

**PREMIER MINISTRE  
COMMISSARIAT A  
L'ÉNERGIE ATOMIQUE**

**REGULATION DES CONCENTRATIONS  
DANS UNE USINE  
DE SEPARATION ISOTOPIQUE**

par

**R. JACQUES**

**Rapport C.E.A. n° 2160**

**CENTRE D'ETUDES  
NUCLÉAIRES DE SACLAY**

CEA 2160 - JACQUES R.

REGULATION DES CONCENTRATIONS DANS UNE USINE DE SEPARATION  
ISOTOPIQUE

Sommaire - On considère une installation de séparation des isotopes de l'uranium par diffusion gazeuse.

On étudie les effets sur les concentrations isotopiques de diverses perturbations type données à l'avance et on détermine le système d'actions correctives qui permet de réduire ces effets d'après un critère d'efficacité donné.

---

CEA 2160 - JACQUES R.

CONCENTRATION CONTROL IN AN ISOTOPE SEPARATION PLANT

Summary - Concentration control is examined for the case of a gaseous diffusion plant for uranium isotope separation.

The effects of various typical perturbations are described and adequate systems of corrective actions are determined according to selected criteria.

**- Rapport C.E.A. n° 2160 -**

**Service des Etudes sur la Séparation  
des Isotopes de l'Uranium**

**REGULATION DES CONCENTRATIONS  
DANS UNE USINE DE SEPARATION ISOTOPIQUE**

**par**

**R. JACQUES**

**- 1962 -**

# REGULATION DES CONCENTRATIONS DANS UNE USINE DE SEPARATION ISOTOPIQUE

## PLAN

### NOTATIONS

#### I - INTRODUCTION

#### II - MODES PROPRES DE L'USINE

1 - Définition

2 - Evolution à partir d'un état initial  $N(n, o)$   
donné

#### III - REDUCTION D'UNE PERTURBATION CONNUE

1er cas : Action non limitée dans le temps

2e cas : Action limitée dans le temps

Application 1 - Réduction de perturbations en forme d'im-  
pulsions

Application 2 - Réduction de perturbations en forme d'é-  
chelons

Application 3 - Réduction de perturbations provenant d'une  
mise hors circuit d'un groupe d'étages

#### IV - CONCLUSIONS

- NOTATIONS -

- $C_M$  mesure de la variation de concentration au point M
- $\mathcal{E}$  ou  $E$  variation de la concentration de sortie due aux perturbations
- $e_i$  coefficient (ou fonction de perturbation)
- $E_M$  variation de concentration au point M, due aux perturbations
- $\mathcal{E}_{Mk}$  effet prévu au point M à partir de l'instant  $t_k$
- $N_{Mi}$  mode propre
- $\gamma_{iM}$  mode propre inverse
- $M$  point de mesure
- $R$  point de sortie
- $\varepsilon$  variation totale de concentration
- $\Gamma_{JM}$  matrice de contrôle
- $\lambda_j$  poids du transport  $\psi_j$  dans le critère de régulation
- $\Delta = 1 + \sum_j \frac{1}{\lambda_j} B_j^* B_j$  = déterminant de l'équation de contrôle
- $\alpha_k$  zéro de  $\Delta$
- $f_k$  coefficient } qui interviennent dans le calcul du
- $K_{li}$  matrice } contrôle

## I.- INTRODUCTION

Le but de la régulation des concentrations dans une usine de séparation des isotopes de l'uranium est de maintenir le profil des concentrations dans une zone assez étroite autour du profil de marche choisi et en particulier de maintenir les concentrations des points de soutirage à proximité des valeurs choisies.

Les installations de séparation isotopique ont une assez grande inertie, de sorte que la plupart des perturbations rapides et de faible amplitude n'ont qu'un effet minime sur les concentrations. Cette étude s'est donc limitée à des perturbations suffisamment importantes pour justifier une action corrective. L'arrêt accidentel ou voulu d'un groupe d'étages de séparation ou d'un tronçon de cascade séparative est un exemple d'une telle perturbation.

Plus généralement, l'étude de perturbations en forme d'échelon ou d'impulsion effectuée ci-dessous permet de synthétiser par la suite les effets de perturbations quelconques.

Les mesures qui permettent de suivre l'évolution du système sont ici des mesures de richesse isotopique faites par spectrométrie de masse. Les actions possibles sont des manipulations de vannes sur les soutirages, les alimentations et les fonctions.

Dans l'hypothèse d'une usine rendue aérodynamiquement rigide par une régulation des pressions, ces actions se repré-

sentent immédiatement sur les transports dans les différentes cascades, ce qui permet de considérer ces derniers comme les moyens d'action dans la description adoptée ici.

Par ailleurs, les cascades sont jointes entre elles par un système de purges et réservoirs que l'on peut assimiler à des réservoirs fictifs à rétention variable. Le cas limite est celui d'une rétention grande, les variations de transport ne sont alors soumises à aucune restriction et on peut agir indépendamment sur les transports de chacune des cascades. En fait, comme les réservoirs sont de taille finie, les actions sur les transports sont bornées.

On exprime le désir de rester à proximité d'un profil donné et le fait d'être limité dans les actions possibles par le choix d'un critère de régulation adéquat. Ceci consiste à chercher un système de régulation qui minimise les écarts quadratiques des concentrations, pour une valeur donnée de l'écart quadratique des variables d'action, c'est-à-dire, des transports sous l'effet de certaines perturbations. Ce critère est analogue à celui qui est adopté d'habitude pour le calcul de systèmes d'asservissement opérant sous certaines contraintes.

## Variables de contrôle et variables d'action

Nous supposons que la concentration de sortie doive suivre une loi  $N^*(t)$ , la concentration de sortie réelle (variable de contrôle) étant  $N(t)$  et l'écart  $\varepsilon = N - N^*$ . On maintiendra cet écart aussi faible que possible en agissant sur les transports  $\psi_J$  qui seront les variables de contrôle - pratiquement les soutirages. Nous supposons résolu le problème du contrôle de ces transports en admettant que l'on peut instantanément obtenir dans un tronçon J quelconque le transport  $\psi_J(t)$  nécessité par le contrôle des concentrations et nous supposerons qu'à chaque instant ce transport est le même dans tous les étages du tronçon J. Ces hypothèses sont justifiées dans la mesure où les temps de réponse des transports sont beaucoup plus rapides que ceux des concentrations.

## Choix du critère

Nous pourrions prendre pour critère l'écart quadratique des concentrations  $\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \text{minimum}$ . Mais il faut tenir compte des limitations imposées aux variations des transports. Pour cela nous prendrons le critère plus général.

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \sum_J \lambda_J \psi_J^2(t)] dt = \text{minimum}$$

où  $\psi_J$  est l'écart sur le transport =  $\psi_J(t) - \psi_J(0)$

Le terme en  $\lambda_J \psi_J^2$  dans ce critère pénalise les écarts importants de transport, le coefficient  $\lambda_J > 0$  caractérisant l'importance de cette pénalisation suivant le tronçon J considéré. Ces coefficients devront être choisis de manière que, pour les plus fortes perturbations que l'on peut

envisager le critère étant réalisé, les écarts  $\Psi_J'$  restent dans les limites imposées.

Dans l'étude ci-dessous la perturbation est supposée connue plus ou moins longtemps à l'avance ou plutôt l'effet de cette perturbation sur les concentrations en l'absence d'actions correctives (effet témoin). On calcule ensuite l'action optimum  $\Psi_J$  satisfaisant au critère choisi.

