Lj. Radanović
S. Bingulac
B. Lazarević
M. Mataušek
Institut "Boris Kidrič" - Beograd

GRAFIČKA METODA ZA ODREĐIVANJE KRITIČNIH DIMENZIJA I RASPODELE FLUKSA KOD MULTIREGIONALNIH NUKLEARNIH REAKTORA

UVOD

Ovaj rad pretstavlja nastavak ranijih radova /1/ /2/ iz oblasti odredjivanja raspodele neutronskog fluksa analognim metodama. U njemu se razvija grafički metod koji koristi rešenja normalizovanih Rikatijevih jednačina. Pokazano je da rešenja pogodno normalizovanih Rikatijevih jednačina mogu služiti kao standardne krive pomoću kojih se mogu odredjivati kritične dimenzije i radijalna raspodela fluksa kod multiregionalnih nuklearnih reaktora. Metoda je primenjiva bez obzira na raspored i broj regiona kod reaktora.

KRATAK PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA

Radijalna raspodela fluksa kod cilindričnih multiregionalnih reaktora, pri jednodimenzionalnom dvogrupnom tretmanu, odredjena je rešenjem poznatih difuzionih jednačina:

$$\frac{d^2F_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF_m}{dr}+a_{m1}\cdot F_m+a_{m2}\cdot N_m=0$$

$$\frac{d^2N_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dN_m}{dr}+b_{m1}N_m+b_{m2}F_m=0 \qquad (1)$$

pri: a/ datim početnim uslovima u centru reaktora, $r = R_0 = 0$

$$F_1'(0) = 0; \quad N_1'(0) = 0 \qquad (2\text{-}a)$$

b/ datim graničnim uslovima na ekstrapolisanoj dužini, $r = R_M$

$$F_M(R_M) = F_{MM} = 0; \; N_{MM} = 0 \qquad (2\text{-}b)$$

c/ datim uslovima na granici izmedju pojedinih regiona $r = R_m$

$$F_{m-1} = F_m \qquad N_{m-1} = N_m$$

$$D_{f(m-1)} F_{m-1}' = D_{fm} F_m' \qquad D_{n(m-1)} N_{m-1}' = D_{nm} N_m' \qquad (2\text{-}c)$$

gde su: r poluprečnik reaktora,
M broj regiona u reaktoru uračunavajući i reflektore
$F_m/r/$ brzi i $N_m/r/$ termalni fluks u m-tom regionu definisanom intervalom nezavisno promenljivo $R_{m-1} \leqslant r < R_m$.

U konstantama $a_{m1}, \ldots\ldots b_{m2}$ figurišu materijalne konstante m-tom regiona reaktora.

