

CEA-R 3364 - THIRIET Lucien, André DELEDICQ

TAILLES ET LOCALISATIONS OPTIMALES DES USINES
DE RETRAITEMENT DES COMBUSTIBLES NUCLEAIRES

Sommaire. - L'expansion de l'économie nucléaire se traduit par un développement des programmes d'usines d'élaboration et de retraitement des combustibles. Le modèle proposé permet de choisir la taille, la localisation et la cadence de mise en service des usines de manière à minimiser le total des frais de transport et de retraitement.

A titre d'exemple nous avons traité le problème des usines de traitement de l'uranium naturel irradié associées à des centrales nucléaires à uranium naturel-graphite CO₂.

La localisation et la production annuelle des réacteurs, les sites possibles d'usines et les fonctions de coût (transport et retraitement) sont supposés connus.

./.

CEA-R 3364 - THIRIET Lucien, André DELEDICQ

OPTIMAL SIZES AND SITING OF NUCLEAR FUEL REPROCESSING PLANTS

Summary. - The expansion of a nuclear economy entails the development of fuel process and reprocessing plant programmes. The model proposed makes it possible to select the size, siting and start-up schedule of the plants in such a way as to minimize the total freight and reprocessing costs.

As an illustration, we have approached the problem of burnt natural uranium processing plants related to natural uranium-graphite gas nuclear power stations.

The sites and annual output of the reactors, the possible plant sites and cost functions (freight and reprocessing) are supposed to be known.

The method consists in first approaching the process

La méthode consiste à traiter d'abord le problème des usines de traitement comme un problème de programmation dynamique, des tranches croissantes de programmes (production totale des réacteurs) étant explorées séquentiellement.

Lorsque les quantités d'uranium naturel irradié à re-traiter sont fixées, la minimisation du coût de transport est alors effectuée, elle aussi comme un problème de programmation dynamique. On explore le voisinage de l'optimum du coût de traitement pour trouver le minimum de la somme d'un coût de traitement sous-optimal et du coût de transport optimal correspondant. Le problème de retraitement étant représentable sur un graphe séquentiel, l'algorithme utilisé pour calculer les sous-optima est "l'algorithme à réflexion" que nous avons élaboré.

La méthode s'interprète comme un mécanisme général de détermination de l'optimum lorsque, à un problème ./.

increasing programme slices (total reactor output) being explored sequentially.

When the quantities of burnt natural uranium to be reprocessed are fixed, the minimization of the transport cost is then also carried out as a dynamic programming problem. The neighbourhood of the optimum process cost is explored in order to find the minimum summation of a sub-optimal processing cost and corresponding optimal transport cost. As the reprocessing problem can be represented on a sequential graph, in order to compute the sub-optima, we developed and used a "reflexion algorithm".

The method can be interpreted as a general mechanism for determining the optimum when to a sequential dynamic problem (for example an equipment programme)

./.

dynamique séquentiel (par exemple un programme d'équipement), se superpose un problème complémentaire (par exemple de transport). Elle permet en outre d'évaluer les pertes résultant du choix, pour des raisons autres qu'économiques, d'une politique non optimale.

1967

127 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

is added a complementary problem (transport, for instance). It also makes it possible to estimate the economic losses which result from the choice of a non optimal policy for other than economic reasons.

1967

127 p.

PREMIER MINISTRE
COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

**TAILLES ET LOCALISATIONS OPTIMALES DES USINES DE RETRAITEMENT
DES COMBUSTIBLES NUCLEAIRES**

par

Lucien THIRIET et André DELEDICQ

ÉTUDES
ÉCONOMIQUES

Rapport CEA - R 3364

SEPTEMBRE 1967

Translated into english

LISTE DES RAPPORTS ECONOMIQUES DEJA PARUS :

Rapport CEA - R 2325	CALCUL DES DEMOBILISATIONS FINANCIERES DES CYCLES DE COMBUSTIBLE	"CALCULATION OF THE WORKING CAPITAL INVESTED IN FUEL CYCLES AND ITS INTEREST CHARGES"	J. CAUSSENS	Novembre 1963
Rapport CEA - R 2458	RECHERCHE D'UNE POLITIQUE DE GESTION DU COMBUSTIBLE D'UNE PILE PISCINE	"CALCULATION OF AN OPTIMUM FUEL POLICY FOR A POOL TYPE RESEARCH REACTOR"	Dép ^c des Programmes SEEG	Mai 1964
Rapport CEA - R 2541	ETUDE ECONOMIQUE DU SITE DE MARCOULE	"AN ECONOMIC STUDY OF THE SITE OF MARCOULE"	M. DUPREZ	Août 1964
Rapport CEA - R 2642 Genève 64 Conf 28/P/98	PERSPECTIVES A LONG TERME DES COUTS DE TRAITEMENT DE L'URANIUM NATUREL IRRADIE, TAILLES ET LOCALISATIONS OPTIMALES DES USINES	"LONG-TERM PROSPECTS OF IRRADIATED NATURAL URANIUM PROCESSING COSTS. OPTIMUM PLANT SIZES AND SITES"	L. THIRIET C. OGER P. DE VAUMAS	Août 1964
Rapport CEA - R 2646 Genève 64 Conf 28/P/91	ETUDE SUR LA PRODUCTION D'EAU LOURDE EN FRANCE	"STUDY OF THE PRODUCTION OF HEAVY WATER IN FRANCE"	S. LEFRANCOIS J.M. LERAT E. ROTH	Août 1964
Rapport CEA - R 2648 Genève 64 Conf 28/P/89	ENSEIGNEMENTS TIRÉS DES ETUDES ET REALISATIONS FRANCAISES RELATIVES A LA SEPARATION DES ISOTOPES DE L'URANIUM	"DEDUCTIONS BASED ON STUDIES OF URANIUM ISOTOPE SEPARATION AND FRENCH ACHIEVEMENTS IN THIS FIELD"	C. FREJAQUES R. GALLEY	Août 1964
Rapport CEA - R 2669 Genève 64 Conf 28/P/64	COUT DE TRANSPORT DES COMBUSTIBLES IRRADIES ET COUT D'ENTRETIEN D'UNE USINE DE TRAITEMENT CHIMIQUE DES COMBUSTIBLES IRRADIES	"COST OF TRANSPORTING IRRADIATED FUELS AND MAINTENANCE COSTS OF A CHEMICAL TREATMENT PLANT FOR IRRADIATED FUELS"	Y. SUUSSELIER	Août 1964
Rapport CEA - R 2685 Genève 64 Conf 28/P/46	ASPECT ECONOMIQUE DES REACTEURS PRODUISANT DE L'ELECTRICITE ET DE LA CHALEUR INDUSTRIELLE	"ECONOMIC ASPECTS OF ELECTRICITY AND INDUSTRIAL HEAT GENERATING REACTORS"	J. CAUSSENS M. MOULLE P. DUTHEIL J. ALDEBERT	Août 1964
Rapport CEA - R 2689 Genève 64 Conf 28/P/41	LA FILIERE DES REACTEURS A NEUTRONS RAPIDES EN FRANCE	"THE FAST NEUTRON REACTOR SERIES IN FRANCE"	J. VENDRYES J. CAUSSENS R. PASQUER	Août 1964
Rapport CEA - R 2692 Genève 64 Conf 28/P/37	QUELQUES ASPECTS ECONOMIQUES DE LA FILIERE URANIUM NATUREL - GRAPHITE - CAZ	"SOME ECONOMIC ASPECTS OF NATURAL URANIUM GRAPHITE GAS REACTOR TYPES"	J. CAUSSENS P. TANGUY B. LEO	Août 1964
Rapport CEA - R 2795	ETUDE DES VALEURS ET DES PRIX DU PLUTONIUM A LONG TERME - UN MODELE PARAMETRE SIMPLIFIE	"STUDY OF THE LONG-TERM VALUES AND PRICES OF PLUTONIUM - A SIMPLIFIED PARAMETRISED MODEL"	J. CAUSSENS M. PAILLOT	Mai 1965
Rapport CEA - R 2866	OPTIMISATION DES CYCLES DE COMBUSTIBLES : VALEURS MARGINALES DES PERTES	"FUEL CYCLE OPTIMISATION : MARGINAL VALUES OF LOSSES"	J. CAUSSENS B. DE LASTEVRIE J. DUMENC	Août 1965
Rapport CEA - R 2937	COUTS D'INVESTISSEMENT ET D'EXPLOITATION DES USINES DE RETRAITEMENT DE L'URANIUM NATUREL IRRADIE	"CAPITAL AND RUNNING COSTS OF PLANTS FOR REPROCESSING OF IRRADIATED NATURAL URANIUM"	L. THIRIET C. JOUANNAUD J. COUTURE J. DUBOZ	Janvier 1966
Rapport CEA - R 3022	MODELE MATHEMATIQUE DU COUT DE TRANSPORT MARITIME ; APPLICATION A LA COMPETITIVITE DU NAVIRE NUCLEAIRE	"A MATHEMATICAL MODEL FOR COST OF CARRIAGE BY SEA ; APPLICATION TO COMPETITIVENESS OF NUCLEAR VESSELS"	D. OGER C. DORVAL	Mai 1966
Rapport CEA - R 3072	LE DIMENSIONNEMENT OPTIMUM DES INSTALLATIONS DE PRODUCTION MIXTE D'EAU DESSALEE ET D'ELECTRICITE FAISANT INTERVENIR L'ENERGIE NUCLEAIRE	"CHOICE OF OPTIMUM SIZE OF INSTALLATIONS FOR DUAL-PURPOSE PRODUCTION OF DESALTED WATER AND ELECTRICITY, USING NUCLEAR POWER"	J. CAUSSENS	Septembre 1966
Rapport CEA - R 3355	PROBLEMES DE TARIFICATION DE L'EAU DOUCE OBTENUE A PARTIR D'UNE INSTALLATION DE DESSALEMENT D'EAU DE MER	"PROBLEMS OF PRICING FRESH WATER OBTAINED FROM A SEA WATER DESALINATION PLANT"	J. CAUSSENS	Juillet 1967
Rapport CEA - R 3364	TAILLES ET LOCALISATIONS OPTIMALES DES USINES DE RETRAITEMENT DES COMBUSTIBLES NUCLEAIRES	"OPTIMAL SIZES AND SITING OF NUCLEAR FUEL REPROCESSING PLANTS"	L. THIRIET A. DELEDICQ	Août 1967

LISTE DES RAPPORTS ECONOMIQUES A PARAITRE :

PROBLEMES TECHNIQUES ET ECONOMIQUES LIES AU DEVELOPPEMENT DES METHODES DE TRAITEMENT ET D'UTILISATION DES DECHETS RADIOACTIFS

"TECHNICAL AND ECONOMIC PROBLEMS RELATED TO THE DEVELOPMENT OF RADIOACTIVE WASTE PROCESSING AND UTILIZATION TECHNIQUES"

OPTIMISATION DES REACTEURS A COMBUSTIBLE ANNULAIRE

"OPTIMISATION OF ANNULAR FUEL REACTORS"

ASPECT ECONOMIQUE DE LA SECURITE DANS LE SECTEUR DE L'ENERGIE

"ECONOMIC ASPECT OF THE SECURITY IN THE FIELD OF ENERGY"

INCIDENCE DE LA CONSTRUCTION D'UN CENTRE NUCLEAIRE DANS LA REGION DE BORDEAUX SUR LE MARCHE REGIONAL DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

"INFLUENCE OF A NUCLEAR CENTER ESTABLISHMENT IN THE BORDEAUX AREA ON THE REGIONAL BUILDING AND PUBLIC WORKS MARKETS"

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

- Rapport CEA - R 3364 -

**Section des Etudes Economiques Générales
DREP - DPg**

**TAILLES ET LOCALISATIONS OPTIMALES DES USINES
DE RETRAITEMENT DES COMBUSTIBLES NUCLEAIRES**

par

Lucien THIRIET et André DELEDICQ

**OPTIMAL SIZES AND SITING OF NUCLEAR FUEL
REPROCESSING PLANTS**

by

Lucien THIRIET et André DELEDICQ

- Septembre 1967 -

- CONTENTS -
-:-:-:-

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION	1
I - <u>REPROCESSING AND TRANSPORT COST FUNCTIONS</u>	2
A. LONG-TERM PROSPECTS FOR THE REPROCESSING COSTS OF IRRADIATED NATURAL URANIUM	2
1° - General considerations	2
2° - The method of analysis and forecasting used	2
3° - Estimation of the reprocessing costs of irradiated natural uranium in France according to the size of the plants	5
B. TRANSPORT COSTS OF IRRADIATED NATURAL URANIUM	6
II - <u>STATEMENT OF THE PROBLEM AND FORMULATION</u>	7
A. ASSUMPTIONS	8
B. THE NEED FOR OPTIMISATION	8
C. THE GENERAL PRINCIPLE	9
D. THE METHOD USED	11
E. CALCULATION	14
III - <u>RESULTS</u>	19
A. OPTIMUM POLICY	19
B. SUB-OPTIMUM POLICY	19
C. SENSITIVITY	20
IV - <u>PARASITIC POLICIES</u>	23
CONCLUSION	25

- SOMMAIRE -
-:-:-:-

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION	1
I - <u>LES FONCTIONS DE COUTS - RETRAITEMENT ET TRANSPORT</u>	2
A. PERSPECTIVES A LONG TERME DES COUTS DE TRAITEMENT DE L'URANIUM NATUREL IRRADIE	2
1° - Considérations générales	2
2° - La méthode d'analyse et de prévision utilisée	2
3° - Estimation des coûts de traitement de l'uranium naturel irradié en France selon la taille des usines.	5
B. COUTS DE TRANSPORT DE L'URANIUM NATUREL IRRADIE	6
II - <u>EXPOSE DU PROBLEME ET FORMALISATION</u>	7
A. HYPOTHESES	8
B. LA NECESSITE D'UNE OPTIMISATION	8
C. LE PRINCIPE GENERAL	9
D. LA METHODE UTILISEE	11
E. LE CALCUL	14
III - <u>RESULTATS</u>	19
A. POLITIQUE OPTIMALE	19
B. POLITIQUE SOUS-OPTIMALE	19
C. SENSIBILITE	20
IV - <u>LES POLITIQUES PARASITES</u>	23
CONCLUSION	25

