

CEA-R-3373 - FORMERY Philippe, GILLES André

ECHAUFFEMENT DES CHATEAUX DE PLOMB. UNE
SOLUTION ANALYTIQUE A L'EQUATION DE LA CHALEUR
CONSTITUEE PAR UNE SERIE DE FONCTIONS DE
LAGUERRE

Sommaire. - Les emballages qui servent au transport de produits fortement radioactifs, tels que des barreaux irradiés dans les piles, doivent satisfaire à des normes de sécurité assez strictes. Ils doivent, en particulier, résister au feu sans que la protection contre le rayonnement soit sensiblement entamée.

L'échauffement, par seul rayonnement thermique supposé obéir à la loi de STEFAN, d'un château de transport plongé dans un feu a été calculé par les méthodes habituelles du calcul automatique. Parallèlement a été tentée l'approche purement analytique que voici :

CEA-R-3373 - FORMERY Philippe, GILLES André

HEATING OF LEADS CASKS. AN ANALYTICAL SOLUTION
TO THE HEAT EQUATION MADE UP OF A SERIES OF
LAGUERRE FUNCTIONS

Summary. - The packing used for the transport of highly radioactive materials such as in-pile irradiated rods have to comply to fairly strict safety standards. They should in particular resist to fire without the radioactive protection being seriously affected.

The heating of a transport cask placed in a fire has been calculated by normal automatic computation methods assuming that only thermal radiation is responsible for the heating and that this obeys STEFAN'S law. Simultaneously, a purely analytical treatment has been attempted as follows.

Une solution simple, du type fonction de LAGUERRE, à l'équation de la chaleur est mise en évidence. La superposition, en nombre infini, de solutions simples, permet de fabriquer une solution assez générale dépendant de paramètres, satisfaisant à l'état initial et aux conditions aux limites. Les paramètres peuvent être ajustés de façon que la température et le flux engendrés sur la coque par cette solution satisfassent de façon approchée à la relation de STEFAN.

1968

28 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

The existence of a simple solution, of the LAGUERRE function type, to the heat equation has been demonstrated. By superposing an infinite number of simple solutions, it is possible to produce a fairly general solution, depending on parameters, which satisfies the initial state and the limiting conditions. The parameters can be adjusted so that the temperature and the flux produced on the shell by this solution satisfy approximately STEFAN'S relationship.

1968

28 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

10.1

ECHAUFFEMENT DES CHATEAUX DE PLOMB
UNE SOLUTION ANALYTIQUE
A L'EQUATION DE LA CHALEUR CONSTITUEE
PAR UNE SERIE DE FONCTIONS DE LAGUERRE

par

Philippe FORMERY, André GILLES

DIRECTION DES PRODUCTIONS

Centre d'Etudes Nucléaires de Fontenay-aux-Roses

Rapport CEA - R - 3373

1968

Ca

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N. - SACLAY B.P. n°2, 91 - GIF-sur-YVETTE - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

PLAN DE CLASSIFICATION

- | | |
|---|---|
| 1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS | 8. PHYSIQUE |
| | 8.1 Accélérateurs |
| | 8.2 Electricité, électronique, détection des rayonnements |
| | 8.3 Physique des plasmas |
| | 8.4 Physique des états condensés de la matière |
| | 8.5 Physique corpusculaire à haute énergie |
| | 8.6 Physique nucléaire |
| | 8.7 Electronique quantique, lasers |
| 2. BIOLOGIE ET MEDECINE | 9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES |
| 2.1 Biologie générale | |
| 2.2 Indicateurs nucléaires en biologie | |
| 2.3 Médecine du travail | |
| 2.4 Radiobiologie et Radioagronomie | |
| 2.5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine | |
| 3. CHIMIE | 10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS |
| 3.1 Chimie générale | |
| 3.2 Chimie analytique | |
| 3.3 Procédés de séparation | |
| 3.4 Radiochimie | |
| 4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE | 10.1 Protection sanitaire |
| | 10.2 Contrôle des rayonnements |
| | 10.3 Traitement des effluents |
| 5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE | 11. SEPARATION DES ISOTOPES |
| 6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX | 12. TECHNIQUES |
| 6.1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux | |
| 6.2 Effets des rayonnements sur les matériaux | |
| 6.3 Corrosion | |
| 7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS | 12.1 Mécanique des fluides - Techniques du vide |
| 7.1 Neutronique et physique des réacteurs | 12.2 Techniques des températures extrêmes |
| 7.2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité | 12.3 Mécanique et outillage |
| 7.3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs | 13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE |
| | 13.1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines |
| | 13.2 Etudes économiques, programme |
| | 13.3 Divers (documentation, administration, législation, etc...) |

- Rapport CEA-R-3373 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Fontenay-aux-Roses
Département Technique
Service des Etudes, de l'Equipe et des Transports

ECHAUFFEMENT DES CHATEAUX DE PLOMB
UNE SOLUTION ANALYTIQUE A L'EQUATION DE LA CHALEUR
CONSTITUEE PAR UNE SERIE DE FONCTIONS DE LAGUERRE

par

Philippe FORMERY, André GILLES

- Mars 1968 -

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

ECHAUFFEMENT DES CHATEAUX DE PLOMB
UNE SOLUTION ANALYTIQUE A L'EQUATION DE LA CHALEUR
CONSTITUEE PAR UNE SERIE DE FONCTIONS DE LAGUERRE

INTRODUCTION.

Les emballages qui servent au transport des matières fortement radioactives, comme par exemple les combustibles irradiés sont régis par des règles de sécurité assez strictes. Ils doivent entre autres supporter d'être plongés dans un feu à 800° supposé uniquement rayonnant pendant trente minutes sans réduction trop notable de la protection contre le rayonnement.

On utilise couramment en France des ensembles composés de deux coques d'acier entre lesquelles on coule du plomb - Le problème est de garantir que la fusion du plomb - si fusion il y a - n'affecte pas la protection au delà de ce que le règlement admet.

Ce problème de chaleur peut être traité numériquement par un ordinateur qui découpe en tranches l'équation aux dérivées partielles. S'il est ainsi parfaitement résolu pour un cas particulier on ne dispose pas d'éléments d'appréciation sur l'influence des différents paramètres.

Aussi nous avons cherché à donner à cette question une solution purement analytique. La méthode exposée prend en compte un modèle déjà assez élaboré puisqu'elle envisage un système à deux milieux (plomb et acier) avec raccordement des flux et décrochement des températures au contact. Elle est toutefois impuissante - au point où nous sommes - à traiter le problème des cylindres creux qu'elle assimile, compte tenu d'un coefficient de correction, à des parois planes. L'étude à une dimension d'un système quelconque est légitime dans la mesure où les parois peuvent être considérées comme "minces" c'est-à-dire à grand rayon de courbure vis-à-vis de l'épaisseur.

Prendre la condition aux limites telle que l'énonce la loi de STEFAN, conduit à une relation inextricable. Nous avons cherché à tourner la difficulté en choisissant a priori une solution à l'équation de la chaleur - satisfaisant à la condition initiale et aux conditions aux limites, hormis la relation de STEFAN sur la coque - et dépendant de paramètres. Ceux-ci sont ensuite déterminés de façon que la relation flux-température engendrée sur la coque par la solution avancée coïncide de façon approchée avec la loi de STEFAN.

Après plusieurs essais décevants, nous sommes tombés sur une solution assez générale s'exprimant par une série de fonctions de LAGUERRE. Elle nous a paru rendre assez bien compte du phénomène.

Voici lancés de façon abrupte, les résultats auxquels nous a mené un long et sinueux chemin.

