PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
TECNOLOGIAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
PROTEN - DEN / UFPE

Nº 106
DISSERTAÇÃO DE
MESTRADO

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA DIFUSÃO DE CALOR EM UMA ALETA DE UM ELEMENTO COMBUSTÍVEL NUCLEAR

AUTOR: **MAX WERNER DE CARVALHO TITO**

RECIFE - PERNAMBUCO - BRASIL
NOVEMBRO – 2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ENERGIA NUCLEAR

Av. Prof. Luiz Freire, 1000 - Cidade Universitária
CEP 50740-540 - Recife - PE - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENERGIA NUCLEAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIAS
ENERGÉTICAS E NUCLEARES

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA DIFUSÃO DE CALOR EM UMA ALETA DE UM ELEMENTO COMBUSTÍVEL NUCLEAR

MAX WERNER DE CARVALHO TITO

RECIFE – PERNAMBUCO – BRASIL
NOVEMBRO – 2001

MAX WERNER DE CARVALHO TITO

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA DIFUSÃO DE CALOR EM UMA ALETA DE UM ELEMENTO COMBUSTÍVEL NUCLEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Tecnologias Energéticas Nucleares, do Departamento de Energia Nuclear da Universidade Federal de Pernambuco. Área de concentração: Engenharia de Reatores.

ORIENTADOR: DR. CARLOS ALBERTO BRAYNER DE OLIVEIRA LIRA

CO-ORIENTADOR: DR. JORGE LUIS BALIÑO (Ipen / USP)

RECIFE – PERNAMBUCO – BRASIL

NOVEMBRO – 2001

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Prof° Hervásio de Carvalho, DEN, UFPE.

T621a

Tito, Max Werner de Carvalho.
Análise de Sensibilidade na Difusão de Calor em uma Aleta de um Elemento Combustível Nuclear / Max Werner de Carvalho Tito. – Recife : O autor, 2001.
XVII, 86 p. : il. – (Dissertação de Mestrado – DEN).

Orientador : Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira.

Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Centro de Tecnologia e Geociências – CTG. Departamento de Energia Nuclear, 2001.

1. Engenharia Nuclear – teses. 2. Engenharia de Reatores – teses. 3. Engenharia Térmica – teses. 4. Análise de Sensibilidade - teses. 5. Teoria da Perturbação - teses. 6. Aletas Circunferenciais - teses. I.Baliño, Jorge Luis. II. Título. III. Série.

CDD 621.48 (21.ed.) PE-UFPE-DEN, 2001

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA DIFUSÃO DE CALOR EM UMA ALETA DE UM ELEMENTO COMBUSTÍVEL NUCLEAR

Max Werner de Carvalho Tito

APROVADO EM: 09.11.01

ORIENTADOR : Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

CO-ORIENTADOR : Prof. Dr. Jorge Luis Balião

COMISSÃO EXAMINADORA:

Fernando Roberto de Andrade Lima - DEN/UFPE

Rita de Cássia Fernandes de Lima – DEMEC/UFPE

Elias Silva Filho – DEN/UFPE

Visto e permitida a impressão

Coordenador do PROTEN/DEN/UFPE

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA DIFUSÃO DE CALOR EM UMA ALETA DE UM ELEMENTO COMBUSTÍVEL NUCLEAR

DEDICADA

Aos meus pais Gilvan Tito (físico) e Graça Tito (economista), em primeiro lugar, por tudo o que aprendi, sem mais palavras; aos meus eternos amigos Julio Torres (EUA) e Stian Berland (Noruega); e a todos os professores e alunos de graduação e pós-graduação que contribuem para o avanço tecnológico no Brasil e no mundo.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador e professor Carlos Brayner de Oliveira Lira por todo o auxílio técnico na elaboração desta dissertação, com uma dedicação e paciência digna de grandes orientadores. Valeu Dr. Brayner!!! Em seguida para o meu co-orientador Jorge Luis Baliño (Ipen / USP) pelas melhorias implementadas.

Aos meus grandiosos e inesquecíveis professores Rajendra Narain, em especial por toda a ajuda técnica prestada, Elias Silva e Clóvis Hazin, bem como à minha comissão examinadora, principalmente para Rita de Cássia Fernandes de Lima (Depto. Engenharia Mecânica – UFPE).

À Universidade Católica de Pernambuco e ao Departamento de Energia Nuclear da Universidade Federal de Pernambuco (minhas grandes escolas de graduação e pós-graduação, respectivamente).

Aos meus eternos mestres de graduação em engenharia química e química industrial: João Pedro dos Santos, Soraya Silveira, Ed Carrazzoni, Sebastião Beltrão de Castro, Clarissa Daisy Albuquerque, Helder Parente e Ângelo Camarotti.

À Irmã Tarcísia O.S.B. do Educandário Maria Imaculada – Ordem das Irmãs Beneditinas Missionárias, pelas ricas aulas de ciência na minha infância e que serão eternas, ao Colégio Nóbrega, por toda a base matemática que aprendi, e a meus familiares, em especial para os meus tios Leonardo Arruda de Carvalho e Leda Maria Arruda Braga.

Aos ex-companheiros de trabalho no Pólo Petroquímico de Camaçari - Bahia, que muito contribuíram para o meu aprimoramento profissional: Najla Kassim, Roger Kiefer, Weber Lobo, Enilson Cruz, Carlos Alberto, Almir Dantas e Christian Baquedano. Também para os meus ex-orientadores e ou companheiros de estágio na indústria química e petroquímica pernambucana, com ricos ensinamentos: Sidney Costa, Marconi Madruga, Levi José, Luciano Bompastor, Delmiro Lira Filho, Sérgio Lucena e Francisco Neto.

Também faço um agradecimento especial aos meus amigos: Julio Torres (EUA), Stian Berland (Noruega), Ludo Vanopdenbosch (Bélgica), Kasper Hemmingsen (Dinamarca), Ellie Rodan (Israel), Rainer Vollweiter (Alemanha), Christopher Nelson (EUA), Glauco Augusto (SP), Jornandes Dias, Lazara Castrillo, Paulo Cléber e Haroldo Torres Neto, pelo apoio e ou ajuda técnica prestados.

SUMÁRIO

PÁGINA

PÁGINA

PÁGINA

PÁGINA

LISTA DE FIGURAS

FIGURA **PÁGINA**

FIGURA **PÁGINA**

LISTA DE TABELAS

TABELA **PÁGINA**

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área normal ao fluxo de calor
C	Perímetro da seção transversal da aleta
h	Coeficiente de transferência de calor por convecção
k	Coeficiente de condutividade térmica
p	Parâmetro do sistema
p_0	Parâmetro de referência (ou nominal) do sistema
P	Concomitante bilinear
q''	Fluxo de calor
q'''	Taxa volumétrica de geração de calor
q_0	Fluxo de calor na base da aleta
Q_x	Taxa de fluxo condutivo de calor na direção positiva do eixo x
Q_h	Taxa de fluxo convectivo de calor
Q_g	Taxa de fluxo de calor gerado pela aleta
Q_p	Taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta
ε, y_0	Meia espessura da aleta
r_0	Raio da base da aleta
r_1	Raio da aleta
r'	Raio equivalente da aleta
r_p	Raio do ponto p da aleta
R	Resposta
R_0	Resposta de referência (ou nominal)
$S_{(i)}$	Termo de fonte das equações derivadas

S^+ Termo de fonte das equações adjuntas (função conhecida das coordenadas do espaço de fase)

S Coeficiente de sensibilidade absoluto

t_f Temperatura do fluido

t_w Temperatura da superfície

$\vec{C}$ Vetor das condições de contorno do sistema

$\vec{f}$ Vetor de estado

$\underline{\vec{H}}$ Operador derivado (matriz)

$\underline{\vec{H}}^*$ Operador adjunto (matriz)

$\vec{r}$ Vetor de posição no espaço de fase

LETRAS GREGAS

θ Excesso de temperatura da aleta

θ_0 Excesso de temperatura na base da aleta

$\bar{\theta}$ Excesso médio de temperatura da aleta

SUBSCRITOS

$/_i$ Derivada parcial de uma grandeza em relação ao parâmetro p_i

SUPERESCRITOS

T Transposta de um vetor ou matriz

s Ponto da superfície de contorno do espaço de fase

SÍMBOLOS OPERACIONAIS

[ ]	Representação de matriz, para os métodos perturbativos
$\frac{\bar{\partial}}{\partial}$	Derivada de Frechet
*	Função ou operador adjunto
→	Representa um vetor cujas componentes são escalares
'	Sistema perturbado
< >	Integral definida no espaço de fase

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA DIFUSÃO DE CALOR EM UMA ALETA DE UM ELEMENTO COMBUSTÍVEL NUCLEAR

Autor: Max Werner de Carvalho Tito

Orientador: Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Co-orientador: Dr. Jorge Luis Baliño

RESUMO

Os sistemas térmicos modernos apresentam, em geral, um nível de complexidade crescente, como é o caso das centrais nucleares de potência. Para a otimização destes sistemas, há a necessidade de utilização de ferramentas matemáticas e computacionais eficientes. Desta forma, será possível melhorar o rendimento das operações, reduzir os custos e garantir a segurança das instalações. Os cálculos de sensibilidade desempenham um papel importante neste processo em função das informações fornecidas por estes em relação à influência resultante da variação, ou perturbação, de algum parâmetro do problema no comportamento do sistema. Esta técnica constitui-se no que se conhece como análise de sensibilidade. Assim, torna-se possível uma maior compreensão dos efeitos destes parâmetros, fundamental para a elaboração de projetos e desenvolvimento de técnicas preventivas e corretivas nos mais variados equipamentos da engenharia moderna.

A metodologia do cálculo de sensibilidade é baseada na construção de gráficos que representam a superfície de resposta para cada funcional em estudo. Este método apresenta várias desvantagens, por vezes torna-se um método impraticável, pois muitos parâmetros podem provocar alterações, ou perturbações, no sistema, além da complexidade dos modelos adotados para os cálculos.

A aplicação dos formalismos perturbativos viabilizam a solução do modelo na presença de equações complexas e reduzem consideravelmente o tempo de cálculo dos resultados, constituindo-se como uma importante ferramenta para a simplificação da análise de sensibilidade.

Neste trabalho, o formalismo perturbativo diferencial é aplicado a um problema de condução de calor em um sistema térmico, composto de uma aleta circunferencial unidimensional de um elemento combustível nuclear. As aletas são utilizadas para a extensão das superfícies térmicas onde a convecção ocorre, aumentando a transferência de calor para a obtenção dos resultados desejados nos mais variados equipamentos térmicos. Os revestimentos aletados são projetados nos reatores nucleares

refrigerados a gás para compensar a baixa eficiência de transporte térmico do fluido. A equação de distribuição de temperatura, juntamente com as condições de contorno específicas, são utilizadas para a descrição do modelo. O método diferencial é utilizado na determinação dos coeficientes de sensibilidade para os casos de interesse, e as equações resultantes tanto do modelo direto como do formalismo perturbativo são resolvidas.

Os funcionais estudados foram a taxa de fluxo de calor em um ponto da aleta e o excesso médio de temperatura da mesma. A meia espessura, o coeficiente de condutividade térmica, o coeficiente de transferência de calor por convecção e o fluxo de calor na base da aleta foram os parâmetros de interesse na análise de sensibilidade.

Os resultados obtidos pelo método perturbativo e pela variação direta no modelo apresentaram, de forma geral e dentro dos limites físicos aceitáveis, boas concordâncias, além de uma ótima representatividade para os casos analisados. Isto evidencia o formalismo diferencial como uma importante ferramenta para a análise de sensibilidade, como também valida a aplicação da metodologia em problemas de transmissão de calor nas superfícies estendidas, mostrando-se uma alternativa eficiente na elaboração de projetos da engenharia térmica.

SENSITIVITY ANALYSIS FOR HEAT DIFFUSION IN A FIN ON A NUCLEAR FUEL ELEMENT

Author: Max Werner de Carvalho Tito

Advisor: Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Co-advisor: Dr. Jorge Luis Baliño

ABSTRACT

The modern thermal systems generally present a growing complexity, as is in the case of nuclear power plants. It seems that is necessary the use of complex computation and mathematical tools in order to increase the efficiency of the operations, reduce costs and maximize profits while maintaining the integrity of its components. The use of sensitivity calculations plays an important role in this process providing relevant information regarding the resultant influence of variation or perturbation of its parameters as the system works. This technique is better known as sensitivity analysis and through its use makes possible the understanding of the effects of the parameters, which are fundamental for the project preparation, and for the development of preventive and corrective handling measurements of many pieces of equipment of modern engineering.

The sensitivity calculation methodology is based generally on the response surface technique (graphic description of the functions of interest based in the results obtained from the system parameter variation). This method presents a lot of disadvantages and sometimes is even impracticable since many parameters can cause alterations or perturbations to the system and the model to analyse it can be very complex as well.

The utilization of perturbative methods result appropriate as a practical solution to this problem especially in the presence of complex equations. Also it reduces the resultant computational calculus time considerably. The use of these methods becomes an essential tool to simplify the sensitivity analysis.

In this dissertation, the differential perturbative method is applied in a heat conduction problem within a thermal system, made up of a one-dimensional circumferential fin on a nuclear fuel element. The fins are used to extend the thermal surfaces where convection occurs; thus increasing the heat transfer to many thermal pieces of equipment in order to obtain better results. The finned claddings are projected to gas-cooled nuclear reactors to compensate the low coolant thermal transport efficiency. The model is described by the temperature distribution equation and the further specific boundary conditions. The adjoint system is used to determine the sensitivity coefficients to the case of interest. Both, the direct model and the perturbative formalism resultant equations are solved.

The heat flow rate on a point of the fin and the average temperature excess were the response functionals studied. The half thickness, the thermal conductivity and heat transfer coefficients and the heat flow from the base material were the parameters of interest to the sensitivity analysis.

The results obtained through the perturbative method and the direct variation presented, in a general form and within acceptable physical limits, good concordance and excellent representativeness to the analyzed cases. It evidences that the differential formalism is an important tool to the sensitivity analysis and also it validates the application of the methodology in heat transmission problems on extended surfaces. The method proves to be necessary and efficient while elaborating thermal engineering projects.

1. INTRODUÇÃO

Na engenharia térmica, é de extrema importância a análise completa da transmissão de calor para o dimensionamento adequado dos equipamentos, por questão de eficiência e economia, bem como de segurança.

Quando existe uma grande diferença relativa ao coeficiente de transferência de calor entre os dois lados de uma superfície, pode-se aumentar a troca convectiva de calor entre esta e o fluido de baixo coeficiente com o uso de aletas, ou seja, estendendo a área de contato térmico. Na Figura 1, há dois exemplos típicos de aletas fixadas em um tubo, constituintes de muitos equipamentos industriais.

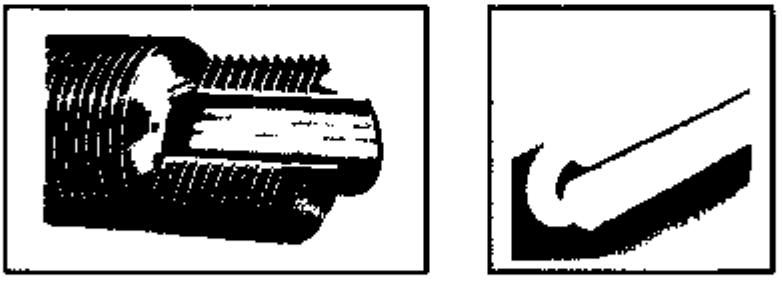

Figura 1. Tubos aletados.

(1: www.thermal-land.com/index.html ; Abr/2001 e 2: www.classicradiators.co.uk ; Mai/2001)

O uso das superfícies estendidas é de grande relevância nos dias atuais, pois possibilita a transmissão de uma grande quantidade de calor entre fluidos e superfícies. Estas superfícies podem ser encontradas em vários sistemas térmicos, tais como: em elementos combustíveis nucleares, em condensadores e trocadores de calor empregados na indústria, inclusive em usinas nucleares, como também em radiadores de automóveis, criogenia, condicionadores de ar, turbinas a gás, microcomputadores e muitas outras aplicações. Na Figura 2, um radiador de automóvel e trocadores de calor industriais são exemplos de equipamentos que podem conter aletas.

Figura 2. Radiador automotivo e trocadores de calor industriais tubulares e do tipo ar-ar.

(1 www.classicradiators.co.uk e 2 e 3 www.abco.dk , Abr/2001)

A utilização das aletas nos elementos combustíveis nucleares é uma característica de reatores refrigerados a gás, já que este fluido apresenta um baixo coeficiente de transferência de calor. Há poucos reatores com esta configuração, cerca de 30 unidades em todo o mundo. Um esquema deste reator é ilustrado na Figura 3, onde se tem o gás carbônico como fluido refrigerante e grafite como moderador. A Grã-Bretanha é o país que mais utiliza este tipo de refrigerante, servindo como exemplo as usinas nucleares de Hartlepool, Hunterston B, Heysham 1 e Dungeness B, sendo estas duas últimas mostradas na Figura 4, com produção média de 1100 MW de energia elétrica.

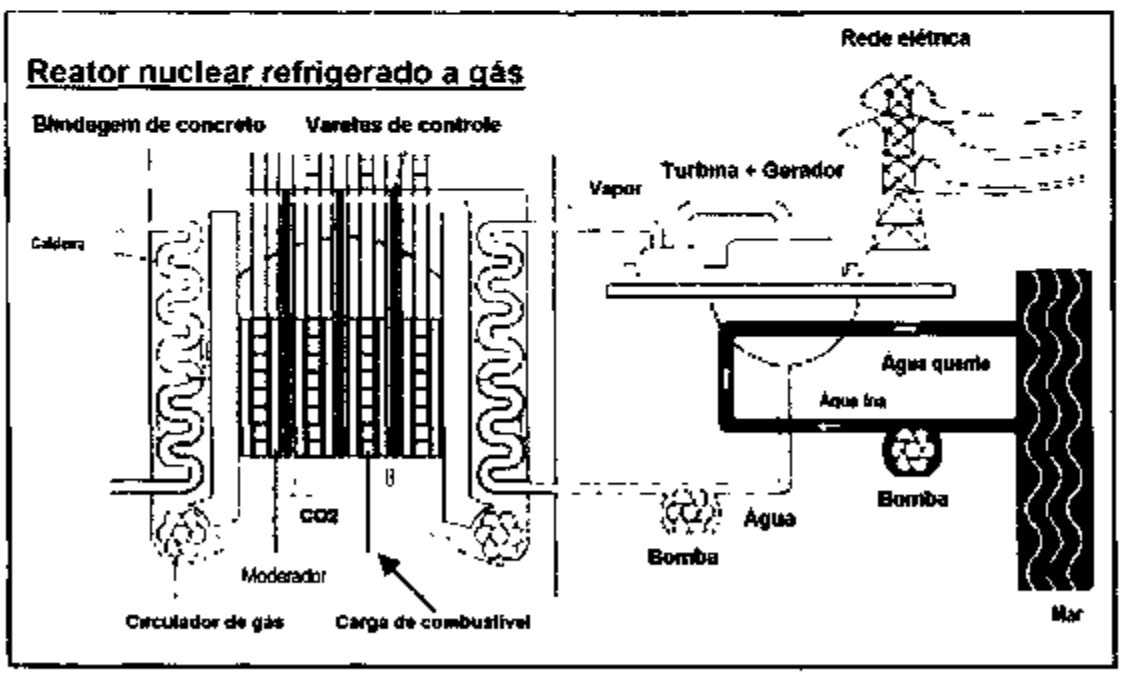

Figura 3. Reator nuclear refrigerado a gás carbônico, tendo o grafite como moderador

(www.environment97.org/framed/reception/exhibitors/british_energy/page4.htm , Mar/2001)

Figura 4. Usinas nucleares de Heysham 1 e Dungeness B, da Grã-Bretanha
(www.environment97.org/framed/reception/exhibitions/british_energy/page4.htm , Ago/2001)

As aletas nos elementos combustíveis destes reatores assumem um papel peculiar, já que são projetadas num meio de elevada densidade de calor. Sendo assim, são alvos de cuidados especiais, pois este calor precisará ser removido eficientemente pelo fluido refrigerante inclusive por questões de segurança, o que torna o sistema de grande valia para estudos e futuras aplicações nos mais variados equipamentos térmicos.

Na otimização de sistemas térmicos usa-se muitas vezes um modelo computacional que procura representar a realidade dos fenômenos que ali ocorrem. Todavia, os dados de entrada do modelo, também chamados de parâmetros, estão condicionados a uma série de incertezas ou imprecisões que podem impor restrições importantes quanto à confiabilidade das respostas na saída do modelo.

Assim, na análise de um sistema (térmico, por exemplo), seja no setor industrial ou em estudos científicos, muitas vezes inclui-se a determinação da influência resultante da variação, ou perturbação, de algum parâmetro do problema no comportamento do sistema. Esta técnica constitui-se no que se conhece como análise de sensibilidade

A metodologia do cálculo de sensibilidade pelo método direto, ou convencional, consiste na variação de um ou mais parâmetros de controle mantendo os demais fixos. O cálculo é repetido consecutivamente em função dos parâmetros de interesse, construindo o que se denomina de superfície de resposta. Este método apresenta várias desvantagens, por vezes torna-se um método impraticável, pois muitos parâmetros podem provocar alterações, ou perturbações, no sistema, além da complexidade dos modelos adotados para os cálculos.

No caso dos métodos perturbativos, estes são aplicados na análise de sensibilidade principalmente quando não há solução analítica da equação do modelo e quando sua solução numérica é muito onerosa do ponto de vista computacional. Estes

formalismos apresentam como grandes vantagens, de uma forma geral, o cálculo da sensibilidade da resposta relativa aos parâmetros da equação sem a escolha anterior da faixa de variação dos parâmetros (ao contrário do método direto, onde esta escolha prévia é obrigatória). No cálculo da nova resposta, para cada variação do parâmetro, emprega-se uma expressão de simples resolução, assim como o trabalho com somente um único sistema adicional de equações para cada resposta analisada. Assim, viabilizam a solução do modelo na presença de equações complexas e reduzem consideravelmente o tempo de cálculo dos resultados, encontrando-se atualmente em expansão para outras áreas da engenharia e, consequentemente, nas aplicações industriais.

1.1. Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o de realizar uma análise de sensibilidade, utilizando o formalismo diferencial da teoria da perturbação, para determinar a influência da variação de parâmetros em funcionais resposta de interesse. O método é aplicado a um problema de condução de calor, particularmente em uma aleta circunferencial unidimensional, de um elemento combustível nuclear com condições de contorno especificas. Os funcionais estudados são a taxa de fluxo de calor em um ponto da aleta e o excesso médio de temperatura da mesma. A meia espessura, o coeficiente de condutividade térmica, o coeficiente de transferência de calor por convecção e o fluxo de calor na base da aleta são os parâmetros para a análise de sensibilidade.

Serão discutidos os resultados obtidos levando em consideração a influência de cada parâmetro estudado na perturbação do sistema térmico, para as condições dadas. Desta forma, serão determinados os parâmetros mais sensíveis, alvos de atenção especial no estudo e projeto de equipamentos térmicos dotados de aletas. Também serão mostradas as vantagens do método e a verificação da validade desta aplicação em problemas de transmissão de calor nas superfícies estendidas.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. Os métodos perturbativos

2.1.1. Aspectos introdutórios

Desde o início dos estudos de física de reatores nucleares, a teoria da perturbação, ciência matemática dos métodos perturbativos, tem desempenhado um importante papel. Sua metodologia foi utilizada para computar o efeito de pequenas mudanças, ou perturbações, uniformes e não-uniformes no comportamento do núcleo de um reator.

O emprego desta teoria teve como motivo o fato de que as pequenas variações uniformes não eram determinadas nos cálculos pelos métodos convencionais de difusão de dois grupos ou multigrupos, onde a energia de todos os nêutrons é dividida em um número de grupos de energia, pois estas eram perdidas nos cálculos em decorrência dos erros de arredondamento. Outra dificuldade encontrada é que também não podiam ser computadas pelo método da diferenciação, que consiste na diferenciação do logaritmo natural de ambos os termos da expressão para o fator de multiplicação de nêutrons. Esta técnica é restrita apenas aos modelos mais simples de reatores nucleares, como no caso do reator térmico sem refletor. Já na determinação das pequenas mudanças não-uniformes, tais como aquelas encontradas na queima de combustível ou na acumulação de fragmentos de fissão envenenadores, a metodologia do cálculo de multigrupo torna-se operacionalmente complexa e onerosa, pois o cálculo poderá exigir um tratamento tridimensional.