- TABLE OF APPENDICES -
-:-:-:-:-

	<u>Pages</u>
<u>APPENDIX I</u>	
THE REPROCESSING COST FUNCTION	28
A. Notation	28
B. Cost functions	29
<u>APPENDIX II</u>	
SEQUENTIAL GRAPHS	32
A. Ordinal function of a graph	32
1°- Determination of the ordinal function	33
2°- Circuits in a graph	36
3°- Sequential graph	38
B. g-sequentiality of an optimisation problem	39
<u>APPENDIX III</u>	
REPRESENTATION OF THE REPROCESSING PROBLEM BY A SEQUENTIAL GRAPH	40

- TABLE DES ANNEXES -
-:-:-:-:-

	Pages
<u>ANNEXE I</u>	
LA FONCTION COUT DE RETRAITEMENT	28
A. Notations	28
B. Fonctions de coûts	29
<u>ANNEXE II</u>	
GRAPHES SEQUENTIELS	32
A. Fonction ordinale d'un graphe	32
1°- Détermination de la fonction ordinale	33
2°- Circuits dans un graphe	36
3°- Graphe séquentiel	38
B. g-séquentialité d'un problème d'optimisation	39
<u>ANNEXE III</u>	
REPRESENTATION DU PROBLEME DE RETRAITEMENT PAR UN GRAPHE SEQUENTIEL	40

Pages

APPENDIX IV

SUB-OPTIMA OF A g -SEQUENTIAL PROBLEM	43
A. Introduction	43
B. Model	44
C. Algorithm	57
1°- BELLMAN and KALABA's algorithm	47
2°- KAUFMANN and CRUON's algorithm	48
3°- "Reflection" algorithm	51
4°- Speed of algorithms	54

APPENDIX V

NUMERICAL DATA	55
REFERENCES	56

Pages

ANNEXE IV

SOUS OPTIMA D'UN PROBLEME g -SEQUENTIEL	43
A. Introduction	43
B. Modèle	44
C. Algorithme	47
1°- Algorithme de MM. BELLMAN et KALABA	47
2°- Algorithme de MM. KAUFMANN et CRUON	48
3°- Algorithme "à réflexion"	51
4°- Rapidité des algorithmes	54

ANNEXE V

DONNEES NUMERIQUES	55
BIBLIOGRAPHIE	56

INTRODUCTION

Nuclear power programmes are expanding. Adjusting the capacity of the existing plants, however, is often difficult. New and bigger facilities must then be built, though without necessarily shutting up the old ones.

Usually, scale economies, as Alfred Marshall calls them, are an incentive to overinvest, and so to anticipate demand. The results are a low load factor during the early years of service and increased freight costs, hence some economic losses.

A compromise must be found. Obviously, this could entail a considerable combinatory problem. It is therefore essential that a rigorous method for the determination of the sizes and sites of the plants be available.

In the present "economic report" such a method is expounded in the case of fuel reprocessing. It is tested for burnt natural uranium reprocessing plants related to natural uranium graphite-gas nuclear power stations. This paper developed from an earlier one published in BOSTON in August 1966 (5).

After recalling the structures of the reprocessing and freight cost functions, we formalise the problem and expound the method developed. The results obtained are then given together with the outlook for generalisation possibilities.

INTRODUCTION

Les programmes nucléaires sont en expansion. Mais il n'est pas possible, en général, de modifier aisément la taille des usines construites, et il est alors nécessaire de bâtir de nouvelles installations plus importantes sans nécessairement déclasser les premières.

L'existence habituelle d'économies d'échelle "selon l'expression d'Alfred Marshall" incite au surdimensionnement des investissements et donc à l'anticipation de la demande. Mais, il s'ensuit un faible taux d'utilisation des capacités de production installées, durant les premières années de fonctionnement ainsi qu'un accroissement des frais de transport, donc des pertes économiques.

Un compromis doit être trouvé. Or il s'agit, on le conçoit, d'un problème combinatoire qui peut être d'une certaine ampleur, et il importe de disposer d'une méthode rigoureuse de détermination des tailles et des localisations des équipements à mettre en service.

Le présent "rapport économique" est consacré à l'exposé de cette méthode dans le cas du retraitement des combustibles. Elle y est testée pour les usines de traitement de l'uranium naturel irradié associées à des centrales nucléaires à uranium naturel graphite-CO₂. Ce rapport est un développement de ce qui avait été présenté à BOSTON en Août 1966 (5).

Après avoir rappelé les structures des fonctions de coût retraitement et transport, nous formaliserons le problème et exposerons la méthode élaborée. Nous donnerons ensuite les résultats obtenus et enfin un aperçu des possibilités de généralisation.

I - THE REPROCESSING AND TRANSPORT COST FUNCTIONS

A - LONG-TERM PROSPECTS FOR THE REPROCESSING COSTS OF IRRADIATED NATURAL URANIUM

1° - General considerations

To examine the possible long-term reprocessing costs for irradiated natural uranium, it is necessary to work out a method of analysis for the cost structures of projects or existing plants. This method should make it possible to forecast the effect of the size of plants on these structures, and thus on their cost. We shall discuss in succession the method used and the results obtained.

2° - The method of analysis and forecasting used

Let us quickly summarise this method, which is based on those of LANG and BACH currently used in the chemical industry and which was described in more detail in September 1963. (1)

Irradiated fuel reprocessing plants, like the majority of industrial installations, do not consist of a single shop producing one single product (and the associated general services), but of a sequence of manufacturing operations or intermediate processes, each relating to a definite function and usually a specific function.

The capital costs are analysed both at the level of each production shop and at that of the complete plant, by categories of work and services.

I - LES FONCTIONS DE COUTS - RETRAITEMENT ET TRANSPORT

A - PERSPECTIVES A LONG TERME DES COUTS DE TRAITEMENT DE L'URANIUM NATUREL IRRADIE

1° - Considérations générales

Pour examiner les coûts possibles à long terme de traitement de l'uranium naturel irradié, il est nécessaire d'élaborer une méthode d'analyse des structures de coûts des projets ou réalisations existantes. Cette méthode doit permettre la prévision de l'influence de la taille des usines sur ces structures, donc sur leur coût. Nous évoquerons successivement la méthode utilisée et les résultats obtenus.

2° - La méthode d'analyse et de prévision utilisée

Résumons rapidement cette méthode inspirée de celles de LANG et de BACH couramment pratiquées dans l'industrie chimique et qui a été présentée plus en détail en Septembre 1963 (1) .

Les usines de traitement des combustibles irradiés, comme d'ailleurs la plupart des installations industrielles, ne sont pas constituées d'un seul atelier de production, fabriquant un produit unique (et des services généraux correspondants), mais d'une suite de fabrications ou traitements intermédiaires, chacun d'eux relatif à une fonction définie, et le plus souvent spécifique.

Les coûts d'investissement sont analysés, tant au niveau de chaque atelier de production qu'à celui de l'usine complète, par catégories de travaux et de services.

Particular attention is paid to the main equipment, not erected, of the production shops (the cost of which is designated by P), i.e. in particular dissolvers, mixer-settlers, evaporators, filters, etc... This main equipment is an essential characteristic of the type of process used and of the production flow, and therefore of the size of the plant (or the shop) in question. The other items of the direct cost of the production shops can be indexed on to P. They are :

- installation of the main equipment,
- earthworks and main walls and foundations,
- finishing and the usual fittings,
- handling equipment (including frameworks),
- pipes and valves,
- electrical installation,
- regulation and control equipment,
- biological shielding,
- special nuclear equipment (samplers, glove boxes).

The costs of the general services, with the same structure, and the indirect costs (engineering fees, start-up costs, interest during construction, contingencies), are related to capital investment and can also be indexed on the value P of the main equipment of the production shops.

Finally, the costs of site improvement, waste processing and storage, which are not linked solely to the production capacity (and thus to P), are examined separately.

Operating costs (apart from depreciation) are divided into two kinds of essentially different economic classes :

On distingue le matériel principal, non monté, des ateliers de production (dont le coût est désigné par P), c'est-à-dire notamment les dissolveurs, mélangeurs-décanteurs, évaporateurs, filtres, etc... Ce matériel principal est une caractéristique essentielle du type de procédé utilisé et du flux de production, donc de la taille de l'usine (ou de l'atelier) considérée. Les autres postes du coût direct des ateliers de production peuvent être indexés sur P. Ce sont :

- le montage du matériel principal,
- les terrassements et le gros oeuvre,
- le second oeuvre et l'équipement classique de bâtiment,
- la manutention (y compris les charpentes),
- la tuyauterie - robinetterie,
- les installations électriques,
- le contrôle régulation,
- les protections biologiques,
- l'équipement spécial nucléaire (prises d'échantillon, boîtes à gants).

Les coûts des services généraux, structurés de la même manière et les coûts indirects (frais d'architecte industriel, frais de démarrage, intérêts intercalaires, aléas), se rapportent aux investissements et peuvent également être indexés sur la valeur P du matériel principal des ateliers de production.

Enfin, on examine séparément les frais d'aménagement du site, de traitement des effluents et des stockages, qui ne sont pas liés seulement à la capacité de production (donc à P).

Les coûts d'exploitation (hors amortissements) sont analysés en deux types de nature économique essentiellement différente :

a) Proportional costs : these depend directly on the flow of production of the plant (the reagents and what are often called the utilities, i.e. steam, power, water, compressed air).

b) The fixed costs : these comprise :

- labour and overheads directly connected with it, for which expenditure as a function of the size varies according to the type of operation, maintenance and safety chosen.

- Costs depending on the capital investment (maintenance, insurance). These expenses can be considered proportional to the capital investment.

This analysis is effected exactly as for the capital costs, either at the level of each production shop, or at that of the complete plant.

By examining the cost structures of plants of different sizes, the method makes it possible to study the economic effect of size.

It may be convenient to characterise this effect by a simplified expression of the following form :

$$\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^\alpha$$

C_1 and C_2 represent the elements of costs relative to the sizes t_1 and t_2 .

From the results obtained, the exponents could be as follows :

$\alpha = 0.4$ if C_1 and C_2 represent the capital costs.

a) Les frais proportionnels : qui dépendent directement du flux de production de l'usine (les réactifs et ce que l'on nomme souvent les utilités, c'est-à-dire la vapeur, l'énergie, l'eau, l'air comprimé).

b) Les frais fixes : qui comprennent :

- la main-d'oeuvre et les frais généraux s'y rattachant directement, pour lesquels les dépenses en fonction de la taille varient selon le type d'exploitation, d'entretien et de sécurité choisi

- ce qui dépend de l'investissement (l'entretien, les assurances). Ces dépenses peuvent être considérées comme proportionnelles aux investissements.

Cette analyse est faite également comme pour les coûts d'investissements soit au niveau de chaque atelier de production, soit à celui de l'usine complète.

La méthode permet, en examinant les structures des coûts d'usines de tailles différentes, d'étudier l'influence économique de la taille.

Il peut être commode de caractériser cette influence par une expression simplifiée du type suivant :

$$\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^\alpha$$

C_1 et C_2 représentant les éléments de coûts relatifs aux tailles t_1 et t_2 .

D'après les résultats obtenus, les exposants pourraient être les suivants :

$\alpha = 0,4$ si C_1 et C_2 représentent les coûts d'investissement.

- $\alpha = 0.3$ if C_1 and C_2 represent the annual expenditure associated with the labour
- $\alpha = 0.4$ if C_1 and C_2 represent fixed annual operating costs, proportional to capital investment
- $\alpha = 1$ if C_1 and C_2 represent annual operating costs proportional to production.

3° - Estimation of the reprocessing costs of irradiated natural uranium in France according to the size of the plants

We have adopted the trend costs quoted at the Geneva Conference in 1964 (*). These figures are now a little old and could be reestimated. In order to test the model however, they are quite satisfactory. After all our aim is to develop a method for the estimation of the influence on the structure of the optimal policy of the cost assumptions and their uncertainty.

Size of plant(**)	1 te/day	2 te/day	3 te/day	10 te/day	20 te/day
Capital investment 10^6 F	145	190	223	360	475
Operating costs 10^6 F/year	10	15	19	38	61
Reprocessing cost F/kg U***	85	57	45	25	18
in \$/kg U	17	11	9	5	3.5

(*) Long term developments in irradiated natural uranium processing costs optimal size and siting of plants - L. THIRIET and Al., A Conf. 28/P/98

(**) Expressed in tonnes of irradiated natural uranium reprocessed per day.

(***) Assuming a depreciation rate of 10 % per year, corresponding roughly to full repayment in 15 years and an interest rate of 7 % / Year.

- $\alpha = 0.3$ si C_1 et C_2 représentent les dépenses annuelles liées à la main-d'oeuvre.
- $\alpha = 0.4$ si C_1 et C_2 représentent les frais annuels d'exploitation fixes, proportionnels aux investissements.
- $\alpha = 1$ si C_1 et C_2 représentent les frais annuels d'exploitation proportionnels à la production.

3° - Estimation des coûts de traitement de l'uranium naturel irradié en France selon la taille des usines

Nous avons repris les coûts en tendance indiqués lors de la Conférence de Genève de 1964 (*). Ces chiffres sont maintenant un peu anciens et devraient être réévalués. Mais pour tester le modèle, ils suffisent largement. N'oublions pas en effet, que ce que nous recherchons, c'est l'élaboration d'une méthode permettant d'évaluer l'influence sur la structure de la politique optimale, des hypothèses de coûts et de leurs incertitudes :

taille de l'usine(**)	1 t/j	2 t/j	3 t/j	10 t/j	20 t/j
Investissement (10^6 F)	145	190	223	360	475
Frais d'exploitation (10^6 F/an)	10	15	19	38	61
Coût de traitement (F/kg d'U***)	85	57	45	25	18
(en \$/kg d'U)	17	11	9	5	3,5

(*) Perspectives à long terme des coûts de traitement de l'uranium naturel irradié - L. THIRIET et Al. A. Conf. 28/P/98.

(**) Exprimée en tonnes d'uranium irradié traité par jour.

(***) En admettant un taux d'amortissement de 10 % par an, correspondant sensiblement à un amortissement en 15 ans et un taux d'intérêt de 7 % / an .