II - MODES PROPRES DE L'USINE -

1°) Définition

Supposons que l'usine comporte R point de mesure M (M = 1, 2, 3, ----- R) - L'état de concentration est défini en fonction du temps par l'ensemble de R fonction  $N_M(t)$ , ou par leur transformée de Laplace  $N_M(s)$  .

Nous introduisons comme dans la première partie les matrices de transfert  $Z^{(M)}$  et les perturbations équivalentes  $Q^{(M)}$ , telles que l'on ait entre deux points de mesure consécutifs M - 1 et M la relation de récurrence.

$$(1) \quad m_{M-1}(s) = Z^M m_M + Q^M$$

$$(2) \quad m_M \text{ désignant le vecteur } \begin{pmatrix} N_M(s) \\ M_M(s) = \frac{\partial N_M}{\partial m} - L \in N \end{pmatrix}$$

En appliquant cette relation aux différents points M et en tenant compte de  $M_1 = 0$  - Le point 1 désignant la sortie pauvre - on obtient :

$$N_{R-1} = Z_{11}^R N_R + Q_{11}^R$$

$$N_{R-2} = (Z_{11}^{R-1} - Z_{11}^R) N_R + (Z_{11}^{R-1} Q_{11}^R) + Q_{11}^{R-1}$$

---


$$N_1 = (Z_{11}^2 Z_{11}^3 Z_{11}^4 \dots Z_{11}^R) N_R + (Z_{11}^2 Z_{11}^3 \dots Z_{11}^{R-1} Q_{11}^R) + \dots + (Z_{11}^2 Q_{11}^3) + Q_{11}^2$$

$$M_1 = 0 = (Z_{21}^2 Z_{21}^3 \dots Z_{21}^R) N_R + (Z_{21}^2 Z_{21}^3 \dots Z_{21}^{R-1} Q_{21}^R) + \dots + (Z_{21}^2 Q_{21}^3) + Q_{21}^2$$

La dernière relation donne  $N_R$  en fonction des  $Z$  et des  $Q$ :

$$(4) \quad N_R = - \frac{(Z^2 Z^3 \dots Z^{R-1} Q^R)_2 + \dots + (Z^2 Q^3)_2 + Q_2^2}{(Z^2 Z^3 \dots Z^R)_{2,1}}$$

En portant cette expression dans les relations précédentes, on obtient les  $N_M$  :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{R-1} &= - \frac{Z_{2,1}^R [(Z^2 Z^3 \dots Z^{R-1} Q^R)_2 + \dots + (Z^2 Q^3)_2 + Q_2^2 - Q_{2,1}^R (Z^2 Z^3 \dots Z^R)_{2,1}]}{(Z^2 Z^3 \dots Z^R)_{2,1}} \\ N_{R-2} &= - \frac{(Z^{R-1} Z^R)_{2,1} [(Z^2 Z^3 \dots Z^{R-1} Z^R)_2 + \dots + (Z^3 Q^2)_2 + Q_2^2] - [(Z^{R-1} Q^R)_2 + Q_{2,1}^{R-1}] (Z^2 Z^3 \dots Z^R)_{2,1}}{(Z^2 Z^3 \dots Z^R)_{2,1}} \end{aligned} \right.$$

etc....

Pour obtenir les expressions en fonction du temps, nous devons effectuer leur transformation de Laplace par la méthode des résidus. Nous supposons d'abord une perturbation instantanée, en forme d'impulsion - Les seuls pôles seront les zéros de  $\mathcal{D} = (Z^2 Z^3 \dots Z^R)_{2,1}$  désignés par  $P_i$ , tous négatifs.

$N_R$  s'exprime sous la forme de développement d'Heaviside :

$$(7) \quad N_R = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{s - P_i} \quad \text{ou} \quad N_R(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i e^{P_i t}$$

Les coefficients  $e_i$  sont donnés par :

$$(8) \quad e_i = - \frac{(Z^2 Z^3 \dots Z^{R-1} Q^R)_2 + \dots + (Z^2 Q^3)_2 + Q_2^2}{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial s}}$$

Cette expression étant calculée pour  $s = P_i$

Nous avons ensuite :

$$(9) \quad N_{R-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (z^R)_{11}^i \frac{e_i}{\lambda - P_i}$$

$$N_{R-2} = \sum_{i=1}^{\infty} (z^{R-1} z^R)_{11}^i \frac{e_i}{\lambda - P_i}$$

$$(10) \quad N_M(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (z^{M+1} z^{M+2} \dots z^R)_{11}^i \frac{e_i}{\lambda - P_i},$$

l'indice  $i$  signifiant que les éléments sont calculés pour  $s = P_i$ . L'ensemble des  $R$  coefficients  $N_{Mi} = (z^{M+1} z^{M+2} \dots z^R)_{11}^i$  pour un  $i$  donné forme un mode propre du système. Les relations (9), (10) s'écrivent :

$$(11) \quad N_M(\lambda) = \sum_i \frac{e_i N_{Mi}}{\lambda - P_i}$$

$$(12) \quad \text{ou } N_M(t) = \sum_i e_i N_{Mi} e^{P_i t}$$

Lorsque la perturbation à une forme donnée  $\eta(s)$ , elles deviennent :

$$(13) \quad N_M(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i N_{Mi}}{\lambda - P_i} \eta(\lambda)$$

ou leur équivalent sous forme temporelle.

$$(14) \quad N_M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i N_{Mi} \int_{-\infty}^t e^{P_i(t-t')} \eta(t') dt'$$

2°) - Evolution à partir d'un état initial  $N(n,0)$  donné -

Dans une cascade ou un tronçon d'usine, la concentration à l'instant initial diffère de la concentration de l'état permanent de la quantité donnée  $N(n,0)$ ,  $n$  désignant le rang d'un étage à partir du bas.

L'équation transformée qui donne l'évolution de la concentration s'écrit, en utilisant la même méthode et les mêmes notations que dans la note I (§ II, 2°) :

$$(20) \quad \rho \theta N - \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} + 2\varepsilon' \frac{\partial N}{\partial n} = N(n,0)$$

Pour trouver la perturbation équivalente, il nous faut résoudre cette équation avec les conditions aux limites :

$$(21) \quad \begin{array}{l} N = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial n} - 2\varepsilon N = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n = \sigma, \text{ nombre d'étages de} \\ \text{la cascade ou du tronçon considéré.} \end{array} \right.$$

Cette solution s'écrit :

$$N(n,s) = \int_n^\sigma \frac{\text{sh} \beta(m-n')}{\beta} e^{-\varepsilon'(n'-n)} N(n',0) dn'$$

On en déduit les deux composantes de la perturbation équivalente :

$$Q_1 = N(0,s) = - \int_0^\sigma \frac{\text{sh} \beta n}{\beta} e^{-\varepsilon' n} N(n,0) dn$$

$$Q_2 = \left[ \frac{\partial N}{\partial n} - 2\varepsilon N(n,0) \right]_{n=0}$$

$$= \int_0^s \left[ -\operatorname{ch} \beta n + \frac{\varepsilon''}{\beta} \operatorname{sh} \beta n \right] e^{-\varepsilon' n} N(n,0) \, dn$$

Application à une cascade de  $\sigma$  étages reliée à un réservoir infini.