Assim, a teoria da perturbação não foi limitada a resolver problemas envolvendo perturbações localizadas, mas para a determinação dos efeitos de todas as pequenas mudanças uniformes, raramente encontradas na prática, bem como das pequenas variações não-uniformes. A metodologia desenvolvida apresentou

particularidades importantes, como a da equação adjunta, da função adjunta e do operador adjunto. Alguns conceitos importantes foram obtidos, de grande utilidade no desenvolvimento das equações perturbadas. Como por exemplo, a afirmativa de que os operadores de difusão de um grupo são auto-adjuntos, ou seja, o operador e seu adjunto são idênticos, o que não acontece com os operadores de dois grupos ou multigrupos, pois, nesse caso, o operador adjunto equivale à matriz transposta do operador do sistema (LAMARSH, 1972).

2.1.2. As primeiras aplicações dos métodos perturbativos

Segundo a citação de Gandini (1987, p. 205), a primeira aplicação dos métodos perturbativos foi realizada por Wigner, em 1945, para o estudo de quantidades fundamentais, tais como os valores da reatividade de diferentes materiais. Esta primeira formulação, chamada de Teoria da Perturbação Convencional (CPT), foi baseada nos conceitos da mecânica quântica. Em seguida, contribuições significativas foram realizadas por Soodak, em 1948, que deu uma interpretação heurística à função adjunta, vista como proporcional à importância dos nêutrons em relação à energia assintótica de um sistema crítico. Na década de 50, a metodologia CPT passou a ter uma formulação consistente, realizada por Usachev, em 1955, que também incluiu o tempo de vida efetivo de nêutrons rápidos e a fração efetiva de nêutrons retardados. Continuando as primeiras aplicações, inclui-se o trabalho de Kadomtzev, em 1957, responsável pela introdução do conceito da função importância no campo da radiação das partículas e suas relações com a função de Green. Esta última também foi trabalhada por Morse & Feshbach, em 1953.

Paralelamente à introdução do conceito da função importância e do desenvolvimento dos métodos de análise matemática, no início dos anos 60, as formulações foram empregadas na análise de problemas lineares, e em problemas não-lineares, inclusive de altas ordens. As aplicações foram direcionadas à análise de núcleos de reatores, evolução de nuclídeos, termoidráulica e blindagem de reatores nucleares.

Partindo deste princípio, ainda segundo Gandini (1987, p. 206), notáveis aplicações foram feitas, destacando-se as realizadas por Pontryagin et. al. , em 1962, ao introduzirem as equações adjuntas lineares para as equações que governam as coordenadas de um sistema. Em seguida, tem-se o trabalho pioneiro de Usachev, em 1963, que fez uso do conceito de ciclos de geração de nêutrons em sistemas críticos. Outra referência é relacionada ao trabalho de Lewins, em 1965, que, adotando técnicas

variacionais, estendeu o formalismo perturbativo para incluir também problemas não-lineares. Uma outra aplicação do método variacional foi a elaborada por Stacey Jr., em 1972, para fazer uma estimativa do valor da reatividade a ser inserido ou retirado de reatores nucleares rápidos críticos. E, como não se poderia deixar de citar, a aplicação na blindagem de reatores nucleares foi de grande importância na difusão e utilização dos métodos perturbativos na análise de sensibilidade, através dos trabalhos de Gerstl & Stacey Jr., em 1973, e de Bartini et al., em 1974.

As formulações dos diversos autores podem ser agrupadas em três categorias (GANDINI, 1987 e ANDRADE LIMA & BLANCO, 1994). Estes métodos levam às mesmas expressões para o coeficiente de sensibilidade e são divididos de acordo com a aproximação usada na derivação. Assim, os três formalismos são:

i) O método da Teoria da Perturbação Generalizada (GPT), que faz uso exclusivo da conservação da função importância. Adotado inicialmente por Usachev, em 1955, e largamente utilizado nos trabalhos de GANDINI (1982, 1987, 1995), ANDRADE LIMA & ALVIM (1986, 1987), ANDRADE LIMA (1990) e ANDRADE LIMA et al. (1993);

ii) O método Variacional, que tem como característica a minimização do funcional de interesse, adotado, em particular, por Lewins, em 1965, Pomraning, em 1967, e Stacey Jr., no início da década de 70;

iii) O método Diferencial, objeto deste trabalho, baseado na diferenciação do funcional resposta considerado. Proposto por OBLOW (1978) e aplicado inicialmente por CACUCI et al. (1980).

2.1.3. A aplicação dos métodos perturbativos na área de reatores nucleares e seus sistemas

Esta nova fase de aplicações nos reatores nucleares foi iniciada com OBLOW (1978), que usou o formalismo diferencial para calcular a sensibilidade de algumas respostas de interesse em projetos e segurança de reatores nucleares relacionadas a vários parâmetros termoidráulicos.

Outro trabalho, feito por WEBER et al. (1979), também com o uso do formalismo diferencial, foi direcionado a um problema não-linear transitório de uma vareta combustível nuclear rodeada por refrigerante, para o estudo da resposta não-linear. Em seguida, CACUCI et. al. (1980) utilizaram o formalismo diferencial para sistemas de equações não-lineares e demonstraram a equivalência entre os formalismos diferencial e variacional. Também foi feito um estudo de sensibilidade em varetas combustíveis e aplicou-se o formalismo matricial, que é uma variação do formalismo diferencial, tendo como característica o emprego do método perturbativo nas equações já discretizadas.

Em estudos mais recentes, SANDERS et al. (1988) empregaram o formalismo diferencial para calcular os coeficientes de sensibilidade em modelos lineares e não-lineares relativos a diversos parâmetros termoidráulicos, em regime estacionário, no gerador de vapor de uma central nuclear PWR (Pressurized Water Reactor).

Outra aplicação, relativa ao formalismo matricial em problemas termoidráulicos, foi realizada por OLIVEIRA (1988) e por OLIVEIRA et al. (1989), com a execução de cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores nucleares simulados com o uso de um modelo simplificado de dois canais, proposto por SILVA FILHO (1979).

As aplicações do formalismo GPT tiveram o seu início através dos trabalhos de ANDRADE LIMA & DA SILVA (1984), ANDRADE LIMA et al. (1985) e DA SILVA & ANDRADE LIMA (1985). Estes autores realizaram uma análise de sensibilidade relacionada ao problema de transmissão de calor de uma vareta combustível para um canal refrigerante. Nos estudos foram analisados a sensibilidade de funcionais (temperatura média do refrigerante e temperatura do refrigerante na saída do canal) com referência a parâmetros termoidráulicos típicos (calor específico, massa específica, coeficiente de transferência de calor por convecção e intensidade da fonte térmica) durante transitórios de potência. Os coeficientes de sensibilidade foram calculados através dos formalismos GPT e diferencial, mostrando a equivalência entre os mesmos, já sugerida por GANDINI (1982). Este problema foi novamente resolvido através do desenvolvimento de uma nova versão do programa por ANDRADE LIMA & ALVIM (1986, 1987), também utilizando os métodos diferencial e GPT.

Objetivando o emprego dos métodos perturbativos a problemas não-lineares complexos, tendo como exemplo o comportamento termoidráulico de núcleos de reatores nucleares, ALVIM et al. (1988) deduziram expressões para a função importância e para o coeficiente de sensibilidade a partir do modelo termoidráulico do núcleo proposto por

STEWART et al. (1977). Neste trabalho utilizou-se a teoria da perturbação generalizada, de forma heurística denominada de HGPT, desenvolvida por GANDINI (1987). Posteriormente, foi aplicado por ANDRADE LIMA (1990), utilizando os formalismos diferencial e GPT, fornecendo resultados compatíveis com os realizados pelo cálculo direto e validando a utilização dos formalismos da teoria da perturbação para a análise de sensibilidade em problemas de alta complexidade.

Assim, vários estudos que consideraram diversos funcionais de interesse e o uso de diferentes formalismos foram realizados com sucesso, levando muitos pesquisadores a difundirem esta nova sistemática de cálculos de sensibilidade. Sendo importante destacar que a escolha de um formalismo depende da preferência do pesquisador, ou seja, é puramente uma questão de conveniência ou precedente histórico, já que os formalismos chegam a expressões idênticas para os coeficientes de sensibilidade (ANDRADE LIMA, 1990). Porém, algum método poderá ser mais vantajoso que outro, a depender do tratamento particular das condições de contorno.

Uma nova aplicação da teoria da perturbação generalizada, HGPT, foi aplicada na análise de sensibilidade por ANDRADE LIMA et al. (1993), tendo como modelo termoidráulico o adotado no código computacional Cobra-IV-I. Através dos resultados obtidos, comprovou-se a vantagem do método utilizado ao reduzir de forma expressiva o tempo necessário para o cálculo computacional dos coeficientes de sensibilidade, em comparação com o método de cálculo direto, além de uma boa compatibilidade dos coeficientes de sensibilidade entre ambos.

Outra publicação relativa aos métodos perturbativos foi feita por LIRA et al. (1994), na área de geradores de vapor de usinas nucleares, com o uso do formalismo GPT. Neste trabalho o método foi aplicado a um gerador de vapor de dimensões semelhantes ao da Usina Nuclear de Angra I, em regime transitório, para a obtenção das equações adjuntas e do coeficiente de sensibilidade. Em seguida, foi elaborado um trabalho didático para o ensino da teoria da perturbação por ANDRADE LIMA & BLANCO (1994), baseado nas aulas ministradas no INSTITUTO BALSEIRO – Argentina, contendo as bases dos formalismos diferencial e GPT para os cálculos de sensibilidade, incluindo várias aplicações a problemas de engenharia nuclear.

Os métodos perturbativos, com o uso do formalismo GPT, entre as diversas contribuições obtidas, permitiram uma reformulação da equação de transporte de Boltzmann, partindo do princípio da conservação da função importância (GANDINI, 1987).

Continuando a aplicação dos métodos perturbativos na década de 90, tem-se o trabalho elaborado por ANDRADE LIMA et al. (1995). Este trabalho fez uma coletânea sobre o estado da arte da aplicação dos formalismos perturbativos na área de segurança de reatores nucleares.

Mais uma aplicação do formalismo matricial, desta vez por MACIEL (1995) e MACIEL et. al. (1995a, 1996), foi realizada em um modelo simplificado para o estudo de um canal quente de reatores nucleares do tipo PWR. A discretização do sistema foi feita pelas equações de conservação de massa, da quantidade de movimento linear e de energia, bem como de correlações de transferência de calor e de mecânica dos fluidos. Os resultados evidenciaram que o formalismo matricial satisfaz as necessidades de descrição de um dado sistema, dentro das limitações físicas permitidas, bem como apresenta a vantagem da eliminação de repetidas execuções do programa principal com o intuito de gerar os valores perturbados. O trabalho apontou como desvantagem do método a limitação em descrever sistemas não bem comportados, em função das características próprias de linearização, podendo-se, como solução, usar teorias da perturbação de ordens superiores. Os cálculos de sensibilidade foram executados pelo programa TERMHIDR, desenvolvido por BELÉM (1993).

Um outro estudo relativo à análise de sensibilidade foi realizado por GURJÃO (1996) e GURJÃO et al. (1996a), através do emprego da teoria da perturbação pelo formalismo diferencial e GPT em um modelo existente de um gerador de vapor, tipo U, utilizado em reatores nucleares refrigerados a água leve. Teve-se como caso exemplo a análise de um transitório de perda de vazão forçada no circuito primário da central nuclear Álvaro Alberto, usina nuclear de Angra I. Este modelo foi desenvolvido por SOUZA (1981) para análise de transitórios da usina nuclear citada. Os resultados comprovaram a equivalência entre os dois formalismos utilizados e erros insignificantes entre os valores calculados pelo método direto e pelo método perturbativo.

À partir do convênio entre o Centro Atômico Bariloche – Instituto Balseiro (Argentina) e a UFPE, no ano de 1993, foram realizados vários trabalhos em conjunto sobre os métodos perturbativos, com destaque para um workshop relativo aos avanços recentes dos métodos perturbativos aplicados ao projeto e operação de reatores nucleares. Um outro destaque foi para um painel referente aos métodos perturbativos aplicados à análise de segurança de reatores nucleares. Devido ao sucesso dos estudos e aplicações desenvolvidas, foram realizadas várias publicações, com destaque para a publicação em uma revista internacional por ANDRADE LIMA et al. (1998), onde os principais métodos

perturbativos utilizados na análise de sensibilidade, bem como suas devidas aplicações, foram destacados. Também foi evidenciado uma boa conformidade entre os formalismos diferencial, GPT e matricial com relação aos cálculos diretos. As pesquisas desenvolvidas mostraram a acentuada importância da aplicação da teoria da perturbação na análise de sensibilidade em vários problemas da tecnologia nuclear.

Finalizando esta linha de aplicação, tem-se o trabalho desenvolvido por BLANCO et. al. (2001), para a análise de sensibilidade, através do uso do formalismo HGPT, aplicada à terapia de captura do nêutron do boro (BNCT), acoplada ao transporte do nêutron e ao código de difusão TRUCO. A análise de sensibilidade teve como objetivo a otimização da fonte e validação da dosimetria computacional como alternativa econômica para os grandes custos computacionais pela técnica de Monte Carlo, utilizada para os cálculos de transporte de raios gama e de nêutrons. A pesquisa foi direcionada ao feixe epitérmico para a técnica BNCT no reator RA-6, do centro de pesquisas de Bariloche. Para a obtenção de uma aproximação mais detalhada em problemas de dosimetria realísticos com picos de espectro, utilizou-se a expansão do formalismo perturbativo de segunda ordem. A comparação dos resultados obtidos pelo método perturbativo e pelo método direto mostraram uma boa concordância, com erros relativos inferiores a 1%. Assim, a implementação da metodologia foi de grande importância como ferramenta para a análise de sensibilidade no desenvolvimento de feixes epitérmicos para a técnica BNCT.

2.1.4. Os métodos perturbativos em outras áreas da ciência

Recentemente se estendeu o tratamento do formalismo GPT à informação de dados experimentais, através do estabelecimento de uma metodologia para sua utilização em projetos de referência (GANDINI, 1995). O método consiste no ajuste e transposição de dados, que são bastante utilizados no campo da neutrônica de reatores, e são considerados como aplicáveis a outros campos de interesse, em particular à termoidráulica de reatores. Isto abre um campo de aplicação enorme, já que em praticamente todas as aplicações da engenharia se conta com equações de balanço determinísticas (geralmente na forma de equações diferenciais), além de relações adicionais na forma de equações constitutivas ou leis de fechamento. Estas são originadas por meio de ajustes ou correlações experimentais.

Porém, os formalismos da teoria da perturbação, devido ao fato de não serem ainda bem conhecidos, possuem poucas aplicações em outras áreas, nos quais destacam-se alguns trabalhos em engenharia civil, particularmente em estudos de física de solos, na mecânica dos fluidos, bem como na área de controle de processos.

Nos estudos de física de solos, os trabalhos evidenciaram claramente a grande perspectiva de expansão da teoria da perturbação na engenharia civil, tendo como representante deste movimento o trabalho realizado por LIRA et al. (1994a, 1998). A pesquisa foi direcionada à análise de sensibilidade, pelos métodos perturbativos, em um modelo de transferência de soluto através dos solos. Entre os resultados obtidos pode-se destacar a viabilidade na aplicação dos formalismos nesta área de interesse, nos quais os parâmetros do modelo são, em geral, fortemente não-lineares. Outro trabalho, na mesma área, foi a aplicação dos métodos perturbativos na dinâmica da água nos solos, elaborado e publicado por LIRA et al. (1996), com bons resultados quanto à concordância entre o método perturbativo empregado e a solução pelo método direto.

Na área de mecânica dos fluidos, o método diferencial foi aplicado à análise de sensibilidade em problemas de golpe de ariete, em uma rede hidráulica, por BALIÑO et. al. (1995). A partir das equações clássicas para o golpe de ariete em um líquido monofásico com atrito, foi definido o vetor de estado compreendendo a altura piezométrica e a velocidade. Neste trabalho, as equações adjuntas discretizadas e as correspondentes condições de contorno foram programadas e resolvidas usando o método das características. Como modelo utilizou-se um tanque de nível constante contendo um tubo conectado a uma válvula de descarga para a atmosfera. Os resultados obtidos pelo uso do formalismo perturbativo e pelo método direto mostraram excelente concordância para tempos de observação pequenos. Para o estado estacionário ocorreram leves discrepâncias, devido ao tratamento do coeficiente de atrito nas equações diretas quando o método das características foi empregado.

A primeira aplicação na área de controle de processos, usando o formalismo GPT, foi realizada por ETCHEPAREBORDA (1998). Este trabalho desenvolveu a resolução, em tempo real, de um problema de otimização de sistemas não-lineares, com vínculos de desigualdade entre as variáveis de estado do sistema e a entrada de controle, tendo como caso exemplo a experiência em um pêndulo invertido.

Outra utilização do formalismo GPT, realizada por ETCHEPAREBORDA (1999) e com uso de um pêndulo, foi feita para o acompanhamento de uma solução ótima

inicial e resolução do problema de controle de horizonte deslizante de sistemas não-lineares.

A última referência sobre o assunto é representada pelo trabalho realizado por ALBUQUERQUE et. al. (2000) e ALBUQUERQUE (2001), com a aplicação dos formalismos diferencial e GPT na análise de sensibilidade do processo de neutralização ácido forte-base forte, controlado com PI não-linear. A distância média da neutralidade foi utilizada como funcional resposta e foi analisada com relação aos parâmetros: ganho proporcional, vazão e concentração de ácido na corrente de entrada e incerteza no estado do sistema. Os resultados obtidos evidenciaram a equivalência entre os dois formalismos empregados, a excelente representatividade da aplicação da teoria da perturbação aos casos analisados, bem como a constatação de uma diferença insignificante entre os valores obtidos pelo método direto e pelos métodos perturbativos. Também foi evidenciada a grande vantagem do método perturbativo, que é a execução do cálculo, para cada funcional resposta, apenas uma vez. Nesta metodologia sabe-se que se o coeficiente de sensibilidade de um funcional resposta com relação a um parâmetro é conhecido, convenientemente em um único cálculo pode-se saber o valor do funcional resposta para qualquer variação do parâmetro.

Quanto à utilização da teoria da perturbação para a análise de sensibilidade na transmissão de calor em aletas, não foi encontrada qualquer referência bibliográfica relativa ao assunto, sendo este trabalho o primeiro a ser desenvolvido com esta linha de aplicação.

2.2. As aletas ou superfícies estendidas

Os trabalhos técnico-científicos sobre este assunto não são muitos, principalmente em decorrência da dificuldade encontrada na obtenção prática de coeficientes locais de transferência de calor por convecção. Este fato ocorre principalmente quando as aletas encontram-se muito próximas uma das outras, como é o caso da maioria dos equipamentos térmicos industriais aletados, dependendo, deste modo, de complexos estudos experimentais.

Segundo a citação de Rosman (1979), no trabalho realizado por Shepherd, em 1956, foi possível realizar um estudo da variação dos coeficientes médios de transferência de calor por convecção, como uma função do número de Reynolds do

escoamento, em trocadores de calor de tubos aletados. Em seguida, tem-se o trabalho elaborado por Stachiewicz, no final da década de 60, para o estudo do efeito das variações do coeficiente de transferência convectiva de calor ao longo de uma aleta, determinando um fator de correção baseado em dados experimentais. Outras pesquisas sobre o mesmo problema, desta vez com informações sobre os coeficientes locais e médios de transferência de calor por convecção, em trocadores com uma e duas fileiras de tubos aletados, foram feitas por Saboya, em 1974, e Saboya & Sparrow, também na década de 70. Já outro estudo no campo das aletas, elaborado por Carajilescov & Saboya, em 1978, analisou a distribuição de temperatura, a eficiência e a variação de temperatura de mistura do ar ao longo de uma aleta, em um trocador de calor com uma fileira de tubos aletados.

O estudo teórico-experimental realizado por ROSMAN (1979), tratou da análise térmica de uma aleta considerando a condução de calor de forma bidimensional, através da determinação prática dos coeficientes locais de transferência de calor por convecção. Nesta pesquisa obteve-se a distribuição de temperatura mais aproximada dos valores reais esperados, como também foi efetuado o cálculo da eficiência e da distribuição de temperatura de mistura do ar ao longo da aleta, para vários números de Reynolds e materiais. A aplicação foi direcionada a um trocador de calor com uma e duas fileiras de tubos aletados. O estudo experimental conduziu aos seguintes resultados: a eficiência da aleta decresce com o aumento do número de Reynolds (embora o número de Nusselt médio da aleta isotérmica aumente), porém com efeito menos acentuado em materiais de alta condutividade térmica; e que os trocadores de calor com uma fileira de tubos centrados são mais eficientes que o emprego de tubos recuados (descentralizados), mantendo o mesmo material e a mesma área de transmissão de calor.

Alguns trabalhos no campo das aplicações industriais das aletas são representados por WENZEL & MUELLER-STEINHAGEN (1995), através do estudo numérico da transferência de calor para misturas de acetona e isopropanol em ebulição sobre uma superfície aletada, usando a técnica de diferenças finitas. A temperatura das superfícies de transferência de calor, composição do líquido, geometria da aleta e condutividade térmica foram variadas para investigar a influência destes parâmetros sobre os coeficientes médios de transferência de calor por convecção da aleta e sobre o montante de calor transferido pela superfície aletada. Os resultados desta pesquisa indicaram que a degradação significante da transferência de calor que é encontrada em ebulição de misturas sobre superfícies planas pode ser reduzida com o uso de aletas.

Em seguida, pode-se destacar o trabalho de MATSUBARA et al. (1996), com o estudo do fluxo e da transferência de calor em um canal contendo uma região aquecida, de comprimento finito e com aletas internas do tipo placa, através de computação numérica tridimensional. O desempenho foi avaliado usando-se um número de Nusselt aparente, correspondente ao fluxo de calor. Os resultados mostraram, com relação ao número de Nusselt aparente, que: a) quando a altura da aleta é aumentada, porém com o passo mantido constante, seu valor eleva-se de maneira uniforme; b) o valor máximo foi obtido quando o topo da aleta atingiu a parede do canal; c) quando o passo da aleta foi alterado, com a altura mantida constante, o resultado numérico indicou que a presença de espaçamento entre o topo da aleta e a parede levou-o a um valor ótimo, e, no caso da não existência de espaçamento, seu valor aumentou com a diminuição do passo entre as aletas.

Outro trabalho no campo das aletas foi publicado por SYED et al. (1997), através de um estudo matemático da convecção forçada laminar estacionária na região anular entre dois tubos circulares concêntricos com aletas longitudinais cônicas distribuídas uniformemente ao redor do tubo interno, em um trocador de calor de tubo duplo (DPHE). O estudo desenvolvido teve o objetivo de aumentar o coeficiente de transferência de calor por condução e, desta forma, melhorar o desempenho dos projetos de trocadores de calor do tipo DPHE. Entre os resultados obtidos, foi constatado que, para um número fixo de aletas, não houve variação no valor do coeficiente de transferência de calor por convecção para vários números de Reynolds. Entretanto, aumentando o número de aletas, obteve-se um aumento na eficiência de transferência de calor para um valor fixo do número de Reynolds, e um aumento na força de atrito, até um valor ótimo. O estudo também enfatizou, assim como o trabalho de ROSMAN (1979), a necessidade do uso de um modelo bidimensional e o cálculo dos coeficientes locais de transferência convectiva de calor, com o intuito de aproximar a qualidade dos projetos de trocadores de calor, do tipo DPHE, de valores mais realísticos.