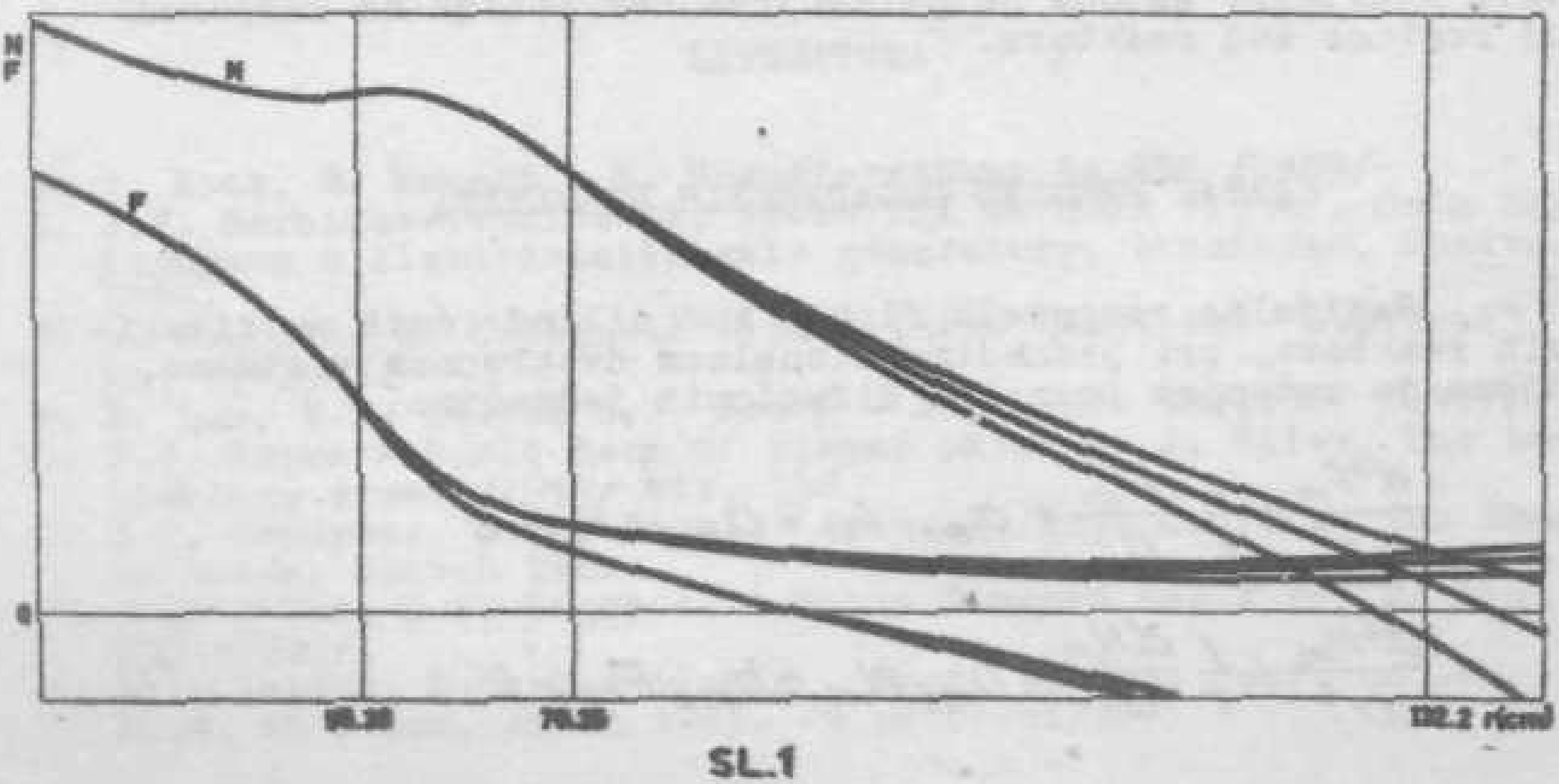
U velikom broju slučajeva promenljivi parametri, kojima treba zadovoljiti postavljene granične uslove, su:

a/ jedan od poluprečnika $r = R_m = R_k$ izmedju /k-1/-vog regiona

b/ odnos početnih vrednosti fluksa $F_1/o/$ $/N_1/o/$ u centru reaktora.

U ranijim radovima autori su ukazali na teškoće koje se javljaju pri direktnom rešavanju difuzionih jednačina na analognim mašinama. Neke od tih teškoća su:

a/ Nedopustiva osetljivost rešenja sistema jednačina 1 na promene početnih uslova /slika 1/.



SL.1

b/ Preterano veliki broj iteracija potreban na mašini da bi se odredile vrednosti parametara R_k i $F_1/o/$ $/N_1/o/$ koje obezbedjuju zadovoljenje graničnih uslova 2-b.

c/ Potreba za velikim brojem elemenata analogne mašine.

Da bi se izbegle ove teškoće bilo je neophodno transformisati sistem jednačina 1 tako da rešenja ne zavise od parametara R_k i $F_1/o//N_1/o/$.

Autori su pokazali da transformacija:

$$U_m = X'_m / X_m \qquad V_m = Y'_m / Y_m \tag{3}$$

ima željene osobine.