B - TRANSPORT COSTS OF IRRADIATED NATURAL URANIUM

The anticipated reprocessing costs for irradiated natural uranium according to the size of the plants are only one element of the cost of extracting the plutonium contained in the irradiated fuel. This fuel has to be transported from the sites of the nuclear power stations to those of the reprocessing plants. Transportation of the irradiated natural uranium constitutes the other element in the cost of extracting the plutonium which we will now examine.

The structure of this cost has been analysed by Y. SOUSSELIER (2) :

" The cost of a round trip from the EDF 2 and EDF 3 reactors at CHINON to the reprocessing plant at La HAGUE, which is 350 km away, works out at 11.25 F/kg of uranium shipped". Taking the distance over which this computation was made into account, the shipping cost works out at about 33 F/te/km.

This cost has been proved for past shipments. Thanks to the rapid technical progress on container design and on shipment itself, and to the present decrease trend in insurance costs (which are very considerable), it seems shipping costs should decrease quite a lot in the long term.

It must be emphasised that this figure is for very simple transportation, of short duration, involving minimum handling. Experience shows that prices can vary fairly rapidly when these conditions are deviated from. Later in this study we shall examine the sensitivity of the results obtained to the assumption made about the transport cost.

B - COUTS DE TRANSPORT DE L'URANIUM NATUREL IRRADIE

Les coûts prévisionnels de traitement de l'uranium naturel irradié selon la taille des usines ne constituent qu'un des éléments du coût d'extraction du plutonium contenu dans le combustible irradié. Ce combustible doit, en effet, être transporté des sites des centrales nucléaires à ceux des usines de traitement. Le transport de l'uranium naturel irradié constituera l'autre élément du coût d'extraction du plutonium que nous allons évoquer maintenant.

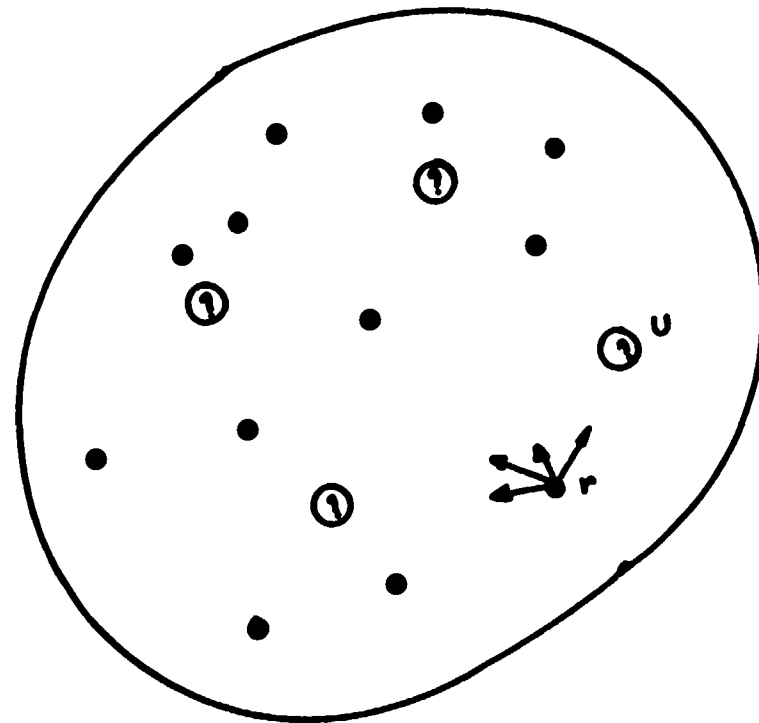
La structure de ce coût a été analysée par M. Y. SOUSSELIER (2) :

" Le coût d'une rotation des réacteurs EDF 2 et EDF 3 de CHINON à l'usine de retraitement de La HAGUE distante de 350 km ressort à 11,25 F/kg d'uranium transporté". Compte tenu de la distance pour laquelle ce calcul a été fait, le coût du transport ressort à 33 F/t/km environ.

Ce coût est celui d'un transport déjà réalisé. Compte-tenu des progrès techniques rapides sur la conception des containers et du transport lui-même, de l'importance du coût des assurances (dont la tendance est très nettement à la baisse), il semble qu'il faille s'attendre à une baisse sensible du coût de transport à long terme.

Il faut souligner que ce chiffre s'entend pour des transport très simples, de courte durée, impliquant un minimum de manutentions. L'expérience montre que les prix peuvent varier assez vite lorsqu'on s'écarte de ces conditions. Dans la suite de cette étude, nous examinerons la sensibilité des résultats obtenus à l'hypothèse faite sur le coût de transport.

II - STATEMENT OF THE PROBLEM AND FORMULATION

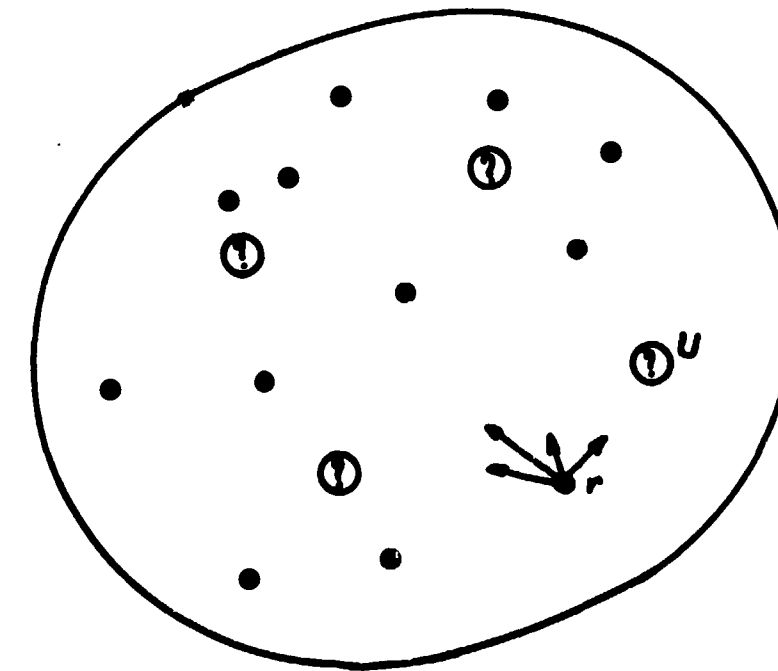


A system of R reactors, with a known location, produces annually a fixed quantity of material to be reprocessed.

The problem is to determine the location, size and date of start-up of the reprocessing plants so as to minimise the sum of the transport and reprocessing costs.

The plants can only be built on a certain number N of possible sites. The transport and reprocessing costs functions are known.

II - EXPOSE DU PROBLEME ET FORMALISATION



Un système de R réacteurs, dont la localisation est connue, produit annuellement une quantité fixée de matière à retraiter.

Il s'agit de déterminer la localisation, la taille, et la date de démarrage des usines de retraitement de manière à minimiser la somme des coûts de transport et de retraitement.

Les usines ne peuvent être construites qu'en un certain nombre N de sites possibles. Les fonctions de coûts de transport et de retraitement sont connues.

A - ASSUMPTIONS

(A₁) a plant is operated until the end of its forecast life S, and it is assumed that when a plant shuts down, a plant at least equal in size to the previous one is built on the same site. This assumption is in accordance with current industrial experience^(*).

(A₂) the problem is treated over H years (technological horizon) after which the process is assumed to be obsolete (technical progress).

If this is not the case, it is sufficient to make H large enough so that through the process of discounting back, the costs involved after H are negligible.

B - THE NEED FOR OPTIMISATION

Reprocessing costs are minimised by building a maximum-sized plant on a given site (effect of size).

The transport cost is minimised by building plants on all possible sites (and therefore small in size). A compromise thus has to be found.

(*) See Appendix III for the impact of these assumptions on the formulation of the problem.

A - HYPOTHESES

(H₁) une usine est exploitée, jusqu'à la fin de sa vie prévue S, et l'on suppose que lorsqu'une usine s'arrête, on reconstruit sur le même site une usine de taille au moins égale à la précédente. Cette hypothèse est conforme à l'expérience industrielle courante^(*).

(H₂) on traite le problème sur H années (horizon technologique) au-delà desquelles le procédé est supposé atteint par l'obsolescence (progrès technique).

Si cela n'est pas le cas, il suffit de prendre H assez grand pour que, par le jeu de l'actualisation, les frais engagés après H soient négligeables.

B - LA NECESSITE D'UNE OPTIMISATION

On minimise le coût de retraitement en construisant une usine de taille maximum sur un site quelconque (effet de taille).

On minimise le coût de transport en construisant des usines sur tous les sites possibles (donc de petites tailles). Un compromis est donc à trouver.

(*) Voir en Annexe III l'impact des hypothèses sur la formulation.

C - THE GENERAL PRINCIPLE

X being a variable representing the solution adopted^(*),
let $R(X)$ and $\hat{T}(X)$ be the optimum corresponding reprocessing and
transport costs.

$R(X)$ here is higher than $\hat{T}(X)$ and it is possible to
calculate roughly the lowest transport costs : ζ (which can be taken
as zero "as a last resort").

Let $\bar{R}$ be the minimum of $R(X)$: $\bar{R} = \inf R(X) = R(\bar{X})$

$\bar{X}$ being determined first, the vicinity $\checkmark$ of X is explored, defined
by $\checkmark = \left\{ X / \left| \bar{R} - R(X) \right| < t \right\}$ with $t = \hat{T}(\bar{X}) - \zeta$

The optimum solution is then : X minimising :

$$F(X) = R(X) + \hat{T}(X) \text{ for } X \in \checkmark$$

The following diagram illustrates this principle.

(*) Sites, size and date of start-up of plants.

C - LE PRINCIPE GENERAL

X étant une variable représentant la solution adoptée^(*),
soient $R(X)$ et $\hat{T}(X)$ les frais de retraitement et de transport
optimal correspondants.

$R(X)$ est ici plus élevé que $\hat{T}(X)$ et on peut calculer
grossièrement un minorant des frais de transport : ζ (que l'on peut
prendre nul "en désespoir de cause").