Finalizando, tem-se o trabalho desenvolvido por MOCHIMARU & LIU (1997), pertinente a um estudo analítico do processo de transferência de calor por convecção natural de um grupo de aletas verticais, usadas para a refrigeração de circuitos integrados e aparelhos eletrônicos (transformadores, amplificadores, etc.), através do método de diferenças finitas espectral. Os resultados obtidos mostraram que com as transformações apropriadas das equações que governam o sistema e suas condições de contorno é possível resolver problemas de convecção natural em aletas verticais com o método numérico empregado, onde a integração no tempo foi baseada em um esquema semi-implícito.

3. A TRANSMISSÃO DE CALOR NAS ALETAS DE ELEMENTOS COMBUSTÍVEIS NUCLEARES

3.1. As aletas - Noções gerais

Em projetos da engenharia é muitas vezes necessário aumentar a transferência de calor para a obtenção dos resultados desejados nos mais variados equipamentos térmicos. Para isto os engenheiros fazem uso das aletas, que são dispositivos na forma de lâminas metálicas finas, fixados na parede de uma estrutura, causando um prolongamento da mesma na direção do fluido circundante Assim, as aletas são utilizadas para a extensão das superfícies de transmissão de calor onde a convecção ocorre, sendo encontradas em quase todas as estruturas por onde passam uma grande quantidade de calor. Como exemplo tem-se as aletas nos tubos dos trocadores de calor, condensadores, no revestimento dos elementos combustíveis nucleares, nos radiadores de automóveis, na refrigeração de equipamentos industriais e eletrônicos, etc Na Figura 5 há um exemplo ilustrativo do uso de aletas na refrigeração de motores e geradores de navios e de equipamentos eletrônicos.

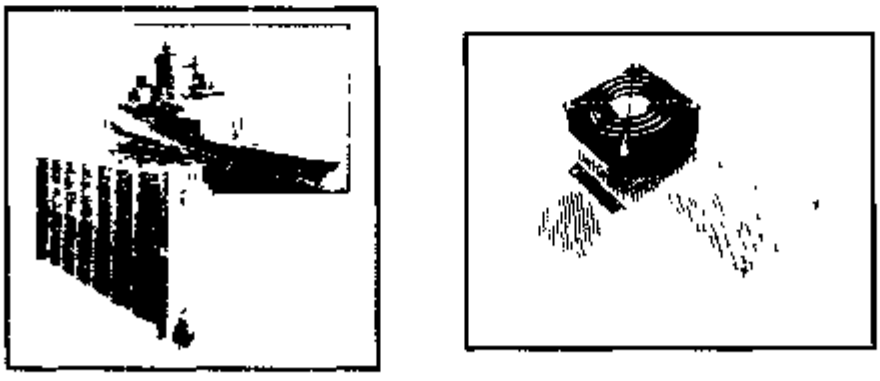

Figura 5 Aletas na refrigeração de equipamentos náuticos e eletrônicos

(1 www.thomasregister.com/olc/unifin/ , Abr/2001 e 2 www.thermofin.com , Mar/2001)

Os tipos de aletas utilizados na indústria moderna são as aletas longitudinais (longas tiras metálicas ou canaletas), transversais (como as aletas do tipo disco, circunferencial, anel ou helicoidal), descontínuas (aletas em forma de estrela, por exemplo) e na forma de grampos, pregos, pinos ou espinhos, sendo algumas indicadas na Figura 6. As aletas dispostas nos tubos são fabricadas com o mesmo material, ou seja, aço carbono, aço inoxidável, ligas de aço ou ligas de níquel, e costumam ser encaixadas ou soldadas nos mesmos. Quanto às aletas dos elementos combustíveis nucleares, estas são construídas na parede do próprio revestimento do combustível.

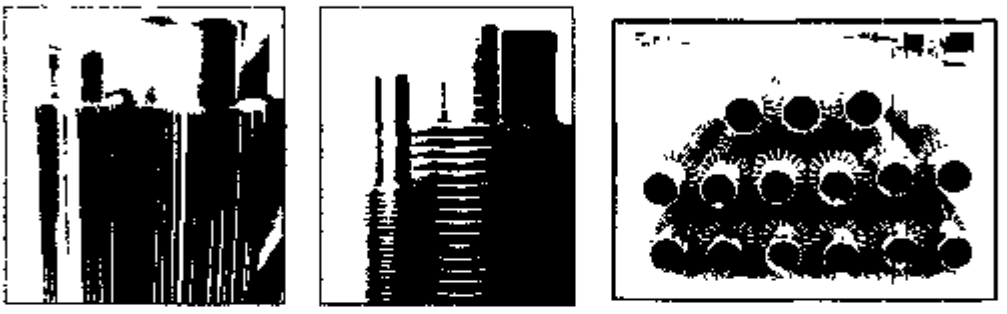

Figura 6. Aletas comerciais longitudinais, transversais e do tipo prego, respectivamente.
(www.vulcanfinnedtubes.com , Mar/2001)

As aletas longitudinais são geralmente usadas em ambientes que envolvem gases e líquidos viscosos. As aletas transversais são principalmente utilizadas em grandes operações de resfriamento ou aquecimento de gases em escoamento cruzado, como no caso das aletas dos elementos combustíveis de reatores nucleares refrigerados a gás, ou melhor, para baixos coeficientes peliculares do fluido. Há também uma variação conhecida como aletas descontínuas, e, finalmente, as aletas na forma de grampos, pregos ou espinhos, que são empregadas no escoamento longitudinal e também no escoamento cruzado.

É importante salientar que cada tipo de superfície aletada possui suas próprias peculiaridades e eficiências relativas à transferência de calor entre a aleta e o fluido. Como por exemplo, se a transferência de calor for através de convecção nas superfícies interna e externa em um tubo ou placa, as aletas são dispostas geralmente na região onde a transferência de calor for mais baixa, como no caso dos radiadores de automóveis, onde temos um baixo coeficiente de transmissão de calor para o ar, na superfície externa.

3.2. As aletas nos elementos combustíveis de reatores nucleares

Nos reatores nucleares refrigerados a gás ou líquidos orgânicos, devido aos baixos coeficientes de transferência de calor dos mesmos, o reator estará limitado à potência específica e à densidade de calor para que as temperaturas dos elementos combustíveis não ultrapassem os limites de segurança. Sendo assim, para compensar a baixa eficiência de transporte térmico do refrigerante, usam-se os revestimentos aletados.

As aletas nos elementos combustíveis nucleares são fabricadas com o mesmo material do revestimento do combustível (alumínio, berílio, magnésio, aço inox, etc.), prolongando a superfície deste que se encontra em contato íntimo com o fluido refrigerante, aumentando consideravelmente a eficiência de transporte de calor.

Existem vários tipos de aletas em revestimentos de elementos combustíveis, da mesma forma que as aletas utilizadas em tubos, ou seja, aletas transversais, longitudinais, descontínuas e na forma de pregos ou pinos, sendo mostradas na Figura 7. A escolha do material das aletas está em função de vários parâmetros, tais como uma boa condutividade térmica k, baixa seção de choque de absorção de nêutrons, geração de calor desprezível, perda de carga, espaço disponível, problemas de manufatura, custo, etc. (EL-WAKIL, 1971).

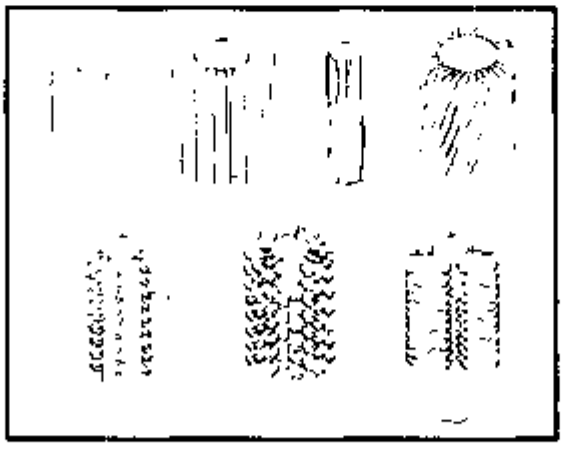

Figura 7. Aletas no revestimento de elementos combustíveis nucleares.
(EL-WAKIL, 1971)

3.3. A transmissão de calor nas aletas de elementos combustíveis nucleares

O fluxo de calor em uma aleta é obtido com o cálculo da distribuição de temperatura na mesma. Porém, muitas vezes a análise térmica de uma superfície estendida apresenta alguma complexidade, aliada à dificuldade prática encontrada na obtenção de coeficientes locais de transferência de calor por convecção, que dependerá de complexos estudos experimentais. Portanto, para facilitar a análise, tem-se que fazer várias considerações técnicas, como admitir que a distribuição de temperatura da aleta é unidimensional. Também admite-se que o coeficiente de transferência de calor por convecção é um valor constante ao longo da aleta e que a temperatura da base é a mesma da temperatura da parede da estrutura principal (do tubo, por exemplo), além de outras peculiares a cada tipo de problema (ROSMAN, 1979).

Assim, para o cálculo da distribuição de temperatura ao longo de uma aleta de um elemento combustível nuclear, também tem-se que fazer algumas considerações práticas. Desta forma, em primeiro lugar, será analisado o caso geral de uma aleta de seção transversal variável, de pequena espessura, circundada por um fluido refrigerante, conforme a Figura 8, no qual o calor, proveniente do elemento combustível, é gerado de maneira uniforme. A equação diferencial geral resultante é usada na formulação para a geometria escolhida.

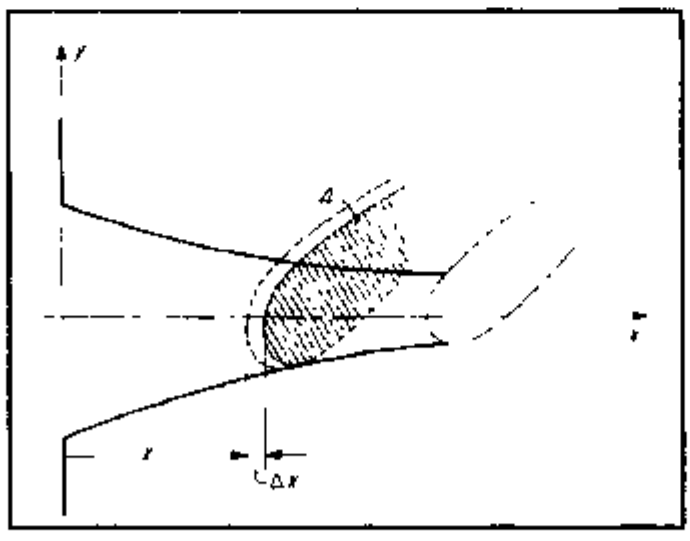

Figura 8. Aleta de seção transversal variável.

(EL-WAKIL, 1971)

Para o estudo do caso geral, assume-se que:

a) a temperatura do fluido refrigerante, t_f, é constante;

b) o coeficiente de transferência de calor por convecção, h, ao longo da aleta, é um valor uniforme;

c) a aleta é feita de material homogêneo e se assume um coeficiente de condutividade térmica k de valor uniforme;

d) a distribuição de temperatura e a condução de calor são unidimensionais, no qual a aleta está em uma temperatura superior à do fluido adjacente. A hipótese de uniformidade no interior do sólido só é válida considerando um baixo número de Biot (condução >> convecção). Este número corresponde à razão entre as resistências à transferência de calor interna (condutiva) e externa (convectiva), dada pela fórmula $h\,\Delta y/k$. Assim, a pequena espessura da aleta, Δy, mencionada frequentemente na literatura, não é um critério suficiente para garantir a unidimensionalidade da distribuição (EL-WAKIL, 1971).

Para a determinação da equação para a distribuição de temperatura, faz-se um balanço de energia, por unidade de tempo, sobre um pequeno elemento diferencial de volume na aleta. Assim, considerando um elemento diferencial em x, de espessura Δx, chamando a área transversal da aleta de A, e a temperatura da mesma de t, conforme a Figura 8, e aplicando a primeira lei da termodinâmica, obtém-se:

energia conduzida internamente em x	-	energia conduzida externamente em x + Δx	+	energia gerada na aleta	=	energia liberada externamente por convecção

A taxa de fluxo de calor, que flui por condução no plano x é dada por:

$$Q_x = -k\,A\,\frac{dt}{dx} \tag{3.1}$$

O calor que sai do plano, por condução, em x + Δx é:

$$Q_{x+\Delta x} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx}\Delta x = -k\,A\frac{dt}{dx} - k\left(A\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{dt}{dx}\frac{dA}{dx}\right)\Delta x \qquad (3.2)$$

A energia gerada na aleta, Q_g, em função da absorção de radiações nucleares, equivale a:

$$Q_g = q''' A\,\Delta x \qquad (3.3)$$

onde q''' equivale à taxa volumétrica de geração de calor, ou a energia gerada na aleta por unidade de tempo e volume.

E o calor liberado por convecção tem a forma:

$$Q_h = C\,\Delta x\,h\,(t_w - t_f) \qquad (3.4)$$

onde C é o comprimento periférico ou perímetro da seção estudada, sendo o valor de $C\,\Delta x$ correspondente à área superficial da mesma. Os símbolos t_w e t_f correspondem às temperaturas da parede quente e do fluido frio, respectivamente, e h é o coeficiente de transferência de calor por convecção.

Assim, o balanço de energia sobre o elemento diferencial de volume na aleta será:

$$Q_x - Q_{x+\Delta x} + q'''\,A\,\Delta x = C\,\Delta x\,h\,(t_w - t_f) \qquad (3.5)$$

Primeiramente, será introduzido nesta expressão o valor de $\theta = t - t_f$ como o excesso de temperatura na aleta, para uma temperatura do fluido constante, lembrando que quando não há gradiente de temperatura na direção da espessura, $t = t_w$. Assim, substitui-se os símbolos $t_w - t_f$ por θ e tem-se que $dt/dx = d\theta/dx$ e $d^2t/dx^2 = d^2\theta/dx^2$.

Em seguida, substituindo as expressões (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) na expressão final (3.5), obtém-se a equação diferencial geral para a distribuição de temperatura na aleta:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{A}\frac{d\theta}{dx}\frac{dA}{dx} - m^2\theta = -\frac{q'''}{k} \tag{3.6}$$

onde $m^2 = C\,h/A\,k$.

A solução da equação diferencial (3.6), empregada na geometria de interesse, sujeita às condições de contorno adequadas nas extremidades da aleta, fornece a distribuição de temperatura na mesma. A seguir, a equação (3.6) é resolvida analiticamente para o modelo estudado.

4. O MODELO DA ALETA CIRCUNFERENCIAL UNIDIMENSIONAL DE ESPESSURA UNIFORME

4.1. Considerações gerais

A aleta circunferencial, circular ou anular, de espessura uniforme, é um tipo comum de superfície estendida transversal, usada em diversos equipamentos térmicos, principalmente em tubos de trocadores de calor industriais, bem como em elementos combustíveis de reatores nucleares refrigerados a gás.

Como objeto do trabalho desenvolvido, é feita uma análise térmica de sensibilidade através da aplicação do método perturbativo diferencial. Neste capítulo, o modelo será descrito com as considerações e condições de contorno adequadas. Em seguida, a equação da distribuição de temperatura na aleta é resolvida para θ e faz-se a análise gráfica da distribuição de temperatura e do fluxo de calor.

O estudo do modelo da aleta circunferencial unidimensional, bem como das superfícies estendidas nos elementos combustíveis nucleares, tem como fonte de informações técnicas as literaturas de EL-WAKIL (1971); MIKHEYEV (1977); PITTS & SISSOM (1977) e WHITAKER (1977).

4.2. Descrição do modelo, considerações e condições de contorno

Para o estudo da aleta, empregam-se as coordenadas cilíndricas e usam-se as funções de Bessel na solução do problema proposto.

O modelo da aleta circunferencial de espessura uniforme, fixada ao elemento combustível nuclear, está visualizada na Figura 9, onde r_0 corresponde ao raio da base da aleta, ou seja, o raio do elemento combustível, r_1 é o raio da aleta, Δr é o comprimento radial do elemento diferencial e $2y_0$ equivale à espessura da aleta.

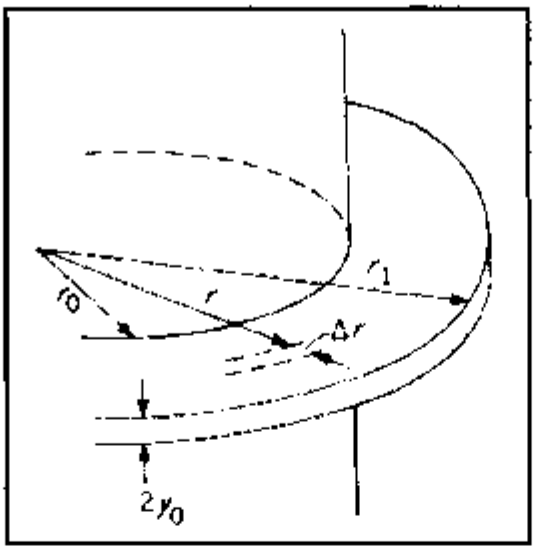

Figura 9. Aleta circunferencial de espessura uniforme.

(EL-WAKIL, 1971)

Considerações feitas para o modelo estudado:

- a temperatura do fluido refrigerante, t_f, é constante em torno da aleta;
- o coeficiente de transferência de calor por convecção, h, ao longo da aleta, é um valor uniforme;
- a aleta é feita de material homogêneo. Assume-se um coeficiente de condutividade térmica k de valor uniforme;
- a distribuição de temperatura e a condução de calor são unidimensionais, para um baixo número de Biot, conforme o caso geral. Como a espessura é muito pequena comparada com o valor de $r_1 - r_0$, a temperatura é função somente do raio, r;
- a geração de calor na aleta é desprezivel, isto é, $q''' = 0$; para efeito de generalidade, a equação será obtida com $q''' \neq 0$, e no final será feito $q''' = 0$.

A distribuição de temperatura θ na aleta será determinada através da solução analítica da equação (3.6), com as respectivas condições de contorno na base e no topo da aleta. Se o fluxo de calor, q'', em $r = r_0$, é conhecido, tem-se a primeira condição de contorno para o problema. Assim:

$$q'' = q_0 \quad em \quad r = r_0 \tag{4.1a}$$

onde q_0 é o fluxo de calor na base da aleta.

Para a segunda condição de contorno, a ser empregada no topo da aleta, pode-se fazer uma consideração física que a perda de calor no seu topo tem um efeito desprezível em comparação com a perda pelas superfícies laterais. Portanto, ter-se-ia $\theta = 0 \ em \ r = r_1$, onde assume-se que a aleta é tão longa que nenhuma transferência de calor ocorre na sua extremidade. No entanto, sabe-se que muitas aletas não são tão longas, como é o caso do modelo estudado, tendo portanto algum calor transferido do seu topo, ou seja, há convecção na extremidade.

Em muitas situações práticas, o fluxo de calor em aletas com convecção na extremidade pode ser calculado por um método aproximado e simples. Se o coeficiente de transferência de calor por convecção, h, é assumido uniforme sobre toda a superfície da aleta, deve-se imaginar a aleta contendo um novo raio equivalente a $r' = r_1 + \varepsilon$, como mostrado na Figura 10. Há um isolamento na sua extremidade, para que o calor seja transmitido somente nas superfícies planas superior e inferior, onde ε corresponde à meia espessura da aleta, ou seja, $\varepsilon = y_0$.

Desta forma, para a obtenção da transferência de calor como antes, o raio adicionado ε substitui a área da extremidade, ou topo, exposta anteriormente por uma área periférica de mesmo valor. O erro desta aproximação no cálculo da temperatura é menor que 8% para um número de Biot inferior a 0,5 (KREITH, 1977). Este valor corresponde perfeitamente ao modelo estudado, pois $h\,\Delta y/k = 0{,}167$, onde $\Delta y = 2y_0$, calculado com os dados da Tabela 1. Assim, sob estas considerações, o novo raio da aleta será dado pelo símbolo $r' = r_1 + y_0$, chamado de raio equivalente ou corrigido. Portanto, a segunda condição de contorno torna-se:

$$\frac{d\theta}{dr} = 0 \quad em \quad r = r_1 + y_0 = r' \tag{4.1b}$$

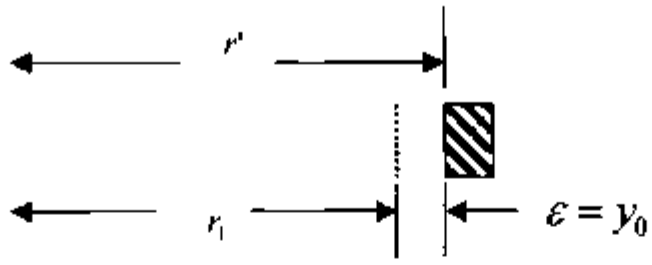

Figura 10. Aleta com novo raio r' e extremidade isolada.

4.3. Solução analítica da equação diferencial para a distribuição de temperatura e o fluxo de calor na aleta

A equação para o balanço de calor do elemento diferencial da aleta circunferencial, de comprimento radial Δr, pode ser escrito substituindo $A = (2y_0)(2\pi r)$, que equivale à área transversal da aleta, e sua derivada $\frac{dA}{dr} = 4\pi y_0$, na expressão (3.6), para $x = r$, repetida abaixo:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{A}\frac{d\theta}{dx}\frac{dA}{dx} - m^2\theta = -\frac{q'''}{k}$$

e obtendo como equação diferencial resultante:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - m_0^2\theta = -\frac{q'''}{k} \qquad (4.2)$$

onde $m_0^2 = \frac{C\,h}{A\,k}$. No qual $C = 2\,(2\pi r)$, para o perímetro superior e inferior do elemento diferencial na aleta circunferencial, e, conforme foi visto, a área é $A = 2y_0\,(2\pi r)$, para a superfície cilíndrica. Portanto, tem-se que $m_0^2 = \frac{h}{k\,y_0}$.

Para a obtenção da solução geral da equação (4.2), resolve-se a equação homogênea correspondente:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - m_0^2\theta = 0 \qquad (4.2.1)$$

Esta expressão nada mais é que a forma da equação diferencial de Bessel modificada de ordem zero, dada por:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - \left(m_0^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)\theta = 0$$

onde n corresponde à ordem da equação de Bessel.

Assim, a solução da equação homogênea, θ_{hom}, consiste de duas funções linearmente independentes, combinadas a seguir:

$$\theta_{hom} = A\, I_0(m_0\, r) + B\, K_0(m_0\, r)$$

onde I_0 e K_0 são funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipos, de ordem zero, e A e B são constantes, determinadas pelas condições de contorno. O estudo das funções de Bessel foi feito através das literaturas de LAMARSH (1972); EL-WAKIL (1971) e RICE & DO (1995).

A solução particular, θ_P, proveniente da equação (4.2), é dada por:

$$\theta_P = \frac{q'''}{m_0^2\, k}$$

Combinando as duas soluções, $\theta_{hom} + \theta_P$, tem-se a solução geral da equação diferencial para θ:

$$\theta = A\, I_0(m_0\, r) + B\, K_0(m_0\, r) + \frac{q'''}{m_0^2\, k} \qquad (4.3)$$

Como admite-se que a geração de calor na aleta é desprezível, ou seja, que $q''' = 0$, portanto:

$$\theta = A\, I_0(m_0\, r) + B\, K_0(m_0\, r) \qquad (4.4)$$

A equação para o fluxo de calor é:

$$q'' = -k\frac{d\theta}{dr} \qquad (4.5)$$

Aplicam-se as condições de contorno, dadas por:

$$q'' = q_0 \quad em \quad r = r_0 \quad e \quad \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad em \quad r = r_1 + y_0 = r'$$

Da segunda condição de contorno, $\frac{d\theta}{dr} = 0 \quad em \quad r = r_1 + y_0 = r'$, o valor da derivada será:

$$\frac{d\theta}{dr} = A\, m_0\, I_1(m_0\, r) - B\, m_0\, K_1(m_0\, r) \tag{4.6}$$

sendo I_1 e K_1 funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipos, e de primeira ordem. Aplicando a segunda condição de contorno em (4.6), as expressões para A e B são:

$$A = B\,\frac{K_1(m_0\, r')}{I_1(m_0\, r')} \quad \text{ou} \quad B = A\,\frac{I_1(m_0\, r')}{K_1(m_0\, r')}$$

Assim, da primeira condição de contorno, $q'' = q_0 \quad em \quad r = r_0$, resolvendo em (4.5), obtém-se:

$$q_0 = -A\, k\, m_0\, I_1(m_0\, r_0) + B\, k\, m_0\, K_1(m_0\, r_0) \tag{4.7}$$

Substituindo em (4.7), para A e B, as expressões para as mesmas são:

$$A = \frac{q_0}{m_0\, k}\;\frac{K_1(m_0\, r')}{\left[I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')\right]}$$

$$B = \frac{q_0}{m_0\, k}\;\frac{I_1(m_0\, r')}{\left[I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')\right]}$$

Através da substituição de A e B na equação (4.4), determina-se a equação para a distribuição de temperatura na aleta:

$$\theta = \frac{q_0}{m_0\, k}\;\frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')} \tag{4.8}$$

onde $m_0 = \sqrt{\dfrac{h}{k\ y_0}}$ e q_0 é um valor supostamente conhecido.