X_m i Y_m su rešenja Beselovih jednačina nulte vrste. Veza izmedju $F_m/r/$, $N_m/r/$ i Beselovih funkcija je data relacijom:

$$\begin{aligned} F_m &= X_m + Y_m \\ N_m &= S_m X_m + P_m Y_m \end{aligned} \tag{4}$$

Transformacije 3 i 4 svode problem na rešavanje Rikatijevih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} U'_m + U_m^2 + U_m/r + A_m &= 0 \\ V'_m + V_m^2 + V_m/r - B_m &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

pri a/ datim uslovima u centru reaktora $r = o$

$$U_1(0) - U_{10} = 0 \quad i \quad V_1(0) - V_{10} = 0 \tag{6-a}$$

b/ datim uslovima na ekstrapolisanoj dužini $r = R_M$

$$U_M(R_M)^{-1} = U_{MM}^{-1} - P_{MM} = 0; \; V_{MM}^{-1} - Q_{MM} = 0 \tag{6-b}$$

c/ uslovima na granici izmedju pojedinih regiona $r = R_m$

$$\begin{aligned} U_{(m+1)m} &= \frac{h_{m11} U_{mm} + h_{m12} V_{mm} Z_{mm}}{g_{m11} + g_{m12} Z_{mm}}, \\ V_{(m+1)m} &= \frac{h_{m21} U_{mm} + h_{m22} V_{mm} Z_{mm}}{g_{m21} + g_{m22} Z_{mm}}, \; gde\ je\ Z_{mm} = Y_{mm}/X_{mm} \end{aligned} \tag{6-c}$$

U konstantama g_{m11}, ... h_{m22} figurišu materijalne konstante reaktora. Njihove vrednosti se odredjuju primenom transformacija 3 i 4.

Transformacija difuzionih jedračina u Rikatijeve omogućava neiterativno rešavanje problema, pri korišćenju znatno manjeg broja računskih elemenata. Time je problem odredjivanja raspodele fluksa i kritičnih dimenzija postao praktično rešljiv i na analognim mašinama umerenog kapaciteta.

Za razliku od difuzionih jednačina koje su drugog reda, Rikatijeve jednačine su diferencijalne jednačine prvog reda, te je za njihovo rešavanje potreban samo jedan uslov. Šta više, uslovi u centru reaktora i na ekstrapolisanoj granici su dati jednačinama 5-a i 5-b i ne zavise od parametara R_k i F_1/o//N/o/, čime se izbegava neželjena osetljivost na promene početnih uslova. Prema tome, ukoliko su poznate vrednosti koeficijenata A_m i B_m /jedn. 5/ funkcije U_m i V_m za m = 1 i m = M, mogu se jednostavno odrediti rešavanjem odgovarajućih jednačina na analognoj mašini.

Treba napomenuti da je za m = M potrebno jednačinu 5 rešavati "unazad" odnosno od poluprečnika $r = R_M$ do $r = R_{M-1}$, koristeći poznate vrednosti za U_{MM} i V_{MM} /jedn., 6-b/ kao "početne" uslove. Tada treba uvesti smenu: $P_M/r/ = U_M/r/^{-1}$ i $q_M = V_M/r/^{-1}$, jer u tom slučaju početne vrednosti postaju: $P_{MM} = 0$ i $q_{MM} = 0$.

Pomoću jednačina 5-c i koristeći izvedene osobine funkcija $V_m/r/$, moguće je, na način kako je to pokazano ranije - svodjenjem datom M-regionalnog reaktora na ekvivalentni dvo-regionalni reaktor, odrediti:

a/ nepoznati "kritični" poluprečnik $r = R_k$

b/ vrednosti funkcija U_m i V_m pri svim poluprečnicima R_m /m = 1,2 .. M/, a zatim i

c/ radijalnu raspodelu termalnog fluksa $N_m/r/$.