1. UNE "SOLUTION SIMPLE" DE L'EQUATION DE LA CHALEUR EN MILIEU ISOTROPE A UN NOMBRE QUELCONQUE DE DIMENSIONS.

Le nombre de dimensions de l'espace est désigné par 2Υ , r est le rayon vecteur :

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2\Upsilon - 1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Partant de cette idée que la solution élémentaire d'une telle équation est

$$t^{-\Upsilon} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

nous nous proposons de définir les solutions de (1) du type

$$f(r, t) = g(t) G\left(\frac{r^2}{4t}\right)$$

g et G étant des fonctions que l'on cherche à déterminer.

$$\Delta f = \frac{g(t)}{t} \left\{ \frac{r^2}{4t} G''\left(\frac{r^2}{4t}\right) + \Upsilon G'\left(\frac{r^2}{4t}\right) \right\}$$

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{g(t)}{t} \left\{ \frac{r^2}{4t} G''\left(\frac{r^2}{4t}\right) + \left(\Upsilon + \frac{r^2}{4t}\right) G'\left(\frac{r^2}{4t}\right) - t \frac{g'(t)}{g(t)} G\left(\frac{r^2}{4t}\right) \right\}$$

Pour que G puisse être déterminé, l'expression dans l'accolade ne doit dépendre que du groupement $\frac{r^2}{4t}$, ce qui impose la constance du coefficient de G .

$$t \frac{g'(t)}{g(t)} = \text{Cste} = -\alpha$$

$$g(t) = t^{-\alpha} \quad \alpha \text{ une constante multiplicative près,}$$

et $G(u)$ solution d'une équation de GAUSS dégénérée - appelée équation de LAGUERRE :

$$x G''(x) + (\gamma + x) G'(x) + \alpha G(x) = 0 \quad (2)$$

La solution générale de cette équation est :

$$G(x) = A \frac{\sin(\alpha \pi)}{\sin(\gamma \pi)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\gamma + n)} \frac{(-x)^n}{n!} + B x^{1-\gamma} \frac{\sin(\alpha \pi - \gamma \pi)}{\sin(\gamma \pi)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha - \gamma + n)}{\Gamma(2 - \gamma + n)} \frac{(-x)^n}{n!} \quad (3)$$

Conclusion :

$$t^{-\alpha} G\left(\frac{r^2}{4t}\right)$$

est solution de l'équation de la chaleur (1).

En particulier pour $A = B = 1$ $G(x)$ est la fonction de LAGUERRE de seconde espèce, notée $L(\alpha, \gamma, x)$.

$$\text{Pour } A = B = 1 \quad G(x) = L(\alpha, \gamma, x)$$

Elle admet pour représentations intégrales :

$$L(\alpha, \gamma, x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_1^{\infty} e^{-ux} u^{\alpha-1} (u-1)^{\gamma-\alpha-1} du \quad \text{valable pour } \gamma > \alpha \quad (5)$$

$$L(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^{\infty} e^{-ux} u^{\alpha-\gamma} (u-1)^{-\alpha} du \quad \text{valable pour } \alpha < 1 \quad (6)$$

Espace à une dimension $\gamma = \frac{1}{2}$.

Le rayon vecteur r est remplacé par l'abscisse x . Nous nous limiterons à la "solution" simple constituée par la fonction de LAGUERRE de seconde espèce $L(\alpha, \frac{1}{2}, x)$. Pour alléger les notations, une fonction $S_{\alpha}(z)$ sera introduite :

$$S_{\alpha}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L\left(\alpha, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{4}\right) \quad (7)$$

$$f(x, t) = \frac{t^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} L\left(\alpha, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4t}\right) = t^{-\alpha} S_{\alpha}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (8)$$

- Dérivée de $S_{\alpha}(z)$

D'après la première représentation intégrale :

$$S_{\alpha}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)} \int_1^{\infty} e^{-u z^2/4} u^{\alpha-1} (u-1)^{-\alpha-\frac{1}{2}} du$$

$$\alpha < \frac{1}{2}$$

$$S'_{\alpha}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)} \cdot \frac{z}{2} \cdot \int_1^{\infty} e^{-u z^2/4} u^{\alpha} (u-1)^{-\alpha-\frac{1}{2}} du$$

c'est-à-dire selon la seconde représentation intégrale en y faisant $\alpha \rightarrow \alpha + \frac{1}{2}$.

$$S'_{\alpha}(z) = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} L\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2/4\right)$$

$$S'_{\alpha}(z) = - S_{\alpha + \frac{1}{2}}(z) \quad (9)$$

En réalité la relation (9) a été obtenue dans le domaine de validité des représentations intégrales c'est-à-dire pour $\alpha < \frac{1}{2}$.

La théorie des prolongements analytiques permet toutefois d'affirmer qu'elle a une valeur générale quel que soit α .

De (9)

$$f'_x(x, t) = t^{-\alpha-\frac{1}{2}} S'_{\alpha}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = - t^{-\alpha-\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (10)$$

Le flux relatif à la solution simple est égal - au signe près - à la solution simple pour l'indice $\alpha + \frac{1}{2}$.

- $S_{\alpha}(z)$ s'exprime par des fonctions élémentaires pour des valeurs entières ou demi-entières de α

Il est commode d'adopter les notations qui ont cours dans les tables de PEARSON.

$$Z(X) = \frac{e^{-\frac{X^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad Q(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X^\infty e^{-z^2/2} dz$$

(11)

$$R(X) = Z(X) - XQ(X)$$

De la relation assez classique

$$L(1, \gamma, x) = x^{1-\gamma} e^{-x}$$

$$S_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L\left(1, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{4}\right) = \frac{z}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4} = \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) Z\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

on déduit, en particulier, à l'aide de la formule (9) la séquence :

$$S_{-1/2}(z) = 2\sqrt{2} R\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad S_0(z) = 2Q\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad S_{1/2}(z) = \sqrt{2} Z\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

(12)

$$S_1(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} Z\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

- Développement asymptotique de $S_\alpha(z)$.

En développant le binôme de la représentation intégrale, on obtient aisément :

$$S_\alpha(z) \Longleftrightarrow \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2\alpha-1} Z\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1-2\alpha)(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$$

(13)

- Développement en série de $S_\alpha(z)$

A partir de (3) :

$$(14) \quad S_{\alpha}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ 1 - \alpha \frac{z^2}{2!} + \alpha(\alpha+1) \frac{z^4}{4!} - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \frac{z^6}{6!} + \dots \right\} - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)} \\ \left\{ z - (\alpha + \frac{1}{2}) \frac{z^3}{3!} + (\alpha + \frac{1}{2})(\alpha + \frac{3}{2}) \frac{z^5}{5!} - (\alpha + \frac{1}{2})(\alpha + \frac{3}{2})(\alpha + \frac{5}{2}) \frac{z^7}{7!} + \dots \right\}$$

- Equation différentielle à laquelle satisfait $S_{\alpha}(z)$

Par le changement de variable $x = \frac{z^2}{4}$ effectué sur l'équation (2) :

$$S'_{\alpha}(z) + \frac{1}{2} S'_{\alpha}(z) + \alpha S_{\alpha}(z) = 0 \quad (15)$$

II. SOLUTION DE LA CHALEUR OBTENUE PAR COMPOSITION DE "SOLUTIONS SIMPLES" (PROBLEME A UNE DIMENSION)

Si $f(x, t)$ est solution de l'équation de la chaleur à une dimension :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

c étant une constante, on note que :

$$f(c \pm x, t) \quad (16)$$

est également solution de la chaleur. Ceci posé on considère l'expression supposée uniformément convergente en x et t :

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} f(2k + a + x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} f(2k + a - x, t)$$

elle est également solution de la chaleur. Il lui est associé un flux :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} f'_x(2k + a + x, t) - \sum_{k=1}^{\infty} f'_x(2k + a - x, t)$$

en $x = 1$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_1 = \sum_{k=0}^{\infty} f'_x(2k+1+a, t) - \sum_{k=1}^{\infty} f'_x(2k-1+a, t)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_1 = \sum_{k=0}^{\infty} f'_x(2k+1+a, t) - \sum_{k=0}^{\infty} f'_x(2k+1+a, t) = 0 \quad (17)$$

en $x = 0$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 = f'_x(a, t) \quad (18)$$

Ainsi l'expression U est une solution de la chaleur dont le flux $\frac{\partial U}{\partial x}$ s'annule sur la face $x = 1$, est égal à $f'_x(a, t)$ sur la face $x = 0$.

Notons que la méthode échoue dans un espace à plus d'une dimension car la propriété de translation et de symétrie (16) ne vaut qu'à une dimension.

Application à la solution simple, dont le flux est :

$$f(x, t) = t^{-\alpha} S_{\alpha} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \quad (\text{cf. 8})$$

$$f'_x(x, t) = -t^{-\alpha - \frac{1}{2}} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \quad (\text{cf. 10})$$

L'expression

$$U = t^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha} \left(\frac{2k+a-x}{\sqrt{t}} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} S_{\alpha} \left(\frac{2k+a+x}{\sqrt{t}} \right) \right\} \quad (19)$$

dont le
flux est

$$\frac{\partial U}{\partial x} = t^{-\alpha - \frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{2k+a-x}{\sqrt{t}} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{2k+a+x}{\sqrt{t}} \right) \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{en } x = 0} \left\{ \begin{array}{l} U_0 = t^{-\alpha} \left\{ S_{\alpha} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha} \left(\frac{2k+a}{\sqrt{t}} \right) \right\} \\ \frac{\partial U_0}{\partial x} = - t^{-\alpha - \frac{1}{2}} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \end{array} \right. \quad (20) \\
 \\
 \boxed{\text{en } x = 1} \left\{ \begin{array}{l} U_1 = 2 t^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} S_{\alpha} \left(\frac{2k+1+a}{\sqrt{t}} \right) \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (20 \text{ bis})
 \end{array}$$

L'expression (19) est donc solution de la chaleur, son flux s'annule en $x = 1$, il est égal à $- t^{-\alpha - 1/2} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right)$ en $x = 0$. Ajoutons que la formule asymptotique (13) nous garantit sa convergence uniforme en x et en t pour tout intervalle de x et de t - cette convergence est même exceptionnellement rapide - Il en résulte que U tend vers zéro lorsque t tend vers zéro : $U(x, 0)$ est identiquement nul quel que soit x , ce qui satisfait à l'équilibre initial.