La concentration d'entrée étant invariable, on a :

$$(24) \quad N_0 = 0 = \sum_{11}^{\sigma} N_{\sigma} + Q_1$$

d'où pour la concentration de sortie :

$$(25) \quad N_{\sigma} = - \frac{Q_1}{Z''} = \frac{\int_0^{\sigma} \frac{\operatorname{sh} \beta n}{\beta} e^{-\varepsilon' n} N(n,0) \, dn}{e^{-\varepsilon' \sigma} \left[ \operatorname{ch} \beta \sigma - \frac{\varepsilon''}{\beta} \operatorname{sh} \beta \sigma \right]}$$

Les pôles  $s = P_i$  sont donnés par :

$$(26) \quad \mathcal{D}(s, \sigma) = e^{-\varepsilon' \sigma} \left( \operatorname{ch} \beta \sigma - \frac{\varepsilon''}{\beta} \operatorname{sh} \beta \sigma \right) = 0$$

avec  $\beta = \sqrt{s\theta + \varepsilon'^2}$

On en déduit :

$$(27) \quad \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial s} \right)_{P_i} = \frac{\operatorname{sh} \beta_i \sigma}{2\beta_i^3} \left[ \beta_i^2 \sigma + \varepsilon'' (1 - \varepsilon'' \sigma) \right]$$

$$(28) \text{ et } N_{\sigma}(t) = \sum_i e_i e^{P_i t}$$

$$(29) \text{ avec } e_i = \frac{2\beta_i^3 e^{\epsilon' \sigma} \int_0^{\sigma} \frac{\rho h \beta_i m}{\beta_i} e^{-\epsilon' m} N(n, 0) dn}{\rho h \beta_i \sigma [\beta_i^2 \sigma + \epsilon'' (1 - \epsilon'' \sigma)]}$$

A un étage n quelconque, la variation de concentration sera

$$(30) \quad N_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n N_{\sigma} + Q_i^n$$

$$= \frac{\mathcal{O}(\lambda, \sigma - n) \int_0^{\sigma} \frac{\rho h \beta_i m'}{\beta_i} e^{-\epsilon' m'} N(n', 0) dn' + \mathcal{O}(\lambda, \sigma) \int_n^{\sigma} \frac{\rho h \beta_i (n - n')}{\beta_i} e^{-\epsilon' (n - n')} N(n', 0) dn'}{\mathcal{O}(\lambda, \sigma)}$$

$$\text{d'où (31): } N_n(t) = \sum_i e_i N_{ni} e^{P_i t},$$

les modes propres

$N_{ni}$  étant :

$$(32) \quad N_{ni} = \left( \sum_{i=1}^n \right)^i = \mathcal{O}(P_i, \sigma - n)$$

$$= e^{-\epsilon' (\sigma - n)} \left[ \rho h \beta_i (\sigma - n) - \frac{\epsilon''}{\beta_i} \rho h \beta_i (\sigma - n) \right]$$

Si la cascade considérée constitue le tronçon J d'une usine, toutes les grandeurs précédentes devront être affectées de l'indice J. On aura ainsi :

$$(33) \quad Q_1^J = - \int_0^{D_J} \frac{\rho h \beta_J n_J}{\beta_J} e^{-\varepsilon' n_J} N(n_J, 0) dn_J$$

$$(34) \quad Q_2^J = - \int_0^{D_J} \left( ch \beta_J n_J - \frac{\varepsilon_J''}{\beta_J} sh \beta_J n_J \right) e^{-\varepsilon' n_J} N(n_J, 0) dn_J$$

La concentration en un point quelconque de l'usine sera donnée par la méthode exposée au § 1<sup>o</sup>.

Les mêmes calculs s'appliquent lorsque la perturbation est appliquée sous forme d'une impulsion à l'instant initial, l'équation d'évolution de concentration étant de la forme :

$$(35) \quad \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} + 2\varepsilon' \frac{\partial N}{\partial n} = \eta(n) \delta(t)$$

La transformation de cette équation donne l'équation (20),  $\eta(n)$  remplaçant  $N(n, 0)$ .  $\eta(n)$  et l'instant initial étant arbitraire, une perturbation quelconque pourra être considérée comme la somme de perturbations impulsives, le terme de force général étant

$$(36) \quad \eta(n, t) = \int \eta(n, t_0) \delta(t - t_0) dt_0$$

La réponse des concentrations pourra aussi se mettre sous la forme générale (. cf. (29) et (31) ) :

$$N_M = \sum_n \eta(n, s) \sum_i e_i(n) \frac{N_{Mi}}{s - P_i} = \sum_i e_i(s) \frac{N_{Mi}}{s - P_i}$$

Lorsqu'on inverse les relations (5) ou (30), la première partie seule contribue au développement d'Heaviside puisque le coefficient de la deuxième partie est nul pour  $s = P_i$ . Bien que cette 2ème partie n'intervienne pas directement, sa présence est nécessaire pour appliquer le théorème des résidus dans cette inversion.

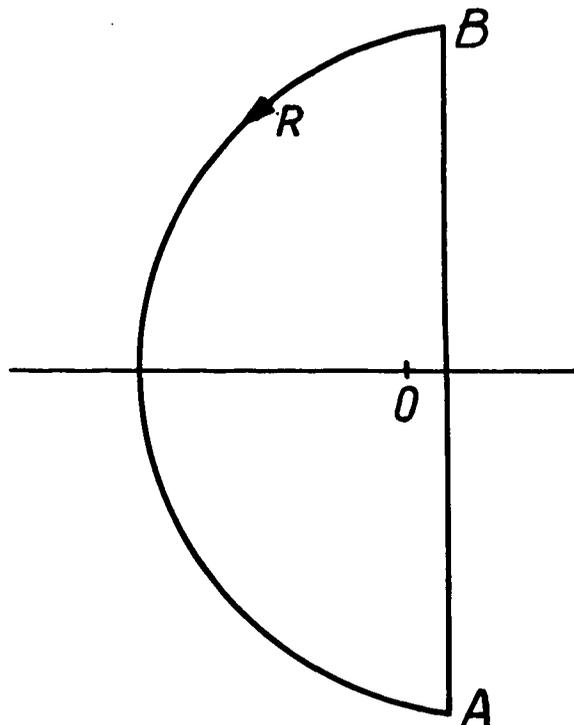
L'inverse de  $f(s)$  étant :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_A^B e^{st} f(s) ds,$$

cette expression n'est égale à la somme des résidus du demi plan gauche que si

$$\int_R e^{st} f(s) ds = 0, \quad R \text{ étant}$$

le demi cercle de rayon infini



En développant l'expression (30), nous avons dans la 1ère partie un terme divergent  $e^{\beta(m'-n)}$  ( $n' > n$ ) qui s'élimine grâce au terme correspondant de la 2ème partie.

Expression asymptotique. On sait que les expressions asymptotiques  $f(s)$ ,  $s$  grand correspondent aux expressions asymptotiques

de  $f(t)$ ,  $t$  faible. Si on considère une perturbation en  $n'$ , on voit en développant l'expression (30) que l'expression asymptotique de  $N_m(s)$  est de l'ordre de  $e^{-\beta |n'-n|}$ ; l'effet ne dépend au début que de la distance entre le point de perturbation et le point de mesure.

L'inverse de  $e^{-\beta |n'-n|}$  étant de l'ordre de  $\exp\left[-\frac{(n'-n)^2}{4t}\right]$ , la perturbation ne sera perçue par un appareil de mesure de sensibilité  $p$  qu'à partir du moment  $t$  où  $\exp\left\{-\frac{(n'-n)^2}{4t}\right\} \geq p$  ;  
 $t = \frac{(n'-n)^2}{4 \ln(\frac{1}{p})}$  définit donc le temps de propagation

d'une perturbation de  $n'$  à  $n$ .