Substituindo os valores de A e B na equação (4.7) encontra-se a expressão para o cálculo do fluxo de calor:

$$q'' = q_0 \ \frac{I_1(m_0\ r')\ K_1(m_0\ r) - K_1(m_0\ r')\ I_1(m_0\ r)}{I_1(m_0\ r')\ K_1(m_0\ r_0) - I_1(m_0\ r_0)\ K_1(m_0\ r')} \tag{4.9}$$

4.3.1. Análise da distribuição de temperatura e do fluxo de calor ao longo da aleta

A elaboração dos perfis de distribuição de temperatura e do fluxo de calor ao longo da aleta são itens imprescindíveis no dimensionamento correto da superfície estendida, já que a medida de sua extensão é responsável diretamente pela eficiência de transmissão de calor para o fluido adjacente.

O estudo do comportamento térmico ao longo da aleta é melhor visualizado através de dois gráficos, um para a distribuição de temperatura θ, dado pelo excesso de temperatura, e outro para o fluxo de calor q'', respectivamente. As curvas são calculadas com o uso das equações (4.8) para θ e (4.9) para q'', em função da variação no raio r, com dados da Tabela 1.

Os gráficos são construídos para um valor da condutividade térmica k fixado em 18 $W/m\,°C$. Este valor é aproximado e baseado na faixa de variação da condutibilidade com a temperatura para o aço inox 304, coletado das literaturas de EL-WAKIL (1971); McADAMS (1954); ÖZIŞIK (1990) e PITTS & SISSOM (1977).

TABELA 1

Dados para a aleta circunferencial unidimensional

Espessura da aleta: $2y_0 = 0{,}005\ m$

Raio do elemento combustível (sem aleta): $r_0 = 0{,}0125\ m$

Raio da aleta: $r_1 = 0{,}0225\ m$

Raio equivalente da aleta: $r' = r_1 + y_0 = 0{,}025\ m$

Material da aleta: aço inox do tipo 304 (liga: Cr, Ni, Mn, C, Si)

Temperatura do fluido: $t_f = 200\ °C$

Fluxo de calor na base da aleta: $q_0 = 360.000\ W/m^2$

Coeficiente de condutividade térmica: $k = 18\ W/m\ °C$

Coeficiente de transferência de calor por convecção: h = 600 $W/m^2\ °C$

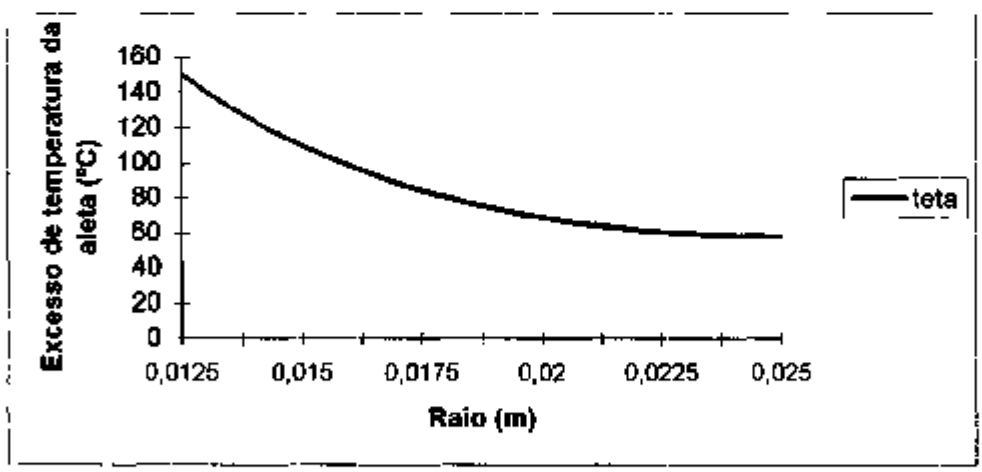

Figura 11. Excesso de temperatura em função do raio.

A Figura 11 mostra o perfil do excesso de temperatura ao longo da aleta versus a variação no raio. O comportamento da curva retrata a redução gradativa do valor do excesso de temperatura. Desta forma, há uma consequente diminuição na transferência de calor por convecção para o fluido frio adjacente, à medida que o ponto de cálculo distancia-se da base da aleta, ou seja, de sua fonte de calor. Observa-se também um excesso de temperatura de aproximadamente 60 °C no topo da aleta, confirmando as suposições feitas na seção 4.2.

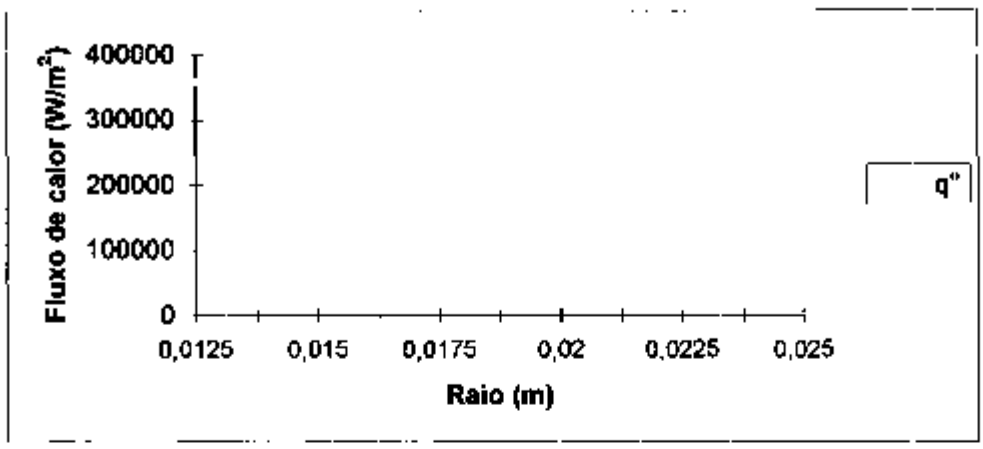

Figura 12. Fluxo de calor em função do raio.

A Figura 12 retrata o comportamento do fluxo de calor ao longo da aleta em função da variação no raio. O fluxo de calor também sofre uma redução gradativa à medida que se desloca em direção à extremidade da aleta, com um consequente decréscimo no valor das temperaturas, à medida que o calor vai sendo transferido ao fluido por convecção.

Observa-se a grande importância destes gráficos no estudo do dimensionamento adequado da superfície estendida, por razões de eficiência térmica e de economia.

5. DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE GERAL DE SENSIBILIDADE – APLICAÇÃO DO FORMALISMO DIFERENCIAL

O coeficiente geral de sensibilidade, que é posteriormente utilizado na análise de sensibilidade do modelo, é determinado através da aplicação do formalismo diferencial da teoria da perturbação, baseado na diferenciação do funcional resposta considerado. Os detalhes teóricos do formalismo, bem como da análise de sensibilidade, estão presentes nos Apêndices 2 e 1, respectivamente.

A sequência de cálculos do formalismo diferencial tem, em primeiro lugar, a determinação da equação derivada, para, posteriormente, a obtenção da equação adjunta, suas correspondentes condições de contorno e o concomitante bilinear. Em seguida, a equação adjunta é resolvida, finalizando com o cálculo do coeficiente geral de sensibilidade.

O coeficiente de sensibilidade é calculado para um sistema de duas equações, pois, desta maneira, pode-se introduzir o fluxo de calor na análise incorporado como uma variável de estado. Sendo assim, é possível tratar problemas diretos e funcionais respostas mais gerais. Portanto, o sistema é expresso para a distribuição de temperatura, equação (4.2), e para o fluxo de calor, equação (4.5). Os funcionais respostas e parâmetros estudados são definidos no item (5.3.).

5.1. A equação derivada

A equação derivada é dada por:

$$\underline{H}\, f_1 = S_{f0} \tag{5.1}$$

Substituindo o valor de $\frac{d\theta}{dr}$, da equação do fluxo de calor $q'' = -k\frac{d\theta}{dr}$, na expressão para a distribuição de temperatura (4.2), encontra-se m_1:

$$m_1 = \frac{dq''}{dr} + \frac{1}{r}\, q'' + k\, m_0^2\, \theta - q''' = 0$$

E m_2 vem da equação do fluxo de calor:

$$m_2 = q'' + k\, \frac{d\theta}{dr} = 0$$

Montando o sistema de equações para m_1 e m_2, tem-se o sistema generalizado $m(f,p)$:

$$m(f,p) = 0 \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \dfrac{dq''}{dr} + \dfrac{1}{r}\, q'' + k\, m_0^2\, \theta - q''' \\ q'' + k\, \dfrac{d\theta}{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores de estado são dados por $f_1 = q''$ e $f_2 = \theta$. Portanto, o operador da função derivada $\underline{H}$ torna-se:

$$\underline{H} = \frac{\bar{\partial} m}{\partial f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_1} & \dfrac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_2} \\ \dfrac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} & \dfrac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dr}(\,.\,) + \dfrac{1}{r}(\,.\,) & k\, m_0^2\,(\,.\,) \\ 1\,(\,.\,) & k\, \dfrac{d}{dr}(\,.\,) \end{bmatrix}$$

O termo de fonte da equação derivada é:

$$S_{(i)} = -\frac{\partial m}{\partial p_i} = \begin{bmatrix} -k_{ii}\, m_0^2\, \theta - k\, \theta\, 2 m_0\, m_{0ii} \\ -k_{ii}\, \dfrac{d\theta}{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1(i)} \\ S_{2(i)} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

observando que se $q''' = 0$, então $q''_{ii} = 0$. Além do mais, o termo q''' não depende das variáveis de estado.

Equação derivada obtida:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dr}+\frac{1}{r} & k\,m_0^2 \\ 1 & k\,\frac{d}{dr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{ji} \\ \theta_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1(i)} \\ S_{2(i)} \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{cases} \frac{d\dot{q}_{ji}}{dr} + \frac{1}{r}\,\dot{q}_{ji} + k\,m_0^2\,\theta_{ji} = S_{1(i)} \\ \dot{q}_{ji} + k\,\frac{d\theta_{ji}}{dr} = S_{2(i)} \end{cases}$$

5.2. A equação adjunta, as condições de contorno e o concomitante bilinear

Para encontrar a equação adjunta tem-se que:

$$< f_{ji}\,(\underline{H}^*\,f^*) > = < f^*\,(\underline{H}\,f_{ji}) > + P\,(f^*, f_{ji})$$

que é a equação (A2.15) do Apêndice 2, onde f^* corresponde à função adjunta de f_{ji} e $P\,(f^*, f_{ji})$ é o concomitante bilinear, no qual se refere aos valores das funções f^* e f_{ji} no contorno.

A integração para o cálculo da função adjunta, da expressão $< f^*\,(\underline{H}\,f_{ji}) >$, é realizada no espaço de fase de r_0 a r', para cada vetor de estado. Sendo assim,

$$< f^*\,(\underline{H}\,f_{ji}) > = < q'^*\left[\frac{d\ddot{q}_{ji}}{dr} + \frac{1}{r}\,\dot{q}_{ji} + k\,m_0^2\,\theta_{ji}\right] > + < \theta^*\left[\dot{q}_{ji} + k\,\frac{d\theta_{ji}}{dr}\right] >$$

As integrais são resolvidas com o fator peso de $2\pi r$ [1], devido às particularidades dos funcionais resposta escolhidos, e arrumam-se os termos para cada funcional derivado. Os detalhes são apresentados no Apêndice 3. As equações obtidas para o cálculo do operador adjunto são:

---

[1] O fator peso $2\pi r$ ortogonaliza algumas funções de Bessel e torna mais simples encontrar a solução para a equação adjunta.

$$[f_{/i}]^T \; \underline{H}^* f^* = [f_{/i}]^T \begin{bmatrix} -\dfrac{dq''^*}{dr} + \theta^* \\ -k\dfrac{d\theta^*}{dr} - \dfrac{k}{r}\theta^* + k\, m_0^2\, q''^* \end{bmatrix} =$$

$$= [f_{/i}]^T \begin{bmatrix} -\dfrac{d}{dr} & 1 \\ k\, m_0^2 & -k\dfrac{d}{dr} - \dfrac{k}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q''^* \\ \theta^* \end{bmatrix}$$

Desta expressão conclui-se que o operador adjunto é

$$\underline{H}^* = \begin{bmatrix} -\dfrac{d}{dr}(\,.\,) & 1(\,.\,) \\ k\, m_0^2\,(\,.\,) & -k\dfrac{d}{dr}(\,.\,) - \dfrac{k}{r}(\,.\,) \end{bmatrix}$$

e a equação adjunta é dada pelo sistema:

$$\underline{H}^* f^* = S^* \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} -\dfrac{dq''^*}{dr} + \theta^* \\ -k\dfrac{d\theta^*}{dr} - \dfrac{k}{r}\theta^* + k\, m_0^2\, q''^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

onde S^* é conhecido com a escolha dos funcionais resposta.

O concomitante bilinear, para os dois vetores de estado, que resulta com sinal invertido, tem valor:

$$P(f^*, f_{/i}) = -2\pi \left\{ q''_{/i}\, q''^*\, r + \theta_{/i}\, k\, \theta^*\, r \right\}_{r_0}^{r'}$$

Para que o concomitante bilinear não dependa das funções derivadas é empregado o resultado da derivação das condições de contorno, bem como a aplicação das condições de contorno da equação adjunta.

A derivação das condições de contorno $q'' = q_0$ em $r = r_0$ e $\dfrac{d\theta}{dr} = 0$ em $r = r'$, tem como resultado:

$$q''_{/i} = q_{0/i} \;\text{ em }\; r = r_0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dr}\theta_{/i} = 0 \;\text{ em }\; r = r'$$

Esta última condição de contorno corresponde à condição adiabática na ponta da aleta, pois se $q'' = -k\dfrac{d\theta}{dr}$, então $q''_{/t} = -\left[k_{/t}\dfrac{d\theta}{dr} + k\dfrac{d\theta_{/t}}{dr}\right] = 0$. Portanto, tem-se que $q''_{/t} = 0$, em $r = r'$, fato constatado na Figura 12.

As condições de contorno da equação adjunta foram escolhidas de tal forma que reduzam o concomitante bilinear, produzindo um resultado que possa ser resolvido facilmente. Sendo assim, as condições de Dirichlet escolhidas são:

$$\theta^* = 0 \;\; em \;\; r = r_0 \qquad e \qquad \theta^* = 0 \;\; em \;\; r = r'$$

Aplicando as condições de contorno acima e a (4.1a), na expressão do concomitante bilinear, obtém-se:

$P(f^*, f_{/t}) = -2\pi\left\{\left(q''_{/t}\, q''^* r\right)_{r'} - \left(q_{0/t}\, q''^* r\right)_{r_0}\right\}$, porém o seu primeiro termo é nulo, pois $q''_{/t}$ na equação (4.9) tem valor zero para r'. Assim, o valor final torna-se:

$$P(f^*, f_{/t}) = 2\pi\left\{\left(q_{0/t}\, q''^* r\right)_{r_0}\right\} \tag{5.4}$$

5.3. Casos escolhidos para a análise de sensibilidade

5.3.1. Funcionais estudados

1) Taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta - Q_p

$$Q_p = \int_z q''\,\delta(r - r_p)\,2y_0\,dz = 2y_0\int_{r_0}^{r'} q''\,\delta(r - r_p)\,2\pi r\,dr \tag{5.5}$$

As funções conhecidas das coordenadas do espaço de fase são $S_1^* = \delta(r - r_p)\,2y_0$ e $S_2^* = 0$, onde $\delta(r - r_p)$ é uma função impulso (Delta de Dirac) concentrada no ponto p da aleta, de valor $r = r_p = 0{,}018\,m$, escolhido arbitrariamente, com detalhes na Figura 13. O valor nominal do funcional Q_p é obtido com o q'' da equação (4.9) e com os dados da Tabela 1.

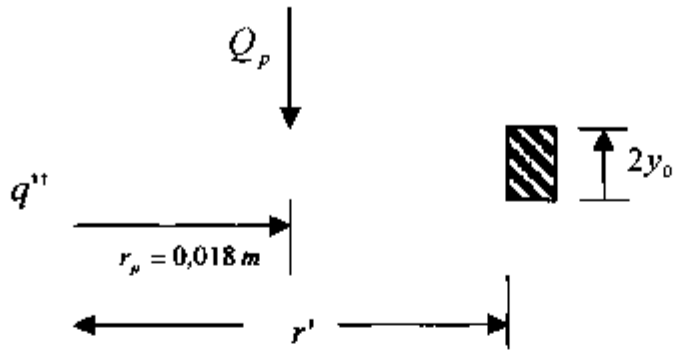

Figura 13. Localização do ponto p na aleta para o cálculo da taxa de fluxo de calor - Q_p

2) Excesso médio de temperatura da aleta - $\overline{\theta}$

$$\overline{\theta} = \frac{1}{\pi r'^2 - \pi r_0^2} \int_{r_0}^{r'} \theta \, 2\pi r \, dr \tag{5.6}$$

As funções conhecidas das coordenadas do espaço de fase são $S_1^* = 0$ e $S_2^+ = \frac{1}{\pi r'^2 - \pi r_0^2}$. O valor nominal do funcional $\overline{\theta}$ é obtido com o θ da equação (4.8) e também com dados da Tabela 1.

5.3.2. Parâmetros estudados

Os parâmetros para a análise de sensibilidade foram escolhidos em função da importância dos mesmos nos projetos de equipamentos térmicos, dados por:

a) Meia espessura da aleta - y_0

b) Coeficiente de condutibilidade térmica - k

c) Coeficiente de transferência de calor por convecção - h

d) Fluxo de calor na base da aleta - q_0

5.4. Cálculo das funções adjuntas θ^* e q''^*

O sistema de equações para o cálculo de θ^* é:

$$-\frac{dq''^*}{dr} + \theta^* = S_1^*$$

$$k\, m_0^2\, q''^* - k\frac{d\theta^*}{dr} - \frac{k}{r}\theta^* = S_2^*$$

Substituindo

$$q''^* = \frac{1}{m_0^2}\left[\frac{S_2^*}{k} + \frac{d\theta^*}{dr} + \frac{\theta^*}{r}\right] \tag{5.7}$$

obtida da segunda expressão, na equação para S_1^*, fazendo as derivações, obtém-se a expressão para θ^*:

$$\frac{d^2\theta^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \left(m_0^2 + \frac{1}{r^2}\right)\theta^* = -m_0^2\, S_1^* - \frac{1}{k}\frac{dS_2^*}{dr} \tag{5.8}$$

A solução desta equação é dada em termos da solução homogênea, $\theta_{hom}{}^*$, e de uma solução particular, $\theta_p{}^*$:

$$\theta^* = \theta_{hom}{}^* + \theta_p{}^*$$

5.4.1. Solução da equação homogênea para os funcionais resposta

A equação homogênea é dada por:

$$\frac{d^2\theta_{hom}{}^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta_{hom}{}^*}{dr} - \left(m_0^2 + \frac{1}{r^2}\right)\theta_{hom}{}^* = 0 \tag{5.9}$$

Esta expressão é a forma da equação diferencial de Bessel modificada:

$$\frac{d^2\theta_{hom}{}^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta_{hom}{}^*}{dr} - \left(m_0^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)\theta_{hom}{}^* = 0$$

onde n corresponde à ordem da equação de Bessel, de valor um, neste caso.

Assim, a solução da equação homogênea, θ_{hom} *, consiste de duas funções linearmente independentes, com constantes diferentes para cada funcional:

$$\theta_{hom}{}^* = A\, I_1(m_0\, r) + B\, K_1(m_0\, r) \quad \text{para o funcional } Q_p$$

$$\theta_{hom}{}^* = C\, I_1(m_0\, r) + D\, K_1(m_0\, r) \quad \text{para o funcional } \overline{\theta}$$

onde I_1 e K_1 são funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipos, de ordem um, e A, B, C e D são constantes, determinadas pela aplicação das condições de contorno na solução geral de cada funcional.