Nota : Les propriétés reconnues à $t^{-\alpha} S_{\alpha} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) = \frac{t^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} L \left(\alpha, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4t} \right)$ découlent en réalité de ce que sa transformée de LAPLACE par rapport au temps est $\frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p^{1-\alpha}}$. Nous avons

abandonné le mode d'exposition à partir de cette idée, pour l'exposé actuel, moins naturel mais plus rapide et plus synthétique, peut-être.

III. PROBLEME DE LA CHALEUR A DEUX MILIEUX

On se propose de trouver la répartition des températures dans deux milieux - nommons les plomb et acier - jointifs. On s'impose la nullité du flux sur la face externe du plomb - le raccordement des flux au contact plomb-acier et un décalage de température proportionnel au contact - la nullité des températures à l'instant initial.

Il est possible de faire des changements de variables, longueurs et temps, de façon que l'équation de la chaleur soit la même et sous forme canonique dans les deux milieux. On désigne par $U(x, t)$ la température dans le plomb, par $V(x, t)$ celle dans l'acier. L'origine des

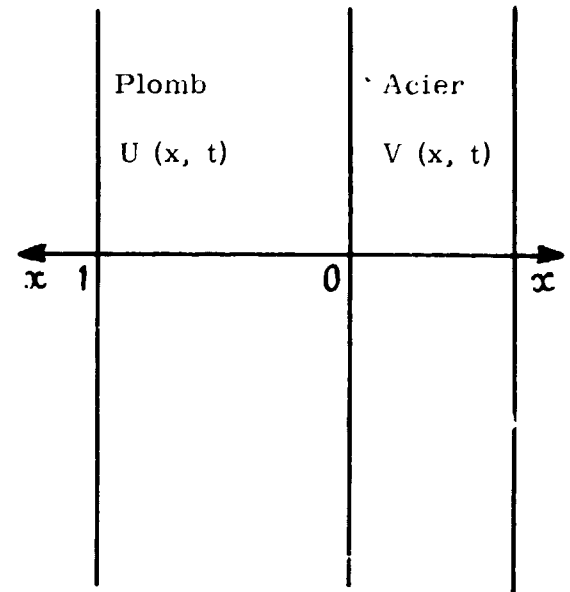
coordonnées réduites est prise au contact, l'axe des x orienté vers la gauche dans le plomb et vers la droite dans l'acier. Les conditions imposées sont :

- satisfaire à l'équation de la chaleur $-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$
- nullité à l'instant initial $U(x, 0) = V(x, 0) = 0$
- conditions aux limites :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = -\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 \quad (21)$$

$$V_0 - U_0 = -\delta \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0$$



- La répartition des températures dans le plomb est donnée par les formules (19) et (20).
- La répartition des températures et du flux dans l'acier est donnée par :

$$\begin{aligned} V - U &= \frac{1+\gamma}{2} t^{-\alpha} \left\{ S_{\alpha} \left(\frac{a-x}{\sqrt{t}} \right) - S_{\alpha} \left(\frac{a+x}{\sqrt{t}} \right) \right\} + \frac{\delta}{2} t^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{ S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a-x}{\sqrt{t}} \right) + S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a+x}{\sqrt{t}} \right) \right\} \\ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1+\gamma}{2} t^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{ S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a-x}{\sqrt{t}} \right) + S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a+x}{\sqrt{t}} \right) \right\} + \frac{\delta}{2} t^{-\alpha-1} \\ &\quad \left\{ S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a-x}{\sqrt{t}} \right) - S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a+x}{\sqrt{t}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

En effet l'expression donnant V satisfait à l'équation de la chaleur - est nulle à l'instant initial - quant aux conditions limites (21) :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 + (1+\gamma) t^{-\alpha-\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 - (1+\gamma) \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = -\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0$$

$$V_0 - U_0 = \delta t^{-\alpha-\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) = -\delta \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0$$

En conclusion , les formules (19) et (20) pour le plomb, (21) pour l'acier, donnent la répartition des températures satisfaisant à l'équation de la chaleur dans chaque milieu, à la condition de nullité initiale, aux conditions aux limites.

Si l'on connaît le flux dans le plomb au contact des deux milieux et que celui-ci

peut être représenté par une fonction du type $A t^{-\alpha - \frac{1}{2}} S_{\alpha + \frac{1}{2}} \left(\frac{a - x_e}{\sqrt{t}} \right)$, la répartition des températures sera approximativement donnée par AU et AV.

Il arrive toutefois que l'on ne connaisse pas le flux au contact mais une certaine relation entre température et flux sur une section, par exemple sur la coque externe de l'acier. On se trouve alors devant un problème d'ajustement de la solution donnée par les formules (19) et (22) que nous allons chercher à résoudre de façon approchée.

IV. PROBLEME DE L'AJUSTEMENT - SOLUTION STANDARD.

Nous nous plaçons sur la coque externe de l'acier d'abscisse x_e . La température et le flux - supposant le problème résolu - sont donnés par les formules (19) et (22) à savoir - on supposera nul l'écart de température au contact ($\delta = 0$).

$$V_e = \begin{cases} t^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha} \left(\frac{2k + a - x_e}{\sqrt{t}} \right) + \frac{1+Y}{2} S_{\alpha} \left(\frac{a - x_e}{\sqrt{t}} \right) \right\} \\ t^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha} \left(\frac{2k + a + x_e}{\sqrt{t}} \right) + \frac{1-Y}{2} S_{\alpha} \left(\frac{a + x_e}{\sqrt{t}} \right) \right\} \end{cases} \quad (23)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = \begin{cases} t^{-\alpha - \frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{2k + a - x_e}{\sqrt{t}} \right) + \frac{1+Y}{2} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{a - x_e}{\sqrt{t}} \right) \right\} \\ -t^{-\alpha - \frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{2k + a + x_e}{\sqrt{t}} \right) + \frac{1-Y}{2} S_{\alpha + 1/2} \left(\frac{a + x_e}{\sqrt{t}} \right) \right\} \end{cases}$$

Comme la fonction $S_{\alpha}(z)$ décroît vite, les "harmoniques" $k \neq 0$ ont une faible répercussion sur le résultat, par ailleurs les termes en $\frac{1-Y}{2}$ sont faibles vis à vis des termes en $\frac{1+Y}{2}$ du fait de la valeur du coefficient et de ce que $a + x_e$ est plus grand - et souvent de façon notable - que $a - x_e$. Il en résulte que l'essentiel de la solution se réduit aux termes en $\frac{1+Y}{2}$, d'où :

$$V_e \sim \frac{1+Y}{2} t^{-\alpha} S_{\alpha} \left(\frac{a - x_e}{\sqrt{t}} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} \sim \frac{1+Y}{2} t^{-\alpha - \frac{1}{2}} S_{\alpha + \frac{1}{2}} \left(\frac{a - x_e}{\sqrt{t}} \right)$$

C'est-à-dire, en posant comme plus haut :

$$z = \frac{a - x_e}{\sqrt{t}}$$

$$V_e \sim \frac{1+Y}{2} (a - x_e)^{-2\alpha} z^{2\alpha} S_{\alpha}(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} \sim \frac{1+Y}{2} (a - x_e)^{-2\alpha - 1} z^{2\alpha + 1} S_{\alpha + \frac{1}{2}}(z)$$

On est conduit à introduire les courbes paramétriques, ne dépendant que de α - que nous appellerons "Solution Standard" :

$$(H_{\alpha}) \begin{cases} X(z) = z^{2\alpha} S_{\alpha}(z) \\ Y(z) = z^{2\alpha + 1} S_{\alpha + \frac{1}{2}}(z) \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} V_e \sim K (a - x_e)^{-2\alpha} X(z) \\ \frac{\partial V}{\partial x_e} \sim K Y(z) \end{cases} \quad (26)$$

- Les courbes obtenues en portant en abscisses les températures V_e et en ordonnées les flux $\frac{\partial V}{\partial x_e}$, sur une section x_e de l'acier, se déduisent, de façon grossière, de la Solution Standard par des changements d'échelle sur les coordonnées.