Ces remarques vérifiées sur l'exemple simple considéré ici sont valables et ont pu être vérifiées quels que soient la perturbation et le système considérés.

III -REDUCTION D'UNE PERTURBATION CONNUE -

Le problème à résoudre est le suivant : en l'absence de contrôle, la perturbation donnée produirait une variation  $E$  de la concentration de sortie. Avec contrôle, c'est-à-dire effet des transports  $\psi_J$ , on aura une variation

$$(1) \quad \varepsilon(\lambda) = E(\lambda) + \sum_J B_J \psi_J(\lambda)$$

$$(2) \quad \text{ou } \varepsilon(t) = E(t) + \sum_J \int_{-\infty}^t B_J(t-\tau) \psi_J(\tau) d\tau,$$

$B_J$  désigne la fonction de transfert  $\psi_J \longrightarrow \varepsilon$   
 Nous devons déterminer les  $\psi_J$  tels que

$$(3) \quad U = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \varepsilon^2(t) + \sum_J \lambda_J \psi_J^2(t) \right] dt.$$

soit minimum -  $\lambda_J$  est une constante qui représente le poids à attribuer au transport  $\psi_J$  lors de la minimisation soit par des considérations économiques, soit par des raisons techniques - par exemple le non dépassement d'une limite donnée.

Une variation  $\delta \psi_J(\tau)$  pendant l'intervalle

$(\tau, \tau + \delta\tau)$  entraînera une variation de  $U$  :

$$(4) \quad \delta U = 2 \delta\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \varepsilon(t) \delta \varepsilon(t) + \lambda_J \psi_J(t) \delta \psi_J \right] dt$$

$$\delta U = 2 \delta\tau \delta \psi_J(\tau) \left[ \int_{\tau}^{\infty} \varepsilon(t) B_J(t-\tau) dt + \lambda_J \psi_J(\tau) \right]$$

$\oint U$  devant être nul quel que soit  $\delta \psi_J$ , on obtient le système d'équations intégrales :

$$(5) \int_{\tau}^{\infty} \varepsilon(\tau) B_J(\tau - \tau) d\tau + \lambda_J \psi_J(\tau) = 0,$$

qui, avec (2) détermine les  $\psi_J$ .

Résolution - Nous appliquerons au système d'équations (2), (5) la transformation de Laplace généralisée, définie par

$$(9) \quad f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

à l'intérieur d'un certain domaine de convergence  $\alpha < \text{Re } s < \beta$ . Nous rappelons en fin de chapitre les principales règles de calcul opérationnel, en renvoyant pour plus de détails au livre de Van der Pol et Bremmer : "Operational calculus based on the two - sided Laplace integral".

Après cette transformation, nous obtenons le système (1) et

$$(10) \quad B_J^* (s) + \lambda_J \psi_J (s) = 0$$

en notant

$$(11) \quad B_J^* (s) = B_J^* (-s)$$

(10) est valable pour le domaine de convergence commun à

toutes les transformées. Nous supposons que ce domaine existe. Il peut se réduire à l'axe imaginaire  $s = i\omega$ . Dans ce cas, la transformation est celle de Fourier.

En éliminant  $\varepsilon$  entre les équations (1) et (10), on obtient

$$(12) \quad B_J^* E + \sum_{J'} B_J^* B_{J'} \psi_{J'} + \lambda_J \psi_J = 0$$

1er cas, l'action n'est pas limitée dans le temps.

Nous avons à déterminer  $\psi_J(t)$  pour  $-\infty < t < \infty$ . Nous calculerons d'abord la transformée  $\psi_J(s)$ . En résolvant le système (12) on obtient la solution sous la forme :

$$(13) \quad \psi_J^0 = -\frac{1}{\lambda_J} \frac{B_J^* E}{\Delta} \quad \text{où} \quad (14) \quad \Delta = 1 + \sum_J \frac{1}{\lambda_J} B_J^* B_J$$

En prenant pour origine le début de la perturbation, l'effet de celle-ci sur la concentration de sortie pourra, d'après la considération du § I se mettre sous la forme :

$$(15) \quad E(s) = \eta(s) P(s)$$

où

$$(16) \quad \eta(s) = \sum_j \frac{\eta_j}{s - \alpha_j} \quad \text{caractérise l'évolution de la perturbation, et}$$

$$(17) \quad P(s) = \sum_i \frac{e_i}{s - p_i} \quad \text{caractérise la nature de la perturbation.}$$

$P_i$  caractérise les valeurs propres du système. Pour les nécessités du calcul, nous limiterons tout développement

en modes propres du type (17) à R termes. L'erreur ainsi commise, qui porte sur les termes  $e^{P_i t}$  avec  $i > R$  sera négligeable pour  $e^{P_R t} \ll 1$  ou  $t \gg \frac{1}{|P_R|}$

$$(18) \text{ On a ainsi } B_s = \sum_{i=1}^R \frac{b_{i,s}}{s - P_i}$$

D'après sa définition (14),  $\Delta$  est caractérisé

1°) par ses pôles  $\pm P_i$  ( $i = 1 \text{ à } R$ )

2°) par ses zéros  $\pm \alpha_k$  ( $k = 1 \text{ à } R$ )

3°) par sa valeur 1 pour  $s \rightarrow \infty$

Il pourra donc se mettre sous la forme

$$(19) \quad \Delta = \prod_{i=1}^R \left( \frac{s^2 - \alpha_i^2}{s^2 - P_i^2} \right)$$

$$(20) \text{ d'où } \frac{1}{\Delta} = 1 - \sum_{k=1}^R f_k \left( \frac{1}{s + \alpha_k} - \frac{1}{s - \alpha_k} \right)$$

$$(21) \text{ avec } f_k = \frac{\prod_{j=1}^R (\alpha_k^2 - P_j^2)}{2 \alpha_k \prod_{j=1}^R (\alpha_k^2 - \alpha_j^2)}$$

L'inversion de  $\psi_s^0$  (13) pourra maintenant s'effectuer en 2 parties :

1°)  $0 < t < \infty$  - l'inversion porte sur les pôles à  $\text{Re } \leq 0$  soit  $-\alpha_k$  et  $Q_j$  ( $\text{Re } Q_j \leq 0$ ). On obtient ainsi :

$$(23) \quad \psi_{J+}^0 = \frac{1}{\lambda_J} \left\{ \sum_{k=1}^R B_J(\alpha_k) f_k E(-\alpha_k) e^{-\alpha_k t} - \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re} Q_j \leq 0}} \frac{B_J^*(Q_j) \eta_j P(Q_j)}{\Delta(Q_j)} e^{Q_j t} \right\}$$

2°)  $-\infty < t < 0$  : l'inversion porte sur les pôles à  $\operatorname{Re} > 0$ , soit  $\alpha_k$  et  $Q_j$  ( $\operatorname{Re} Q_j > 0$ ) - On obtient :

$$(24) \quad \psi_{J-}^0 = \frac{1}{\lambda_J} \left\{ \sum_{k=1}^R B_J(-\alpha_k) f_k E(\alpha_k) e^{\alpha_k t} + \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re} Q_j > 0}} \frac{B_J^*(Q_j) \eta_j P(Q_j)}{\Delta(Q_j)} e^{Q_j t} \right\}$$

Variation de la concentration - Sa transformée est donnée d'après (10) et (13) sous la forme

$$(25) \quad \varepsilon^0 = -\lambda_J \frac{\psi_J}{B_J^*} = \frac{E}{\Delta}$$

L'inversion se fait comme ci-dessus - On obtient :

$$(26) \quad 0 < t < \infty$$

$$\varepsilon_+^0 = - \sum_k f_k E(-\alpha_k) e^{-\alpha_k t} + \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re} Q_j \geq 0}} \frac{\eta_j P(Q_j)}{\Delta(Q_j)} e^{Q_j t}$$

$$(27) \quad -\infty < t < 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_-^0 &= - \sum_k f_k E(\alpha_k) e^{\alpha_k t} \\ &\quad - \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re} Q_j < 0}} \frac{\eta_j P(Q_j)}{\Delta(Q_j)} e^{Q_j t} \end{aligned}$$

2ème cas : L'action est limitée dans le temps.