Soit $\bar{R}$ le minimum de $R(X)$: $\bar{R} = \inf R(X) = R(\bar{X})$

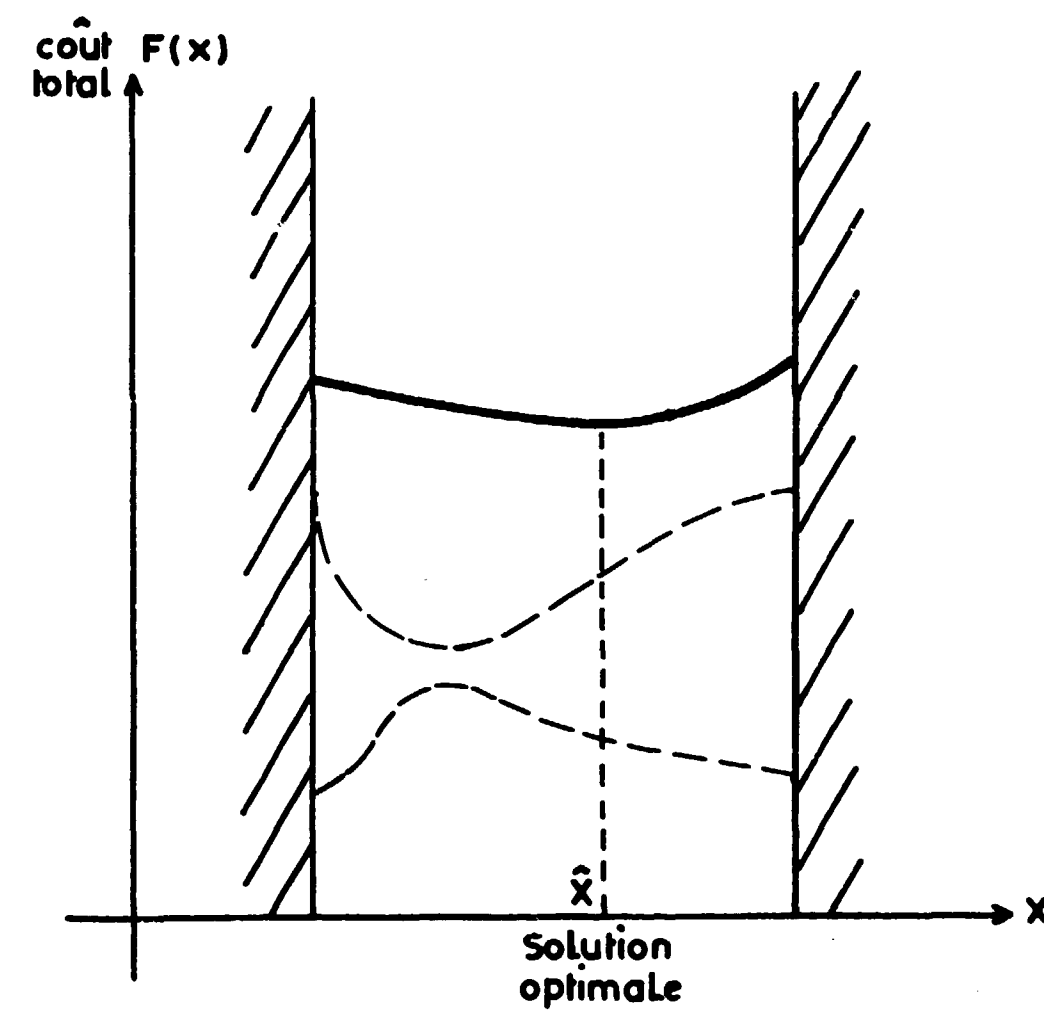
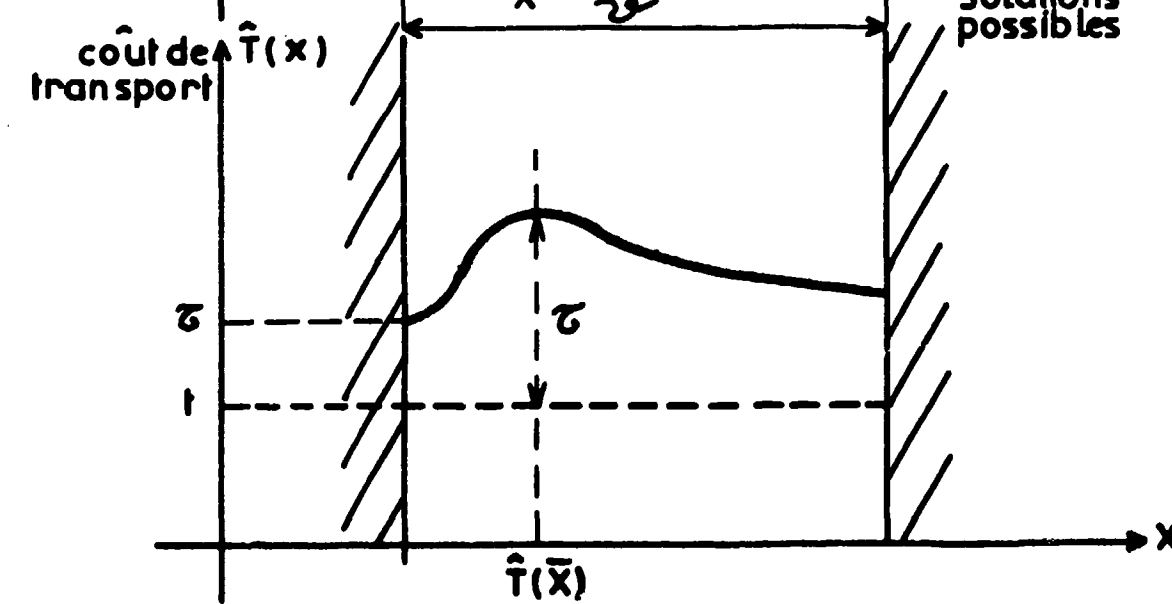
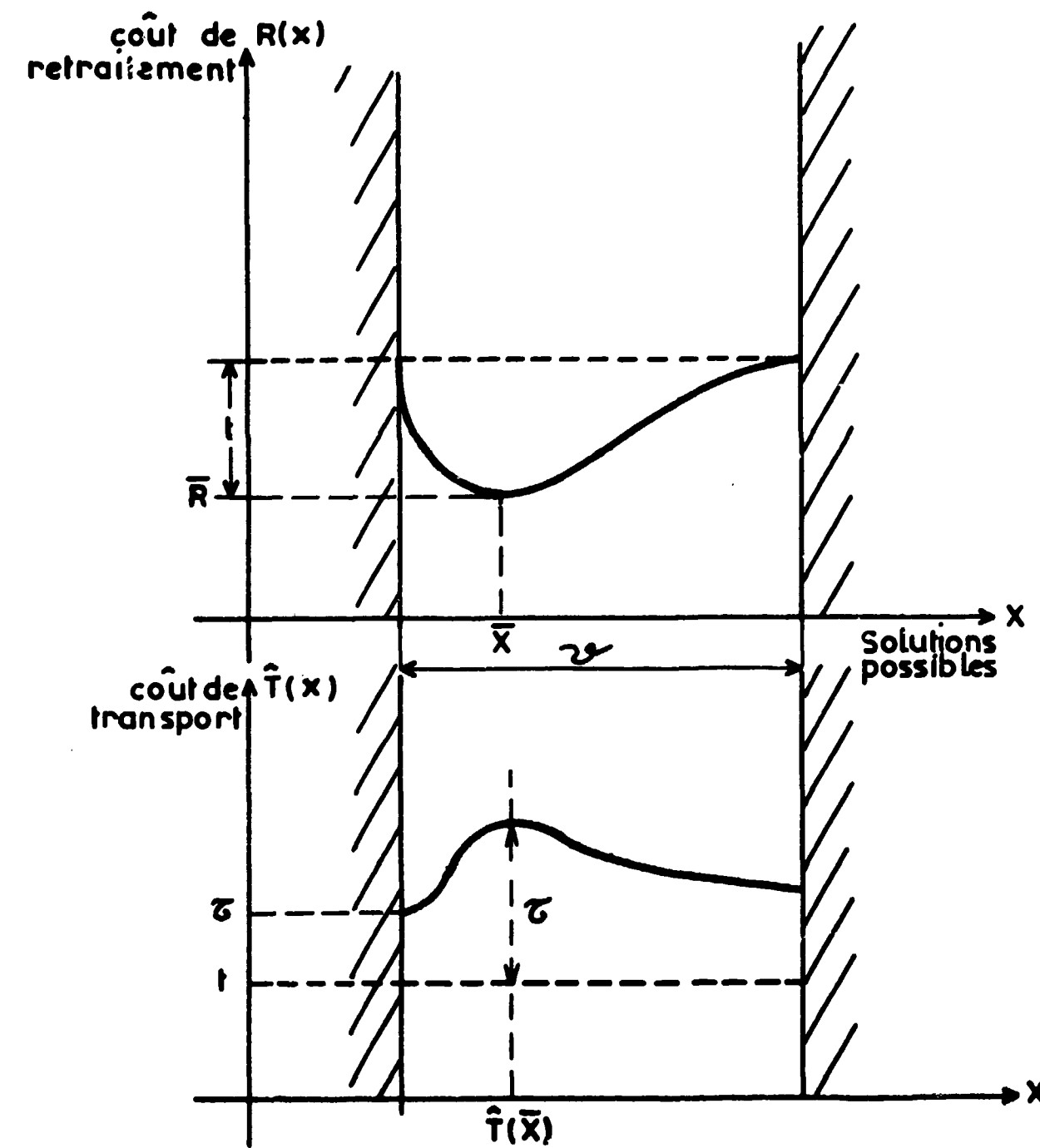
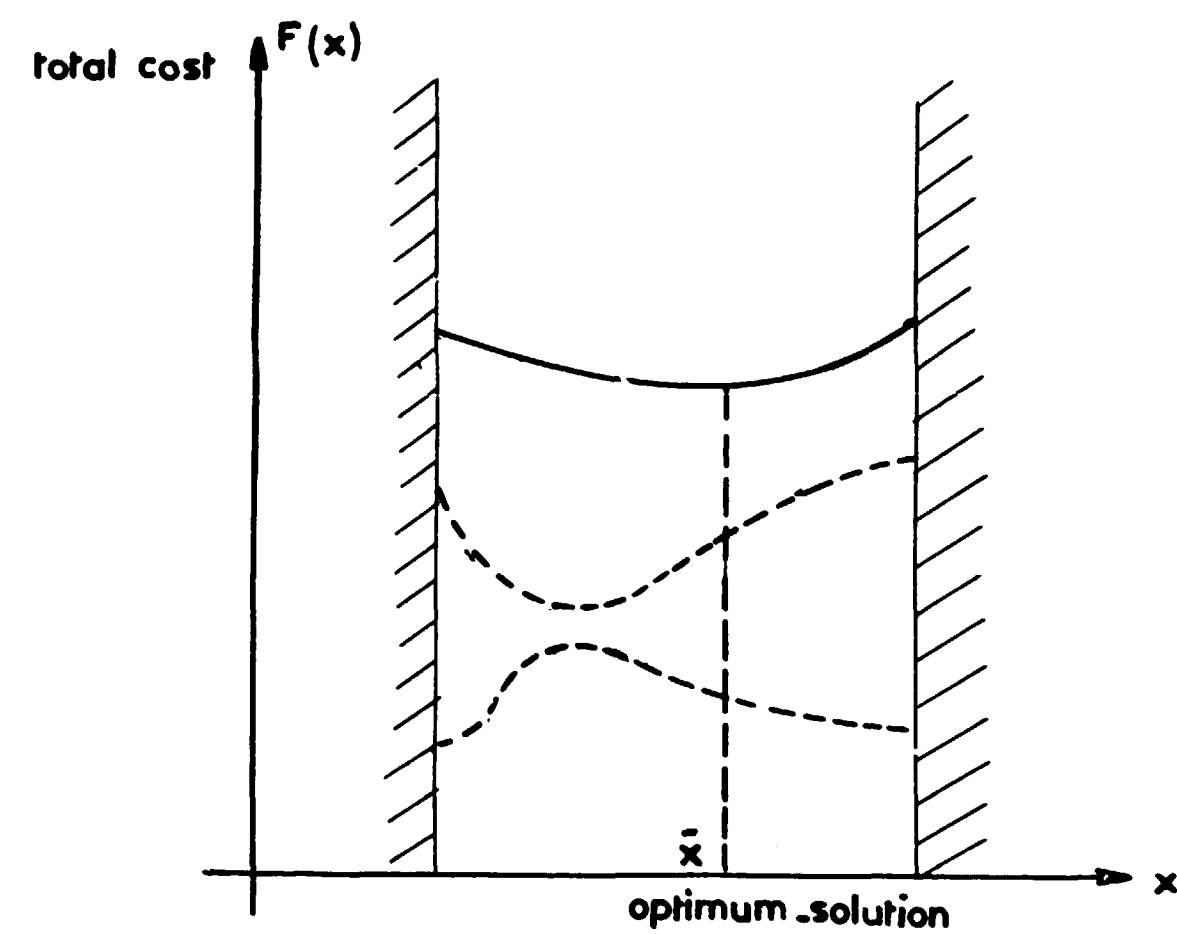
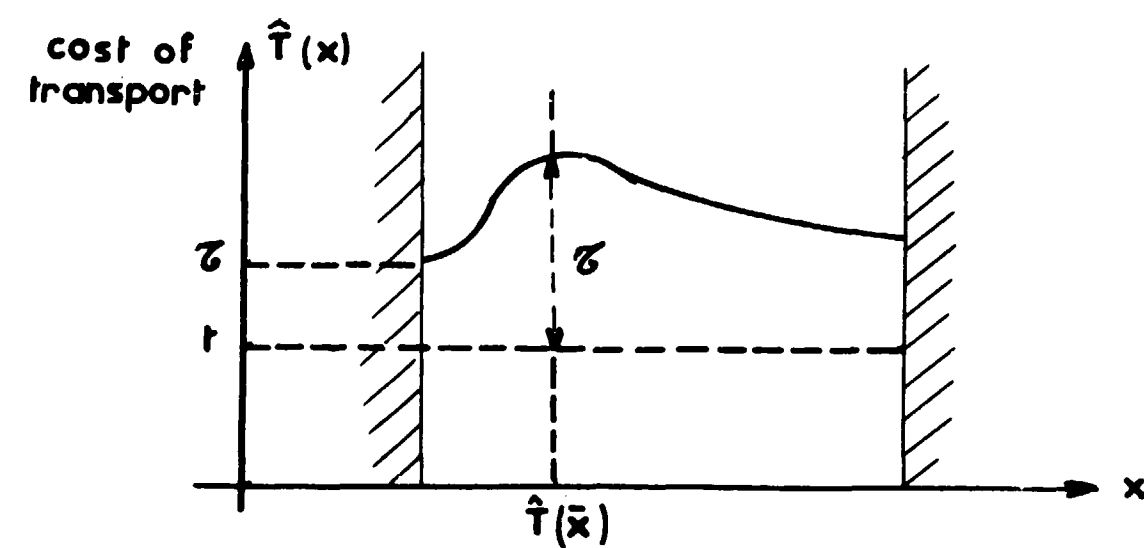
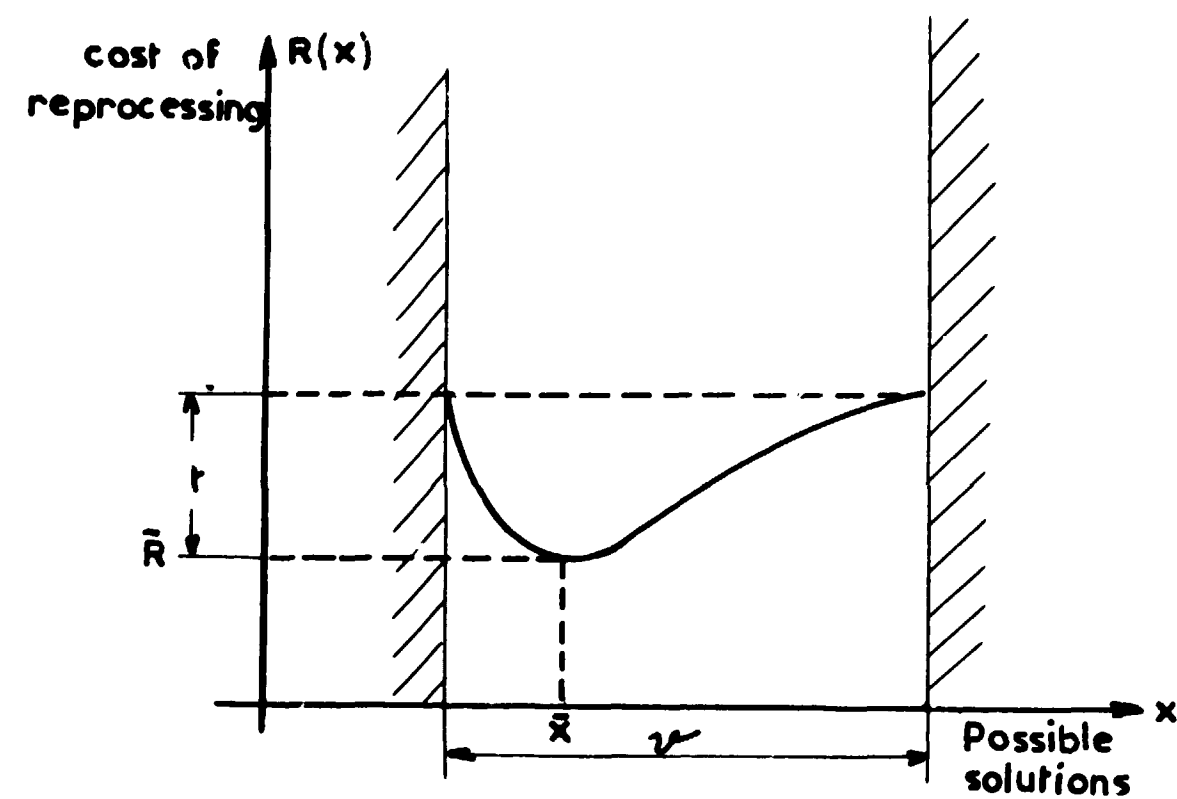
$\bar{X}$ étant d'abord déterminé, on explore le voisinage $\mathcal{V}$ de $\bar{X}$ défini
par $\mathcal{V} = \left\{ X / \left| \bar{R} - R(X) \right| < t \right\}$ avec $t = \hat{T}(\bar{X}) - \zeta$

La solution optimale est alors : X qui minimise

$$F(X) = R(X) + \hat{T}(X) \text{ pour } X \in \mathcal{V}$$

La figure suivante illustre ce principe.