Allure de la Solution Standard.

Elle est donnée par le réseau ci-dessous. Elles ont une tangente verticale à l'origine.

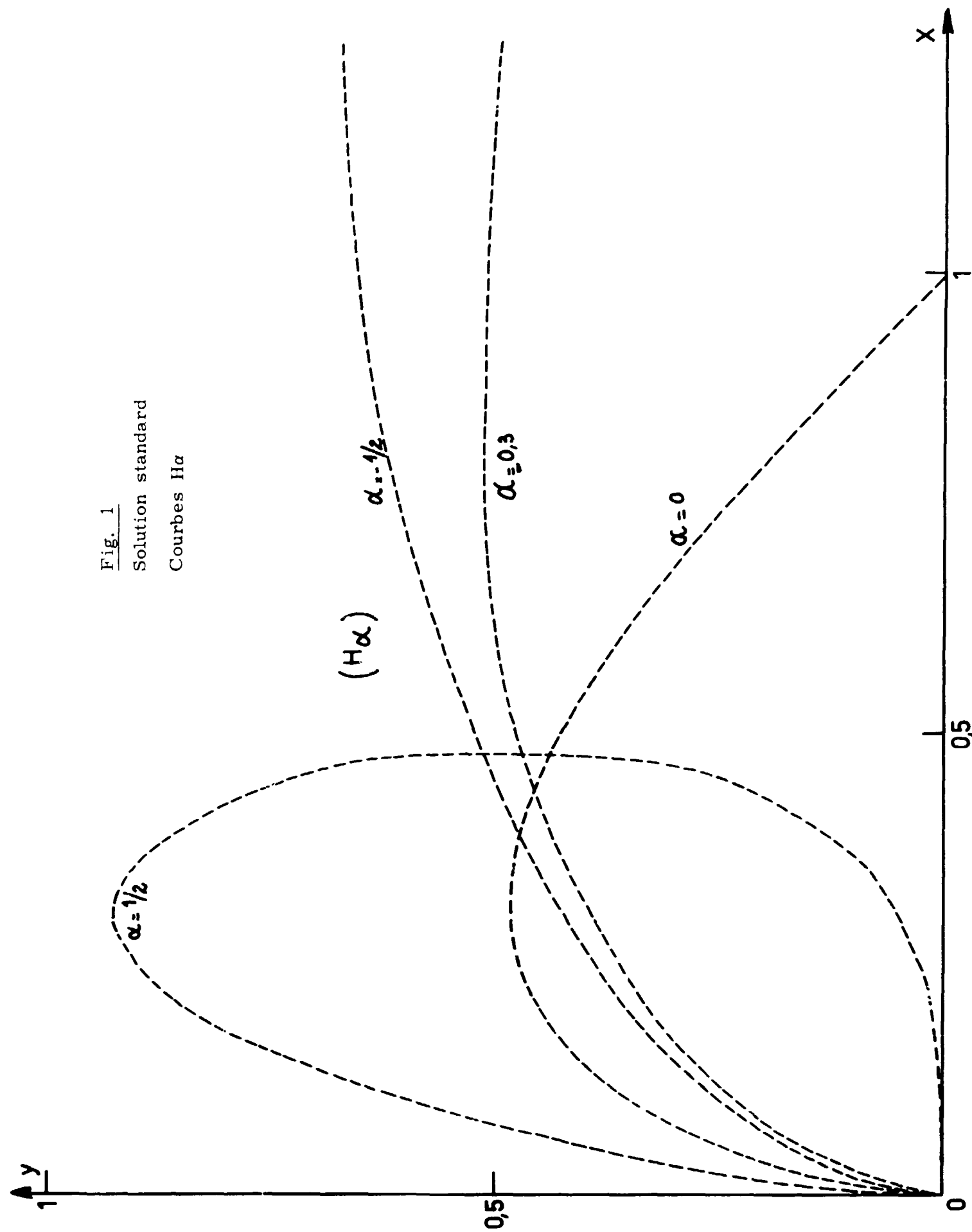
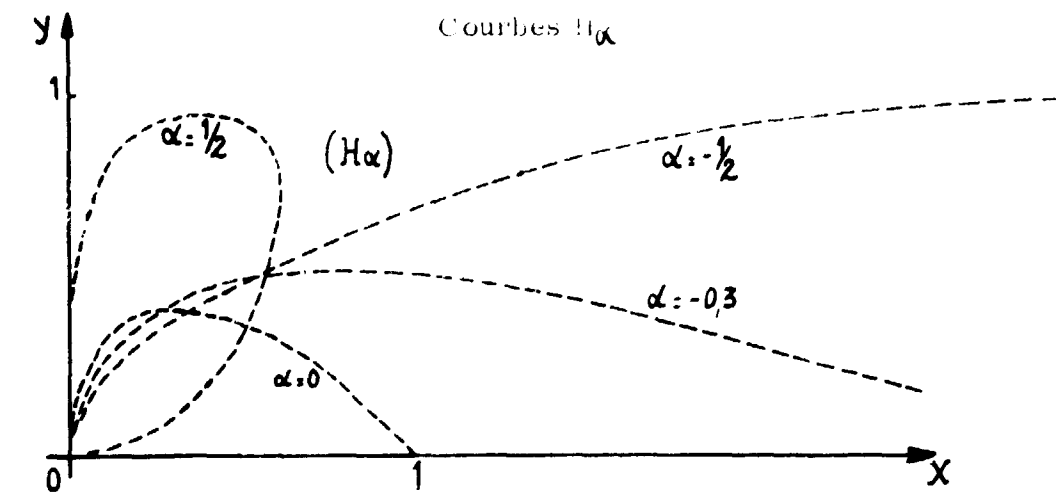


Fig. 1
Solution standard
Courbes H_α



Ces courbes sont tracées avec exactitude sur la figure 1. Elles admettent OX pour asymptote lorsque $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

Comportement de la Solution Standard à l'infini ($t \rightarrow 0$ $z \rightarrow 0$)

D'après le développement en série (14) et les formules (25) :

$$z \rightarrow 0 \quad S_\alpha(z) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$\frac{1}{2\alpha} \log [X \Gamma(1-\alpha)] = \log z + \epsilon_1(z) \quad \epsilon_1(z) \rightarrow 0 \quad z \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2\alpha+1} \log [Y \Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)] = \log z + \epsilon_2(z) \quad \epsilon_2(z) \rightarrow 0 \quad z \rightarrow 0$$

$$\log [Y \Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)] = \frac{2\alpha+1}{2\alpha} \log [X \Gamma(1-\alpha)] + \epsilon_3(z) \quad \epsilon_3(z) \rightarrow 0 \quad z \rightarrow 0$$

La solution Standard admet, en coordonnées bilogarithmiques une asymptote :

$$\log [Y \Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)] = \frac{2\alpha+1}{2\alpha} \log [X \Gamma(1-\alpha)] \quad \text{de pente} \quad p = \frac{2\alpha+1}{2\alpha} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{1}{2(p-1)} \quad (27)$$