OSNOVI GRAFIČKE METODE

Na taj način, problem se sveo na rešavanje Rikatijevih jednačina oblika

$$U_m' + U_m^2 + U_m/r + A_m = 0 \qquad (7\text{-a})$$

$$-P_M' + A_M P_M^2 + P_M/r + 1 = 0 \qquad (7\text{-b})$$

pri raznim vrednostima konstanti A_m, početnih poluprečnika R_{m-1} i početnih vrednosti $U_m/R_{m-1}/ = U_{m/m-1/}$. Umesto M rešavanja jednačina 7-a pri raznim vrednostima ovih parametara, koliko je potrebno za M-regionalni reaktor, moguće je pogodnom normalizacijom problem svesti na rešavanje samo jedne jednačine.

Uvodeći smenu $U_m = y \cdot \sqrt{A_m}$ i $r = x/\sqrt{A_m}$ dobija se normalizovana Rikatijeva jednačina

$$y' + y^2 + y/x + 1 = 0 \qquad (8)$$

sa početnim uslovom:

$$y_o = U_{m(m-1)}/\sqrt{A_m} \quad pri \quad x_o = R_{m-1}\sqrt{A_m} \qquad (8\text{-a})$$

Jednačina 7-b, primenjujući smenu:

$$P_M(r) = y_M(x) \cdot R_M \, ; \quad r = x \cdot R_M \, ,$$

postaje:

$$y_M' + A_M R_M^2 \cdot y_M^2 + y_M/x + 1 = 0$$

sa uslovom: $y_M/1/ = 0$ pri $x = 1$ (9)

Ako se ravni XOY raspolaže rešenjima diferencijalne jednačine /8/ $y/x,x_p,y_o/$ pri raznim vrednostima x_o i y_o raspoređenim u opsegu: $0 \leq x_o < [R_m \cdot \sqrt{A_m}]_{max}$

$$\left[U_{m(m-1)}/\sqrt{A_m}\right]_{min} \leq y_o < \left[U_{m(m-1)}/\sqrt{A_m}\right]_{max}$$

mogu se na osnovu poznatih vrednosti A_m, R_{m-1} i $U_{m/m-1/}$ /jedn. 8-a/ dobiti koordinate tačke T'_m /x_o, y_o/. Rešenje $y/x/$, koje prolazi kroz T'_m, preko smene $U_m/r/ = y\sqrt{A_m}$ i $r = x/\sqrt{A_m}$, daje željeno rešenje $U_m/r/$ /jednačina 7-a/, a tačka T''_m na toj krivoj, sa koordinatom y_1 koja odgovara nezavisno promenljivoj $x_1 = R_m\sqrt{A_m}$ daje vrednost funkcije $U_m/r/$ na granici $r = R_m$, jer je $U_m/R_m/ = U_{mm} = y_1\sqrt{A_m}$. Prema tome, kriva $y/x/$ izmedju tačaka T'_m /x_o,y_o/ i T''_m /x_1,y_1/ odgovara rešenju. Rikatijeva jednačina 7-a u opsegu $R_{m-1} \leq r < R_m$, te ako je poznata tačka T'_m mogu se odrediti koordinate tačke T''_m /x_m, y_m/ ili obrnuto.

Rešenja diferencijalne jednačine 8 pri raznim vrednostima x_o i y_o mogu se jednom za svagda odrediti pomoću analogne mašine vodeći računa da cela ravan XOY bude dovoljno gusto popunjena sa rešenjima $y/x/$. Na sličan način se može u ravni XOY_M dobiti skup rešenja $y_M/x/$ diferencijalne jednačine 9, pri raznim vrednostima parametra $s^2 = R_M^2 \cdot A_M$ a u intervalu nezavisno promenljive $0,5 < x \leq 1$.

Na taj način, jednom odredjeni skupovi rešenja $y/x/$ i $y_M/x/$ mogu služiti kao standardne krive pomoću kojih se kritične dimenzije i raspodela fluksa multiregionalnih reaktora mogu odredjivati bez potrebe za korišćenjem analognih ili digitalnih mašina.