(*) Sites, taille et date de démarrage des usines.



D - THE METHOD USED

Formulation : it is necessary to determine the quantities of material reprocessed in year t ($t = 1, 2, \dots H$) on each site u ($u = 1, 2, \dots N$) coming from the reactor r ($r = 1, 2, \dots R$) :

i.e. $q_{r,u}^t$.

More fully, we take as unknowns the N matrices (H,R) noted $[Q_u]$ with general element $q_{r,u}^t$. It is the combination of these which forms what we have called X earlier on.

To explain this method, we shall make an additional assumption :

(A₃) if several plants are in operation, only one of them is not operating at full load^(*) .

This assumption enables us to consider the $[Q_u]$ as independent variables.

Let $P(t)$ be the annual production of material to be reprocessed ; (this is the sum of the production of the reactors in operation in year t).

(*) This hypothesis does not appear at A since, in fact, it is possible not to take it into account by using heuristic processes at certain stages in the calculation.

D - LA METHODE UTILISEE

Formalisation : il s'agit de déterminer les quantités de matière retraitée l'année t ($t = 1, 2, \dots H$) sur chaque site u ($u = 1, 2, \dots N$) et provenant du réacteur r ($r = 1, 2, \dots R$) :
soit $q_{r,u}^t$.

Plus globalement on prendra comme inconnues les N matrices (H, R) notées $[Q_u]$ d'élément général $q_{r,u}^t$. C'est leur ensemble qui constitue ce que l'on appelle plus haut X .

Pour exposer cette méthode, nous faisons une hypothèse supplémentaire :

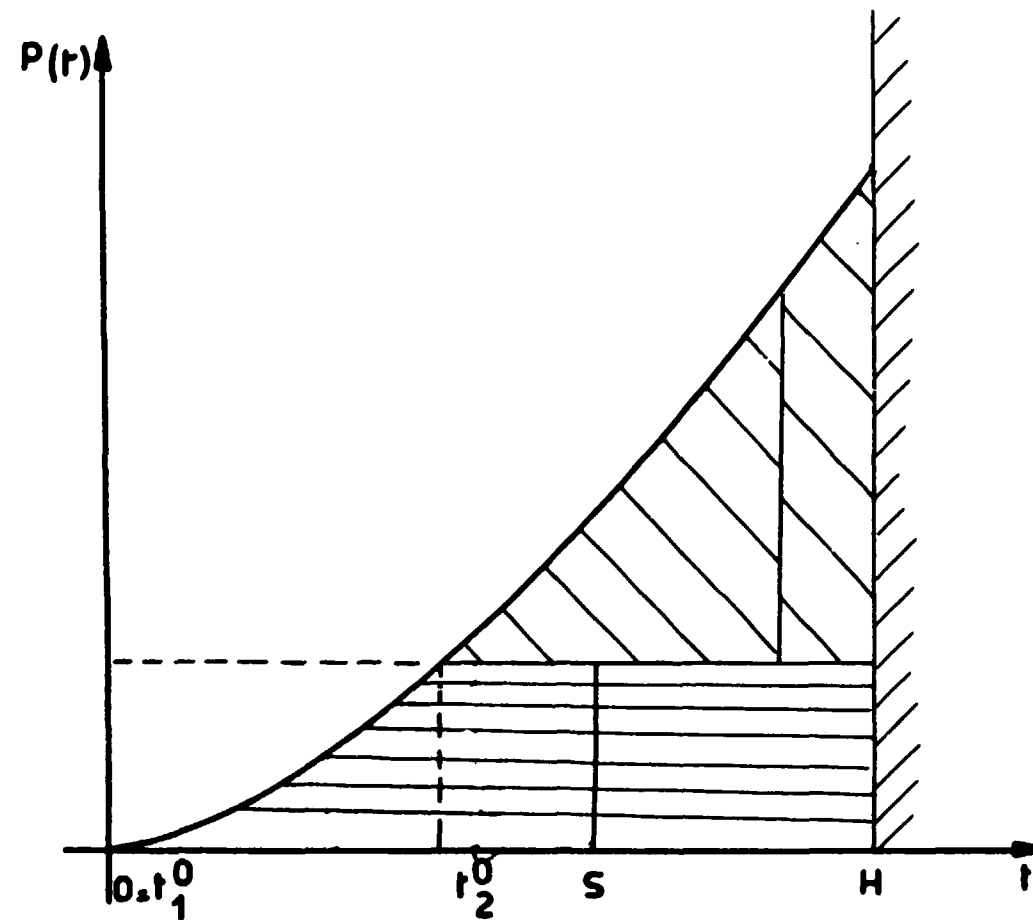
(H_3) si plusieurs usines sont en marche, une seule d'entre elles ne fonctionne pas à pleine charge^(*).

Cette hypothèse permet de considérer les $[Q_u]$ comme des variables indépendantes.

Soit $P(t)$ la production annuelle de matière à retraiter.
(C'est la somme des productions des réacteurs en marche l'année t).

(*) Cette hypothèse ne figure pas en A, car, en fait, il est possible de ne pas en tenir compte en usant de procédés heuristiques à certains stades du calcul.

An example of a possible solution is shown in the following diagram :

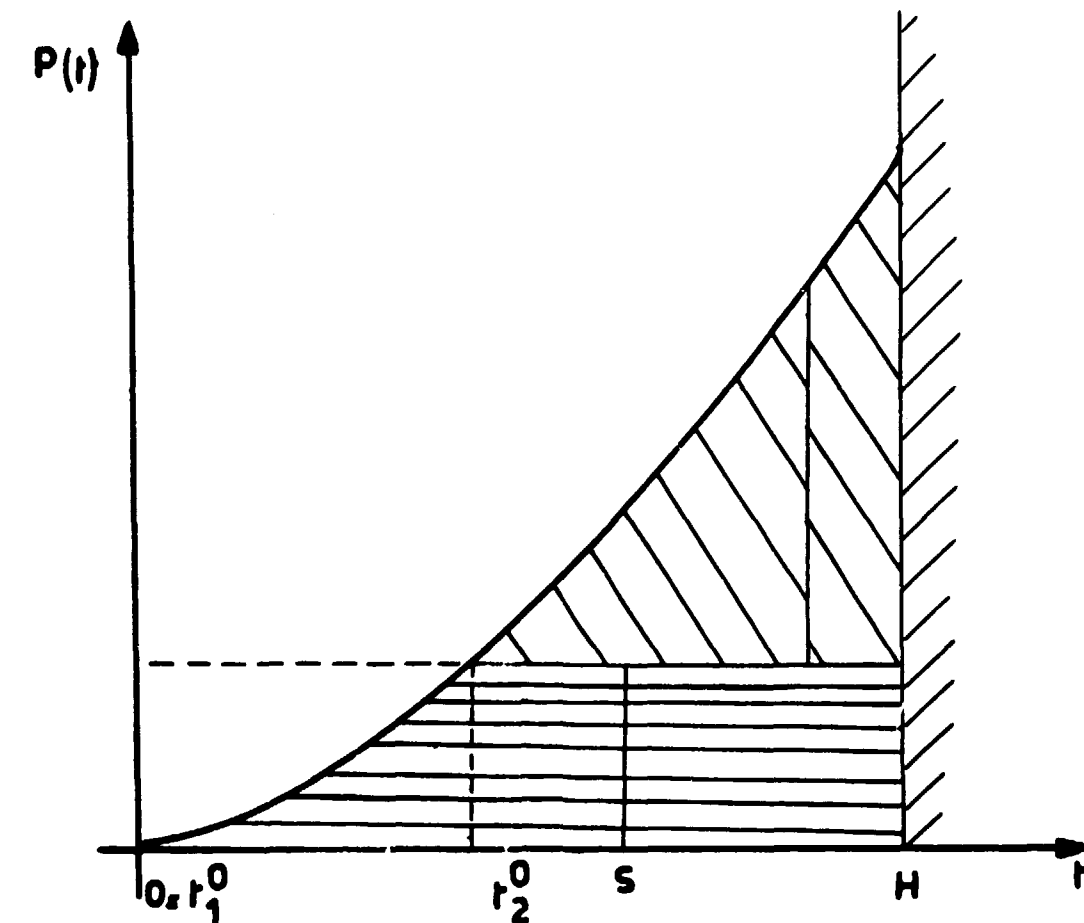


This solution is as follows :

Construction on site 1 of a plant of size $P(t_2^0)$ operating at reduced load until t_2^0 . Reconstruction of a plant of the same size on the same site when the latter shuts down (at time $t_1^0 + S$).

Construction on site 2 of a plant of size $P(t_2^0 + S) - P(t_2^0)$ and reconstruction on the same site of a plant of size $P(H) - P(t_2^0)$ when the latter shuts down (at time $t_2^0 + S$).

Un exemple de solution possible est représenté sur la figure suivante :



Cette solution est la suivante :

Construction sur le site 1 d'une usine de taille $P(t_2^0)$ fonctionnant à charge réduite jusqu'à t_2^0 . Reconstruction d'une usine de même taille sur le même site lorsque celle-ci s'arrête (au temps $t_1^0 + S$).

Construction sur le site 2 d'une usine de taille $P(t_2^0 + S) - P(t_2^0)$ et reconstruction sur le même site d'une usine de taille $P(H) - P(t_2^0)$ lorsque celle-ci s'arrête (au temps $t_2^0 + S$).

Let $|Q_{R,u} >$ be the vector of which the components are

$$\sum_{r=1}^R q_{r,u}^t$$

The problem is then resolved naturally in two stages :

1. - Determination of the values of $|Q_{R,u} >$ (Reprocessing)
2. - Détermination of the values of $q_{r,u}^t$ (Transport)

In the example given :

$$|Q_{R,1} > = \begin{bmatrix} P(1) \\ \vdots \\ P(r_2^0) \\ \vdots \\ P(r_2^0) \end{bmatrix} \quad |Q_{R,1} > = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(r_2^0+1) - P(r_2^0) \\ \vdots \\ P(H) - P(r_2^0) \end{bmatrix}$$

The vectors $|Q_{R,u} >$ will always take this form :

- a sequence of zeros
- a rising sequence
- a steady sequence

Each of these sequences
may be void

soit $|Q_{R,u} >$ le vecteur dont les composantes sont

$$\sum_{r=1}^R q_{r,u}^t$$

Le problème est alors naturellement résoluble en deux étapes :

1. - Détermination des $|Q_{R,u} >$ (Retraitement)
2. - Détermination des $q_{r,u}^t$ (Transport)

Dans l'exemple donné :

$$|Q_{R,1} > = \begin{bmatrix} P(1) \\ \vdots \\ P(r_2^0) \\ \vdots \\ P(r_2^0) \end{bmatrix} \quad |Q_{R,2} > = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(r_2^0+1) - P(r_2^0) \\ \vdots \\ P(H) - P(r_2^0) \end{bmatrix}$$

Les vecteurs $|Q_{R,u} >$ auront toujours cette forme :

- une séquence de zéros
- une séquence croissante
- une séquence stationnaire

chacune de ces séquences
pouvant être vide

It is then seen that the reprocessing costs $\mathcal{R}$ are expressed additively as a function of the values of u :

$$\mathcal{R} = \sum_{u=1}^N f(|Q_{R,u}\rangle)$$

See detailed formula in Appendix I.

It is therefore possible to consider the problem as a dynamic programming problem, in fact (in view of its simplicity) capable of representation by a sequential graph. We give in Appendix II the conditions of representation of a dynamic programme by a sequential graph ; it is then not only possible to find the optimum, but to explore its vicinity by determination of the k-optima.

In Appendix III we give the details of this representation.

E - CALCULATION

This is then carried out in accordance with the principle explained above ; the problem having been put in discrete form, exploration of the vicinity $\checkmark(X)$ here consists of considering the k-optimum policies.

The algorithm for calculating the k-optimum policies in a sequential graph is given in Appendix IV.

When a k-optimum reprocessing policy has been found, the corresponding $|Q_{R,u}\rangle$ values are known ($u = 1, 2, \dots N$). It then remains to determine the optimum distribution of the material to be reprocessed from the reactors to the plants (lines of the matrices $\boxed{Q_u}$).

On remarque alors que les frais de retraitement $\mathcal{R}$ s'expriment additivement en fonction des u :

$$\mathcal{R} = \sum_{u=1}^N f(|Q_{R,u}\rangle)$$

Voir formule détaillée en Annexe I.

Il est donc possible de considérer le problème comme un problème de programmation dynamique, en fait (étant donné sa simplicité) représentable par un graphe séquentiel. Nous rappelons en annexe II les conditions de représentation d'un programme dynamique par un graphe séquentiel, on pourra ainsi non seulement connaître l'optimum, mais explorer son voisinage par détermination des k-optimaux.

Nous indiquons en Annexe III le détail de cette représentation.

E - LE CALCUL

Il se fait alors suivant le principe exposé plus haut ; le problème étant discrétisé, l'exploration du voisinage $\checkmark(\bar{X})$ consiste ici en la considération des politiques k-optimales.

L'algorithme de calcul des politiques k-optimales dans un graphe séquentiel est indiqué en annexe IV.