Nous supposons que l'action  $\psi_J$  débute un temps  $t_0$  avant la perturbation et nous prendrons pour origine des temps le début de l'action. L'effet de la perturbation sera donc  $E e^{-\Delta t_0}$ ,  $E$  étant donné par (15) et (16).

Le système d'équation (2), (5) est toujours valable, avec la restriction que dans ces équations,  $\tau$  est limité aux valeurs positives - Ce système forme un système d'équation de Wiener-Hopf qui se résoud de la manière suivante : on le transforme comme précédemment : (12) est alors remplacé par

$$(28) \quad B_J^* E e^{-\Delta t_0} + \sum_{J'} B_J^* B_{J'} \psi_{J'+} + \lambda_J (\psi_{J+} + \psi_{J-}) = 0$$

L'inconnue est  $\psi_{J+}$ ,  $\psi_{J-}$  étant son prolongement analytique pour  $t < 0$  - Résolvant par rapport à  $\psi_{J+}$ , on obtient :

$$(29) \quad \psi_{J+} = \psi_J^0 e^{-\Delta t_0} + \frac{1}{\Delta \lambda_J} \sum_{J'} B_J^* B_{J'} \psi_{J'} - \psi_{J-}$$

où  $\psi_j^0 = - \frac{\beta_j^* E}{\lambda_j \Delta}$  est la solution établie précédemment

Nous poserons :

$$(30) \quad \psi_{j+} = (\psi_j^0 e^{-\lambda_j t_0})_+ + \varphi_j$$

(31) Le terme  $\varphi_j = \left[ \frac{1}{\Delta \lambda_j} \sum_{j'} \beta_{j'}^* \beta_{j'} \psi_{j'-} \right]_+$  désigne la correction à appliquer à l'action pour tenir compte de sa limitation dans le temps. Ce terme a pour pôles les zéros négatifs  $(-\alpha_k)$  de  $\Delta$ .

On pourra donc poser :

$$(32) \quad \varphi_j = \sum_k \frac{A_{jk}}{\lambda + \alpha_k}$$

Multipliant l'équation (12) du 1er cas par  $e^{-\lambda t_0}$  et retranchant de (28), on obtient en tenant compte de (30) :

$$(33) \quad \sum_{j'} \beta_{j'}^* \beta_{j'} \varphi_{j'} + \lambda_j \varphi_j - \sum \beta_j^* \beta_{j'} (\psi_{j'} e^{-\lambda t_0})_- = -\lambda_j \psi_{j-}$$

Le premier membre de cette expression devant être nul pour  $t > 0$  ne doit pas avoir de pôles à  $\text{Re} < 0$ . Les seuls pôles possibles sont  $\lambda = \rho_i$  et  $\lambda = -\alpha_k$

En annulant les résidus correspondant à ces pôles, on obtient un système d'équation compatibles qui permet de

déterminer les coefficients inconnus  $A_{jR}$ . On trouve :

$$(34) \quad A_{jR} = \frac{1}{\lambda_j} B_j(\alpha_R) a_R, \quad a_R \text{ étant donné par le système des } R \text{ équations}$$

$$(35) \quad \sum_j b_{ij} \left[ \sum_k \frac{B_j(\alpha_k)}{\lambda_j(P_i + \alpha_k)} a_k - (\psi_j^\circ e^{-st_0})_-^i \right] = 0$$

où  $(\psi_j^\circ e^{-st_0})_-^i$  désigne la partie négative de  $\psi_j^\circ e^{-st_0}$ , prise pour  $s = P_i$

En posant

$$(36) \quad d_{ik} = \sum_j b_{ij} \frac{B_j(\alpha_k)}{\lambda_j(P_i + \alpha_k)},$$

(35) s'écrit :

$$(37) \quad \sum_k d_{ik} a_k = \sum_j b_{ij} (\psi_j^\circ e^{-st_0})_-^i.$$

$d_{ik}$  étant considéré comme une matrice dont la matrice inverse est  $d_{kj}^{-1}$ , définie par

$$(38) \quad \sum_i d_{li}^{-1} d_{ik} = \delta_{lk}, \quad \text{on obtient } a_k \text{ sous la forme}$$

$$(39) \quad a_k = \sum_{ji} d_{ki}^{-1} b_{ij} (\psi_j^\circ e^{-st_0})_-^i.$$

On aura donc finalement, d'après (30), (32), (34)

$$(40) \quad \psi_J(t) = \psi_J^{\circ}(t-t_0) + \frac{1}{\lambda_J} \sum_k \beta_J(\alpha_k) a_k e^{-\alpha_k t}$$

valable pour  $t > 0$ .

Variation de concentration :  $\varepsilon = E e^{-st_0} + \sum_J \beta_J \psi_J$   
 nous donne, en prenant la solution  $\psi_J$  ci-dessus :

$$(41) \quad \varepsilon = (\varepsilon^{\circ} e^{-st_0})_+ - \sum_k \frac{a_k}{s + \alpha_k}$$

$\varepsilon^{\circ}$  étant la solution (25) du premier cas.

D'où :

$$(42) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon^{\circ}(t-t_0) - \sum_k a_k e^{-\alpha_k t}, \text{ valable pour } t > 0.$$

Comme pour  $\psi_J$ , le 2ème terme tient compte des modifications apportées par la limitation du temps d'action.

Application - 1) Réduction de perturbations en forme d'impulsions

Nous avons montré au chapitre I que l'effet à contrôler était de la forme

$$E = \sum_i \frac{e_i}{s - p_i}$$

Les équations de contrôle étant linéaires, si l'on

connait le contrôle  $\Psi_{iJ}$  de chaque effet élémentaire  $\frac{1}{s - P_i}$   
le contrôle total sera :

$$\Psi_J = \sum_i e_i \Psi_{iJ}$$

Contrôle d'un effet élémentaire :  $E = \frac{1}{s - P_i}$

En appliquant les formules (23) à (27) on obtient pour le contrôle non limité :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{iJ+}^{\circ}(s) = -\frac{1}{\lambda_J} \sum_e B_J(\alpha_e) \frac{f_e}{\alpha_e + P_i} \frac{1}{s + \alpha_e} \\ \Psi_{iJ-}^{\circ}(s) = -\frac{1}{\lambda_J} \sum_e B_J(-\alpha_e) \frac{f_e}{\alpha_e - P_i} \frac{1}{s - \alpha_e} \end{array} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{i+}^{\circ} = \sum_e \frac{f_e}{(\alpha_e + P_i)(s + \alpha_e)} \\ \varepsilon_{i-}^{\circ} = \sum_e \frac{f_e}{(\alpha_e - P_i)(s - \alpha_e)} \end{array} \right.$$