5.4.2. Solução particular, por função de Green e pelo método da superposição de Dirac, e solução geral para cada funcional resposta

5.4.2.1. Funcional Q_p - Taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta

O sistema será resolvido observando que $\left[S^*\right]^T = \left[\delta(r - r_p)\, 2y_0, 0\right]$. Portanto, a equação (5.8), para este funcional, toma a forma:

$$\frac{d^2\theta^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \left(m_0^2 + \frac{1}{r^2}\right)\theta^* = -m_0^2\, \delta(r - r_p)\, 2y_0 \qquad (5.10)$$

A metodologia para o cálculo da solução particular por função de Green e por superposição de Dirac (BASSANEZI & FERREIRA JÚNIOR, 1988), detalhada no Apêndice 4, consiste em:

a) Construir a função de Green $G(r, r_p)$ para a equação (5.10), dada por $H^*\, G(r, r_p) = f(r)$, que seja solução da equação homogênea $H^*\, G(r, r_p) = 0$ e usando as mesmas condições de contorno que θ^*. Observando que $f(r)$ corresponde ao lado direito da equação (5.8), com um valor específico para cada funcional resposta. Supõe-se que $G(r, r_p)$ é contínua em $r = r_p$ e que sua derivada tenha um salto finito, dado por:

$$\left[\frac{\partial G(r, r_p)}{\partial r}\right]_{r_p}^{r_p^+} = -m_0^2\, 2y_0$$

b) Soluções para $G(r,r_p)$, à esquerda e à direita do pulso, respectivamente, e condições de contorno

$$G^-(r,r_p) = A_1\ I_1(m_0\ r) + B_1\ K_1(m_0\ r) \quad \text{para} \quad r_0 < r < r_p$$

$$G^+(r,r_p) = A_2\ I_1(m_0\ r) + B_2\ K_1(m_0\ r) \quad \text{para} \quad r_p < r < r'$$

Condições de contorno $G^-(r_0,r_p) = 0$ e $G^+(r',r_p) = 0$

c) Condições de conexão entre os coeficientes:

$$G^-(r_p,r_p) = G^+(r_p,r_p)$$

$$\frac{\partial G^+(r_p,r_p)}{\partial r} - \frac{\partial G^-(r_p,r_p)}{\partial r} = \left[\frac{\partial G(r,r_p)}{\partial r}\right]_{r_p}^{r_p^+}$$

A solução particular é dada pela expressão

$$\theta_p{}^* = \int_{r_0}^{r} G(r,s)\ f(s)\ ds = \int_{r_0}^{r} G(r,s)\ \delta(s-r_p)\ ds = G(r,r_p)$$

com utilização das propriedades da função delta de Dirac (LAMARSH, 1972, p. 563)

Após o cálculo dos coeficientes, com o uso da Tabela 1 e com a aplicação das condições de contorno e de conexão, $\theta_p{}^* = G(r,r_p)$ apresenta-se na forma de duas soluções

$$G^-(r,r_p) = 0{,}13015\ I_1(m_0\ r) - 0{,}40058\ K_1(m_0\ r) \quad (\text{para} \quad r_0 < r < r_p)$$

$$G^+(r,r_p) = -\ 0{,}021307\ I_1(m_0\ r) + 1{,}65295\ K_1(m_0\ r) \quad (\text{para} \quad r_p < r < r')$$

Como $\theta_{hom}{}^* = A\ I_1(m_0\ r) + B\ K_1(m_0\ r)$, a solução geral da equação (5.10) é:

$$\theta^* = A\ I_1(m_0\ r) + B\ K_1(m_0\ r) + G(r,r_p)$$

Aplicando as condições de contorno da equação adjunta, dadas por $\theta^* = 0 \quad em \quad r = r_0$ e $\theta^* = 0 \quad em \quad r = r'$, obtém-se

$$A = B = 0$$

Portanto, a solução geral toma-se igual a:

$$\theta^* = G(r,r_p) = \begin{cases} G^-(r,r_p) & para \;\; r_0 < r < r_p \\ G^+(r,r_p) & para \;\; r_p < r < r' \end{cases}$$

Assim:

$$\theta_1{}^* = 0{,}13015\, I_1(m_0\, r) - 0{,}40058\, K_1(m_0\, r) \qquad \text{para} \;\; r_0 < r < r_p \qquad (5.11)$$

$$\theta_2{}^* = -\,0{,}021307\, I_1(m_0\, r) + 1{,}65295\, K_1(m_0\, r) \qquad \text{para} \;\; r_p < r < r' \qquad (5.12)$$

O cálculo de q''^* é feito através da substituição do valor de S_2^+ , que possui valor zero, e das soluções gerais para θ^*, dadas pelas equações (5.11) e (5.12), na equação (5.7), resultando em:

$$q_1{}''^* = \frac{1}{m_0^2}\left\{\left[0{,}13015\left(m_0\, I_2(m_0\, r) + \frac{1}{r}\, I_1(m_0\, r)\right) - 0{,}40058\left(-m_0\, K_2(m_0\, r) + \frac{1}{r}\, K_1(m_0\, r)\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\left\{0{,}13015\, I_1(m_0\, r) - 0{,}40058\, K_1(m_0\, r)\right]\right\} \qquad \text{para} \;\; r_0 < r < r_p \qquad (5.13)$$

$$q_2{}''^* = \frac{1}{m_0^2}\left\{\left[-0{,}021307\left(m_0\, I_2(m_0\, r) + \frac{1}{r}\, I_1(m_0\, r)\right) + 1{,}65295\left(-m_0\, K_2(m_0\, r) + \frac{1}{r}\, K_1(m_0\, r)\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\left[-\,0{,}021307\, I_1(m_0\, r) + 1{,}65295\, K_1(m_0\, r)\right]\right\} \qquad \text{para} \;\; r_p < r < r' \qquad (5.14)$$

5.4.2.2. Funcional $\overline{\theta}$ - Excesso médio de temperatura da aleta

O sistema será resolvido observando que $\left[S^*\right]^T = \left[0, \dfrac{1}{\pi r'^2 - \pi r_0'^2}\right]$. Portanto, a equação (5.8), para este funcional, toma a forma:

$$\frac{d^2\theta^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \left(m_0^2 + \frac{1}{r^2}\right)\theta^* = 0$$

A solução particular tem valor zero, pois $f(s) = 0$, como mostrado abaixo:

$$\theta_p{}^* = \int_{r_0}^{r'} G(r,s)\, f(s)\, ds = \int_{r_0}^{r'} G(r,s)\, 0\, ds = 0$$

Como $\theta_{hom}{}^* = C\, I_1(m_0\, r) + D\, K_1(m_0\, r)$, a solução geral para o funcional é:

$$\theta^* = C\, I_1(m_0\, r) + D\, K_1(m_0\, r) + 0$$

Aplicando as condições de contorno da equação adjunta, dadas por $\theta^* = 0 \quad em \quad r = r_0$ e $\theta^* = 0 \quad em \quad r = r'$, obtém-se uma solução trivial, onde:

$$C = D = 0$$

Portanto, a solução geral torna-se igual a:

$$\theta^* = 0 \tag{5.15}$$

Para o cálculo de q'^*, faz-se a substituição do valor de $S_2^+ = \dfrac{1}{\pi r'^2 - \pi r_0^2}$ e da solução geral para θ^*, que tem valor zero, dada pela equação (5.15) na equação (5.7), resultando em:

$$q'^* = \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)} \tag{5.16}$$

5.4.3. Estudo gráfico das funções adjuntas

Com o intuito de verificar o comportamento das funções adjuntas no formalismo diferencial dos métodos perturbativos, faz-se uma análise gráfica das mesmas em função da variação no raio da aleta. Desta forma, é possível o estudo da importância da função ao longo da aleta, para as condições de contorno dadas. Esta importância refere-se às contribuições das perturbações no funcional resposta.

5.4.3.1. Funcional resposta Q_p

5.4.3.1.1. Função adjunta θ^*

Para a função adjunta θ^*, o gráfico foi elaborado com os valores das equações (5.11) e (5.12), com o uso dos dados da Tabela 1, resultando em:

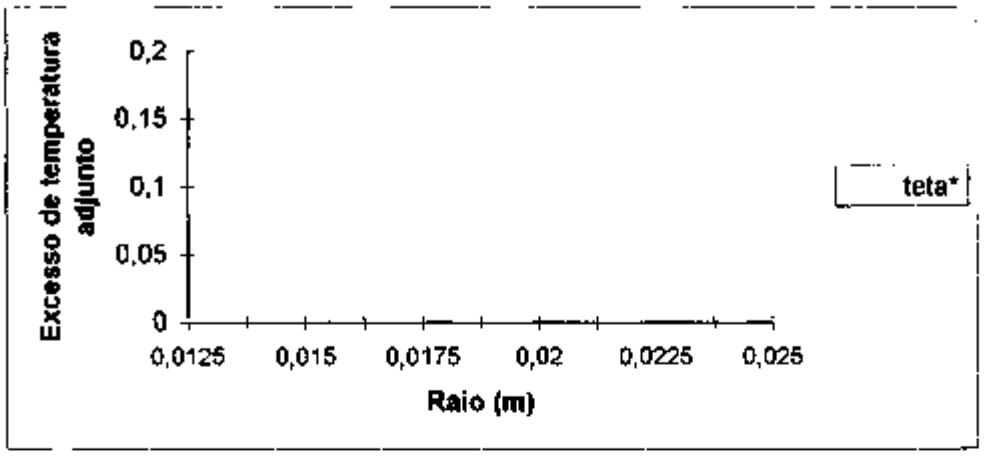

Figura 14. Excesso de temperatura adjunto em função do raio, para Q_p

Neste gráfico, o perfil esperado é devido à presença da fonte de impulso no ponto p, que neste exemplo corresponde ao valor máximo da função adjunta, indicando que a maior importância da função está em torno do mesmo. Observa-se a continuidade da função em p e a descontinuidade da derivada primeira provocada pelo salto finito admitido.

5.4.3.1.2. Função adjunta q''^*

O gráfico para a função adjunta q''^* foi construído com os valores das equações (5.13) e (5.14), também com o uso dos dados da Tabela 1, resultando em:

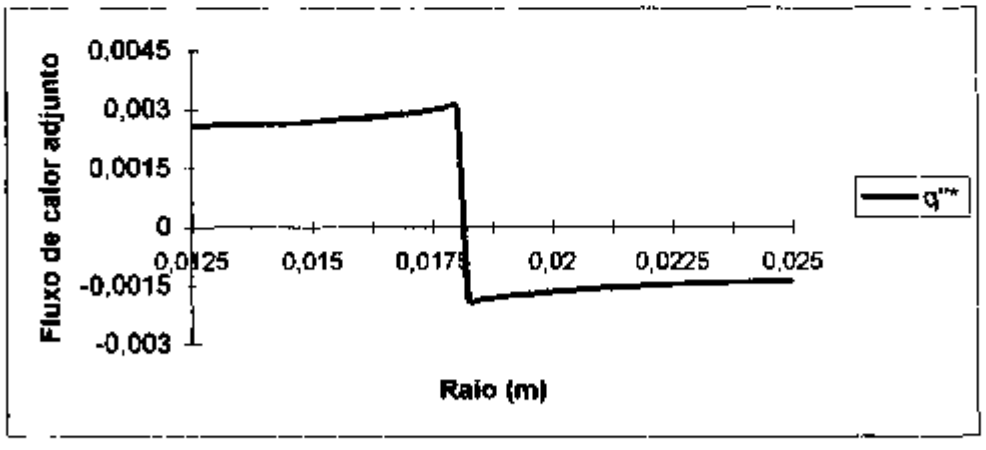

Figura 15. Fluxo de calor adjunto em função do raio, para Q_p

O gráfico da figura 15 mostra um salto da descontinuidade no ponto p, devido à relação entre θ^* e q''^*. Também nota-se que a maior importância da função localiza-se em torno do ponto p.

5.4.3.2. Funcional resposta $\overline{\theta}$

5.4.3.2.1. Função adjunta θ^*

Para a função adjunta θ^*, o gráfico foi feito com o valor da equação (5.15), de valor zero, resultando em:

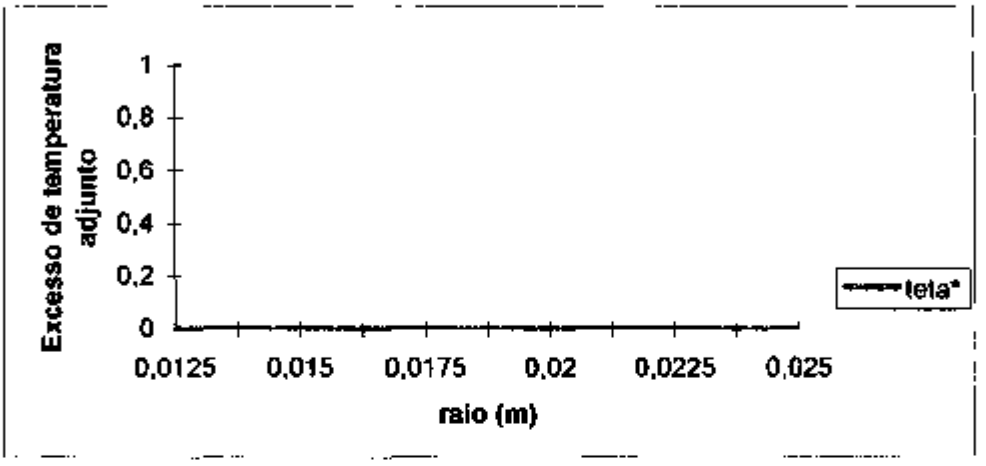

Figura 16. Excesso de temperatura adjunto em função do raio, para $\overline{\theta}$

O gráfico retrata um comportamento uniforme nulo para a função adjunta θ^*, devido às condições de contorno impostas ao problema.

5.4.3.2.2. Função adjunta q''^*

Para a função adjunta q''^*, o gráfico foi elaborado com o valor da equação (5.16) e com os dados da Tabela 1, originando:

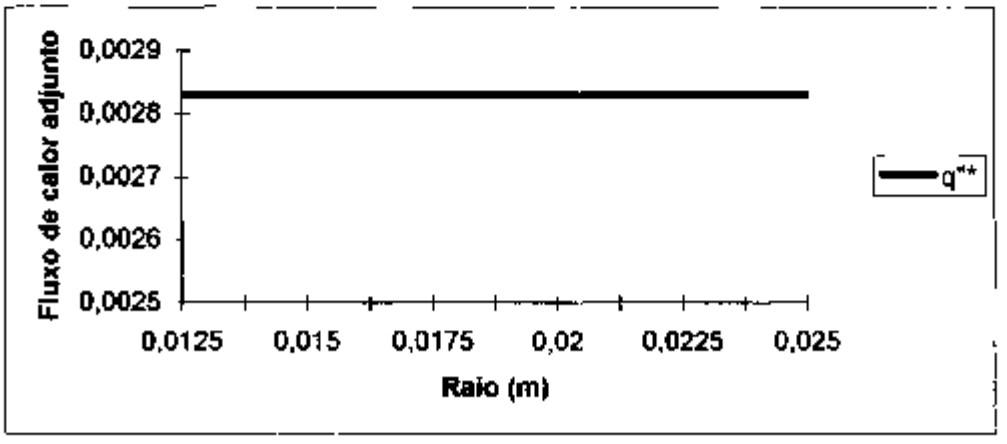

Figura 17. Fluxo de calor adjunto em função do raio, para $\overline{\theta}$

O gráfico mostra a uniformidade do fluxo de calor adjunto, e este é o único que determina as variações na resposta do $\overline{\theta}$.

5.4.4. Cálculo dos coeficientes de sensibilidade

A expressão geral para o coeficiente de sensibilidade é:

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = < f\, S^*_{ji} > + < f^*\, S_{(i)} > + P\,(f^*, f_{ji}) \qquad (5.17)$$

que, após a inclusão das funções, toma-se:

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = < q''\, S^+_{1ji} > + < q''^*\, S_{1(i)} > + < \theta\, S^*_{2ji} > + < \theta^*\, S_{2(i)} > + P\,(f^*, f_{ji}) \quad (5.18)$$

observando que esta expressão é integrada com um fator peso de $2\pi r$.

Assim, esta expressão é resolvida para cada funcional resposta e em função dos parâmetros escolhidos, com detalhes das integrações no Apêndice 5.

5.4.4.1. Coeficiente geral de sensibilidade para o funcional Q_p

Após a substituição das equações (4.8), (4.9), (5.2) e (5.4) na expressão (5.18), obtém-se:

$$\frac{\delta Q_p}{\delta p_i} = < q_0\ \frac{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r) - K_1(m_0\, r')\, I_1(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, S^*_{1ji} > + < q''^*\,(-k_{ji}\, m_0^2\, \theta -$$

$$-k\theta\ 2m_0\, m_{0ji}) > + \ < \frac{q_0}{m_0\, k}\ \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, S^*_{2ji} > +$$

$$+ < \theta^*\,(-\, k_{ji}\, \frac{d\theta}{dr}) > + \ 2\pi\, \left(q_{0ji}\, q''^*\, r\right)_{r_0} \qquad (5.19)$$

observando que θ^* e q''^* correspondem cada uma a duas equações, dadas pelas expressões (5.11) e (5.13) para $\theta_1{}^*$ e $q_1^{-}{}^*$, e (5.12) e (5.14) para $\theta_2{}^*$ e $q_2^{+}{}^*$, que devem ser integradas nos intervalos de r_0 a r_p e de r_p a r', respectivamente. O restante das integrações é integrado no intervalo de r_0 a r'.

5.4.4.1.1. Coeficientes de sensibilidade para cada parâmetro

Lembrando que $\left[S^{+}\right]^{T} = \left[\delta(r - r_p)\, 2y_0, 0\right]$. Assim, $S_1^{+} = \delta(r - r_p)\, 2y_0$ e $S_2^{+} = 0$.

a) Parâmetro y_0

$$\frac{\delta Q_p}{\delta y_0} = < q_0 \frac{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r) - K_1(m_0\, r')\, I_1(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')} S_{1/i}^{+} > + < q''^{*} (-k\, \theta\, 2m_0\, m_{0/i}) >$$

onde $m_{0/i} = \dfrac{\partial m_0}{\partial y_0} = -\dfrac{h\, k}{2m_0\, (k\, y_0)^2}$, lembrando que $m_0 = \sqrt{\dfrac{h}{k\, y_0}}$.

b) Parâmetro k

$$\frac{\delta Q_p}{\delta k} = < q''^{*} (-k_{/i}\, m_0^2\, \theta - k\, \theta\, 2m_0\, m_{0/i}) > + < \theta^{*} (-k_{/i} \frac{d\theta}{dr}) >$$, porém

$(-k_{/i}\, m_0^2\, \theta - k\, \theta\, 2m_0\, m_{0/i}) = 0$, pois $m_{0/i} = \dfrac{\partial m_0}{\partial k} = -\dfrac{h\, y_0}{2m_0\, (k\, y_0)^2}$. Assim:

$$\frac{\delta Q_p}{\delta k} = < \theta^{*} (-k_{/i} \frac{d\theta}{dr}) >$$

c) Parâmetro h

$$\frac{\delta Q_p}{\delta h} = < q''^{*} (-k\, \theta\, 2m_0\, m_{0/i}) >$$

onde $m_{0/i} = \dfrac{\partial m_0}{\partial h} = \dfrac{1}{2m_0\, k\, y_0}$.

d) Parâmetro q_0

$$\frac{\delta Q_p}{\delta q_0} = 2\pi \left(q_{0/i}\, q''^{*}\, r\right)_{r_0}$$

5.4.4.2. Coeficiente geral de sensibilidade para o funcional $\bar{\theta}$

Após a substituição das equações (4.8), (4.9), (5.2), (5.15), (5.16) e (5.4) na expressão (5.18), obtém-se:

$$\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta p_i} = < q_0 \; \frac{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r) - K_1(m_0\, r')\, I_1(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, S^+_{1/i} > + < \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)}$$

$$(-k_{/i}\, m_0^2\, \theta - k\theta \;\; 2m_0\, m_{0/i}) > + \; < \frac{q_0}{m_0\, k} \; \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')} \cdot$$

$$\cdot S^+_{2/i} > \; + \; 2\pi \left(q_{0/i}\, q'^{*}\, r\right)_{r_0} \qquad (5.20)$$

Neste caso, a integração será realizada inteiramente entre r_0 e r'.

5.4.4.2.1. Coeficientes de sensibilidade para cada parâmetro

Lembrando que $\left[S^+\right]^T = \left[0, \frac{1}{\pi r'^2 - \pi r_0^2}\right]$. Assim, $S_1^+ = 0$ e $S_2^+ = \frac{1}{\pi r'^2 - \pi r_0^2}$.

a) Parâmetro y_0

$$\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta y_0} = < \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)} \; (-k\, \theta \;\; 2m_0\, m_{0/i}) >$$

onde $m_{0/i} = \frac{\partial m_0}{\partial y_0} = -\frac{h\, k}{2m_0\, (k\, y_0)^2}$.

b) Parâmetro k

$$\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta k} = < \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)} \; (-k_{/i}\, m_0^2\, \theta - k\, \theta \;\; 2m_0\, m_{0/i}) >$$, porém

$(-k_{/i}\, m_0^2\, \theta - k\, \theta\, 2m_0\, m_{0/i}) = 0$, pois $m_{0/i} = \frac{\partial m_0}{\partial k} = -\frac{h\, y_0}{2m_0\, (k\, y_0)^2}$. Assim: $\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta k} = 0$

c) Parâmetro h

$$\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta h} = < \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)} \; (-k\, \theta \;\; 2m_0\, m_{0/i}) >$$

onde $m_{0//} = \dfrac{\partial m_0}{\partial h} = \dfrac{1}{2m_0\, k\, y_0}$.

d) **Parâmetro** q_0

$$\frac{\delta\vec{\theta}}{\delta q_0} = \; 2\pi \left(q_{0//},\, q''^{*}\, r\right)_{z_0}$$

6. RESULTADOS E ANÁLISES

Os coeficientes de sensibilidade, calculados com os dados da Tabela 1 e com ajuda de programa computacional numérico para a integração das funções de Bessel (conforme Apêndice 5), são mostrados abaixo:

TABELA 2

Coeficientes de sensibilidade

Funcionais	**Parâmetros**			
	y_0 (m)	k $(W/m\,°C)$	$h(W/m^2\,°C)$	q_0 (W/m^2)
Q_p (W)	35055,623 W/m	0,768 $m\,°C$	- 0,0238 $m^2\,°C$	1 m^2
$\bar{\theta}$ $(°C)$	32000 $°C/m$	0 $m\,°C^2/W$	-0,133 $m^2\,°C^2/W$	0,000222 $m^2\,°C/W$

A Tabela 2 mostra valores relativos, não sendo possivel fazer uma comparação dos resultados em escala absoluta. Por exemplo, um parâmetro com um valor não perturbado muito pequeno pode ter um coeficiente de sensibilidade relativo muito alto, o que não necessariamente implica em uma maior sensibilidade do funcional com relação ao mesmo.

Desta forma, para a obtenção de valores que possam ser comparados entre os parâmetros, para a análise das causas que provocam os maiores efeitos no sistema, um dos objetivos da análise de sensibilidade, define-se o coeficiente de sensibilidade absoluto, dado abaixo:

$$S = \frac{\delta R}{\delta p} \frac{p_0}{R_0} \tag{6.1}$$

onde:

S é o coeficiente de sensibilidade absoluto;

$\frac{\delta R}{\delta p}$ é o coeficiente de sensibilidade relativo;

R_0 é o valor do funcional resposta sem perturbação (método direto);

p_0 é o valor do parâmetro sem perturbação (método direto).

O coeficiente de sensibilidade absoluto, com mais detalhes no Apêndice 1, fornece a variação percentual resultante no funcional em função de uma incerteza de 1% no valor nominal do parâmetro.

Os valores dos funcionais sem perturbação (método direto) são obtidos, com os dados da Tabela 1, das equações (5.5) e (5.6), para Q_p e $\overline{\theta}$, respectivamente. Quanto aos valores dos parâmetros sem perturbação, estes foram extraídos da Tabela 1. A Tabela 3 mostra os valores nominais para os mesmos, de grande utilidade no cálculo dos coeficientes de sensibilidade absolutos, sendo estes visualizados na Tabela 4.

TABELA 3

Valores dos funcionais e parâmetros sem perturbação

Funcionais		Parâmetros			
$Q_p\ (W)$	$\overline{\theta}\ (°C)$	$y_0\ (m)$	$k\ (W/m\,°C)$	$h(W/m^2\,°C)$	$q_0\,(W/m^2)$
73,321	80	0,0025	18	600	360000

TABELA 4

Coeficientes de sensibilidade absolutos

Funcionais	Parâmetros			
	y_0 (m)	$k\ (W/m\,°C)$	$h(W/m^2\,°C)$	$q_0\,(W/m^2)$
$Q_p\ (W)$	1,195	0,188	- 0,195	1,000363
$\overline{\theta}$ $(°C)$	1	0	-1	0,9997

A Tabela 4 mostra os valores absolutos, para efeito comparativo da influência dos parâmetros no funcional resposta de interesse. Em uma primeira análise da tabela, nota-se que os parâmetros y_0 e q_0 são os que mais influenciam os funcionais respostas, explicada aparentemente pela influência direta nas equações dos funcionais. Em outras palavras, para cada 1% de incerteza nestes parâmetros, tem-se o equivalente a praticamente 1% de incerteza no funcional.

O parâmetro k, para o funcional Q_p, apresenta a menor influência quanto aos valores absolutos. No caso para o funcional $\overline{\theta}$, o coeficiente de sensibilidade é nulo, indicando que não existe dependência do mesmo com relação ao parâmetro k, porque está vinculado ao tipo de condição de contorno admitida nos extremos da aleta para o problema. E com relação ao parâmetro h, este apresenta fraca influência no funcional Q_p e grande influência no funcional $\overline{\theta}$.

É importante observar que a contribuição total dos parâmetros nos funcionais depende do coeficiente de sensibilidade e da incerteza real dos parâmetros. Como por exemplo, o parâmetro k apresenta uma incerteza na engenharia de 10%, já que depende do resultado de medidas, e o parâmetro h pode ter uma incerteza de 30%. Estes valores indicam que as contribuições totais dos mesmos são maiores que os números obtidos com a incerteza de 1%. Assim, é de extrema importância a verificação das incertezas reais dos parâmetros para uma análise de sensibilidade eficiente na elaboração de projetos da engenharia, assim como nas técnicas preventivas e corretivas.

A Tabela 5 exibe os resultados obtidos pelo método direto (equações 5.5 e 5.6) e pelo método perturbativo diferencial (equação A1.1 do Apêndice 1), com os respectivos erros relativos percentuais, objetivando a verificação da precisão do formalismo empregado. Os valores foram calculados com o uso da Tabela 1.