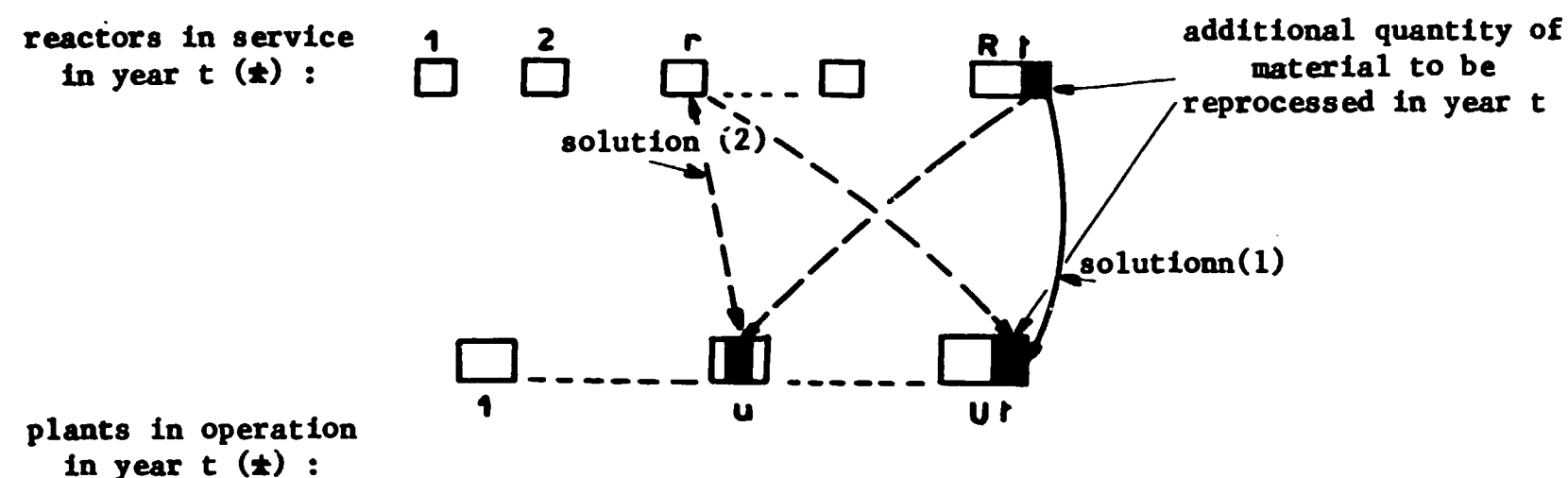
Lorsqu'une politique k-optimale de retraitement a été trouvée, on connaît les $|Q_{R,u}\rangle$ correspondants ($u = 1, 2, \dots N$). Il reste alors à déterminer la distribution optimale des matières à retraiter des réacteurs vers les usines (lignes des matrices $\boxed{Q_u}$).

This transport problem is treated, year by year, in the following way :

The $q_{r,u}^t$ are assumed to be known ($r = 1, 2, \dots R(t)$)

If U is the number of plants in operation in year $t+1$, the additional quantity p produced by a certain known reactor can be reprocessed :

- either in the last plant U brought into operation
- or in one of the plants $1, 2, \dots U-1$ previously brought into service, as replacement for the same quantity p which is then sent to the plant U .



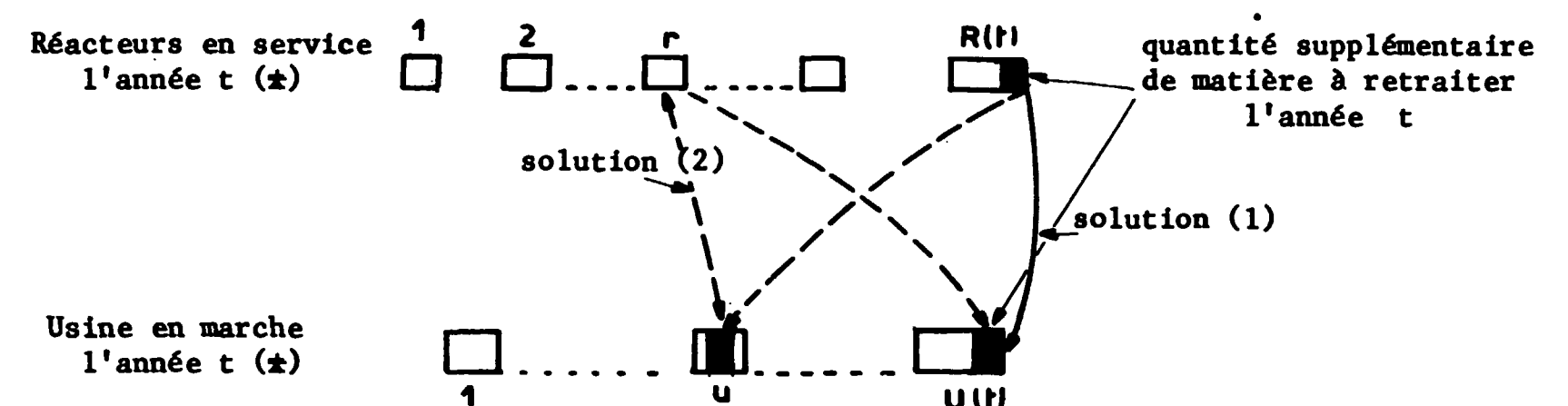
($\star$) In the order in which they came into operation.

Ce problème de transport est traité, année par année, de la manière suivante :

On suppose connus les $q_{r,u}^t$ ($r = 1, 2, \dots R(t)$)

Si U est le nombre d'usines en marche l'année $t+1$, la quantité p supplémentaire produite par un certain réacteur connu peut être retraitée :

- soit dans la dernière usine U mise en fonctionnement,
- soit dans l'une des usines $1, 2, \dots U-1$ précédemment mise en service, en remplacement d'une même quantité p envoyée alors à l'usine U .



($\star$) Dans l'ordre de leur entrée en fonction.

The transport cost is :

$$\text{for solution (1) : } \pi(R, U) = \pi_1$$

$$\text{for solution (2) : } \min \left[\pi(R, u) - \pi(r, u) + \pi(r, U) \right] = \hat{\pi}_2$$

$$1 \leq r \leq R - 1$$

$$1 \leq u \leq U - 1$$

Finally $\hat{\pi} = \min (\pi_1, \hat{\pi}_2)$ and the $q_{r, u}^{t+1}$ are known :

$$\text{If } \hat{\pi} = \pi_1$$

$$q_{r, u}^{t+1} = q_{r, u}^t \quad \forall (r, u) \neq (R, U)$$

$$q_{R, U}^{t+1} = q_{R, U}^t + p$$

If $\hat{\pi} = \hat{\pi}_2$ and $\hat{\pi}_2$ obtained for $r = \hat{r}$, $u = \hat{u}$:

$$q_{r, u}^{t+1} = q_{r, u}^t \quad \forall (r, u) \neq (R, \hat{u}), \neq (\hat{r}, \hat{u}), \neq (\hat{r}, U)$$

$$q_{R, \hat{u}}^{t+1} = q_{R, \hat{u}}^t + p, \quad q_{\hat{r}, \hat{u}}^{t+1} = q_{\hat{r}, \hat{u}}^{t+1} - p, \quad q_{\hat{r}, U}^{t+1} = q_{\hat{r}, U}^{t+1} + p$$

One proceeds in this way from $t = 0$ to H .

Le prix du transport est :

$$\text{pour la solution (1) : } \pi(R, U) = \pi_1$$

$$\text{pour la solution (2) : } \min \left[\pi(R, u) - \pi(r, u) + \pi(r, U) \right] = \hat{\pi}_2$$

$$1 \leq r \leq R - 1$$

$$1 \leq u \leq U - 1$$

En définitive $\hat{\pi} = \min (\pi_1, \hat{\pi}_2)$ et on connaît les $q_{r, u}^{t+1}$:

$$\text{Si } \hat{\pi} = \pi_1 :$$

$$q_{r, u}^{t+1} = q_{r, u}^t \quad \forall (r, u) \neq (R, U)$$

$$q_{R, U}^{t+1} = q_{R, U}^t + p$$

Si $\hat{\pi} = \hat{\pi}_2$ et $\hat{\pi}_2$ obtenu pour $r = \hat{r}$, $u = \hat{u}$:

$$q_{r, u}^{t+1} = q_{r, u}^t \quad \forall (r, u) \neq (R, \hat{u}), \neq (\hat{r}, \hat{u}), \neq (\hat{r}, U)$$

$$q_{R, \hat{u}}^{t+1} = q_{R, \hat{u}}^t + p, \quad q_{\hat{r}, \hat{u}}^{t+1} = q_{\hat{r}, \hat{u}}^{t+1} - p, \quad q_{\hat{r}, U}^{t+1} = q_{\hat{r}, U}^{t+1} + p$$

Ainsi de $t = 0$ à H .

The method can be interpreted in the general formulation of dynamic programming : (3)

Let $f_t(P(t))$ be the minimum transport cost of the material to be reprocessed from the year 0 to the year t . One then has the recurrence relation :

$$f_{t+1}(P(t+1)) = \min \left[\pi[R(t+1), U(t+1)] + f_t(P(t)), \right. \\ \left. \min_{\substack{1 \leq r \leq R(t+1) \\ 1 \leq u \leq U(t+1)}} [\pi(R(t+1), u) - \pi(r, u) + \pi(r, U(t+1)) + f_t(P(t))] \right]$$

Which can be written more simply here :

$$f_{t+1}(P(t+1)) = \min \left[\pi_1, \min_{r, u} \pi_2 \right] + f_t(P(t))$$

and the calculation is carried out conventionally by recurrence from 0 to H .

La méthode peut s'interpréter dans le formalisme général de la Programmation dynamique : (3)

Soit en effet $f_t(P(t))$ le coût minimum du transport des matières à retraiter depuis l'année 0 jusqu'à l'année t . On a alors la relation de récurrence :

$$f_{t+1}(P(t+1)) = \min \left[\pi[R(t+1), U(t+1)] + f_t(P(t)), \right. \\ \left. \min_{\substack{1 \leq r \leq R(t+1) \\ 1 \leq u \leq U(t+1)}} [\pi(R(t+1), u) - \pi(r, u) + \pi(r, U(t+1)) + f_t(P(t))] \right]$$

qui peut s'écrire ici plus simplement :

$$f_{t+1}(P(t+1)) = \min \left[\pi_1, \min_{r, u} \pi_2 \right] + f_t(P(t))$$

et le calcul s'effectue classiquement par récurrence de 0 à H .

We thus obtain the transport cost corresponding to a certain reprocessing programme. It remains to carry out the same calculation for all the possible commissioning sequences and to consider only those which are such that $x \in \mathcal{V}(\bar{x})$.

Thus we will have not only the general optimum but also the (reprocessing and transport) policies close to this optimum.

The method may seem laborious in its final stage but, in fact, as the optimum reprocessing policy $\bar{x}$ consists in using only a single site, the region $\mathcal{V}(\bar{x})$ is such that the corresponding policies consist in using only 3 simultaneous sites to the maximum, which makes the calculation relatively easy to tackle.

On an IBM 7090 with $H = 30$, $S = 15$, $N = 12$, $R = 12$, calculation of a k-optimum reprocessing policy takes a few seconds and calculation of the corresponding transport costs (for all commissioning sequences) is about 3 minutes. Exploration of $\mathcal{V}(\bar{x})$ requires the calculation of about twenty sub-optimum policies. Treatment of the whole problem therefore takes about 1 hour on the average.

On obtient ainsi le coût de transport correspondant à un certain programme de retraitement. Il reste à faire le même calcul pour tous les ordres de mise en service possibles et à ne considérer que ceux qui sont tels que $x \in \mathcal{V}(\bar{x})$.

Ainsi on aura trouvé non seulement l'optimum général mais encore les politiques (de retraitement et de transport) voisines de cet optimum.

La méthode peut paraître lourde dans son dernier stade mais, en fait, la politique de retraitement optimale $\bar{x}$ consistant à n'utiliser qu'un seul site, le voisinage $\mathcal{V}(\bar{x})$ est tel, que les politiques correspondantes consistent à n'utiliser au maximum que 3 sites simultanés, ce qui rend le calcul abordable.

Sur IBM 7090 avec $H = 30$, $S = 15$, $N = 12$, $R = 12$, le calcul d'une politique k-optimale de retraitement dure quelques secondes et le calcul des frais de transport correspondants (pour tous les ordres de mise en service) près de 3 minutes. L'exploration de $\mathcal{V}(\bar{x})$ demande le calcul d'une vingtaine de politiques sous-optimales. Le traitement du problème complet demande donc 1 heure en moyenne.

III - RESULTS

A. Optimum policy

With the numerical data of Appendix V, the optimum policy found was as follows :

Years	1965 - 1979	1980 - 1995
Size of plants	4	17
Location	A	A

Cost : 1068 mega-francs
made up of 749 for the reprocessing plants
and 319 for transport

B. Sub-optimum policies

Although (once the reprocessing policy is chosen) it is of no value to use a non-optimum transport policy, it should be pointed out that the transport cost varies from 319 to 395 mega-francs depending on the policy adopted.

The sub-optimum policies consist in building in 1980 a plant of J t/day at X and a plant of $17 - J$ t/day at Y when it becomes necessary . See fig. 1.

The cost of these policies as a function of J is given in fig. 2.

III - RESULTATS

A. Politique optimale

Avec les données numériques de l'annexe V la politique optimale trouvée a été la suivante :

Années	1965 - 1979	1980 - 1995
Taille des usines	4	17
Localisation	A	A

Coût : 1068 mega-francs
dont 749 pour les usines de retraitement
et 319 pour le transport

B. Politiques sous-optimales

Bien qu'il soit inintéressant d'utiliser (une fois la politique de retraitement choisie) une politique de transport non optimale, on peut signaler que le coût du transport varie de 319 à 395 méga-francs suivant la politique adoptée.

Les politiques sous-optimales consistent à construire en 1980 une usine de J t/j en X et une usine de $17 - J$ t/j en Y lorsqu'elle devient nécessaire. Voir figure 1.

Le coût de ces politiques en fonction de J est donné sur la fig. 2.

C. Sensitivity

1°- The form of the optimum policies does not vary either with the discounting rate or with the life of the plants.

2°- Transport costs

Let us give the breakdown of the transport and reprocessing costs as a function of J :

J	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
R(J)Reproc.	872	855	844	834	824	815	807	800	793	787	782	776	767	749
T(J)Transp.	265	265	267	271	276	281	287	295	303	312	317	319	319	319
F(J) Total	1137	1120	1111	1105	1100	1096	1094	1095	1096	1099	1099	1095	1086	1068

The transport cost T (J) varies linearly as a function of the transport price π (in F/tonne-km)

$$\text{We have : } F(J) = R(J) + \frac{\pi}{32} T(J)$$

The total cost F (J) varies as a function of π as indicated in fig. 3 .