En appliquant (40), (41) on obtient pour le contrôle limité à  $t > 0$

$$(46) \quad \Psi_{iJ}(s) = \frac{1}{\lambda_J} \sum_e \frac{B_J(\alpha_e)}{s + \alpha_e} K_{el}^{(0)}$$

et (47) 
$$\varepsilon_i = - \sum_e \frac{K_{ei}^{\circ}}{s + \alpha_e}$$

avec

$$(48) \quad K_{ei}^{(0)} = - \frac{f_e}{\alpha_e + \rho_i} + \sum_{j \neq m} \frac{d_{ej}' \beta_{jJ} \beta_J (-\alpha_m) f_m}{\lambda_J (\alpha_m - \rho_i) (\alpha_m - \rho_j)}$$

Application 2 - Réduction de perturbations en forme d'échelon

L'effet à contrôler étant  $E = \sum_i \frac{e_i}{s(s-\rho_i)}$ , le contrôle sera de même :

$$\psi_J = \sum_i e_i \psi_{iJ} \quad , \quad \psi_{iJ} \quad \text{étant le contrôle de l'effet élémentaire} \quad \frac{1}{s(s-\rho_i)}$$

Contrôle d'un effet élémentaire :  $E = \frac{1}{s(s-\rho_i)}$

En appliquant la même méthode, on obtient pour le contrôle non limité :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{iJ+}^{\circ} = \frac{1}{\lambda_J} \sum_e \beta_J(\alpha_e) \frac{f_e}{\alpha_e(\alpha_e + \rho_i)} \frac{1}{s + \alpha_e} + \frac{1}{\lambda_J} \frac{\beta_J(0)}{\rho_i \Delta(0)} \frac{1}{s} \\ \psi_{iJ-}^{\circ} = - \frac{1}{\lambda_J} \sum_e \beta_J(-\alpha_e) \frac{f_e}{\alpha_e(\alpha_e - \rho_i)} \frac{1}{(s - \alpha_e)} \end{array} \right.$$

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{i+}^{\circ} = - \sum_e \frac{f_e}{\alpha_e(\alpha_e + \rho_i)(s + \alpha_e)} - \frac{1}{s \rho_i \Delta(0)} \\ \varepsilon_{i-}^{\circ} = \sum_e \frac{f_e}{\alpha_e(\alpha_e - \rho_i)(s - \alpha_e)} \end{array} \right.$$

et pour le contrôle limité à  $t > 0$  :

$$(52) \quad \psi_{iJ} = \frac{1}{\lambda_J} \sum_e \frac{\beta_J(\alpha_e)}{s + \alpha_e} K_{ei}^{(1)} + \frac{1}{\lambda_J} \frac{\beta_J(0)}{s \rho_i \Delta(0)}$$

$$(53) \quad \varepsilon_i = - \sum_e \frac{K_{ei}^{(1)}}{\alpha_e + P_i} - \frac{1}{\alpha P_i \Delta(0)}$$

avec

$$(54) \quad K_{ei}^{(1)} = \frac{f_e}{\alpha_e (\alpha_e + P_i)} + \sum_{j,m} \frac{d_{ej}^{-1} l_{jJ} B_J (-\alpha_m) f_m}{\lambda_J \alpha_m (\alpha_m - P_J) (\alpha_m - P_i)}$$

Formules utiles -

On démontre aisément les relations suivantes :

$$(63) \quad \sum_J \frac{1}{\lambda_J} B_J (\alpha_m) B_J (-\alpha_m) = 1$$

$$(64) \quad \sum_e \frac{2 \alpha_e f_e}{\alpha_e^2 - P_i^2} = 1$$

$$(65) \quad \sum_e \frac{2 f_e}{\alpha_e} = 1 - \frac{1}{\Delta(0)}$$

$$(66) \quad \left( \begin{array}{l} \sum_e d_{ej} = 1 \\ \sum_e d_{ej}^{-1} = 1 \end{array} \right)$$

$$(67) \quad \left( \begin{array}{l} \sum_e K_{ei}^0 + 1 = 0 \quad ; \quad K_{ei}^0 = - d_{ei}^{-1} \\ \sum_e K_{ei}^{(1)} + \frac{1}{P_i \Delta(0)} = 0 \\ \sum_e K_{ei}^{(2)} + \frac{1}{P_i^2 \Delta(0)} = 0 \end{array} \right)$$

Ces formules sont utiles à la vérification des calculs. On voit également d'après les 3 dernières formules que le contrôle qui débute à  $t = 0$  ne change pas la valeur de l'effet pour  $t = 0$ . Il suffit pour le montrer d'appliquer le théorème de limites  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} s f(s)$  à  $E(s)$ , effet sans contrôle et

(s), effet avec contrôle dans tous les cas considérés ci-dessus. On voit d'après (67) que :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s E(s) = \lim_{\Delta} s \mathcal{E}(\Delta)$$

Il en est donc de même pour les valeurs initiales.

### Application 3 - Réduction de perturbation provenant d'une mise hors circuit d'un groupe d'étages

La figure 1 donne la variation de concentration pour la mise hors circuit de 60 étages dans une installation comportant une section appauvrissante et une section enrichissante. Les effets de cette mise hors circuit sont corrigés par la méthode exposée ci-dessus.

La première courbe correspond à une action non limitée dans le temps avec la possibilité d'agir avant que la mise hors circuit n'ait eu lieu. La deuxième courbe correspond au cas où l'action débute en même temps que la mise hors circuit. Les figures 2 et 3 montrent les variations correspondantes des transports :  $\psi_1$  en partie haute et  $\psi_0$  en partie basse. Les poids ont été choisis de manière que les variations finales des transports soient les mêmes, de sorte que le débit d'alimentation revienne à sa valeur initiale. Ceci exige :

$$(68) \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{B_1(0)}{B_0(0)}$$

On a choisi  $\lambda_1 = 1$ , ce qui conduit à une amplitude maximum de  $\psi_1$  égale environ au 1/3 du transport total  $\Psi_1$ .  
On a, d'après (68) :

$$\lambda_0 = 0,0857843$$

La transformation de Laplace généralisée - Formules de base -

Définition :  $f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} h(t) dt$ , convergent pour  $\alpha < \text{Re } s < \beta$

Inversion :  $h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds$  avec  $\alpha < c < \beta$

Notation :  $f(s) \doteq h(t)$  ou  $h(t) \doteq f(s)$

Propriétés élémentaires :

Similitude :  $\lambda > 0$  :  $h(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{s}{\lambda}\right)$  avec  $\lambda\alpha < \text{Re } s < \lambda\beta$

$\lambda < 0$  :  $h(\lambda t) \doteq -\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{s}{\lambda}\right)$  avec  $\lambda\beta < \text{Re } s < \lambda\alpha$

Déplacement :  $h(t+\lambda) \doteq e^{\lambda s} f(s)$  avec même domaine de convergence

Atténuation :  $e^{-\lambda t} h(t) \doteq f(s+\lambda)$  avec  $\alpha - \text{Re } \lambda < \text{Re } s < \beta - \text{Re } \lambda$

Produit de composition :