TABELA 5

Método direto x método perturbativo diferencial

		Funcionais	$Q_p\ (W)$			$\bar{\theta}\ (°C)$		
		$\delta p/p_0\ (x\,100)^a$	MD[b]	MP[c]	Erro %	MD[b]	MP[c]	Erro %
p_i	y_0 (m)	-15%	60,175	60,203	0,045	68	68	0
		-10%	64,557	64,492	0,102	72	72	0
		-5%	68,939	68,936	0,005	76	76	0
		0%	73,321	73,232	0,122	80	80	0
		5%	77,703	77,844	0,181	84	84	0
		10%	82,085	82,107	0,027	88	88	0
		15%	86,467	86,542	0,087	92	92	0
	k $(W/m\,°C)$	-15%	71,247	71,133	0,161	80	80	0
		-10%	71,939	71,857	0,113	80	80	0
		-5%	72,63	72,564	0,09	80	80	0
		0%	73,321	73,232	0,122	80	80	0
		5%	74,012	73,984	0,039	80	80	0
		10%	74,704	74,643	0,081	80	80	0
		15%	75,395	75,254	0,187	80	80	0
	h $(W/m^2\,°C)$	-15%	75,469	75,493	0,033	92	94,1	2,302
		-10%	74,753	74,794	0,055	88	88,9	1,01
		-5%	74,037	74,179	0,192	84	84,2	0,251
		0%	73,321	73,232	0,122	80	80	0
		5%	72,605	72,583	0,03	76	76,2	0,251
		10%	71,889	71,912	0,031	72	72,7	1,01
		15%	71,173	71,128	0,064	68	69,6	2,302
	q_0 (W/m^2)	-15%	62,319	62,323	0,006	68,003	68	0,005
		-10%	65,986	65,989	0,004	72,002	72	0,003
		-5%	69,654	69,655	0,002	76,001	76	0,002
		0%	73,321	73,321	0	80	80	0
		5%	76,989	76,987	0,002	83,999	84	0,001
		10%	80,656	80,653	0,003	87,998	88	0,003
		15%	84,323	84,319	0,005	91,997	92	0,004

a. Variação relativa percentual.
b. Método direto (valor padrão).
c. Método perturbativo diferencial.

Na análise da Tabela 5, o formalismo diferencial apresenta os seguintes resultados:

a) Os erros relativos possuem valores abaixo de 2,5%, e na maioria inferiores a 0,2%, como ocorre no funcional Q_p, indicando uma boa precisão do método empregado. Com relação ao funcional $\overline{\theta}$, ocorre exatidão de cálculo para o parâmetro y_0, conforme esperado;

b) Nota-se uma descrição correta da tendência de variação dos funcionais, evidenciando sua boa representatividade. Como por exemplo, para o funcional Q_p em relação ao parâmetro h, este apresenta o comportamento descrescente em relação ao valor de referência;

c) Ambos os funcionais, quanto ao método perturbativo, possuem a maior sensibilidade quanto aos parâmetros y_0 e q_0, determinada pela diferença entre o valor nominal do funcional e o valor obtido com a maior perturbação do parâmetro, já constatada pela Tabela 4. O funcional $\overline{\theta}$ também apresenta uma boa sensibilidade quanto ao parâmetro h;

d) Quanto ao parâmetro k, este causa uma pequena sensibilidade diante de uma incerteza de 1% no funcional Q_p. E, para o funcional $\overline{\theta}$, verifica-se que não há sensibilidade do mesmo para com o parâmetro.

Os dados da Tabela 5 foram utilizados para a elaboração de gráficos que esboçam o comportamento para o método direto e para o método perturbativo, em relação à variação de cada parâmetro. Desta forma é possível uma melhor visualização da precisão e exatidão dos métodos empregados.

A análise é feita em grupos de quatro gráficos para cada funcional, correspondente ao número de parâmetros de interesse.

6.1. Análise de sensibilidade para o funcional Q_p

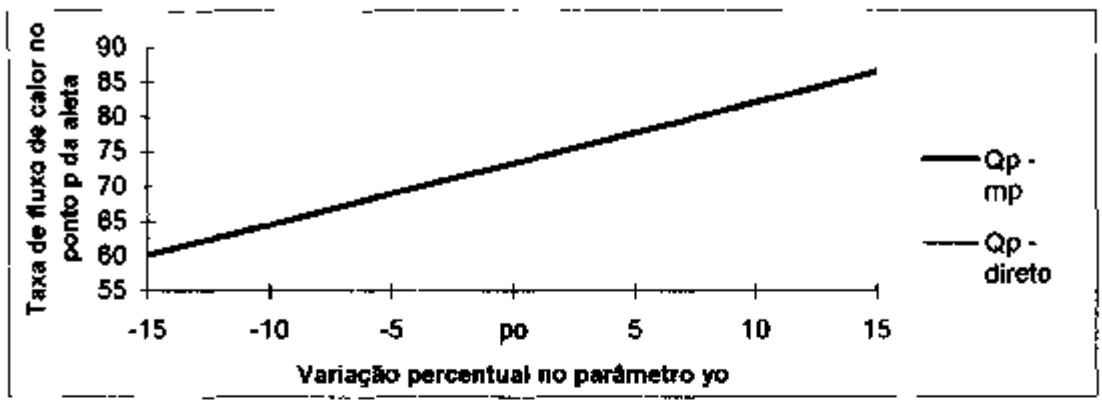

Figura 18. Taxa de fluxo de calor x meia espessura da aleta

A Figura 18 retrata variações da taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta em relação à variação na sua meia espessura. A análise gráfica mostra uma boa precisão e exatidão obtidas pelo método perturbativo diferencial em relação ao modelo adotado. Este comportamento linear é esperado, em virtude da relação linear direta entre o funcional e o parâmetro.

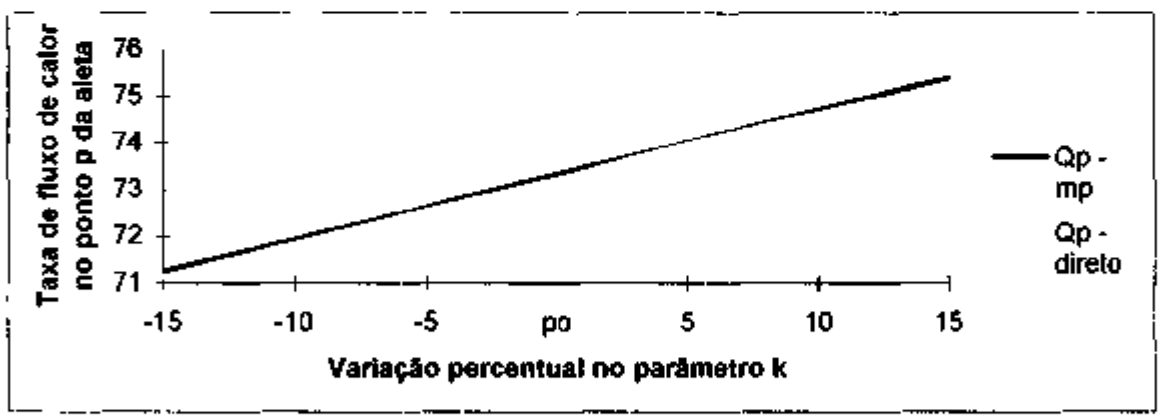

Figura 19. Taxa de fluxo de calor x coeficiente de condutividade térmica

A Figura 19 apresenta o comportamento da variação da taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta em função da variação no coeficiente de condutividade térmica. O gráfico mostra a boa precisão obtida e nota-se que apesar de ser um dos parâmetros que menos influencia o funcional estudado, para uma incerteza de 1%, de acordo com a Tabela 4, o parâmetro k, conforme visto, apresenta uma maior incerteza, já que depende de medidas confiáveis para cada tipo de material.

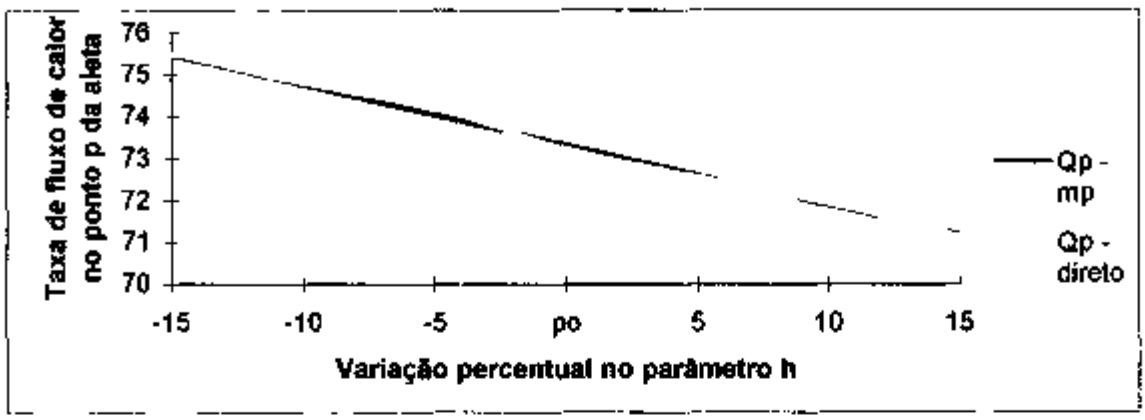

Figura 20. Taxa de fluxo de calor x coeficiente de transferência de calor

A Figura 20 mostra a variação da taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta em função da variação no coeficiente de transferência de calor por convecção. A análise do gráfico evidencia que as características de decrescimento são correspondidas, contendo bons resultados quanto à precisão, mesmo com a presença de fracas ondulações do método direto em virtude de suas pequenas não-linearidades. E para variações inferiores a -10% e superiores a 5%, nota-se que há uma boa exatidão nos valores obtidos pelo método perturbativo.

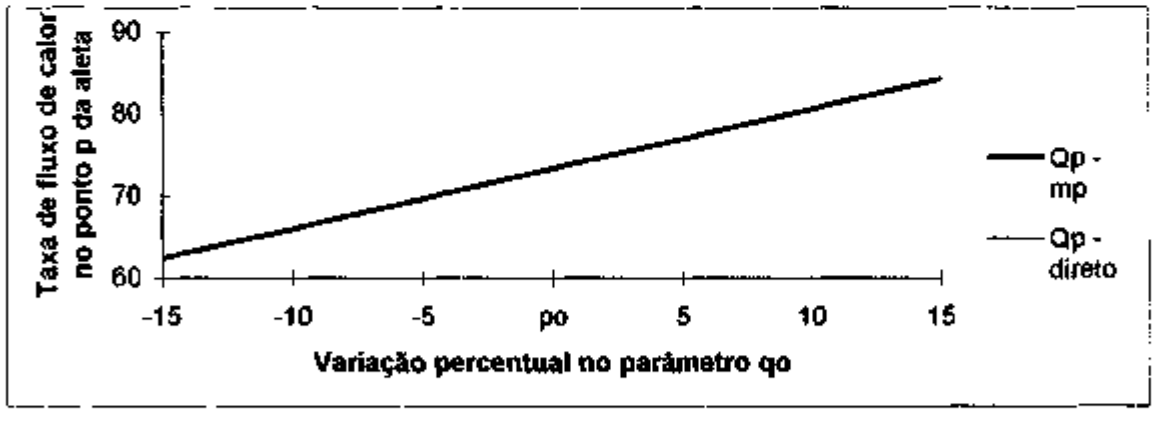

Figura 21. Taxa de fluxo de calor x fluxo de calor na base da aleta

Na Figura 21, variação da taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta versus variação no fluxo de calor na base da aleta, apresenta praticamente as mesmas características da Figura 18, para o parâmetro meia espessura da aleta , com os mesmos comentários válidos. Este parâmetros são os que provocam os maiores efeitos no funcional.

6.2. Análise de sensibilidade para o funcional $\overline{\theta}$

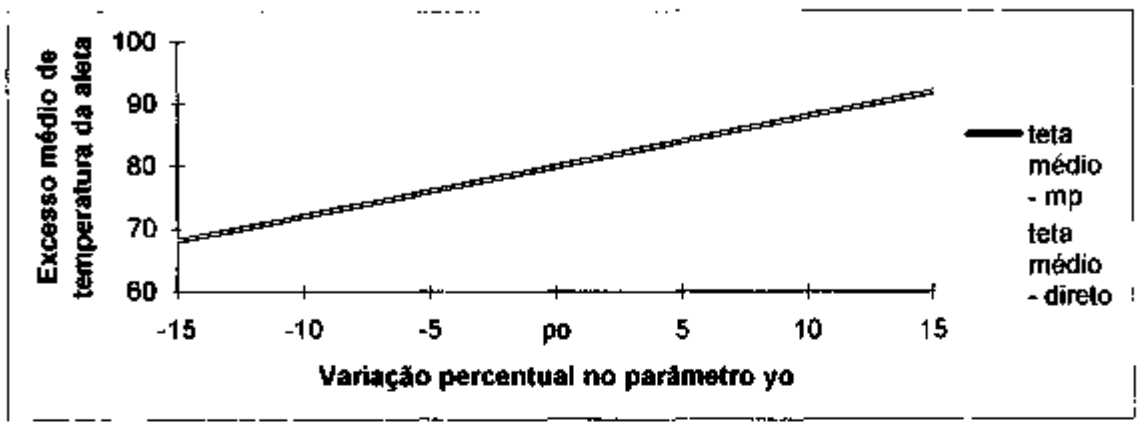

Figura 22. Excesso médio de temperatura x meia espessura da aleta

A Figura 22 exibe o comportamento do excesso médio de temperatura da aleta versus variação na sua meia espessura. A análise gráfica mostra que há uma boa precisão e exatidão obtidas pelo método perturbativo diferencial para o modelo adotado, evidenciando a sua boa representatividade. O comportamento linear, assim como na Figura 18, já é esperado, devido ao funcional variar diretamente com o parâmetro.

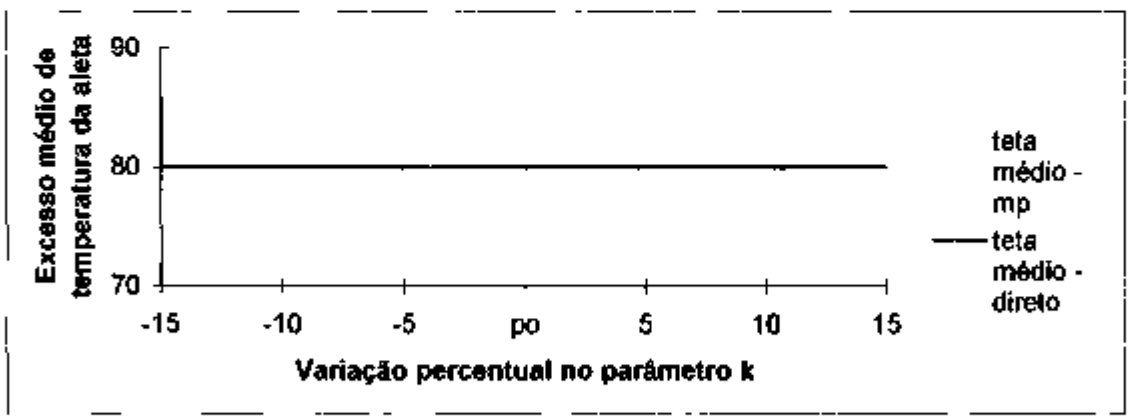

Figura 23. Excesso médio de temperatura x coeficiente de condutividade térmica

A Figura 23 retrata a variação do excesso médio de temperatura da aleta com relação ao coeficiente de condutividade térmica. O gráfico mostra que não há sensibilidade do funcional em relação às variações do parâmetro coeficiente de condutividade térmica, já que seu coeficiente de sensibilidade absoluto, dado pela Tabela 4, teve valor zero.

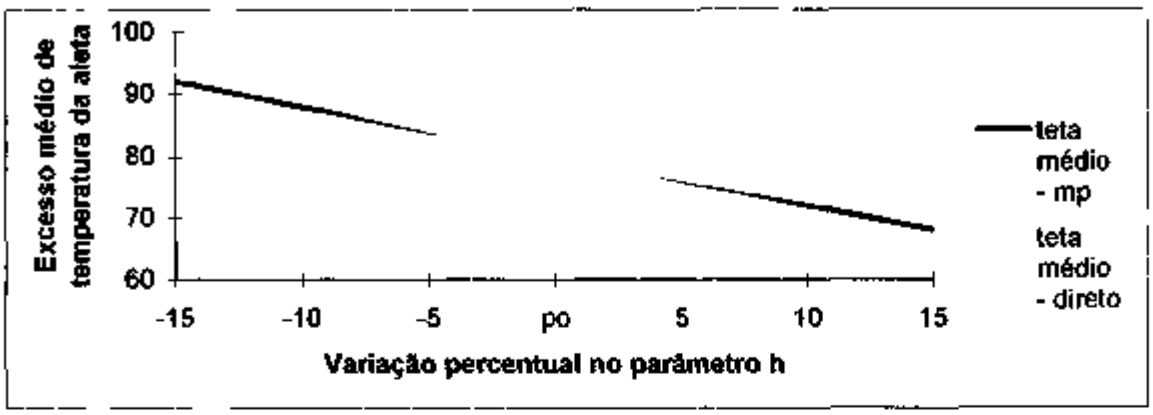

Figura 24. Excesso médio de temperatura x coeficiente de transferência de calor

A Figura 24 mostra a variação do excesso médio de temperatura da aleta versus coeficiente de transferência de calor por convecção. O comportamento do gráfico ilustra que o decrescimento foi correspondido. Com relação aos seus valores, é visto que há uma boa precisão, com erros relativos inferiores a 2,5%, para variações inferiores a −10% e superiores a 10%, e com boa precisão e exatidão para as variações entre estes limites.

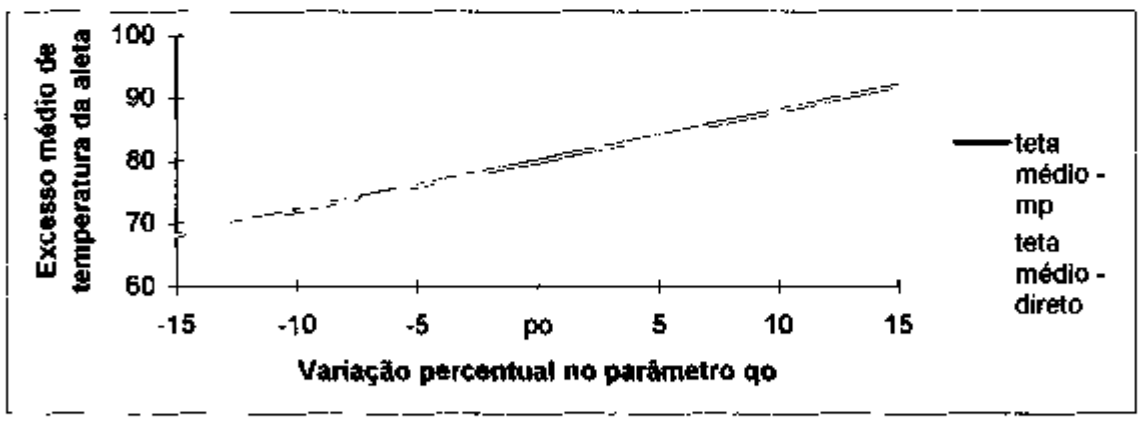

Figura 25. Excesso médio de temperatura x fluxo de calor na base da aleta

Finalizando, a Figura 25, variação do excesso médio de temperatura da aleta versus fluxo de calor na base da aleta, apresenta praticamente as mesmas características da Figura 22, com os mesmos comentários válidos, já que ambos os parâmetros provocam efeitos semelhantes no funcional estudado, influências estas entre as maiores dos parâmetros, juntamente com o parâmetro h.

7. CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA FUTUROS TRABALHOS

As principais conclusões são:

- O coeficiente de sensibilidade absoluto contribui de forma fundamental para a descoberta dos parâmetros mais sensíveis em um funcional resposta;

- Diante dos resultados obtidos, verificou-se que o método perturbativo diferencial da teoria da perturbação apresenta uma ótima representatividade para os casos analisados;

- Na maioria dos casos foi constatado uma boa precisão e exatidão;

- Os parâmetros que mais influenciaram o funcional resposta Q_p (taxa de fluxo de calor no ponto p da aleta) foram o y_0 (meia espessura da aleta) e o q_0 (fluxo de calor na base da aleta);

- No caso do funcional resposta $\bar{\theta}$ (excesso médio de temperatura da aleta), os parâmetros selecionados foram realmente relevantes, com exceção do k (coeficiente de condutividade térmica), pois este não provocou efeito no funcional;

- O formalismo diferencial satisfaz, para limitações físicas aceitáveis, as necessidades de descrição de um sistema, constituindo-se em uma importante ferramenta para análise de sensibilidade;

• Uma outra vantagem do método perturbativo constatada é que elimina-se as repetidas execuções do cálculo pelo método direto para a obtenção dos valores perturbados, com a determinação do coeficiente de sensibilidade;

• Foi observada a existência de uma relação entre a função de Green e a função adjunta, resultante da equação $\theta^* = G(r, r_p)$;

• Diante dos bons resultados do emprego do formalismo diferencial ao modelo, comprova-se a validade da aplicação do mesmo em problemas de transmissão de calor nas superfícies estendidas, mostrando-se de grande importância na elaboração de projetos da engenharia térmica.

Como propostas para a continuação do trabalho, tem-se como sugestões:

- Análise transitória do modelo e trabalho com a difusividade térmica e a capacidade calorífica específica do material, como parâmetros;

- Análise transitória do modelo com a inclusão da geração de calor na aleta;

- Aprofundamento do estudo da relação entre a função adjunta e a função de Green;

- Resolução da equação direta com a inclusão do coeficiente de transferência de calor da extremidade da aleta;

- Aplicação do formalismo GPT para demonstrar sua equivalência;

- Aplicação da metodologia em aletas de diferentes geometrias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, C. D. C.; MANZI, J. T.; LIRA, C. A. B. O.; ODLOAK, D. Stability conditions and sensitivity analysis for the neutralization process with a nonlinear PI controller. In: IAESTED INTERNATIONAL CONFERENCE, 19., Innsbruck, Austria, 2000.

ALBUQUERQUE, C. D. C. **Condições de estabilidade e análise de sensibilidade para processo de neutralização com controlador PI não linear**. 2001, 195 f. Dissertação – Departamento de Energia Nuclear, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

ALVIM, A. C. M.; ANDRADE LIMA, F. R.; GANDINI, A. Application of the heuristically based GPT theory to thermal-hydraulics problems. In: Congresso Geral de Energia Nuclear, 2. , Rio de Janeiro, 1988. v.1, p.447-458.

ANDRADE LIMA, F. R. & DA SILVA, F.C. **Teoria de perturbação generalizada aplicada à termohidráulica de reatores.** Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1984. 27p. (Programa de Engenharia Nuclear, PEN-125)

ANDRADE LIMA, F. R.; DA SILVA, F. C.; THOMÉ FILHO, Z. D.; ALVIM, A. C. M.; BARROSO, A. C. O.; SILVA, G. A. **Cálculo de sensibilidade de temperatura do refrigerante em relação aos parâmetros termohidráulicos.** Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1985. 113p. (Programa de Engenharia Nuclear, PEN-130)

ANDRADE LIMA, F. R. & ALVIM, A. C. M. **Tempera V2 – Um programa para análise de sensibilidade num canal refrigerante de reatores nucleares.** Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1986. 81p. (Programa de Engenharia Nuclear, PEN-139)

ANDRADE LIMA, F. R. & ALVIM, A. C. M. Aplicação da teoria da perturbação para análise de sensibilidade num canal refrigerante de reatores nucleares. **Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Nuclear**, Rio de Janeiro, n.1/2, p. 5-36, 1987.

ANDRADE LIMA, F. R. **Aplicações de métodos perturbativos ao modelo multicanal COBRA-IV-I, para cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores nucleares.** 1990, 425 f. Tese – Programa de Engenharia Nuclear/COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ANDRADE LIMA, F. R.; LIRA, C. A. B. O.; GANDINI, A. Sensitivity analysis of thermohydraulics system via heuristic generalized perturbation theory (HGPT) methods. **Annals of Nuclear Energy**, Grã-Bretanha, v. 20. n. 10, p. 679-690, 1993.

ANDRADE LIMA, F. R. & BLANCO, A. **Introduccion a los metodos perturbativos aplicados a problemas de ingenieria nuclear**, San Carlos de Bariloche: CNEA, Universidad Nacional de Cuyo, Instituto Balseiro, 1994. 61p.

ANDRADE LIMA, F. R.; LIRA, C. A. B. O.; GANDINI, A. Aplicação dos métodos perturbativos a problemas de segurança de reatores – estado da arte. In: SYMPOSIUM ON REGIONAL INTEGRATION IN NUCLEAR ENERGY, Rio de Janeiro, 1995. p.397-408.