C. Sensibilité

1°- La forme des politiques optimales ne varie ni avec le taux d'actualisation, ni avec la durée de vie des usines

2°- Frais de transport

Donnons la répartition des frais de transport et retraitement en fonction de J :

J	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
R(J)Retrait.	872	855	844	834	824	815	807	800	793	787	782	776	767	749
T(J) Transp.	265	265	267	271	276	281	287	295	303	312	317	319	319	319
F(J) Total	1137	1120	1111	1105	1100	1096	1094	1095	1096	1099	1099	1095	1086	1068

Le coût de transport T (J) varie linéairement en fonction du prix π de transport (en F/tonne-km)

$$\text{On a : } F(J) = R(J) + \frac{\pi}{32} T(J)$$

Le coût total F (J) se déforme en fonction de π comme indiqué sur la fig. 3 .

When transport costs decrease, the order of optimality of policy II (★) increases, policy I (★) appears (with its parasites) as the only valid one when the costs reach 20 F/t/km.

When transport costs increase, the opposite occurs and policy II becomes 1-optimum when they reach 55.2 F/te/km.

Thus in short :

A reduction in the transport cost increases the stability of the optimum policy.

Doubling of the transport cost transforms the structure of the optimum policy : after the first 15 years, 2 plants of comparable sizes will be built on sites A and B.

3°- Programme of uranium to be reprocessed

The assumption of a programme with slower growth has similar effects to a decrease in the transport cost.

Thus for a programme about 3 times slower than the previous one (6 te/day in 1995), there is no sub-optimum of the type of policy II. The optimum policy is of the type I and the sub-optima consist in dividing the second plant of site A into a large one and a small one :

(★) See fig. 2 .

Lorsque les frais de transport diminuent, l'ordre d'optimalité de la politique II (★) augmente ; la politique I (★) apparaît (avec ses parasites) comme la seule valable lorsque les frais atteignent 20 F/t/km.

Lorsque les frais de transport augmentent, le phénomène inverse se produit et la politique II devient 1-optimale lorsque ceux-ci atteignent 55,2 F/t/km.

Donc en résumé :

Une diminution du coût de transport augmente la stabilité de la politique optimale.

Le doublement du coût de transport transforme la structure de la politique optimale : après les 15 premières années, on construira 2 usines de tailles comparables sur les sites A et B .

3°- Programme d'uranium à retraiter

La considération d'un programme à croissance plus lente a des effets analogues à la diminution du coût de transport.

Ainsi pour un programme 3 fois plus lent environ que le précédent (6 t/j en 1995) il n'apparaît pas de sousoptimum du type politique II . La politique optimale est du type I et les sous optima consistent à diviser la deuxième usine du site A en une grande et une petite :

(★) Voir figure 2 .

Years	1965 - 1980	1980 - 1995
Size of plants	2	6
Location	A	A

Conversely, assumption of a programme with faster growth has similar effects to an increase in the transport cost.

Thus for a programme about twice as fast (30 te/day in 1995) than the first one studied, the optimum policy is of type II.

Years	1965 - 1980	1980 - 1995	1985 - 1995
Size of plants	11	15	15
Location	A	A	B

Figs. 4 and 5 represent these results (same notation as on fig. 2) .

Années	1965 - 1980	1980 - 1995
Taille des usines	2	6
Localisation	A	A

Inversement la considération d'un programme à croissance plus rapide a des effets analogues à l'augmentation du coût de transport.

Ainsi pour un programme 2 fois plus rapide environ (30 t/j en 1995) que le premier étudié, la politique optimale est du type II.

Années	1965 - 1980	1980 - 1995	1985 - 1995
Taille des usines	11	15	15
Localisation	A	A	B

Les figures 4 et 5 traduisent ces résultats (mêmes notations que sur la figure 2) .

IV - PARASITIC POLICIES

One fact which seems important to us became apparent during calculation. It is due to the method used and must reappear every time the concept of sub-optimality is used.

Let us take the example of the thermal reactor programme of 17 te/day in 30 years.

The 1-optimum policy is as follows :

- I { 1965 - 1989 : plant of 4 te/day at A
1980 - 1995 : plant of 17 te/day at A

The 2, 3 and 4-optimum policies found consist of constructing at A a plant of 16.5 , 15 and 15.5 te/day in 1980, then a small plant at A when it becomes necessary.

The 5-optimum policy is as follows :

- II { 1965 - 1980 : plant of 4 te/day at A
1980 - 1995 : plant of 9 te/day at A
1985 - 1995 : plant of 8 te/day at B

IV - LES POLITIQUES PARASITES

Un fait qui nous a semblé important est apparu lors du calcul. Il est dû à la méthode employée et doit se retrouver chaque fois que le concept de sous-optimalité est utilisé.

Prnons l'exemple du programme de réacteurs thermiques de 17 t/j en 30 ans.

La politique 1-optimale est la suivante :

- I { 1965 - 1989 : usine de 4 t/j en A
1980 - 1995 : usine de 17 t/j en A

Les politiques 2, 3 et 4-optimales trouvées consistent à construire en A une usine de 16,5 , 16 et 15,5 t/j en 1980 en A, puis une petite usine en A lorsqu'elle devient nécessaire.

La politique 5-optimale est la suivante :

- II { 1965 - 1980 : usine de 4 t/j en A
1980 - 1995 : usine de 9 t/j en A
1985 - 1995 : usine de 8 t/j en B

It is quite obvious that we obtained these results because the step chosen was 0.5 te/day. If it had been smaller, for example, policy (II) would have been found k -optimum with $k > 5$. The 2, 3 and 4-optimum policies are not fundamentally different from policy (I); they are to some extent "parasitic policies" of policy (I). On the other hand, policy (II) has a different structure from policy (I).

Fig. 2 will clarify this.

It is then clear that policies (I) and (II) correspond to cost minima and there is no point in considering the intermediate policies.

Thus if one is interested not only in the optimum but also in its vicinity, it is useless (and even harmful) to take a smaller step of "discretisation". It is also obvious that it must not be very large either. Its optimum value is generally determined heuristically.

(Note that the "impression of continuity" of the problem is due on the curve to the fact that a preliminary study made it possible to limit the number of plants to 2 and to determine the policy to be followed during the first 15 years).

Il est bien évident que nous avons obtenu ces résultats parce que le pas choisi était de 0,5 t/j. Si il avait été plus petit, par exemple, la politique (II) aurait été trouvée k -optimale avec $k > 5$. Les politiques 2, 3 et 4-optimales ne sont pas fondamentalement différentes de la politique (I) ce sont en quelque sorte les "politiques parasites" de la politique (I). Par contre la politique (II) a une structure différente de la politique (I).

Pour rendre cette notion plus précise, il suffit de considérer la figure 2.

Il apparaît alors clairement que les politiques (I) et (II) correspondent à des minima de coût et il n'y a pas d'intérêt à considérer les politiques intermédiaires.

Donc si l'on s'intéresse non seulement à l'optimum mais à son voisinage, il est inutile (et même néfaste) de prendre un pas de discrétisation très petit. Il est d'autre part évident qu'il ne doit pas non plus être très grand. Sa valeur optimale est déterminée généralement de manière heuristique.

(Remarquons que "l'impression de continuité" du problème est due sur la courbe au fait qu'une étude préliminaire a permis de limiter le nombre d'usines à 2 et de déterminer la politique à suivre pendant les 15 premières années).

CONCLUSION

We have studied the optimum locations, sizes and commissioning rates of irradiated natural uranium reprocessing plants associated with a given nuclear power station programme. We have determined the sensitivity of the optimum obtained to some of the assumptions adopted (transport cost, choice of horizon, discounting rate). The influence on the sequence of optimum plants of the various possible programmes of installed nuclear power has been assessed in a similar fashion.

The method developed is basically a general mechanism for determination of the optimum, when a transport problem is superimposed on a sequential dynamic programme (plant programme). It also makes it possible to evaluate the losses resulting from the choice of a non-optimum policy for reasons other than economic ones.

The example of application used (reprocessing of irradiated natural uranium) assumed a plutonium demand to be satisfied or, what amounts to the same thing, quantities of irradiated natural uranium actually to be reprocessed each year. This assumes the existence of a complementary system of thermal neutron power stations producing irradiated uranium, and therefore plutonium, and fast reactor power stations producing and consuming plutonium, but which are basically consumers in the first decades of their development (taking into account the size of the first plutonium charges needed for the extension of these power station programmes). This system is assumed to be self-sufficient from the point of view of plutonium, no outside introduction of this metal being considered.

CONCLUSION

Nous avons étudié les localisations, les tailles et les cadences de mise en service optimales des usines de traitement de l'uranium naturel irradié associées à un programme de centrales nucléaires donné. Nous avons étudié la sensibilité de l'optimum obtenu à certaines des hypothèses adoptées (coût de transport, choix de l'horizon, taux d'actualisation). L'influence sur la séquence d'usines optimales des divers programmes possibles d'énergie nucléaire installée a été appréciée d'une manière analogue.

La méthode élaborée s'analyse essentiellement comme un mécanisme général de détermination de l'optimum, lorsqu'à un programme dynamique séquentiel (programme d'équipement) se superpose un problème de transport. Elle permet en outre, d'évaluer les pertes résultant du choix, pour des raisons autres qu'économiques, d'une politique non optimale.

L'exemple d'application retenu (le traitement de l'uranium naturel irradié) supposait une demande en plutonium à satisfaire ou, ce qui revient au même, des quantités d'uranium naturel irradié à traiter effectivement chaque année. Cette hypothèse est celle de l'existence d'un système complémentaire de centrales à neutrons thermiques productrices d'uranium irradié, donc de plutonium et de centrales à neutrons rapides productrices et consommatrices de plutonium, mais essentiellement consommatrices dans les premières décades de leur développement (compte tenu de l'importance des premières charges en plutonium nécessaires à l'extension de ces programmes de centrales). Ce système est supposé autarcique du point de vue du plutonium, aucun apport extérieur de ce métal n'étant envisagé.

The study of reprocessing plants for irradiated plutonium fuels from breeder reactors which are associated with these reactor programmes must also itself be amenable to the same approach. On the other hand, reprocessing of the fuel elements of research reactors (of the MTR type) can be considered more flexibly. These fuels can be stored, the recovery of the U^{235} content deferred, the enriched uranium needed for the research reactors being available on the external market formed by american commercial facilities. One will then approach the most general case where a new production complex can be inserted within a market economy.

In the problem which we have studied and in the examples which we have mentioned, the annual quantities of irradiated fuels to be reprocessed are assumed to be given : the system of associated plants has the task of restoring each year the fissile materials contained in these fuels.

This task may possibly be fulfilled by resorting to external supplies (enriched U elements) and by modifying the rate of commissioning the plants.

However, in all cases, the quantities of irradiated fuels to be reprocessed are assumed to be fixed each year. This hypothesis has the following economic significance : a separate determination is made of the optimum thermal and fast nuclear power station programmes (taking into account the plutonium availability of the former and the needs of the latter) and those for irradiated natural uranium reprocessing plants producing plutonium.

L'étude des usines de traitement des combustibles irradiés au plutonium provenant des réacteurs surrégénérateurs, associées à ces programmes de réacteurs doit être, elle aussi, justifiable de la même approche. Par contre, le retraitement des éléments combustibles des réacteurs de recherches (du type MTR) peut être envisagé d'une manière plus souple. Ces combustibles peuvent en effet être stockés, la récupération de l' U^{235} contenu différée, l'uranium enrichi nécessaire aux réacteurs de recherches étant disponible sur le marché extérieur que constituent les possibilités commerciales américaines. On se rapprochera alors du cas le plus général où un ensemble nouveau de production peut s'insérer dans le cadre d'une économie de marché.

Dans le problème que nous avons étudié et dans les exemples que nous venons d'évoquer, les quantités annuelles de combustibles irradiés à traiter sont supposées données : le système d'usines associées a pour fonction de restituer chaque année les matières fissiles contenues dans ces combustibles.

Cette fonction peut éventuellement être remplie en faisant appel à des approvisionnements extérieurs (éléments à U enrichi) et en modifiant la cadence de mise en service des usines.

Mais, dans tous les cas, les quantités de combustibles irradiés à traiter sont supposées fixées chaque année. Cette hypothèse a la signification économique suivante : on détermine séparément les programmes optimaux de centrales nucléaires à neutrons thermiques et rapides (compte tenu des disponibilités en plutonium des premières et des besoins des secondes) et ceux des usines de traitement de l'uranium naturel irradié produisant le plutonium.

These separate evaluations can lead to economic losses which an overall optimisation would avoid. The latter would show the consequences of a possible delay in the reprocessing of irradiated uranium, and thus in the plutonium availability, which might affect the development of stations using the latter fuel, or on the other hand the consequences of non-optimum utilisation of the reprocessing plants.

The locations and sizes of the irradiated fuel reprocessing plants associated with separate programmes of nuclear power stations can also be best combined by possible integration on the same sites and the possible multi-purpose nature of these plants.

One can then determine the overall optima for power station and plant programmes leading to economic gains as compared with separate optima.

Ces évaluations séparées peuvent conduire à des pertes économiques qu'une optimisation globale éviterait. Cette dernière en effet doit faire apparaître les conséquences d'un retard éventuel dans le traitement de l'uranium irradié, donc dans la disponibilité en plutonium, susceptible de porter atteinte au développement des centrales utilisant ce dernier combustible, ou au contraire les conséquences d'une utilisation non optimale des usines de traitement.

Les localisations et les tailles des usines de traitement des combustibles irradiés associées à des programmes séparés de centrales nucléaires peuvent de plus être combinées au mieux en tenant compte de l'intégration possible sur les mêmes sites et de la polyvalence éventuelle de ces usines.

Il est alors possible de déterminer des optimums globaux de programmes de centrales et d'usines conduisant à des gains économiques par rapport aux optimums séparés.

- APPENDIX I -

THE REPROCESSING COST FUNCTION

Each year, for a given plant, reprocessing is a function of the quantity of uranium treated.

4 terms have been distinguished :

1. Fixed capital costs
2. Fixed labour costs
3. Fixed maintenance costs
4. Proportional costs

The annual cost, for each term, is of the form $h_i x^{\alpha_i}$

A. Notation

$v+1$: number of plants to be built on site u .

t_u^0 : year when the 1st plant starts up on site u .

t_u^1, t_u^2 : year when the next plants start up on site u ,

with $t_u^1 = t_u^0 + S$, $t_u^2 = t_u^0 + 2S$ (S : life of the plant).

- ANNEXE I -

LA FONCTION COUT DE RETRAITEMENT

Le retraitement est, chaque année pour une usine donnée, fonction de la quantité d'uranium traitée.