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} f_1(s) \doteq h_1(t) \\ f_2(s) \doteq h_2(t) \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} \alpha_1 < \operatorname{Re} s < \beta_1 \\ \alpha_2 < \operatorname{Re} s < \beta_2 \end{array} ,$$

$$\text{on a } f_1(s) f_2(s) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau) h_1(t-\tau) d\tau$$

$$\text{avec } \max(\alpha_1, \alpha_2) < \operatorname{Re} s < \min(\beta_1, \beta_2)$$

$$\text{Différentiation : } h'(t) \doteq s f(s)$$

Intégration :

$$1) \operatorname{Re} s > 0 \quad \frac{1}{s} f(s) \doteq \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad \max(\alpha, 0) < \operatorname{Re} s < \beta .$$

$$2) \operatorname{Re} s < 0 \quad \frac{1}{s} f(s) \doteq \int_{+\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad \alpha < \operatorname{Re} s < \min(\beta, 0)$$

Fonctions de corrélation :

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t+\tau) d\tau \doteq f_1(-s) f_2(s)$$

Décomposition d'une fonction :

$$h(t) = h_+(t) + h_-(t) \quad \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} h_+(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ h_-(t) = 0 \text{ pour } t > 0 \end{array} \right.$$

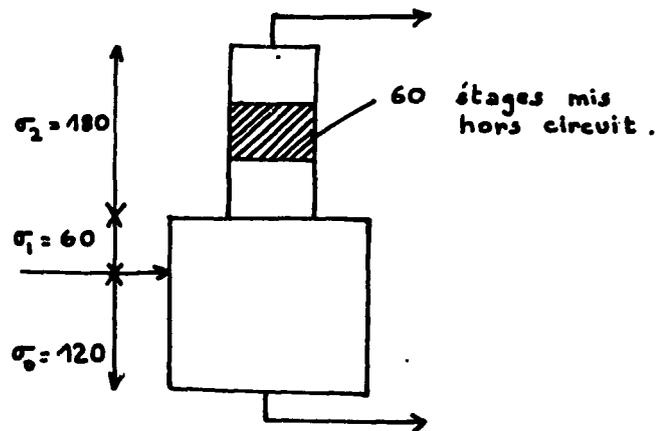
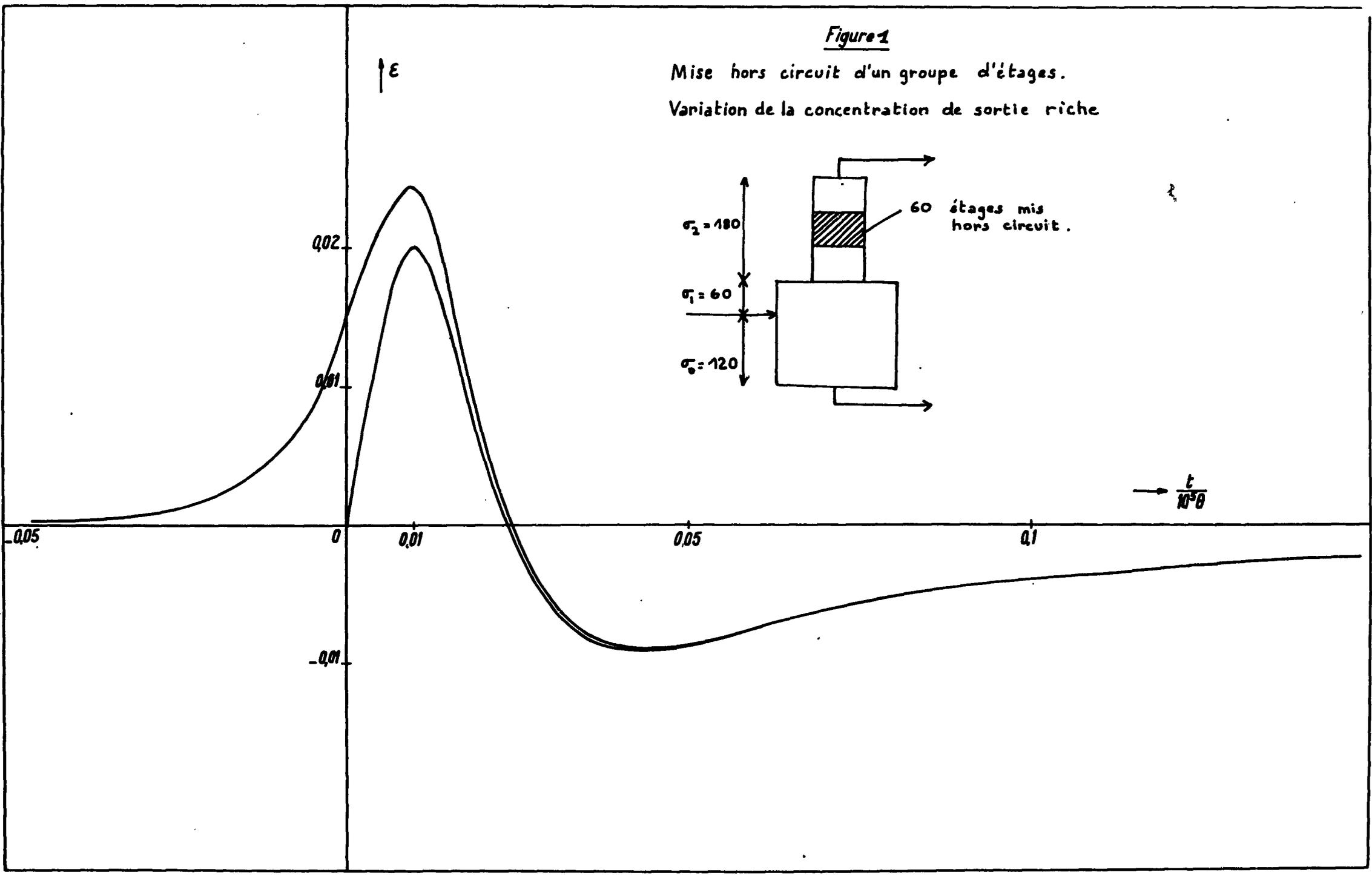


## REFERENCES

- J.H. WESTCOTT : Design of Multivariable optimum filters Transactions of the ASME, p. 463 (Fevrier 1958)
- H.C. HSIEH, C.T. LEONDES : on the optimum synthesis of multipole control systems in the Weiner sense IRE National Convention Record, part 4, p. 18 (Mars 1959).
- R.E. KALMAN, L. LAPIDUS, E. SHAPIRO : on the optimal control of Chemical and petroleum processes - Symposium on instrumentation and computation in process development and plant Design, London (Mai 1953).
- R.C. AMARA : Application of matrix methods to the linear least squares synthesis of multivariable systems J. Franklin Institute 268, p 1 (Juillet 1959).
- H.C. HSIEH, C.T. LEONDES : Techniques for the optimum synthesis of multipole control systems with random processes as inputs. IRE Trans. on Automatic control, AC-4 p 212 (Décembre 1959).
- M.D. MESAROVIC : Control of multivariable systems Int. Federation of Automatic control Congress, Moscou (Juin, Juillet 1960) 1, p. 235

Figure 1

Mise hors circuit d'un groupe d'étages.  
Variation de la concentration de sortie riche