ANDRADE LIMA, F. R.; GANDINI, A.; LIRA, C. A. B. O.; ALVIM, A. C. M.; MELO, P. F. F.; FRANÇA, W. F. L.; BALIÑO, J. L.; LARRETEGUY, A. E.; LORENZO, A.; BLANCO, A. Recent advances in perturbative methods applied to nuclear engineering problems. **Progress in Nuclear Energy,** Londres, v. 33, n. 1, p. 23-97, 1998.

BALIÑO, J. L. ; LARRETEGUY, A. ; LORENZO, A. ; ANDRADE LIMA, F. R. Application of perturbation methods and sensitivity analysis to waterhammer problems in hydraulic networks. In: BRAZILIAN MEETING ON REACTOR PHYSICS AND THERMAL-HYDRAULICS, 10., Águas de Lindóia, 1995. p.184–189.

BASSANEZI, R. C. & FERREIRA JÚNIOR, W. **Equações diferenciais com aplicações.** São Paulo: Editora Harbra Ltda., 1988.

BELÉM, J. A. T. **Modelo simplificado para simulação do comportamento termohidráulico do canal quente de reator nuclear tipo PWR.** 1993, 78 f. Dissertação - Departamento de Energia Nuclear, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BLANCO A. ; GHO, C. J. ; ANDRADE LIMA, F. R. Sensitivity analysys via low order HGPT methodology in BNCT applications. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SENSITIVITY ANALYSIS OF MODEL OUTPUT, 3., Madri, Espanha, 2001. Disponível em: < http://www.ciemat.es/convocatorias/eventos/samo2001/samo_summary.html >. Acesso em: 15 set. 2001.

BUTKOV, E. **Física matemática.** Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1988. p.358-374.

CACUCI, D. G.; WEBER, C. F.; OBLOW, E. M.; MARABLE, J. H. Sensitivity theory for general systems of nonlinear equations. **Nuclear Science and Engineering**, v. 75, p. 88-110, 1980.

DA SILVA, F. C. & ANDRADE LIMA, F. R. Cálculo de sensibilidade de temperatura do refrigerante em relação aos parâmetros termohidráulicos. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE REATORES E TERMOHIDRÁULICA, 5., Rio de Janeiro, 1985. **Anais.** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Energia Nuclear, 1985. v.1, p.345-360.

EL-WAKIL, M. M. **Nuclear heat transport.** New York: Intext Educational Publishers, 1971. p.131-156; 454-458.

ETCHEPAREBORDA, A. Control de horizonte móvil: Ensayo experimental sobre un pendulo invertido. In: CONGRESO LATINO DE CONTROL AUTOMÁTICO, 8., Viña del Mar, Chile, 1998. **Anales del VIII Congreso Latino de Control Automático.** Viña del Mar, Chile, 1998. p.177-181.

ETCHEPAREBORDA, A. Control de horizonte deslizante de sistemas no lineares com restricciones de desigualdad. **Revista de Trab. de la Inform. y Control**, 1999.

ETHERINGTON, H. **Nuclear engineering handbook**. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958. p.117-120.

GANDINI, A. **Métodos perturbativos para a análise de reatores nucleares.** Rio de Janeiro: IEN/CNEN, 1982.

GANDINI, A. Generalized perturbation theory (GPT) methods. A heuristic approach. **Advances in Nuclear and Science Technology**, v. 19, p. 205-380, 1987.

GANDINI, A. Transposition methods of experimental data to reference design. In: BRAZILIAN MEETING ON REACTOR PHYSICS AND THERMALHYDRAULICS, 10., Águas de Lindóia, 1995. p.169-177.

GURJÃO, E. C. **Aplicação da teoria da perturbação à análise de sensibilidade em geradores de vapor de usinas nucleares.** 1996, 96 f. Dissertação - Departamento de Energia Nuclear, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

GURJÃO, E. C.; LIRA, C. A. B. O.; ANDRADE LIMA, F. R. Aplicação da teoria da perturbação à análise de sensibilidade em geradores de vapor de usinas nucleares. In: CGEN – CONGRESSO GERAL DE ENERGIA NUCLEAR, 6., Rio de Janeiro, 1996a.

HOLMAN, J. P. **Heat transfer**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1963. p.1-30.

KERN, D. Q. **Processos de transmissão de calor.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A., 1987. p.1-45;396-434.

KREITH, F. **Princípios de transmissão de calor.** São Paulo: Editora Edgard Bluecher Ltda., 1977. p. 1-51.

LAMARSH, J. R. **Introduction to nuclear reactor theory.** New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1972. p.523-571.

LIRA, C. A. B. O.; ANTONINO, A. C. D.; ANDRADE LIMA, F. R.; CARNEIRO, C. J. G. Análise de sensibilidade de um modelo de transferência de soluto em solos através de métodos perturbativos. In: CONGRESSO DE ENGENHARIA MECÂNICA DO NORTE-NORDESTE, 3., Belém, Pará, 1994. p.94-97.

LIRA, C. A. B. O.; ANDRADE LIMA, F. R.; GANDINI, A. Application of perturbation methods for sensitivity analysis of nuclear power plant steam generator. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEW TRENDS IN NUCLEAR THERMOHYDRAULICS SYSTEMS, Pisa, Itália, 1994. **Proceedings.** Pisa, Itália, 1994a. v.1, p.501-506.

LIRA, C. A. B. O.; ANDRADE LIMA, F. R.; ANTONINO, A. C. D.; SILVA, M. P. Aplicabilidade do método perturbativo diferencial na análise de sensibilidade de um modelo da dinâmica da água no solo. In: CGEN – CONGRESSO GERAL DE ENERGIA NUCLEAR (em CD-ROM), 6., Rio de Janeiro, 1996.

LIRA, C. A. B. O.; ANTONINO, A. C. D.; ANDRADE LIMA, F. R.; CARNEIRO, C. J. G. Método perturbativo diferencial para análise de sensibilidade de um modelo de transferência de soluto em solos. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, Porto Alegre, v. 3, n. 2, p. 15-22, 1998.

MACIEL, E. S. G. **Análise de sensibilidade em um modelo simplificado do canal quente de reatores a água pressurizada via formalismo matricial.** 1995, 124 f. Dissertação - Departamento de Energia Nuclear, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

MACIEL, E. S. G.; ANDRADE LIMA, F. R.; LIRA, C. A. B. O. Análise de sensibilidade no canal quente de reatores tipo PWR, via formalismo matricial. In: ENFIR – ENCONTRO DE FÍSICA DE REATORES E TERMOHIDRÁULICA, 10., Águas de Lindóia, 1995a. p.190-195.

MACIEL, E. S. G.; ANDRADE LIMA, F. R.; LIRA, C. A. B. O. Estudo de sensibilidade em um modelo simplificado de canal quente de um PWR utilizando a teoria de perturbação via formalismo matricial. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, Rio de Janeiro, v. 20, n. 2, p. 201-218, 1998.

MATSUBARA, K.; NAKABE, K; SUZUKI, K. Flow and heat transfer in a channel with fins attached to one wall. **Trans. JSME**, Kyoto, v. 62, n. 602B, p. 3675-3682, 1996.

McADAMS, W. H. **Heat transmission.** Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1954. p. 268-271; 447.

MIKHEYEV, M. **Fundamentals of heat transfer**. Moscou: Mir Publishers, 1977. p. 9-40; 194-197; 294-301.

MOCHIMARU, Y. & LIU, C. Spectral finite difference analysis of natural convection from rows of vertical fins. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ADVANCES IN COMPUTATIONAL HEAT AND MASS TRANSFER, 1997, Çesme, Turquia. **Anais eletrônicos.** Çesme, Turquia: INTERNATIONAL CENTER FOR HEAT AND MASS TRANSFER, 1997. Disponível em: < http://ichmt.me.metu.edu.tr/abstracts/CHT-97paplist.html >. Acesso em: 22 Fev. 2001.

OBLOW, E. M. Sensitivity theory from a different viewpoint. **Nuclear Science and Engineering**, v. 59, p. 187-189, 1976.

OBLOW, E. M. Sensitivity theory for reactor thermal-hydraulics problems. **Nuclear Science and Engineering**, v. 68, p. 322-337, 1978.

OLIVEIRA, A. C. J. G. **Aplicação da teoria de perturbação para cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores PWR, usando um modelo de dois canais.** 1988. Dissertação - Departamento de Energia Nuclear, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

OLIVEIRA, A. C. J. G.; ANDRADE LIMA, F. R.; ALVIM, A. C. M. Aplicação da teoria da perturbação a um modelo de dois canais para cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores PWR. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE REATORES E TERMOHIDRÁULICA, 7., Recife, 1989. **Anais.** Recife, 1989. v.2, p.269-280.

ÖZIŞIK, M. N. **Transferência de calor.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan S.A., 1990 p.1-68; 631-632.

PITTS, D. R. & SISSOM, L. E. **Theory and problems of heat transfer.** New York: McGraw-Hill, 1977. p.1-28; 306.

RICE, R. G. & DO, D. D. **Applied mathematics and modelling for chemical engineers.** New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. p.127-141.

ROSMAN, E. C. **Desempenho de trocadores de calor com tubos aletados.** 1979, 101 f. Dissertação - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SANDERS, R. M. G.; ANDRADE LIMA, F. R.; ALVIM, A. C. M. Aplicação da teoria da perturbação (formalismo diferencial) para a análise de sensibilidade em geradores de vapor de centrais nucleares PWR. In: CONGRESSO GERAL DE ENERGIA NUCLEAR, 2., Rio de Janeiro, 1988. **Anais.** Rio de Janeiro, 1988. p.425-436.

SILVA FILHO, E. **Modelo simplificado para análise de departure from nucleate boiling (DNB)**. 1979, 83 f. Dissertação - Departamento de Energia Nuclear, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

SOUZA, A. L. **Modelo homogêneo de um gerador de vapor para simulação de transitórios operacionais e acidentes em centrais nucleares tipo PWR**. 1981, 154 f. Dissertação - Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro.

STEWART, C. W.; WHEELER, C. L.; CENA, R. J.; McMONAGLE, C. A.; CUTA, J. M.; TRENT, D. S. **COBRA-IV: The model and the method.** Batelle, Pacific Northwest Laboratories, Richland, EUA, 1977. (BNWL-2214, NPC-4)

SYED, K. S.; TUPHOLME, G. E.; WOOD, A. S.; HEGGS, P. J. Laminar forced convection on the shell-side of a finned double-pipe heat exchanger. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ADVANCES IN COMPUTATIONAL HEAT AND MASS TRANSFER, 1997, Çesme, Turquia. **Anais eletrônicos.** Çesme, Turquia: INTERNATIONAL CENTER FOR HEAT AND MASS TRANSFER, 1997. Disponivel em: <http://ichmt.me.metu.edu.tr/abstracts/CHT-97paplist.html>. Acesso em: 22 Fev. 2001.

WEBER, C. F.; CACUCI, D. G.; OBLOW, E. M. Sensitivity theory for nonlinear equations with nonlinear responses. **American Nuclear Society**, v. 33, p. 338-340, 1979.

WELTY, J. R. **Engineering heat transfer**. New York: Wiley International Edition, 1974. p.1-13;79-88.

WENZEL, U. & MUELLER-STEINHAGEN, H. Heat transfer from a finned surface to boiling liquid mixtures. **Heat Transfer Engineering**, v. 16, n. 1, p. 29-35, 1995.

WHITAKER, S. **Fundamental principles of heat transfer.** New York: Pergamon Press Inc., 1977 p.1-73.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

1. A ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Na análise de sistemas, é comum a determinação do efeito resultante de variações ou perturbações na solução obtida ou no funcional resposta de interesse técnico. Este procedimento, de uma maneira geral, é conhecido como análise de sensibilidade, sendo de grande valia na compreensão do comportamento de um sistema, quando sujeito a alterações de estado.

A análise de sensibilidade pode ser realizada através de dois métodos, sendo eles:

- Método direto
- Métodos perturbativos

O método direto é realizado de uma forma convencional, ou seja, através da construção da superfície de resposta, no qual se varia o parâmetro de interesse e se mantêm os demais fixos. Para a obtenção do parâmetro mais sensível do sistema, calcula-se o valor do funcional resposta, para cada variação do parâmetro em estudo, de forma consecutiva, tornando o processo bastante trabalhoso.

A aplicação dos métodos perturbativos na análise de sensibilidade trouxe, como grandes vantagens, uma maior facilidade e rapidez na obtenção dos resultados, pois podem ser aplicados a modelos complexos, ou seja, quando não há solução analítica e quando a solução numérica é muito onerosa do ponto de vista computacional.

A análise de sensibilidade, como um todo, inclusive com a aplicação dos métodos perturbativos, apresenta alguns objetivos básicos, dados a seguir.

1.1. Os objetivos da análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade possui objetivos fundamentais que, realizados em conjunto, fornecem um perfil suficiente para o estudo da influência das mais diversas variações de parâmetros. Os principais são:

a) Estudo do comportamento quantitativo para aproximações lineares: determinação do novo valor do funcional resposta em função das perturbações no sistema.

Este objetivo parte do princípio do cálculo do novo valor do funcional resposta com dependência do coeficiente de sensibilidade obtido, bem como da variação do parâmetro em estudo, através da equação abaixo (a equação de uma reta):

$$R = R_0 + \frac{\delta R}{\delta p}\Delta p \qquad \text{(A1.1)}$$

onde R é a nova resposta, R_0 é a solução de referência do funcional resposta, ou seja, o valor não perturbado, e Δp corresponde ao intervalo de variação do parâmetro. Outra dependência é quanto a $\frac{\delta R}{\delta p}$, que nada mais é que o coeficiente de sensibilidade, equivalente à declividade da reta, dada pela tangente, no ponto nominal. Lembrando que a declividade positiva indica uma reta ascendente e a declividade negativa uma reta descendente.

Esta equação também pode ser utilizada para o cálculo da variação máxima permitida no parâmetro para uma variação pré-determinada da resposta, de grande interesse industrial.

b) Estudo do comportamento qualitativo da variação dos diversos parâmetros no funcional resposta de interesse.

Outro objetivo da análise de sensibilidade é relativo ao estudo do perfil da resposta com a variação de um parâmetro específico. Para esta análise, constrói-se o que se chama de superfície de resposta (Figura 26), ou seja, a curva que relaciona a variação da resposta com o parâmetro. Com a inclusão da reta relativa ao coeficiente de sensibilidade será possível verificar a aproximação linear para variações negativas e positivas do parâmetro.

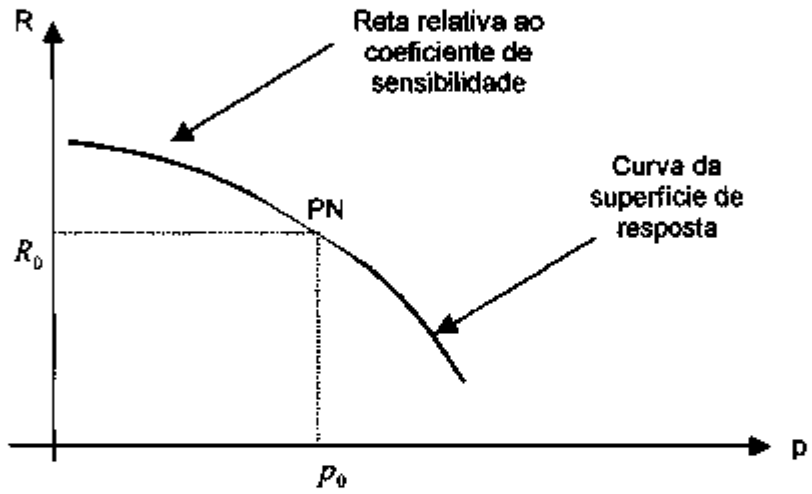

Figura 26. Comportamento da resposta R com a variação do parâmetro p.

Na Figura 26, PN equivale ao ponto nominal tangente correspondente aos valores de referência p_0 e R_0. A análise do gráfico permite verificar que, para variações negativas do parâmetro, o valor do funcional resposta aumenta, e que o coeficiente de sensibilidade é a derivada nos valores de referência ou nominais. No caso de uma curva de comportamento inverso, ou seja, ascendente, tem-se um aumento no valor do funcional resposta para variações positivas do parâmetro.

c) Cálculo da sensibilidade

A sensibilidade corresponde à variação de uma resposta para variações estipuladas nos parâmetros do sistema, sendo possível verificar quais os parâmetros mais sensíveis de um grupo analisado.

A sensibilidade pode ser calculada de duas maneiras:

1) no método direto, calcula-se o valor da resposta, para fins comparativos, para cada 1% da variação do parâmetro, por exemplo;

2) nos métodos perturbativos, calcula-se o valor do coeficiente de sensibilidade absoluto de cada parâmetro, dado pela equação abaixo:

$$S_i = \frac{\delta R}{\delta p_i} \frac{p_{0,i}}{R_0} \qquad \text{(A1.2)}$$

que relaciona o coeficiente de sensibilidade relativo com os valores não perturbados do parâmetro e do funcional em estudo. Os resultados correspondem à contribuição percentual obtida no funcional em função de uma incerteza de 1% no parâmetro.

Com o uso destes cálculos é possível a comparação real entre os mais variados parâmetros para determinar quais os que mais influenciam uma determinada resposta.

Portanto, a análise de sensibilidade, através dos seus objetivos, tem um papel indispensável no estudo da influência da variação dos parâmetros nos funcionais respostas, nas mais variadas aplicações. Além do mais, evidencia-se a importância preponderante dos métodos perturbativos como solução para modelos complexos, trazendo também como benefício a rapidez na obtenção dos resultados. O formalismo diferencial, objeto deste estudo, é apresentado no Apêndice 2.

APÊNDICE 2

1. A TEORIA DA PERTURBAÇÃO

1.1. Considerações gerais

A teoria da perturbação teve seu início nos estudos de análise de reatores nucleares, para avaliar o efeito da reatividade de pequenas mudanças nas propriedades de reatores críticos. A teoria foi desenvolvida para fornecer valores aproximados das tais pequenas mudanças, se estavam localizadas no espaço ou distribuídas por todo o reator.

No decorrer dos anos foram realizadas diversas aplicações da metodologia, de grandes destaques na ciência, como as desenvolvidas por GANDINI (1982, 1987), OBLOW (1978), ANDRADE LIMA et al. (1984, 1985, 1986, 1993, 1998), LIRA et al. (1994, 1994a, 1996, 1998), BALIÑO et al. (1995) e muitos outros autores. As aplicações foram direcionadas principalmente às áreas de Física e Engenharia Nuclear, Física de Solos, Mecânica dos Fluidos e Controle de Processos, estando atualmente em expansão para outros setores tecnológicos.

As formulações da teoria da perturbação foram agrupadas em três categorias, onde todas são equivalentes, ou melhor, levam ao mesmo coeficiente de sensibilidade, embora alguma possa ser mais vantajosa que a outra, a depender do tratamento específico das condições de contorno. Estes formalismos são classificados em:

- Formalismo diferencial
- Formalismo GPT
- Formalismo variacional

O corrente trabalho terá o formalismo diferencial como objeto de aplicação, com sua teoria discorrida mais adiante, tendo como fonte a referência de ANDRADE LIMA & BLANCO (1994).

1.2. A aplicabilidade dos métodos perturbativos

Os métodos perturbativos são principalmente utilizados em problemas dotados de modelos de alta complexidade, isto é, quando não se tem a solução analítica e quando a solução numérica apresenta grandes dificuldades de resolução. Os formalismos apresentam como vantagens:

- O cálculo, de uma forma geral, da sensibilidade da resposta relativa aos parâmetros da equação sem a escolha anterior da faixa de variação dos parâmetros (ao contrário do método direto, onde esta escolha prévia é obrigatória), utilizando-se para o cálculo da nova resposta, para cada variação do parâmetro, uma expressão de simples resolução (equação A1.1);

- Possuem solução rápida, pois apresentam um único sistema adicional de equações para cada resposta analisada. Desta forma, viabilizam a solução do modelo na presença de equações complexas e reduzem o tempo de cálculo dos resultados, em comparação com o método direto. Esta diferença é evidenciada à medida em que ocorre um aumento no número de parâmetros de interesse, bem como de sua faixa de valores perturbados.

Os métodos perturbativos de primeira ordem apresentam como única desvantagem o fato de estarem restritos à análise do comportamento linear da resposta nas vizinhanças do ponto específico calculado, como pôde ser visualizado na Figura 26. Esta situação, no entanto, pode ser resolvida com o emprego da teoria da perturbação de ordens superiores. Entretanto, através da experiência adquirida com os métodos perturbativos, isso não representa um sério obstáculo e os métodos podem ser aplicados com vantagens a diversos problemas de engenharia e física para a análise de sensibilidade, até quando aplicados a casos de natureza não-linear.

1.3. A teoria dos métodos perturbativos

Um sistema de K equações, de forma geral não-lineares e acopladas, pode ser escrito formalmente por:

$$\vec{m}\,(\vec{f}(\vec{r}), \vec{p}) = \vec{0} \qquad \text{(A2.1)}$$

onde $\vec{m}$ inclui, em geral, operações com relação às variáveis do espaço de fase.

O vetor de estado, que descreve o comportamento de uma variável de estado do sistema, é representado pela equação:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \left[f_1(\vec{r}), f_2(\vec{r}), \ldots, f_k(\vec{r})\right]^T \qquad \text{(A2.2)}$$

sendo uma função do vetor de posição no espaço de fase:

$$\vec{r} = \left[r_1, r_2, \ldots, r_l\right]^t \qquad \text{(A2.3)}$$

e as componentes m_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, K)$ são funções não-lineares de $\vec{f}$ e do vetor dos parâmetros de entrada:

$$\vec{p}\,(\vec{r}) = \left[p_1(\vec{r}), p_2(\vec{r}), \ldots, p_l(\vec{r})\right]^t \qquad \text{(A2.4)}$$

As condições de contorno do sistema (A2.1) podem ser escritas na forma:

$$\vec{C}\,(\vec{f}(\vec{r}^{\,\prime}), \vec{p}) = \vec{0} \qquad \text{(A2.5)}$$

onde $\vec{r}^{\,\prime}$ corresponde à coordenada de um ponto da superfície de contorno do espaço de fase.

Para a análise de sensibilidade, o valor de interesse que resulta da resolução do sistema de equações (A2.1) é chamado de resposta do sistema, $R(\vec{f}(\vec{r}), \vec{p})$. Na metodologia perturbativa, define-se esta resposta como:

$$R = \int_{\vec{r}} \overrightarrow{S^+}(\vec{r})\, \vec{f}(\vec{r})\, d\vec{r} = < \vec{S}^+(\vec{r})\, \vec{f}(\vec{r}) > \qquad \text{(A2.6)}$$

onde $\overrightarrow{S^+}(\vec{r})$ é uma função conhecida das coordenadas do espaço de fase e < > representa a integração sobre todo o espaço de fase.

O problema geral de uma análise de sensibilidade é a determinação da variação de R com relação à variação de algum parâmetro p_i.

Desta forma, para a obtenção da variação de uma resposta em função de uma perturbação, deriva-se a resposta R de interesse com relação aos parâmetros $p_i (i = 1, 2, 3, \ldots, I)$, resultando na seguinte expressão:

$$\delta R = \sum_{i=1}^{I} \delta p_i < \frac{\partial \overrightarrow{S^+}}{\partial p_i} \vec{f} + \overrightarrow{S^+} \frac{\partial \vec{f}}{\partial p_i} >$$

Usando a nomenclatura abreviada

$$\overrightarrow{S^+_{,i}} = \frac{\partial \overrightarrow{S^+}}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{f_{,i}} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial p_i}$$

obtém-se a expressão para R:

$$\delta R = \sum_{i=1}^{I} \delta p_i \left[< \overrightarrow{S^+_{,i}}\, \vec{f} > + < \overrightarrow{S^+}\, \overrightarrow{f_{,i}} > \right] \qquad \text{(A2.7)}$$

Na expressão (A2.7), o primeiro termo da equação nada mais é que o "efeito direto", ou melhor, equivale à dependência explícita de R com relação a p_i. O segundo termo corresponde ao "efeito indireto", isto é, a dependência de R com relação a p_i através de $\vec{f}$.