Primer:

Način korišćenja ovih standardnih krivih daće se na primeru troregionalnog energetskog reaktora sa dve aktivne zone i jednim reflektorom. Poluprečnik $r = R_1$ izmedju dveju aktivnih zona je nepoznat i treba ga odrediti tako da budu zadovoljeni granični uslovi.

Materijalne konstante reaktora date su u Tabeli I.

TABELA I

	Prva zona	Druga zona	Reflektor
$\Sigma_f \cdot 10^3$	2.5058	2.9158	0.00291
$\Sigma_n \cdot 10^3$	5.3793	3.6946	0.35610
D_f	1.7042	1.5253	1.15596
D_n	1.3651	1.2123	0.91188

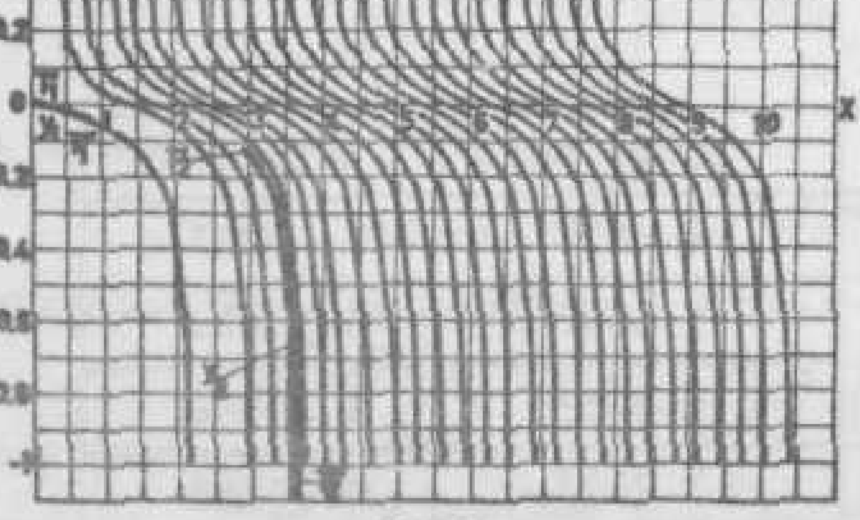
	Prva zona	Druga zona	Reflektor
k_{oo}	1.0282	1.0815	-
$\mu^2 \cdot 10^4$	0.2982	0.9404	-
$\nu^2 \cdot 10^4$	54.4210	50.2942	-

Poznati poluprečnici su: $R_2 = 472$ cm, $R_3 = 550$ cm. Na osnovu datih vrednosti materijalnih konstanti odredjuju se koeficijenti:

$A_1 = 4.95\ 10^{-6}$ $B_1 = -54.6\ 10^{-4}$	$A_2 = 69,17\ 10^{-6}$ $B_2 = -50.84\ 10^{-4}$		$A_3 = -25.42\ 10^{-4}$ $B_3 = -4.15\ 10^{-4}$
$g_{111} = 0.845$ $g_{121} = 0.153$	$g_{112} = 0.00113$ $g_{122} = 1.0113$	$h_{111} = 0.9475$ $h_{121} = 0.1697$	$h_{112} = 0.01933$ $h_{122} = 1.1367$
$g_{211} = 1.00$ $g_{221} = 2.266$	$g_{212} = 1.00$ $g_{222} = 0.299$	$h_{211} = 1.322$ $h_{221} = 2.992$	$h_{212} = 1.322$ $h_{222} = 0.385$

Slika 2 prikazuje skup rešenja $y/x/$ u ravni XOY, dok slika 3 prikazuje skup rešenja $y_M/x/$ u ravni XOY_M.