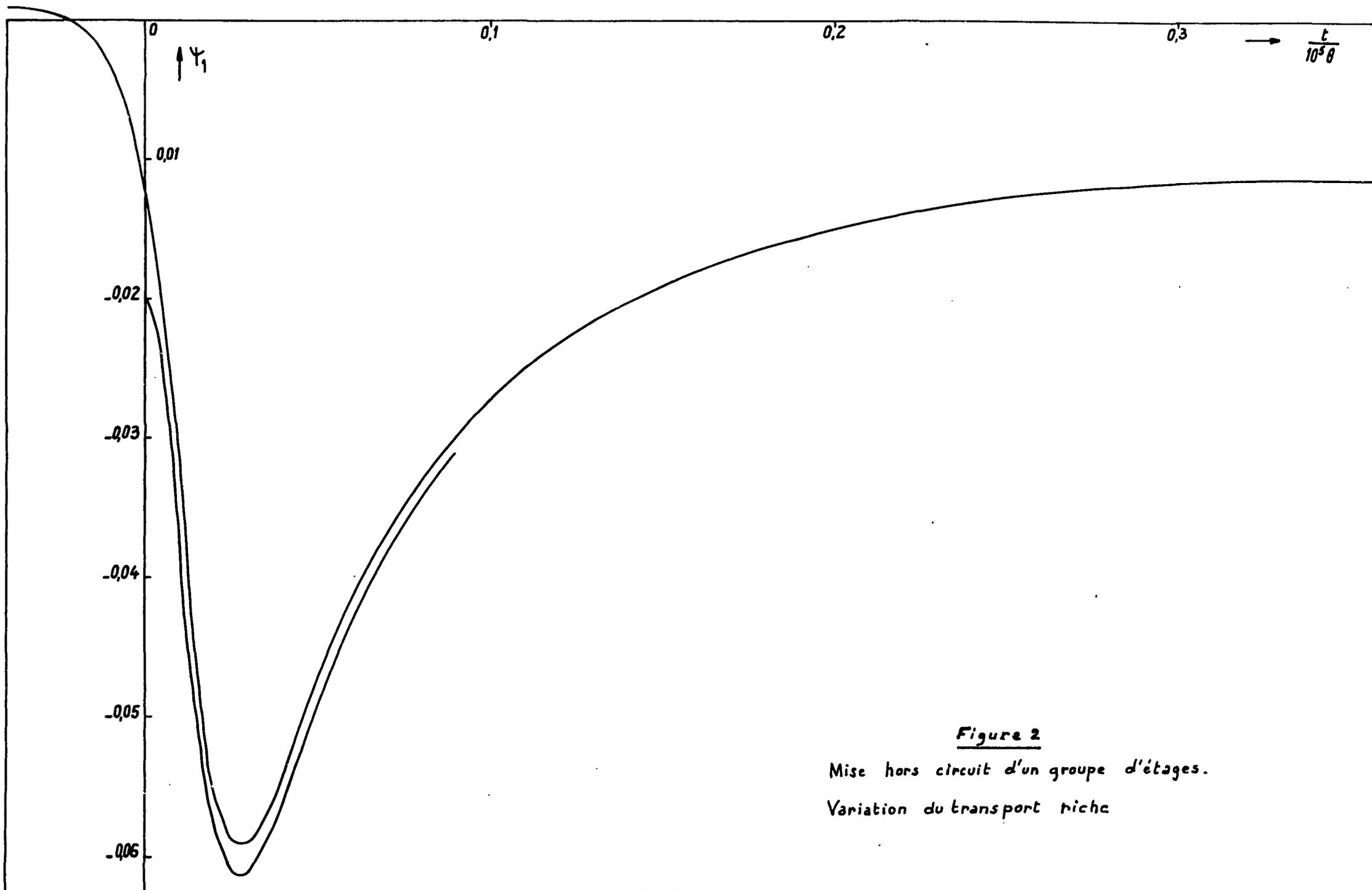


Figure 2

Mise hors circuit d'un groupe d'étages.  
Variation du transport niche

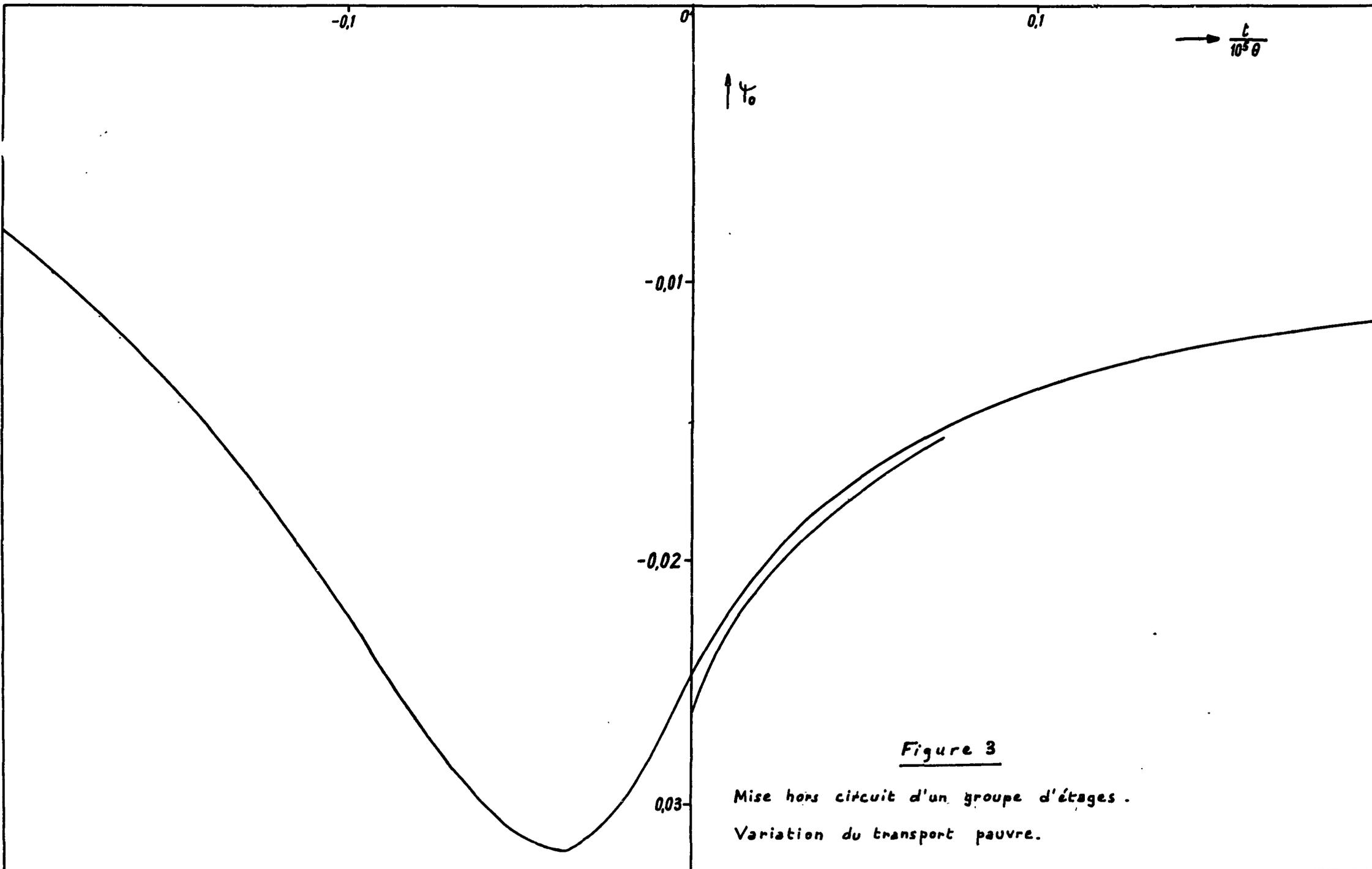


Figure 3

Mise hors circuit d'un groupe d'étages.  
 Variation du transport pauvre.

**FIN**