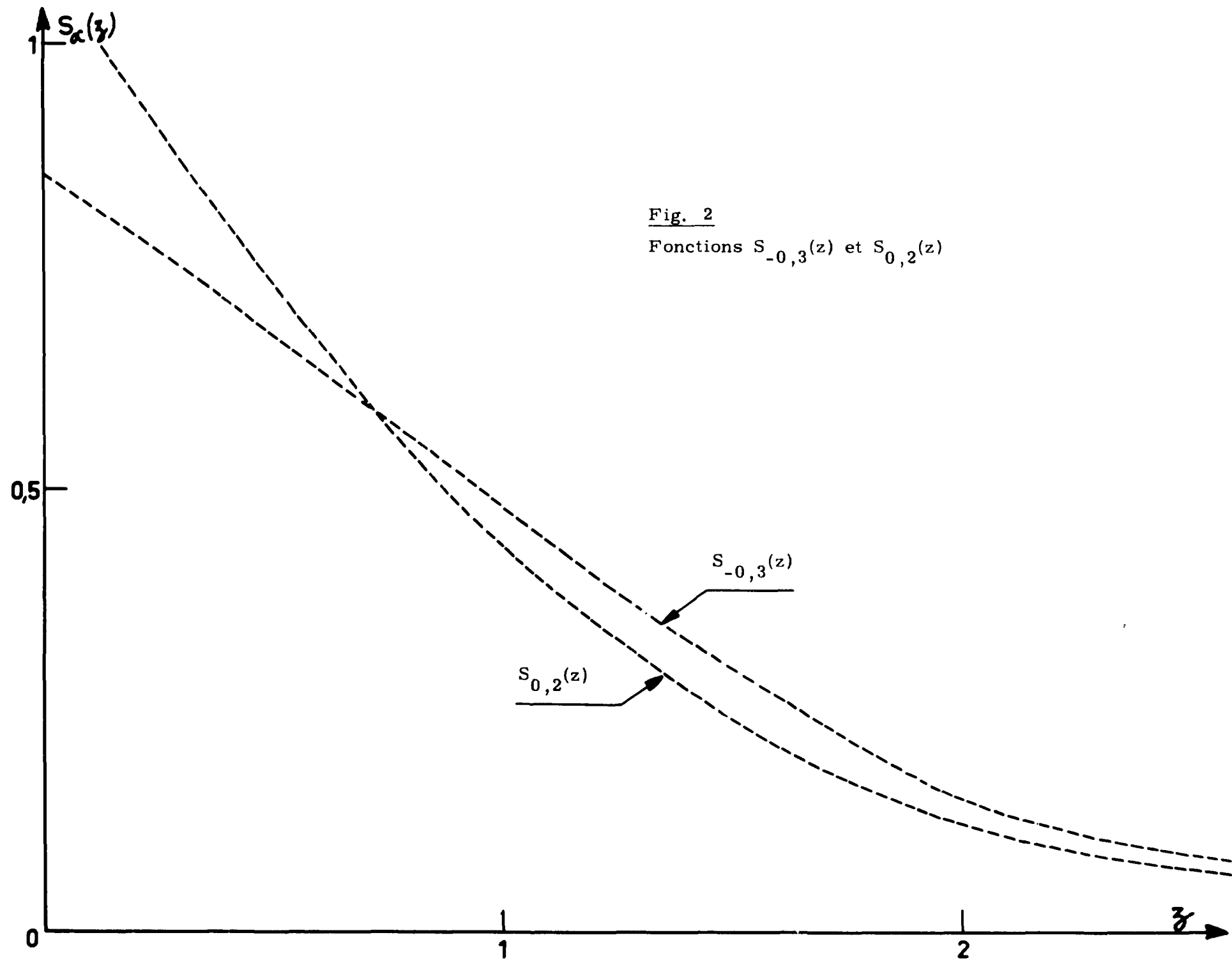
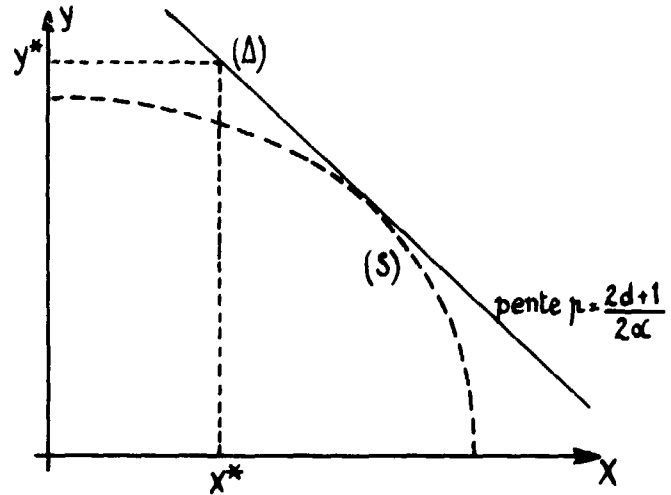


Fig. 2

Fonctions $S_{-0,3}(z)$ et $S_{0,2}(z)$

Application à l'ajustement de la Solution Théorique.

Nous supposons connue la relation "flux-température" réelle sur la coque de l'acier. Cette relation entre la température et sa dérivée par rapport à x se traduit par une courbe (S) que nous traçons en coordonnées bilogarithmiques.



Par ailleurs, à condition d'incorporer au coefficient K des équations (26) un facteur de proportionnalité supplémentaire, V_e et $\frac{\partial V}{\partial x_e}$ ont le sens d'une température et d'un flux en vraie grandeur, dont il convient d'ajuster le lieu e avec (S). Or ce lieu se confond pour des valeurs de t un peu grandes avec une droite (Δ) dont l'équation se déduit de (26) et (27).

$$\log \left[\frac{\Gamma(1/2 - \alpha)}{K} \frac{\partial V}{\partial x_e} \right] = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha} \log \left[\frac{\Gamma(1 - \alpha)}{(a - x_e) K} V_e \right] \quad (\Delta)$$

Cette droite (Δ) doit être tangente à (S). Exprimer cette condition, c'est former une relation entre $a - x_e$, K et α , que l'on peut mettre en clair en coupant (Δ) par une horizontale de cote Y^* qui donne l'abscisse X^* du point d'intersection.

On prend

$$Y^* = \frac{K}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)}$$

(28)

d'où :

$$a - x_e = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{K} X^* = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)} \frac{X^*}{Y^*}$$

- On prend pour valeur de K le rapport du maximum de la courbe (S) à celui de la courbe (H) correspondant à la valeur α :

$$K = \frac{\text{valeur maxima du flux réel sur (S)}}{\text{valeur du maximum de la courbe } H_\alpha}$$

(29)

- Choix de α : Quant à la valeur de α , on se la donnera a priori après examen de la forme des courbes H_α . Le choix de α donne la direction de la tangente (Δ) à mener à (S) et par suite définit $a - x_e$ c'est-à-dire a . La valeur de α doit être telle, qu'après affinité horizontale de module $a - x_e$ effectuée sur la courbe H_α , on retrouve approximativement la courbe (S)

(tracée en coordonnées ordinaires). En particulier si la courbe (S) a un départ horizontal à partir d'une ordonnée non nulle, α doit être choisi de façon telle qu'il confère à $a - x_e$ une valeur suffisamment petite pour tasser la courbe affine de (H α) contre l'axe des Y. On recherchera l'accord surtout dans l'intervalle de temps utile.

En pratique, il nous semble que α ait intérêt à être pris entre 0 et $-\frac{1}{2}$, peut être plus proche de $-\frac{1}{2}$ que de 0. On pourrait choisir et de façon assez universelle, par exemple :

$$\begin{aligned} \alpha = -0,25 & \quad \text{ce qui donne une pente à } (\Delta) & \quad p = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha} = -1 \\ \alpha = -0,30 & \quad \text{ce qui donne une pente à } (\Delta) & \quad p = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha} = -\frac{2}{3} \end{aligned} \quad (30)$$

Le couple de courbes $S_{-0,30}(z)$ et son associée dans le calcul $S_{0,2}(z)$ sont tracées sur la figure 2.

Ajustement définitif.

Il faut se rappeler que les expressions (26) donnent des valeurs grossières de la température et du flux.

Il convient donc - une fois choisi - et déduit a - de calculer correctement

V_e et $\frac{\partial V}{\partial x_e}$ par les formules (23), tracer la courbe flux-température qui en résulte, évaluer

un nouveau coefficient de proportionnalité K' :

$$\text{par exemple :} \quad K' = \frac{\text{valeurs maxima du flux réel lu sur la courbe (S)}}{\text{valeur du maximum de } \frac{\partial V}{\partial x_e} \text{ selon la formule (23)}} \quad (31)$$

et comparer la courbe flux-température ($K' V_e$, $K' \frac{\partial V}{\partial x_e}$) avec la courbe proposée (S).

Les températures en un point quelconque du plomb, ou de l'acier sont alors données par les formules (19) (20) et (22), relatives aux valeurs α et a des paramètres et du coefficient de proportionnalité K' .

$$K'U \quad \text{et} \quad K'V.$$

V. APPLICATION AU CALCUL DE LA MONTEE EN TEMPERATURE D'UN CHATEAU DE PLOMB.

1° Les châteaux de transport des matières très irradiées sont des récipients, usuellement de la forme d'un cylindre tronqué, en plomb maintenu entre deux coques d'acier à l'intérieur et à

l'extérieur. On cherche à connaître le comportement d'un tel château plongé brutalement dans un feu supposé uniquement rayonnant, c'est-à-dire que le flux de chaleur, qui y pénètre, est donné en fonction de la température prise par la coque par la loi de STEFAN. Il est admis que la face interne du chateau ne laisse pas passer la chaleur, la coque interne d'acier est négligée.

La description de la montée en température est susceptible de la théorie précédente à conditions de remplacer le château, dont la forme est habituellement celle d'un cylindre tronqué, par un système à paroi plane thermiquement "équivalent". En toute rigueur c'est impossible ; l'approximation semble toutefois acceptable dans la mesure où l'on peut négliger dans l'équation de la chaleur le terme en $\frac{2Y-1}{r}$ c'est-à-dire si la courbure de la paroi est faible, en tous points, vis à vis de son épaisseur, autrement dit, si les normales peuvent être tenues pour équidistantes dans toute l'épaisseur du milieu.