Obzirom daje poluprečnik R_1 nepoznat svodjenje datog troregionalnog reaktora na ekvivalentni dvo regionalni, vrši se eliminacijom poslednjeg - trećeg regiona. U tom cilju koristićemo rešenja $y_M/x,s/$.



SL.2

Vrednost parametara s za funkciju u U_3 iznosi: $s_u = \sqrt{A_3}R_3 = 27,7$ a za funkčiju V_3 iznosi $s_v = \sqrt{B_3} \cdot B_3 = 11,2$.

Kao što je rečeno, krajnja tačka T_3^M rešenja $y_M/x/$ koje odgovara dobivenoj vrednosti za parametar s, dok se ne dodje do nezavisno promenljive $x = x_0$ koja odgovara poluprečniku $r = R_2$. Na osnovu jednačine 9 imamo $x_0 = R_2/R_3 = 0.858$.

y_M - koordinate odgovarajućih početnih tačaka T_3' se dobijaju sa slike 3:

$$y_u = y_M(x_o, s_u) = -0{,}975 \qquad y_v = y_M(x_o, s_v) = -0{,}874$$

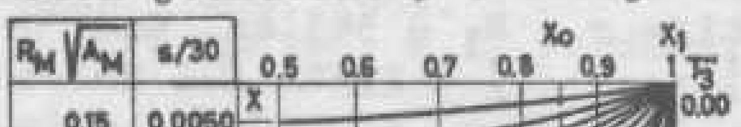
Odatle se na osnovu smene /jedn. 9/ dobija:

$$U_3(R_2) = U_{32} = -0.0515; \quad V_3(R_2) = V_{32} = -0.0221$$

Ranije je pokazano da se vrednosti funkcije $V_m/r/$ pri $r = R_{m-1}$ i $r = R_m$ mogu sa velikom tačnošću aproksimirati izrazima

$$V_m(R_{m-1}) = V_{mm} = 0.5\, R_m^{-1}\left[\sqrt{1 + 4R_m^2 B_m} - 1\right]$$
$$V_m(R_{m-1}) = V_{m(m-1)} = -0{,}5\, R_{m-1}^{-1}\left[\sqrt{1 + 4R_{m-1}^2 B_m} + 1\right] \qquad (10)$$

Na osnovu jednačine 10 dobija se $V_{22} = 0.07095$, a primenom jednačine 5-c dobija se $U_{22} = -0.01423$.



SL.3

Vrednosti U_{22}, R_2 i A_2 odredjuju krajnju tačku T_2'' rešenja $y/x/$ za drugi region, odn.: $y_1 = U_{22}/\sqrt{A_2}$ i $x_1 = R_2\sqrt{A_2}$. Koordinate početne tačke T_2' $/x_o, y_o/$ se ne mogu na ovaj način odrediti jer tačka T_2' odgovara poluprečniku R_1 čiju vrednost treba tek odrediti.

Početna tačka T_1' $/x_o, y_o/$ koja odgovara prvom regionu je obzirom na jednačinu 5-a uvek u koordinatnom početku, odnosno: $x_o = 0$ i $y_o = 0$. Ni koordinate krajnje tačke T_1'' rešenja $y/x/$ za prvi region se ne mogu direktno odrediti jer i one zavise od kritičnog poluprečnika $r = R_1$.

Nepoznati poluprečnik R_1 koji obezbedjuje uslove kritičnosti i zadovoljava granične uslove 2-b, odgovara onoj vrednosti nezavisno promenljive r pri kojoj je zadovoljena odredjena relacija izmedju $U_1/r/$ i $U_2/r/$. Na osnovu jedn. /5-c/ i 10 ta relacija postaje:

$$U_2(r) = U_1(r) + 0.68\cdot 10^{-4} \qquad (11)$$

Postupak odredjivanja kritičnih dimenzija, u našem slučaju poluprečnika $r = R_1$ sastoji se u odredjivanju koordinata tačaka T_1'' i T_2'. Tačke T_2' i T_2'' leže na jednom istom rešenju $y/x/$ i one odredjuju početnu i krajnju tačku za drugi region.