A obtenção do valor de δR, dependerá da avaliação do termo $\overline{f_{,i}}$. Assim, expandindo a equação perturbada

$$\vec{m}'(\vec{f}', \vec{p}') = \vec{0} \tag{A2.8}$$

até primeira ordem, em torno de uma solução de referência $\overline{f}$, resulta em:

$$\delta\vec{m} = \vec{m}'(\vec{f}', \vec{p}') - \vec{m}(\vec{f}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^{l} \delta p_i \left[\frac{\partial \overline{m}}{\partial p_i} + \underline{\overline{H}} \frac{\partial \overline{f}}{\partial p_i} \right] = \vec{0} \tag{A2.9}$$

no qual $\underline{\overline{H}}$ é um operador linear dado por:

$$\underline{\overline{H}} = \frac{\overline{\partial \overline{m}}}{\partial \overline{f}} = \begin{vmatrix} \frac{\overline{\partial m_1}}{\partial f_1} & \frac{\overline{\partial m_1}}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\overline{\partial m_1}}{\partial f_k} \\ \frac{\overline{\partial m_2}}{\partial f_1} & \frac{\overline{\partial m_2}}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\overline{\partial m_2}}{\partial f_k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\overline{\partial m_k}}{\partial f_1} & \frac{\overline{\partial m_k}}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\overline{\partial m_k}}{\partial f_k} \end{vmatrix}$$

onde $\frac{\overline{\partial}}{\partial f_i}$ equivale à derivada de Frechet. As expansões de $\vec{m}'(\vec{f}', \vec{p}')$ de ordens superiores foram consideradas por GANDINI (1987), bem como por CACUCI et al. (1980).

Desde que na equação (A2.9) os parâmetros p_i e sua variação δp_i foram considerados independentes entre si, temos:

$$\frac{\partial \overline{m}}{\partial p_i} + \underline{\overline{H}} \frac{\partial \overline{f}}{\partial p_i} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{m}_{,i} + \underline{\overline{H}}\, \vec{f}_{,i} = \vec{0} \tag{A2.10}$$

E, definindo

$$\overline{S}(p_i) = -\frac{\partial \overline{m}}{\partial p_i} \tag{A2.11}$$

obtem-se a equação derivada:

$$\underline{\overline{H}}\,\vec{f}_{,i} = \vec{S}(p_i) \quad \text{ou} \quad \underline{\overline{H}}\,\vec{f}_{,i} = \vec{S}_{(i)} \tag{A2.12}$$

A condição de contorno para a equação (A2.12) pode ser derivada, de forma semelhante, a partir da equação (A2.5), resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\overline{C}\,(\vec{f}\,(\vec{r}\,'), \vec{p})\right] = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \overline{C}}{\partial p_i} + \frac{\partial \overline{C}}{\partial \vec{f}} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial p_i} = 0 \quad \text{, em } \vec{r} = \vec{r}\,' \tag{A2.13}$$

A equação (A2.12) e a condição de contorno dada pela equação (A2.13) permitem avaliar o termo $\vec{f}_{,i}$, através da substituição na equação (A2.7), fornecendo a variação δR procurada.

Para cada um dos parâmetros do sistema, define-se o coeficiente de sensibilidade pela expressão abaixo:

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = < \overrightarrow{S^+_{,i}}\,\vec{f} > + < \overrightarrow{S^+}\,\vec{f}_{,i} > \tag{A2.14}$$

A equação (A2.12) embora tenha uma característica linear, onde $\underline{\overline{H}}$ depende de $\vec{f}$ e não de $\vec{f}_{,i}$, apresenta o inconveniente de depender de p_i. Desta forma, para cada parâmetro em estudo, uma nova equação (A2.12) deverá ser resolvida para a determinação da expressão (A2.14). Assim sendo, se há i parâmetros a serem analisados para um determinado funcional, i equações derivadas serão resolvidas. Diante desta dificuldade, recorre-se ao sistema adjunto, que permanece linear e apresenta a vantagem de não depender do parâmetro p_i, como no formalismo diferencial, mostrado a seguir.

1.3.1. O formalismo diferencial

Define-se o operador $\overline{\underline{H}}^*$, adjunto de $\overrightarrow{\underline{H}}$, pela expressão:

$$< \overline{f}_{,t}\, \overline{\underline{H}}^* \overline{f}^* > = < \overrightarrow{f}^* \overline{\underline{H}}\, \overline{f}_{,t} > + P(\overline{f}^*, \overrightarrow{f}_{,t}) \qquad \text{(A2.15)}$$

onde $\overline{f}^*$ é o vetor adjunto de $\overline{f}_{,t}$ e $P(\overline{f}^*, \overline{f}_{,t})$ é o concomitante bilinear de $\overline{f}^*$ e $\overrightarrow{f}_{,t}$, avaliado no contorno do espaço de fase, sendo possível escrever o sistema adjunto, que foi dado pelas equações (A2.12) e (A2.14), na forma:

$$\overline{\underline{H}}^* \overline{f}^* = \overrightarrow{S^+} \qquad \text{(A2.16)}$$

As condições de contorno da equação adjunta são dadas na forma:

$$\overrightarrow{C}^*(\overrightarrow{f}^*) = \overrightarrow{0}\,, \quad \text{em} \quad r = r' \qquad \text{(A2.17)}$$

onde uma escolha conveniente permite o cálculo do concomitante bilinear $P(\overline{f}^*, \overline{f}_{,t})$ a partir de valores conhecidos de $\overrightarrow{f}_{,t}$, avaliados no contorno do espaço de fase.

Assim, a equação (A2.15) poderá ser reescrita na forma:

$$< \overrightarrow{f}_{,t}\, \overrightarrow{S^+} > = < \overline{f}^* \overline{S}_{(t)} > + P(\overline{f}^*, \overline{f}_{,t}) \qquad \text{(A2.18)}$$

que, substituindo na equação (A2.7), fornece a nova expressão:

$$\delta R = \sum_{i=1}^{I} \delta p_i \left[< \overrightarrow{f}\, \overrightarrow{S^+_{,t}} > + < \overline{f}^* \overrightarrow{S_{(t)}} > + P(\overrightarrow{f}^*, \overline{f}_{,t}) \right] \qquad \text{(A2.19)}$$

A equação (A2.19) permite a avaliação de δR a partir de uma solução de referência do sistema de equações (A2.1) com condições de contorno dadas pela equação (A2.5), bem como de uma solução do sistema de equações lineares, como na equação (A2.16), com condições de contorno fornecidas pelas equações (A2.17), sendo independente de p_i. Desta forma, a solução da equação (A2.19) depende de $\vec{f}^*$, porém não depende de p_i, o que não acontece com a equação (A2.7), que implica na solução da equação (A2.12) para cada parâmetro p_i.

APÊNDICE 3

CÁLCULO DO OPERADOR ADJUNTO $\underline{H}^*$

Para o cálculo do operador adjunto $\underline{H}^*$, e conseqüentemente da equação adjunta $\underline{H}^* f^* = S^*$, faz-se a integração da expressão $< f^* \underline{H} f_{ii} >$, obtida da equação (A2.15) do Apêndice 2. Assim, a integração é dada por:

$$< f^* \underline{H} f_{ii} > = \begin{bmatrix} < q''^* \left[\dfrac{dq_{ii}^{\cdot}}{dr} + \dfrac{1}{r} q_{ii}^{\cdot} + k\, m_0^2\, \theta_{ii} \right] > \\ < \theta^* \left[q_{ii}^{\cdot} + k \dfrac{d\theta_{ii}}{dr} \right] > \end{bmatrix}$$

O fator peso para a integração, em função dos funcionais resposta escolhidos, é de $2\pi r$. Portanto, para a primeira equação tem-se:

$$\int_{r_0}^{r'} q''^* \left(\frac{dq_{ii}^{\cdot}}{dr} + \frac{1}{r} q_{ii}^{\cdot} + k\, m_0^2\, \theta_{ii} \right) 2\pi r\, dr = 2\pi \left[\int_{r_0}^{r'} \frac{dq_{ii}^{\cdot}}{dr} q''^* r\, dr + \int_{r_0}^{r'} q_{ii}^{\cdot}\, q''^*\, dr + \right.$$

$$\left. + \int_{r_0}^{r'} \theta_{ii}\, k\, m_0^2\, q''^*\, r\, dr \right]$$

Resolvendo por partes a primeira integração dos colchetes, já que as demais já se encontram na forma $f_{ii}\, \underline{H}^* f^*$, e somando aos outros termos, obtém-se como resultado:

$$2\pi \left[- \int_{r_0}^{r'} q_{ii}^{\cdot} \frac{dq''^*}{dr} r\, dr + \int_{r_0}^{r'} \theta_{ii}\, k\, m_0^2\, q''^*\, r\, dr + \left(q_{ii}^{\cdot}\, q''^*\, r \right)_{r_0}^{r'} \right]$$

ou na forma $- < q_{ii}^{\cdot} \dfrac{dq''^*}{dr} > + < \theta_{ii}\, k\, m_0^2\, q''^* > + P\,(q''^*, q_{ii}^{\cdot})$, onde o último termo corresponde ao concomitante bilinear.

Para a segunda equação, tem-se que:

$$\int_{r_0}^{r'} \theta^* \left(q''_{11} + k \frac{d\theta_{11}}{dr} \right) 2\pi r \, dr = 2\pi \left[\int_{r_0}^{r'} q''_{11} \, \theta^* \, r \, dr + \int_{r_0}^{r'} \frac{d\theta_{11}}{dr} \, k \, \theta^* \, r \, dr \right]$$

A segunda integral é resolvida por partes e somada à anterior, obtendo:

$$2\pi \left[\int_{r_0}^{r'} q''_{11} \, \theta^* \, r \, dr - \int_{r_0}^{r'} \theta_{11} \, k \frac{d\theta^*}{dr} \, r \, dr - \int_{r_0}^{r'} \theta_{11} \, k \, \theta^* \, dr + \left(\theta_{11} \, k \, \theta^* \, r \right)_{r_0}^{r'} \right]$$

ou na forma $< q''_{11} \, \theta^* > - < \theta_{11} \, k \frac{d\theta^*}{dr} > - < \theta_{11} \frac{k}{r} \theta^* > + P(\theta^*, \theta_{11})$, observando o aparecimento do fator r no denominador da terceira integração, para completar o fator peso de $2\pi r$.

Assim, arrumando todos os termos obtidos para cada funcional derivado, tem-se:

$$\left[< (-\frac{dq''^*}{dr} + \theta^*) \, q''_{11} > + < (-k \frac{d\theta^*}{dr} - \frac{k}{r} \theta^* + k \, m_0^2 \, q''^*) \, \theta_{11} > \right]$$

que, substituindo na expressão $[f_{11}]^T \, \underline{H}^* \, f^*$, o operador adjunto está determinado:

$$\begin{bmatrix} -\frac{dq''^*}{dr} + \theta^* \\ -k \frac{d\theta^*}{dr} - \frac{k}{r} \theta^* + k \, m_0^2 \, q''^* \end{bmatrix} = [f_{11}]^T \begin{bmatrix} -\frac{d}{dr} & 1 \\ k \, m_0^2 & -k \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q''^* \\ \theta^* \end{bmatrix}$$

APÊNDICE 4

CÁLCULO DA SOLUÇÃO PARTICULAR $\theta_p{}^* = G\,(r, r_p)$

Para o cálculo da solução particular $\theta_p{}^* = G\,(r, r_p)$, em primeiro lugar calcula-se o valor da descontinuidade da função limite, que foi dada no item "a" da seção (5.4.2.1), através da integração da equação (5.10) nos intervalos do salto finito, dado por:

$$\int_{r_p-\varepsilon}^{r_p+\varepsilon}\left[\frac{d^2\theta^*}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta^*}{dr}-\left(m_0^2+\frac{1}{r^2}\right)\theta^*\right]2\pi r\,dr=-\int_{r_p-\varepsilon}^{r_p+\varepsilon} m_0^2\,\delta(r-r_p)\,2y_0\,2\pi r\,dr$$

Resolvendo a integração da derivada segunda no lado esquerdo por partes e a integral da direita, temos:

$$\left[r\frac{d\theta^*}{dr}\right]_{r_p-\varepsilon}^{r_p+\varepsilon}2\pi+\int_{r_p-\varepsilon}^{r_p+\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{d\theta^*}{dr}-\left(m_0^2+\frac{1}{r^2}\right)\theta^*\;2\pi r\,dr=-\,m_0^2\,I_\varepsilon\,r_p\,2y_0\,2\pi$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$ o termo sob a integral vai para zero e $I_\varepsilon \to 1$, obtendo-se:

$$\left[r\frac{d\theta^*}{dr}\right]_{r_p-}^{r_p+}=-\,m_0^2\,r_p\,2y_0$$

Assim, o salto da descontinuidade da função limite é dado por:

$$\left[\frac{\partial G(r,r_p)}{\partial r}\right]_{r_p}^{r_p^+}=-\,m_0^2\,2y_0$$

Com o resultado da descontinuidade, emprega-se na condição de conexão:

$$\frac{\partial G^{+}(r_p,r_p)}{\partial r}-\frac{\partial G^{-}(r_p,r_p)}{\partial r}=\left[\frac{\partial G(r,r_p)}{\partial r}\right]_{r_p^-}^{r_p^+}$$, originando a seguinte expressão:

$$\left[A_2 m_0 I_2(m_0 r)+\frac{A_2}{r}\,I_1(m_0 r)-B_2 m_0 K_2(m_0 r)+\frac{B_2}{r}\,K_1(m_0 r)\right]_{r_p+\varepsilon}-\left\{A_1 m_0 I_2(m_0 r)+\right.$$

$$\left.+\frac{A_1}{r}\,I_1(m_0 r)-B_1 m_0 K_2(m_0 r)+\frac{B_1}{r}\,K_1(m_0 r)\right\}_{r_p-\varepsilon}=-m_0^2\,2y_0$$, obtida das derivações das soluções à esquerda, $G^{-}(r,r_p)$, e à direita do pulso, $G^{+}(r,r_p)$.

Tomando o limite quando $\varepsilon\to 0$, obtém-se uma nova equação para a determinação dos coeficientes, dada por:

$$m_0 I_2(m_0 r_p)(A_2-A_1)+\frac{I_1(m_0 r_p)}{r_p}(A_2-A_1)+m_0 K_2(m_0 r_p)(B_1-B_2)+\frac{K_1(m_0 r_p)}{r_p}(B_2-B_1)=$$
$$=-m_0^2\,2y_0$$

Substituindo os valores de $A_1=-\dfrac{B_1 K_1(m_0 r_0)}{I_1(m_0 r_0)}$ e $A_2=-\dfrac{B_2 K_1(m_0 r')}{I_1(m_0 r')}$, obtidas da aplicação das condições de contorno $G^{-}(r_0,r_p)=0$ e $G^{+}(r',r_p)=0$, calcula-se o valor de B_1, que é:

$$B_1=\frac{(B_2\,H_1)-m_0^2\,2y_0}{H_2}$$, onde:

$$H_1=\frac{K_1(m_0 r')}{I_1(m_0 r')}\left(m_0 I_2(m_0 r_p)+\frac{I_1(m_0 r_p)}{r_p}\right)+m_0 K_2(m_0 r_p)-\frac{K_1(m_0 r_p)}{r_p}$$ e

$$H_2=\frac{K_1(m_0 r_0)}{I_1(m_0 r_0)}\left(m_0 I_2(m_0 r_p)+\frac{I_1(m_0 r_p)}{r_p}\right)+m_0 K_2(m_0 r_p)-\frac{K_1(m_0 r_p)}{r_p}$$

Substituindo os valores de A_1, A_2 e B_1 na condição de conexão $G^-(r_p,r_p)=G^+(r_p,r_p)$, encontra-se B_2:

$$B_2=\frac{\dfrac{m_0^2\,2y_0}{H_2}\left(-\dfrac{K_1(m_0r_0)}{I_1(m_0r_0)}I_1(m_0r_p)+K_1(m_0r_p)\right)}{\dfrac{H_1}{H_2}\left(-\dfrac{K_1(m_0r_0)}{I_1(m_0r_0)}I_1(m_0r_p)+K_1(m_0r_p)\right)+\dfrac{K_1(m_0r')}{I_1(m_0r')}I_1(m_0r_p)-K_1(m_0r_p)}$$

Desta forma, os valores de A_1 e A_2 são:

$$A_1=-\left(\frac{(B_2H_1)-m_0^2\,2y_0}{H_2}\right)\frac{K_1(m_0r_0)}{I_1(m_0r_0)}\qquad\text{e}\qquad A_2=-B_2\,\frac{K_1(m_0r')}{I_1(m_0r')}$$

Finalmente, substituindo os coeficientes encontrados, obtém-se as equações que representam a solução particular para $\theta_p{}^*=G\,(r,r_p)$, dadas abaixo:

$$G^-\,(r,r_p)=-\left(\frac{(B_2H_1)-m_0^2\,2y_0}{H_2}\right)\frac{K_1(m_0r_0)}{I_1(m_0r_0)}\,I_1(m_0r)+\left(\frac{(B_2H_1)-m_0^2\,2y_0}{H_2}\right)K_1(m_0r)$$

$$G^+\,(r,r_p)=-\,B_2\,\frac{K_1(m_0r')}{I_1(m_0r')}\,I_1(m_0r)+B_2\,K_1(m_0r)$$

Estas expressões são resolvidas com os dados da Tabela 1 e com a ajuda de um programa computacional numérico para as funções de Bessel, resultando nas soluções:

$$G^-(r,r_p)=0{,}13015\,I_1(m_0\,r)-0{,}40058\,K_1(m_0\,r)\quad(\text{para}\quad r_0<r<r_p)$$

$$G^+(r,r_p)=-\,0{,}021307\,I_1(m_0\,r)+1{,}65295\,K_1(m_0\,r)\quad(\text{para}\quad r_p<r<r')$$

APÊNDICE 5

MONTAGEM DAS INTEGRAÇÕES DOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDADE PARA CADA PARÂMETRO

1. Funcional Q_p

Para $S_1^* = \delta(r - r_p)\, 2y_0$ e $S_2^* = 0$.

a) Parâmetro y_0

$$\frac{\delta Q_p}{\delta y_0} = \int_{r_0}^{r'} q_0 \, \frac{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r) - K_1(m_0\, r')\, I_1(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, 2\delta(r - r_p)\, 2\pi r\, dr \; +$$

$$+ \int_{r_0}^{r_p} \frac{1}{m_0^2} \left\{ \left[0{,}13015 \left(m_0\, I_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} I_1(m_0\, r) \right) - 0{,}40058 \left(-m_0\, K_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} K_1(m_0\, r) \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \left[0{,}13015\, I_1(m_0\, r) - 0{,}40058\, K_1(m_0\, r) \right] \right\} (-k\, 2m_0\, m_{0,i}) \cdot$$

$$\cdot \frac{q_0}{m_0\, k} \; \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, 2\pi r\, dr \; +$$

$$+ \int_{r_p}^{r'} \frac{1}{m_0^2} \left\{ \left[-0{,}021307 \left(m_0\, I_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} I_1(m_0\, r) \right) + 1{,}65295 \left(-m_0\, K_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} K_1(m_0\, r) \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \left[-0{,}021307\, I_1(m_0\, r) + 1{,}65295\, K_1(m_0\, r) \right] \right\} (-k\, 2m_0\, m_{0,i}) \cdot$$

$$\cdot \frac{q_0}{m_0\, k} \; \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, 2\pi r\, dr$$

b) Parâmetro k

$$\frac{\delta Q_p}{\delta k} = \int_{r_0}^{r_p} \Big[\ 0{,}13015\, I_1(m_0\, r) - 0{,}40058\, K_1(m_0\, r)\ \Big]\Big[- \frac{q_0}{m_0\, k}\Big[m_0\, I_1(m_0\, r)\cdot$$

$$\cdot \frac{K_1(m_0\, r')}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')} - m_0\, K_1(m_0\, r)\cdot$$

$$\cdot \frac{I_1(m_0\, r')}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\ \Big] 2\pi r\, dr\ +$$

$$+ \int_{r_0}^{r'} \Big[\ -0{,}021307\, I_1(m_0\, r) + 1{,}65295\, K_1(m_0\, r)\ \Big]\Big[- \frac{q_0}{m_0\, k}\Big[m_0\, I_1(m_0\, r)\cdot$$

$$\cdot \frac{K_1(m_0\, r')}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')} - m_0\, K_1(m_0\, r)\cdot$$

$$\cdot \frac{I_1(m_0\, r')}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\ \Big] 2\pi r\, dr$$

c) Parâmetro h

$$\frac{\delta Q_p}{\delta h} =$$

$$\int_{r_0}^{r_p} \frac{1}{m_0^2} \Bigg\{ \Bigg[0{,}13015 \Big(m_0\, I_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} I_1(m_0\, r) \Big) - 0{,}40058 \Big(-m_0\, K_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} K_1(m_0\, r) \Big) \Bigg] +$$

$$+ \frac{1}{r} \Big[0{,}13015\, I_1(m_0\, r) - 0{,}40058\, K_1(m_0\, r) \Big] \Bigg\}\ (-k\, 2m_0\, m_{0/1})\cdot$$

$$\cdot \frac{q_0}{m_0\, k}\ \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, 2\pi r\, dr\ +$$

$$+ \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{m_0^2} \Bigg\{ \Bigg[-0{,}021307 \Big(m_0\, I_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} I_1(m_0\, r) \Big) + 1{,}65295 \Big(-m_0\, K_2(m_0\, r) + \frac{1}{r} K_1(m_0\, r) \Big) \Bigg] +$$

$$+ \frac{1}{r} \Big[-0{,}021307\, I_1(m_0\, r) + 1{,}65295\, K_1(m_0\, r) \Big] \Bigg\} (-k\, 2m_0\, m_{0/1})\cdot$$

$$\cdot \frac{q_0}{m_0\, k}\ \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')}\, 2\pi r\, dr$$

d) Parâmetro q_0

$$\frac{\delta Q_p}{\delta q_0} =$$

$$2\pi r_0 \left\{ \frac{1}{m_0^2} \left\{ \left[0{,}13015 \left(m_0 I_2(m_0 r_0) + \frac{1}{r_0} I_1(m_0 r_0) \right) - 0{,}40058 \left(- m_0 K_2(m_0 r_0) + \frac{1}{r_0} K_1(m_0 r_0) \right) \right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{r_0} \left[0{,}13015\, I_1(m_0 r_0) - 0{,}40058\, K_1(m_0 r_0) \right] \right\} \right\}$$

2. Funcional $\overline{\theta}$

Para $S_1^+ = 0$ e $S_2^+ = \dfrac{1}{\pi r'^2 - \pi r_0^2}$.

a) Parâmetro y_0

$$\frac{\delta \overline{\theta}}{\delta y_0} = \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)} (-k\, 2 m_0\, m_{0/r}) \frac{q_0}{m_0\, k} \cdot$$

$$\cdot \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')} 2\pi r\, dr$$

b) Parâmetro k

$$\frac{\delta \overline{\theta}}{\delta k} = 0$$

c) Parâmetro h

$$\frac{\delta \overline{\theta}}{\delta h} = \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)} (-k\, 2 m_0\, m_{0/r}) \frac{q_0}{m_0\, k} \cdot$$

$$\cdot \frac{K_1(m_0\, r')\, I_0(m_0\, r) + I_1(m_0\, r')\, K_0(m_0\, r)}{I_1(m_0\, r')\, K_1(m_0\, r_0) - I_1(m_0\, r_0)\, K_1(m_0\, r')} 2\pi r\, dr$$

d) Parâmetro q_0

$$\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta q_0} = 2\pi r_0 \frac{1}{k\, m_0^2\, (\pi r'^2 - \pi r_0^2)}$$

A resolução das integrais com combinações das funções de Bessel foram resolvidas com ajuda de programa computacional numérico. As integrais com função Delta de Dirac tiveram sua solução analítica com base em LAMARSH (1972) e RICE & DO (1995). Todos os coeficientes de sensibilidade foram calculados com dados da Tabela 1.