Voici maintenant les caractéristiques du château destiné à transporter les éléments irradiés du réacteur PEGASE :

rayon extérieur du cylindre de plomb	Re = 0,635 m
rayon intérieur du cylindre de plomb	Ri = 0,400 m
épaisseur de l'enveloppe d'acier	e = 0,02 m
coefficient de conductibilité du plomb	k = 34,2
coefficient de conductibilité de l'acier	k' = 16,7
capacité calorifique du plomb C = cp	C = 1.417.500
capacité calorifique de l'acier	C' = 3.945.725
résistance au contact plomb-acier supposée nulle	$\delta = 0$

Nous prendrons - puisqu'il s'agit de convertir un problème cylindrique en problème plan - une épaisseur équivalente h du mur de plomb l'épaisseur qui respecte le volume de plomb, à égalité de surface du contact plomb - acier.

$$2\pi h Re = \pi (Re^2 - Ri^2)$$

$$\underline{h = 0,1915}$$

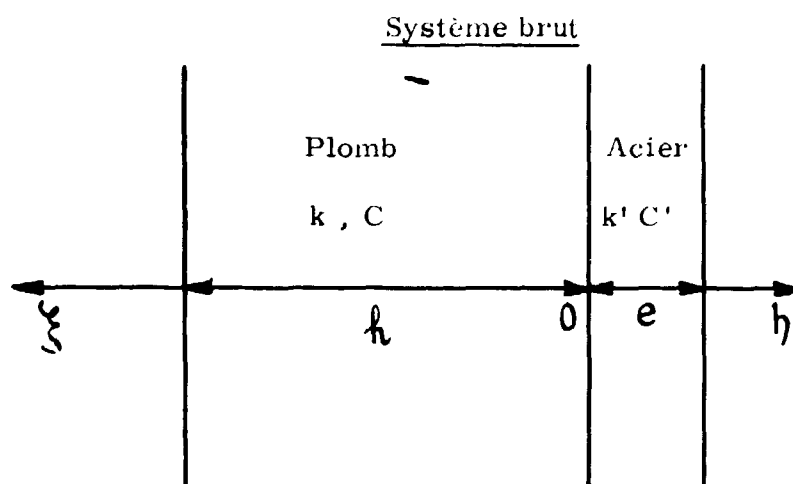
2° Normation du système.

La transformation du système

brut :

Plomb
$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{k}{C} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0$$

Acier
$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{k'}{C'} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0$$



en le système normé utilisé pour construire la théorie

Plomb et Acier :
$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

demande quelque minutie :

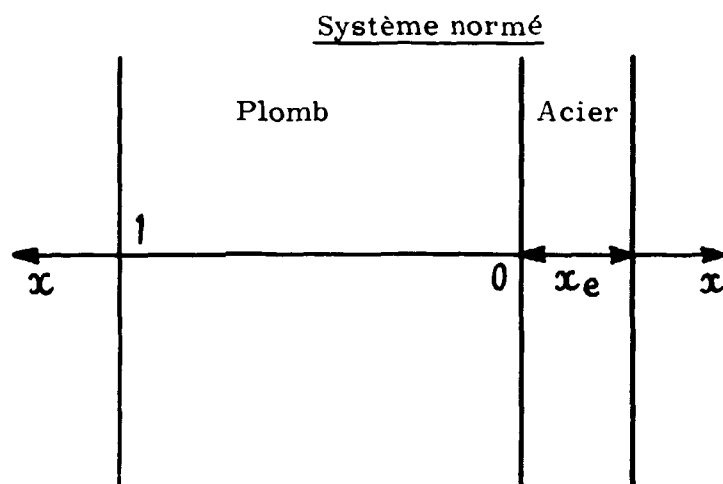
Plomb

On fait les changements de

variables :

$$\xi = h x$$

$$\tau = \frac{C h^2}{k} t \quad \text{ici} \quad \underline{\tau = 1\,520\,t}$$



à une demi-heure (1 800 '') correspond $t = 1,184$.

Acier

$$\tau = \frac{C h^2}{k} t$$

on conserve la même unité de temps que dans le plomb.

$$\eta = h \sqrt{\frac{k' C}{k C'}} x$$

Il en résulte que la coque de l'acier a pour abscisse réduite :

$$x_e = \frac{e}{h} \sqrt{\frac{k C'}{k' C}}$$

soit ici

$$\sqrt{\frac{k C'}{k' C}} = 2,39$$

$x_e = 2,39 \frac{e}{h}$

pour $e = 0,02$

$h = 0,1915$

$x_e = 0,25.$

Calcul du coefficient γ .

Il résulte de l'égalisation des flux au contact plomb-acier

$$k \frac{\partial U}{\partial \xi} = k' \frac{\partial V}{\partial \eta}$$

effectuant les changements de variables indiqués

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sqrt{\frac{kC}{k'C'}} \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{d'où :}$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{\frac{kC}{k'C'}} \quad \text{ici} = 0,8}$$

Expression du flux réel entrant dans l'acier par la coque.

$$\phi = k \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{\eta}$$

d'après le changement de variable :

$$\eta = h \sqrt{\frac{k'C}{k C'}} x$$

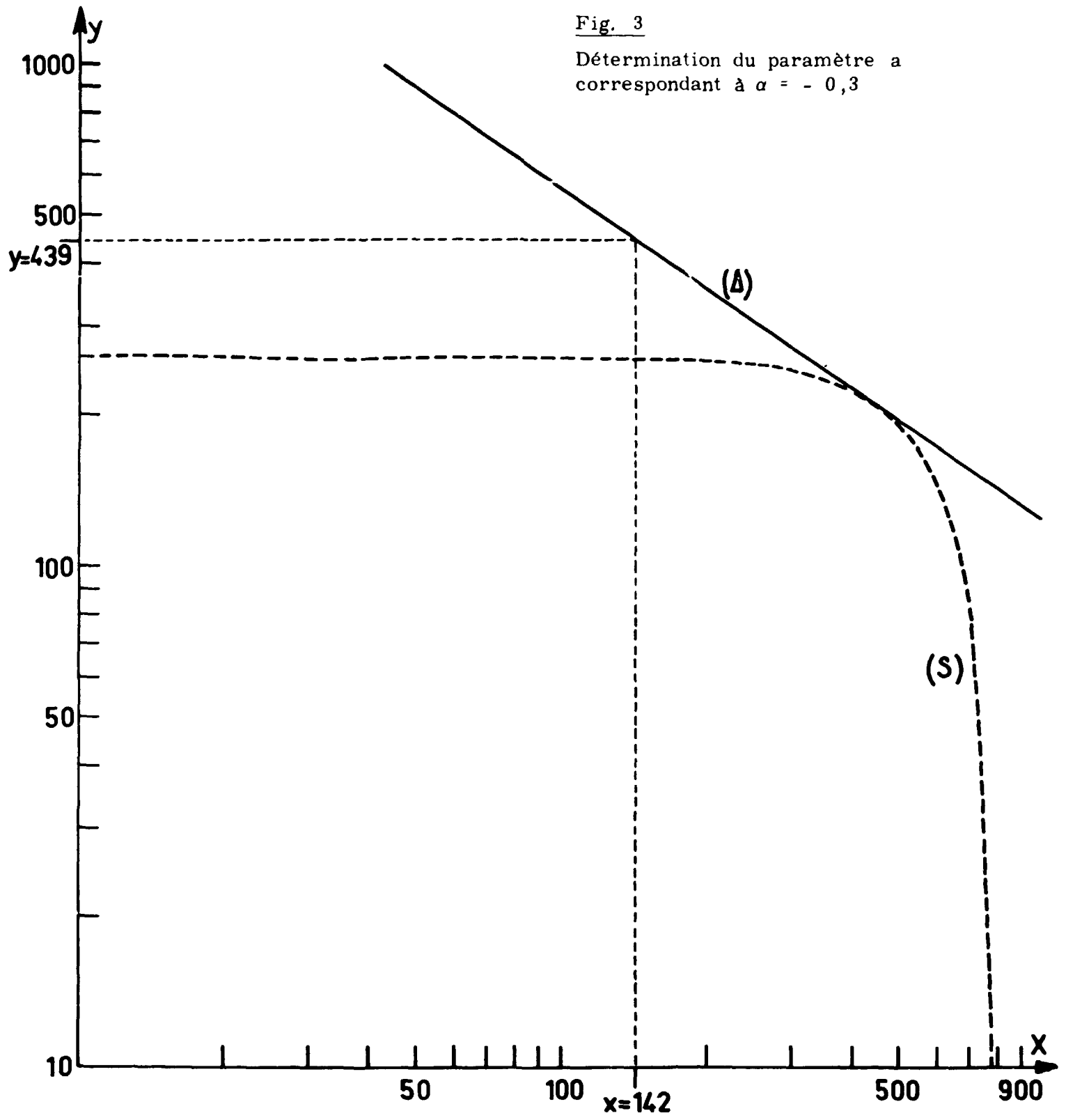
$$\boxed{\phi = \frac{1}{h} \sqrt{kk' \frac{C'}{C}} \frac{\partial V}{\partial x_e}} \quad \text{ici} \quad \sqrt{kk' \frac{C'}{C}} = 40$$

$$\boxed{\phi = \frac{40}{h} \frac{\partial V}{\partial x_e}}$$

Loi de STEFAN.