Isto važi i za tačke T_1' i T_1'' na rešenju za prvi region.

Označimo sa x_{21} i y_{21} koordinate tačke T_2' a sa x_{11} i y_{11} koordinate tačke T_1''. X-koordinate tih tačaka treba da zadovolje relaciju:

$$x_{11} = R_1\sqrt{A_1} \quad i \quad x_{21} = R_1\sqrt{A_2}$$

$$x_{11} = \sqrt{A_1/A_2}\cdot x_{21} \qquad (12)$$

jer obe tačke odgovaraju istom kritičnom poluprečniku $r = R_1$. Obzirom na jednačinu 11, može se pokazati da Y-koordinate ovih tačaka treba da zadovolje relaciju:

$$y_{21} = \sqrt{A_1/A_2}\cdot y_{11} + A_2^{-0.5}\cdot 0.68\,10^{-4} \qquad (13)$$

Polazeći od poznatih T_1' i T_2'' /slika 2/ i idući po rešenjima koja odgovaraju prvom i drugom regionu lako je odrediti koordinate tačaka T_1'' i T_2' koje zadovoljavaju jednačine 12 i 13. U našem slučaju koordinate tih tačaka su

$$x_{11} = 0.764 \qquad x_{21} = 2{,}86 \qquad y_{11} = -0{,}411 \qquad y_{21} = -0{,}102$$

Odavde se za kritični poluprečnik dobija $r = R_1 = 343$ cm. Radi veće preglednosti, položaji tačaka T_1' ..... T_2'' u ravni XOY su naznačeni na slici 2.

Na taj način su odredjeni ne samo kritični poluprečnik $r = R_1$ već i sve vrednosti funkcija $U_m/r/$ i $V_m/r/$ na granicama izmedju pojedinih regiona. Koristeći se jednačinama 3 i 4, koje definišu transformaciju sa difuzionih na Rikatijeve jednačine, lako je odrediti željenu raspodelu fluksa služeći se ili rešenjim normalizovanih Reselovih diferencijalnih jednačina nulte vrste, dobijenim analognom mašinom, ili koristeći standardne tablice Reselovih funkcija. Slika 4 daje raspodelu fluksa odredjenu predloženom grafičkom metodom za uzeti primer troregionalnog energetskog reaktora.

SL. 4

ZAKLJUČAK

Predloženom grafičkom metodom problem odredjivanja raspodele fluksa multiregionalnih nuklearnih reaktora može se uspešno rešiti i bez korišćenja analognih ili digitalnih mašina.

Medjutim, i pri mašinskom rešavanju problema, ova metoda pruža znatne prednosti u odnosu na do sada poznate metode. Jedino ova metoda izbegava iterativni računski postupak, čime se i multiregionalni reaktori mogu tretirati sa računskim mašinama umerenog kapaciteta. Posebna prednost ove metode je lako uočavanje uticaja promene materijalnih konstanti na raspodelu fluksa, što je od naročitog značaja pri optimizaciji vrednosti pojedinih parametara reaktora.

LITERATURA

1. S. Glasstone, M.C. Edlund - "The Elements of Nuclear Reacter Theory", Van Nostrand, Princeton, 1955.
2. Lj. Radanović, S. Bingulac, B. Lazarević, M. Mataušek, E. Humo: "Primena analognih mašina u proračunima reaktora". Simpozijum iz reaktorske fizike, Ljubljana, mart 1963.
3. Lj. Radanović, S. Bingulac, B. Lazarević, M. Mataušek: "An Analog Computer Method for Solving Flux Distribution Problema in Multiregion Nuclear Reactor", VIII Nuclear Congress - Rome, june, 1963.
4. D. Stefanović, J.P. Jordanov, M. Jecković: "Statistički proračun gasom hladjenih reaktora". Simpozijum iz reaktorske fizike, Ljubljana, mart 1963.