0,\ t_0,\ \vec{x}_0) = \vec{x}_0$$

Selon le comportement du vecteur $\vec{x}(t,\ t_0,\ \vec{x}_0)$ sur $[t_0,\ +\infty]$ pour des modifications du vecteur initial $\vec{x}_0$ on pose les définitions suivantes :

1/ Définitions de Lyapunov.

1/ Définition.

Le vecteur $\vec{x}(t,\ t_0,\ \vec{x}_0)$ est stable à droite au sens de Lyapunov si, à tout $\varepsilon > 0$ donné arbitrairement petit, il correspond un nombre $\delta(\varepsilon,\ t_0) > 0$ tel que :

$$\| \vec{x}(t,\ t_0,\ \vec{x}_1) - \vec{x}(t,\ t_0,\ \vec{x}_0) \| < \varepsilon \qquad \text{pour } t_0 \leq t < +\infty$$

pourvu que $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| < \delta$. Sinon il est instable.

2/ Définition.

Le vecteur $\vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o)$ est asymptotiquement stable à droite au sens de Lyapunov lorsqu'il est stable à droite au sens de Lyapunov et que :

$$\lim_{t \to +\infty} \| \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_1) - \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o) \| = 0 \qquad \text{pour} \qquad \| \vec{x}_1 - \vec{x}_o \| < \delta$$

2/ Stabilité uniforme.

Dans les définitions précédentes δ dépend en général de ε et de t_o. Cependant, si pour t_o suffisamment grand δ ne dépend pas de t_o une fois fixé, les cas de stabilité sont uniformes. Ainsi :

3/ Définition.

Le vecteur $\vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o)$ est uniformément stable à droite si, à tout $\varepsilon > 0$ donné arbitrairement petit, il correspond un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ indépendant de t_o tel que :

$$\| \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_1) - \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o) \| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad t_o \leq t < +\infty$$

pourvu que $\| \vec{x}_1 - \vec{x}_o \| < \delta$.

Remarque.

Un vecteur $\vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o)$ peut être uniformément stable et asymptotiquement stable à droite au sens de Lyapunov.

4/ Définition.

Un vecteur $\vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o)$ est asymptotiquement uniformément stable à droite lorsqu'il est uniformément stable à droite et qu'il existe un nombre δ tel qu'à tout $\varepsilon > 0$ donné arbitrairement petit, corresponde $T(\varepsilon) > 0$ de façon que l'inégalité :

$$\| \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_1) - \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o) \| < \varepsilon$$

soit vérifiée dans le domaine ($t > t_o + T(\varepsilon)$, $\| \vec{x}_1 - \vec{x}_o \| < \delta$)

3/ Stabilité asymptotique sur un domaine.

5/ Définition.

Un vecteur $\vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o)$ est asymptotiquement stable à droite sur un domaine d de $E(\vec{x}_o \in d)$ lorsque le vecteur $\vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o)$ est stable à droite au sens de Lyapunov pour tout vecteur x_o de ce domaine d et que

$$\lim_{t \to +\infty} \| \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_1) - \vec{x}(t,\ t_o,\ \vec{x}_o) \| = 0$$

quels que soient les vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_o$ du domaine d.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IV

1 CARATHEODORY - Vorlesungen über reelle finktionen. Teubner Berlin 1927.

2 SANSONE - Equazioni differenziali nel campo reale. Parte seconde. Nicola Zanichelli editore, Bologna 1949.

3 CODDINGTON and LEVINSON - Theory of ordinary differential equations. Mc Graw-Hill book Company London 1955.

4 FAVARD - Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome 1. Gauthier Villars, Paris 1960.

5 VITALI e SANSONE - Moderna teoria delle funzioni di variabile reale. Nicola Zanichelli editore. Bologna 59.

6 TITCHMARSH - The theory of functions. Oxford University Press 1958.

7 LEBESGUE - Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier Villars Paris 1950.

8 TONELLI - Sull'unicita della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria. Rend Accad Lincei 1, (p. 272 - 277), 1925.

9 VALIRON - Théorie des fonctions. Masson Paris 1948

10 CESARI Lamberto - Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Springer Verlag Berlin 1959.

11 SANSONE e CONTI - Equazioni differenziali non lineari. Edizioni Cremonese, Roma 1956.

12 FAVARD - Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique tomme III. Gauthier Villars. Paris 1962.

TABLE DES MATIÈRES

IMP. LOUIS-JEAN — GAP
Dépôt légal n° 140 — 1964

FIN