On considère que V_e est une température centésimale, mesurée sur la coque de l'acier, comptée à partir de la température initiale supposée égale à 20°. On suppose que le flux réel pénétrant dans l'acier par la coque est lié à la température de celle-ci par la loi de STEFAN, appliquée à un milieu rayonnant de 800° ayant un coefficient de :

$$\phi = \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_1} - 1} [(800 + 273)^4 - (V_e + 20 + 273)^4] \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \sigma &= 5,661 \cdot 10^{-8} \\ \epsilon_0 &= 0,9 & \phi(V_e=0) &= 54,825 \\ \epsilon_1 &= 0,8 \end{aligned}$$



rayonnement $\epsilon_0 = 0,9$ et un coefficient d'absorption ϵ_1 des surfaces de l'emballage égal à 0,8.

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = \frac{h}{40} \Phi, \text{ sa valeur maxima est } \frac{h}{40} \cdot 54,825 = 1,371 h.$$

La courbe donnant $\frac{\partial V}{\partial x_e}$ en fonction de V_e est tracée en coordonnées bilogarithmiques pour la valeur $h = 0,1915$ (cf. fig. 3 (courbe (S))).

3° Paramètres d'ajustement.

Nous adoptons les notations et la méthode de détermination des paramètres par le biais de la "Solution Standard" du paragraphe IV. La construction graphique est exécutée sur la figure 3.

Nous choisissons $\alpha = -0,30$, on lit sur les tables $\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha) = \Gamma(0,8) = 1,16423$ valeur à laquelle correspond la pente $p = -\frac{2}{3}$ pour $(\Delta) \Gamma(1 - \alpha) = \Gamma(1,3) = 0,89747$

$$K = \frac{\text{Valeur maxima du flux réel}}{\text{Maximum de la courbe II}_{-0,3}} = \frac{1,371 h}{0,515} = 2,660 h \quad \text{pour } h = 0,1915 \quad K = 509.$$

$$\text{cote de l'horizontale } Y^* = \frac{K}{\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha)} = 2,290 h \quad \text{pour } h = 0,1915 \quad Y^* = 439$$

$$a - x_e = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha)} \frac{X^*}{Y^*} = 337 \cdot 10^{-6} \frac{X^*}{h}$$

On mène à la courbe (S) la tangente (Δ) de pente $-\frac{2}{3}$ et on prend l'intersection de (Δ) avec l'horizontale H de cote 439. On lit l'abscisse du point d'intersection $X^* = 142$.

Or on note que cette abscisse X^* ne dépend pas de h , car une modification de h se traduit par une translation générale du système { courbe (S), droite (Δ), horizontale H }, ce qui n'affecte pas l'abscisse X^* du point d'intersection, d'où :

$$a - x_e = \frac{47,9}{1\,000 h}$$

A la valeur $-0,3$ du paramètre α doit être associée la valeur $\frac{2\,400 e + 48}{1\,000 h}$ du paramètre a

Les coefficients de la liaison (α , a) ne dépendent que des caractéristiques thermiques du château (chaleur spécifique, conductibilité).

Il se peut toutefois que la modification de l'épaisseur du plomb, qui réagit sur le

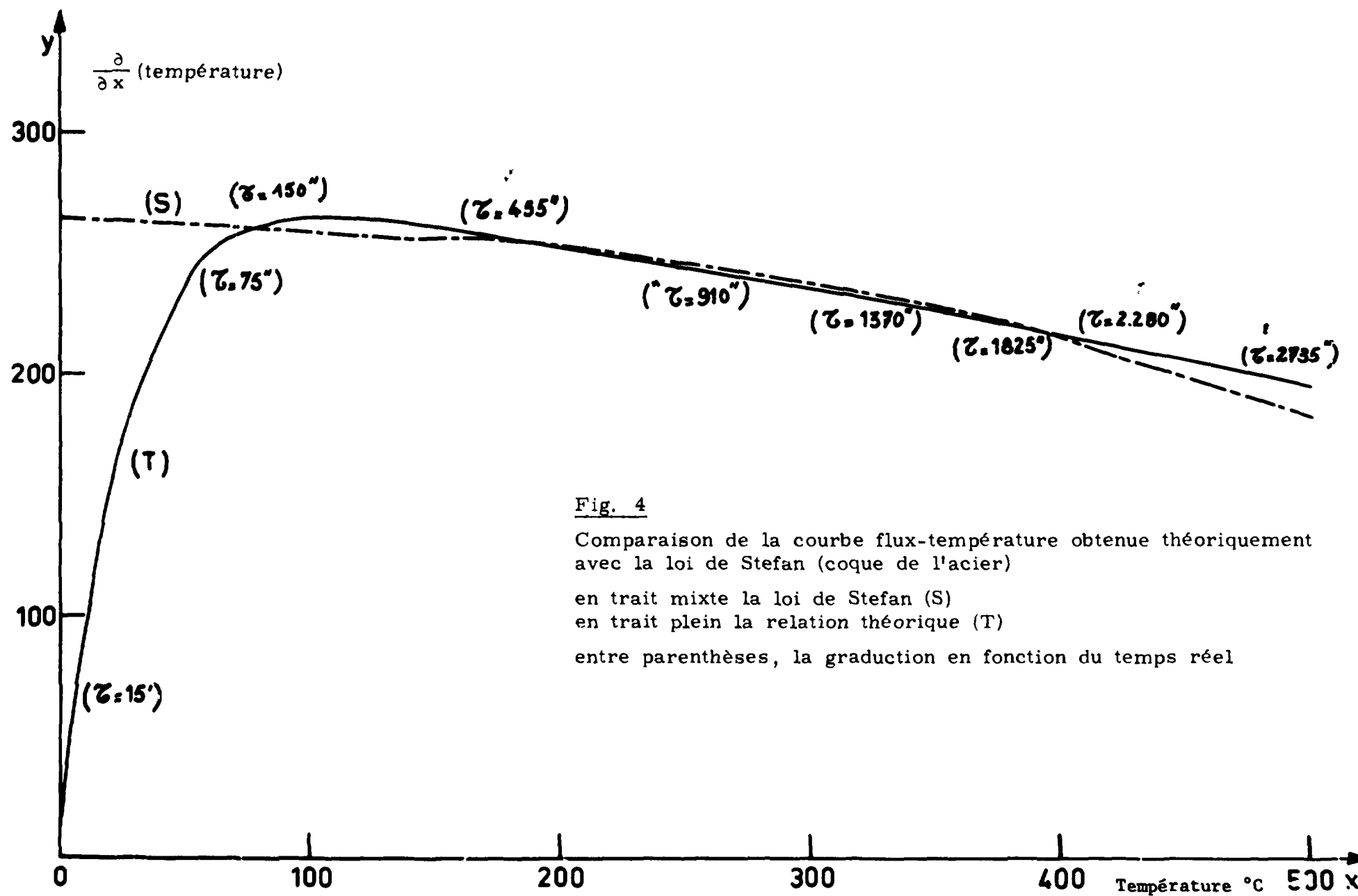


Fig. 4

Comparaison de la courbe flux-température obtenue théoriquement avec la loi de Stefan (coque de l'acier)

en trait mixte la loi de Stefan (S)

en trait plein la relation théorique (T)

entre parenthèses, la gradation en fonction du temps réel

temps réduit conduise à modifier le choix du paramètre α lui-même. Il faudrait alors former les normes de la nouvelle association.

En particulier pour les dimensions du château PEGASE $h = 0,1915$ $e = 0,02$ on a

$\alpha = -0,3$, $a = 0,50$

4° Relation "température flux" sur la coque obtenue à partir de la solution théorique -
Montée en température.

A partir des valeurs ($\alpha = -0,30$, $a = 0,50$), V_e et $\frac{\partial V}{\partial x_e}$, relatifs à la coque $x_e = 0,25$, sont calculés par les formules complètes (23). Les fonctions $S_{-0,3}(z)$ et $S_{0,2}(z)$ utiles au calculs sont tracées sur la figure 2. Un nouveau coefficient de proportionnalité

$$K' = \frac{\text{Valeur maxima du flux lu sur la courbe (S)}}{\text{Valeur du maximum de } \frac{\partial V}{\partial x_e} \text{ selon la formule (23)}} = \frac{1\,371\,h}{0,783} = \frac{262,63}{0,783}$$

$$= 335,4$$

permet de réajuster la solution théorique à la courbe (3). La relation "température flux" obtenue, à la coque, à partir de la solution théorique (T) - à comparer avec la loi de STEFAN (S) - est donnée paramétriquement en fonction du temps par :

$$X = K' V_e \quad , \quad Y = K' \frac{\partial V}{\partial x_e}$$

(S) et (T) sont portées sur la figure (4), le temps réel $\tau = 1\,520\,t$ est indiqué entre parenthèses. L'accord des deux courbes nous semble excellent jusqu'à une quarantaine de minutes (2 400''). La discordance graphique aux environs de l'instant initial ne doit pas faire illusion, elle ne se maintient qu'un très courts instant - de une à deux minutes - son incidence est très faible. On peut d'ailleurs se demander si une montée en flux, telle que la décrit la solution théorique n'est pas plus réaliste qu'un flux situé d'emblée à valeur maxima.

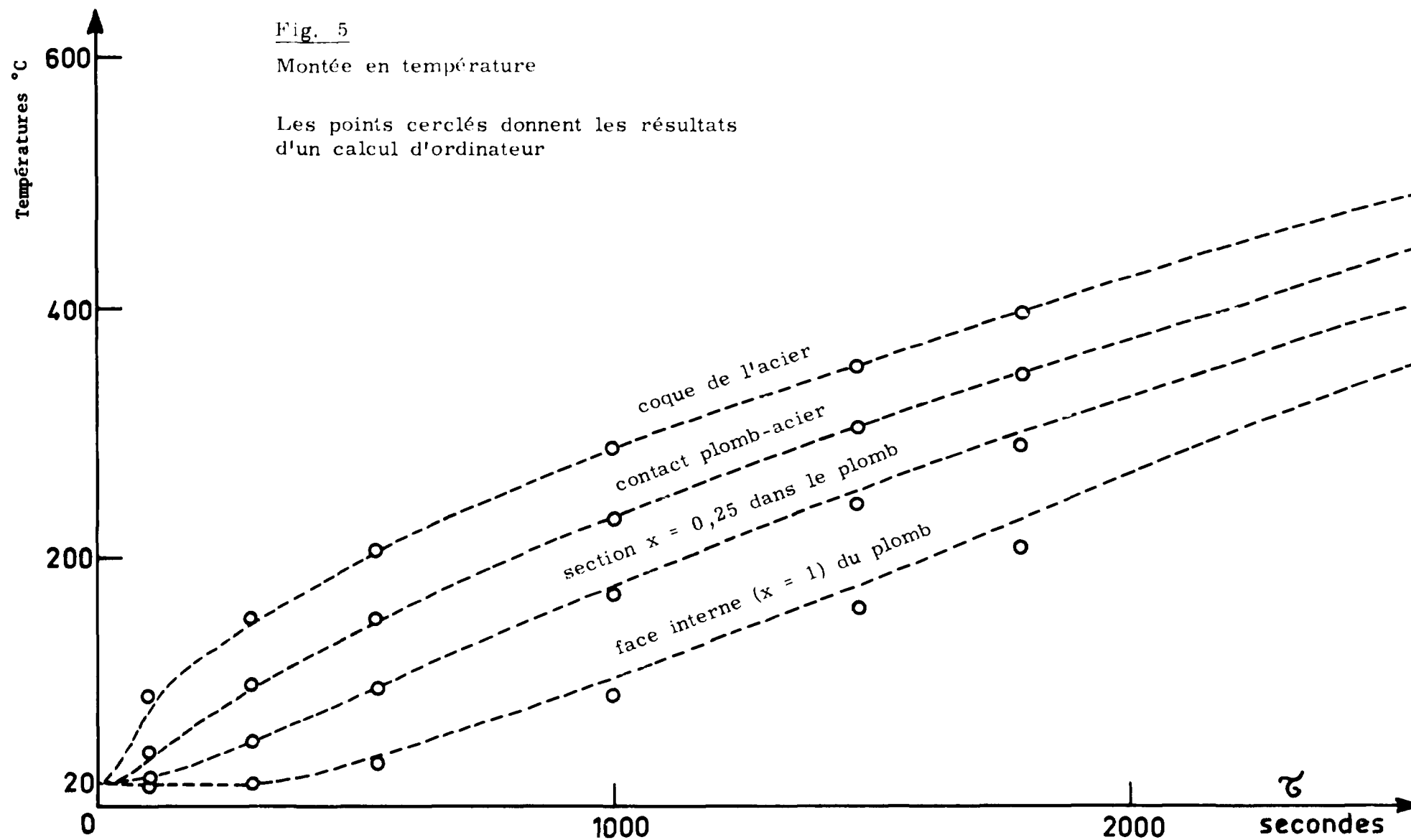
Satisfait de l'accord de la courbe flux-température obtenue par voie théorique sur la coque avec la loi de STEFAN, jusqu'et après la demi-heure fatidique, nous avons poursuivi le calcul des températures et joint à la courbe de montée en température sur la coque

$$K' V(0,25 ; t) = K' V_e \quad \text{formule (23)}$$

celles relatives au contact

plomb-acier

$$K' U(0 ; t) = K' U_0 \quad \text{formule (20)}$$



celles relatives à l'abscisse

0,25 dans le plomb $K'U(0,25 ; t)$ formule (19 ou (22) (en exploitant les calculs
(déjà faits pour la coque

celles relatives à la face

interne du plomb $K'U(1 ; t) = K'U_1$ formule (20 bis)

Ces courbes sont tracées sur la figure 5. Les points cerclés indiquent les températures trouvées par un calcul sur ordinateur (résolution numérique de l'équations aux dérivées partielles). L'accord nous paraît honorable. Toutefois les divergences s'accusent sur la face interne du plomb. Rien d'étonnant à cela puisque le milieu "plan équivalent" du milieu cylindrique original a été ajusté au contact. Il est naturel qu'une légère distorsion se produise à proximité de la face interne.

Remarque - Comportement de la température et du flux aux extrémités.

Il est intéressant de préciser ces points, afin d'ôter toute appréhension lors du tracé des courbes. Nous nous plaçons sur une section d'abscisse x dans l'acier par exemple.

1° Au voisinage de l'instant initial.

Selon le premier terme du développement asymptotique (13) :

$$t^{-\alpha} S_{\alpha} \left(\frac{a-x}{\sqrt{t}} \right) \sim t^{\frac{1}{2} - 2\alpha} \left(\frac{a-x}{2} \right)^{2\alpha-1} \frac{e^{-\frac{(a-x)^2}{4t}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$t^{-\alpha - \frac{1}{2}} S_{\alpha + \frac{1}{2}} \left(\frac{a-x}{\sqrt{t}} \right) \sim t^{-\frac{1}{2} - 2\alpha} \left(\frac{a-x}{2} \right)^{2\alpha} e^{-\frac{(a-x)^2}{4t}}$$

d'où :

$$t \rightarrow 0 \quad \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x} \sim \frac{a-x}{2t} \rightarrow \infty$$

Il en résulte que la courbe température-flux a une tangente verticale à l'origine.

2° Pour un temps infini.

$$V \sim 2 t^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} S_{\alpha} \left(\frac{2k}{\sqrt{t}} \right) \sim t^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_0^{\infty} S_{\alpha}(z) dz = t^{\frac{1}{2}-\alpha} S_{\alpha-\frac{1}{2}}(0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \sim -\frac{2x}{\sqrt{t}} t^{-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} S'_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{2k}{\sqrt{t}} \right) + \gamma t^{-\alpha-\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2}}(0) = -x t^{-\alpha-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} S'_{\alpha+\frac{1}{2}}(z) dz$$

$$+ \gamma t^{-\alpha-\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2}}(0)$$

$$t \rightarrow \infty \left\{ \begin{aligned} V &\sim t^{\frac{1}{2}-\alpha} S_{\alpha-\frac{1}{2}}(0) = \frac{t^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &\sim (x+\gamma) t^{-\alpha-\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2}}(0) = (x+\gamma) \frac{t^{-\frac{1}{2}-\alpha}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)} \end{aligned} \right.$$

On en conclut que la courbe température-flux admet l'axe des abscisses pour asymptote lorsque $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, en coordonnées bilogarithmiques une asymptote oblique de pente $\frac{\alpha+1/2}{\alpha-1/2}$.

Manuscrit reçu le 13 septembre 1967

FIN