On a distingué 4 termes :

1. Frais fixes d'investissements
2. Frais fixes de main-d'oeuvre
3. Frais fixes d'entretien
4. Frais proportionnels

Le coût annuel est, pour chaque terme, de la forme $h_i x^{\alpha_i}$

A. Notations

$v+1$: nombre d'usines qui seront construites sur le site u .

t_u^0 : année de démarrage de la 1ère usine sur le site u .

t_u^1, t_u^2 : année de démarrage des usines suivantes sur le site u ,

avec $t_u^1 = t_u^0 + S$, $t_u^2 = t_u^0 + 2 S$

(S : durée de vie de l'usine)

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_U^t = \sum_{r=1}^{R(t)} q_{r,U}^t \end{array} \right.$$

Quantity of uranium reprocessed
in year t on the u-th site

(t-th component of $|Q_{R,U} >$)

$R(t)$ number of reactors in service in year t

$$\left\{ \begin{array}{l} K U_U^v = \sum_{r=1}^{R(\alpha)} q_{r,U}^\alpha \\ \alpha = \inf [t_U^v + S, H] \end{array} \right.$$

Size of the $(v+1)^{th}$ plant
built on site u

B. Cost functions

The reprocessing cost is then :

$$R = \sum_{u=1}^n f (|Q_{R,U} >)$$

with

$$f (|Q_{R,U} >) = \Phi + \gamma$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_u^t &= \sum_{r=1}^{R(t)} q_{r,u}^t \end{aligned} \right.$$

Quantité d'uranium retraitée l'année t
sur le u ième site
(t ième composante de $|Q_{R,u} >$)

$R(t)$ nombre de réacteurs en service l'année t .

$$\left\{ \begin{aligned} K r_u^v &= \sum_{r=1}^{R(\alpha)} q_{r,u}^\alpha \\ \alpha &= \inf [r_u^v + S, H] \end{aligned} \right.$$

Taille de la $(v+1)$ ième usine
con suite sur le site u

B. Fonctions de coûts :

Le coût de retraitement est alors :

$$R = \sum_{u=1}^n f (|Q_{R,u} >)$$

avec $f (|Q_{R,u} >) = \Phi + \gamma$

$$\Phi = \sum_{\beta=0}^{u-1} \sum_{t=\beta}^{\beta+1} \frac{\sum_{\gamma=1}^3 h_{\gamma} [K r_{\beta}^{\gamma}]^{\alpha_{\gamma}} + h_4 [Q_{\beta}^t]^{\alpha_4}}{(1+i)^t}$$

"Summated" over all the plants built on site u except the last, during the S years of operation.

$$\gamma = \sum_{t=t_u^y}^H \frac{\sum_{\gamma=1}^3 h_{\gamma} [K r_{\beta}^{\gamma}]^{\alpha_{\gamma}} + h_4 [Q_{\beta}^t]^{\alpha_4}}{(1+i)^t} + \sum_{t=t_u^y+S}^{\beta+1} \frac{h_1 [K r_{\beta}^y]^{\alpha_1}}{(1+i)^t}$$

Costs corresponding to the last plant operating up to the horizon

"Lost" capital costs of the last plant

Returning to the general formulation of dynamic programming, the optimum policy is determined by recurrence from the formula :

$$F_{u+1}(P) = \min_{K r_{\beta}^y} \left[f(|Q_{R,u+1} >) + F_u(P - K r_{\beta}^y) \right]$$

$F_{u+1}(P)$ being the minimum reprocessing costs for the quantities envisaged by the programme up to P in the plants 1, 2, ... u + 1 from year 0 to the horizon.

$K r_{\beta}^y$ the size of the last plant on the site u, being found, being known, the vector $|Q_{R,u+1} >$ is then known.

$$\Phi = \sum_{\beta=0}^{u-1} \sum_{t=t_u^{\beta}}^{t_u^{\beta+1}-1} \frac{\sum_{Y=1}^3 h_Y [K t_u^{\beta}]^{\alpha_Y} + h_4 [Q_u^t]^{\alpha_4}}{(1+i)^t}$$

"Somme" sur toutes les usines construites sur le site u sauf sur la dernière et pendant les S années de fonctionnement.

$$\varphi = \sum_{t=t_u^V}^H \frac{\sum_{Y=1}^3 h_Y [K t_u^V]^{\alpha_Y} + h_4 [Q_u^t]^{\alpha_4}}{(1+i)^t} + \sum_{t=H+1}^{t_u^V+S} \frac{h_1 [K t_u^V]^{\alpha_1}}{(1+i)^t}$$

Frais correspondant à la dernière usine fonctionnant jusqu'à l'horizon

Frais d'investissement "perdus" de la dernière usine

Revenant au formalisme général de la programmation dynamique la politique optimale se détermine par récurrence par la formule :

$$F_{u+1}(P) = \min_{K t_u^V} \left[f(|Q_{R,u+1}\rangle) + F_u(P - K t_u^V) \right]$$

$F_{u+1}[P]$ étant les frais minima de retraitement des quantités prévues par le programme jusqu'à P dans les usines 1, 2, ... u + 1 de l'année 0 à l'horizon.

$K t_u^V$ taille de la dernière usine sur le site u étant déterminée, étant connu, le vecteur $|Q_{R,u+1}\rangle$ est alors connu.

For the calculation of the reprocessing costs we assumed :

$h_1 = 14.36$	$\alpha_F = 0.4$	(capital)
$h_2 = 7.26$	$\alpha_L = 0.3$	(labour)
$h_3 = 1.79$	$\alpha_M = 0.4$	(maintenance)
$h_4 = 1.86$	$\alpha_F = 1$	(proportional)

When the load and the size of the plant are expressed in tonnes/day^(*), the costs are obtained in mega-francs.

(*) 1 te/day of irradiated natural uranium to be reprocessed corresponds to a power capacity of 2,000 MW(E).

Pour le calcul des frais de retraitement on a pris :

$h_1 = 14,36$	$\alpha_1 = 0,4$	(investissement)
$h_2 = 7,26$	$\alpha_2 = 0,3$	(main-d'oeuvre)
$h_3 = 1,79$	$\alpha_3 = 0,4$	(entretien)
$h_4 = 1,86$	$\alpha_4 = 1$	(proportionnels)

Lorsque la charge et la taille de l'usine sont exprimées en tonne/jour^(*), les frais sont obtenus en méga-francs.

(*) 1 t/j d'uranium naturel irradié à retraiter correspond à une puissance installée de 2 000 MWe.

- APPENDIX II -

-:-:-:-:-

SEQUENTIAL GRAPHS

Let there be a graph G formed by a set X (the elements of which are the "vertices" of the graph) and a multivocal application Γ of X in X (represented by oriented "arcs" joining the vertices).

We shall recall the definition of a sequential graph and show the relation between the concept of a graph without a circuit and a sequential graph.

A. - Ordinal function of a graph

We define subsets of X :

$$X(0) = \{x \in X \mid \Gamma^{-1}_x = \emptyset\} \quad (\text{set of "source" vertices of } X)$$

$$X(1) = \{x \in X \mid \Gamma^{-1}_x \in X(0)\} \quad (\text{set of "1st order" vertices for which all the preceding ones are in } X(0))$$

$$X(2) = \{x \in X \mid \Gamma^{-1}_x \in X(0) \cup X(1)\} \quad (\text{set of "2nd order" vertices for which all the preceding ones are in } X(0) \text{ or } X(1))$$

- ANNEXE II -

-.:-:-:-

GRAPHES SEQUENTIELS

Soit un graphe G constitué par un ensemble X (dont les éléments sont les "sommets" du graphe) et une application multivoque Γ de X dans X (représentée par des "arcs" orientés joignant des sommets).

Nous rappellerons la définition d'un graphe séquentiel et montrerons les rapports entre les notions de graphe sans circuit et de graphe séquentiel.

A. Fonction ordinale d'un graphe

On définit les sous-ensembles de X :

$$X(0) = \left\{ x \in X \mid \Gamma_x^{-1} = \emptyset \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ensemble des sommets "sources"} \\ \text{de } X \end{array} \right)$$

$$X(1) = \left\{ x \in X \mid \Gamma_x^{-1} \in X(0) \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ensemble des sommets "d'ordre 1"} \\ \text{dont tous les précédents sont} \\ \text{dans } X(0) \end{array} \right)$$

$$X(2) = \left\{ x \in X \mid \Gamma_x^{-1} \in X(0) \cup X(1) \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ensemble des sommets "d'ordre 2"} \\ \text{dont tous les précédents sont} \\ \text{dans } X(0) \text{ ou } X(1) \end{array} \right)$$

$$X(N) = \left\{ x \in X \mid \Gamma^{-1}x \in \bigcup_{i=0}^{N-1} X(i) \right\}$$

The ordinal function, if it exists, makes the number k correspond to any vertex $x \in X(k)$. $O(x) = k$

It is shown that for a finite graph :

The necessary and sufficient condition for the existence of an ordinal function defined on X is that G should be without a circuit .

Then the sub-sets $X(k)$, $k = 0, \dots, N$ form a partition of X and are completely ordered by the order relation :

$$X(n) \text{ "before" } X(n') \iff n < n'$$

Note : C. BERGE gives a definition for the ordinal function which arrives at the opposite order from the above (4).

1°- Determination of the ordinal function :

Let $B_{\alpha, \alpha}$ be the Boolean matrix of graph G :

$$b_{i,j} = 1 \quad \text{si} \quad x_j \in \Gamma x_i$$

$$b_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad x_j \notin \Gamma x_i$$

(the vertices being numbered from 1 to α)

$v(0)$ = vector with α components, "sum" of the lines $B_{\alpha, \alpha}$

$$v_j(0) = \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,j}$$

Thus if $v_k(0) = 0$ then $b_{i,k} = 0 \quad \forall i$; no arc terminates at x_k

$$\implies x_k \in X(0)$$

$$v_j(1) = v_j(0) - \sum_k b_{k,j}$$

for all values of k such that $x_k \in X(0)$

$$X(N) = \left\{ x \in X \mid \Gamma_x^{-1} \in \bigcup_{i=0}^{N-1} X(i) \right\}$$

La fonction ordinale, si elle existe, fait correspondre le nombre k à tout sommet $x \in X(k)$. $O(x) = k$

On démontre que pour un graphe fini :

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une fonction ordinale définie sur X est que G soit sans circuit.

Alors les sous-ensembles $X(k)$, $k = 0, \dots, N$ forment une partition de X et sont totalement ordonnés par la relation d'ordre :

$$X(n) \text{ "avant" } X(n') \iff n < n'$$

Remarque : C. BERGE donne de la fonction ordinale une définition qui aboutit à un ordre inverse du précédent (4)

1°- Détermination de la fonction ordinale :

Soit $B_{\mathcal{L}, \mathcal{L}}$ la matrice booléenne du graphe G :

$$b_{i,j} = 1 \quad \text{si} \quad x_j \in \Gamma x_i$$

$$b_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad x_j \notin \Gamma x_i$$

(les sommets étant numérotés de 1 à $\mathcal{L}$)

$v(0)$ = vecteur à $\mathcal{L}$ composantes, "somme" des lignes de $B_{\mathcal{L}, \mathcal{L}}$

$$v_j(0) = \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} b_{i,j}$$

Alors si $v_k(0) = 0$ c'est que $b_{i,k} = 0 \quad \forall i$: aucun arc n'aboutit à x_k
 $\Rightarrow x_k \in X(0)$

$$v_j(1) = v_j(0) - \sum_{\substack{k \\ \text{pour tous les } k \text{ tels que } x_k \in X(0)}} b_{k,j}$$

Thus if $v_k(1) = 0$ the only arcs terminating at x_k come from vertices of $x(0) \Rightarrow x_k \in x(1)$

$$v_j(n) = v_j(n-1) - \sum_k b_{k,j}$$

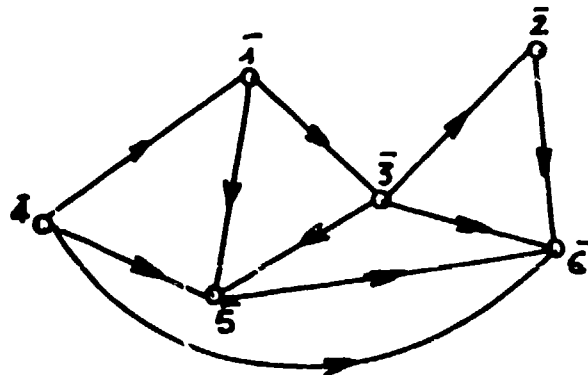
for all values of k such that $x_k \in x(n-1)$

Thus if $v_k(n) = 0$ the arcs terminating at x_k all come from vertices of $x(0)$ or $x(1) \dots$ or $x(n-1) \Rightarrow x_k \in x(n)$

This procedure is due to M. DEMACRON.

Let us take an example :

G:



Alors si $v_k(1) = 0$ c'est que les seuls arcs aboutissant à x_k proviennent de sommets de $X(0) \Rightarrow x_k \in X(1)$

$$v_j(n) = v_j(n-1) - \sum_k b_{k,j}$$

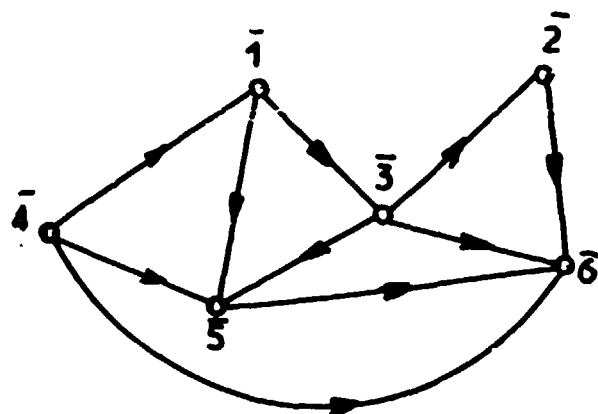
pour tous les k tels que $x_k \in X(n-1)$

Alors si $v_k(n) = 0$ c'est que les arcs aboutissant à x_k proviennent tous de sommets de $X(0)$ ou $X(1)$ ou $X(n-1) \Rightarrow x_k \in X(n)$

Ce procédé est dû à M. DEMAUCRON.

Prenons un exemple :

G:

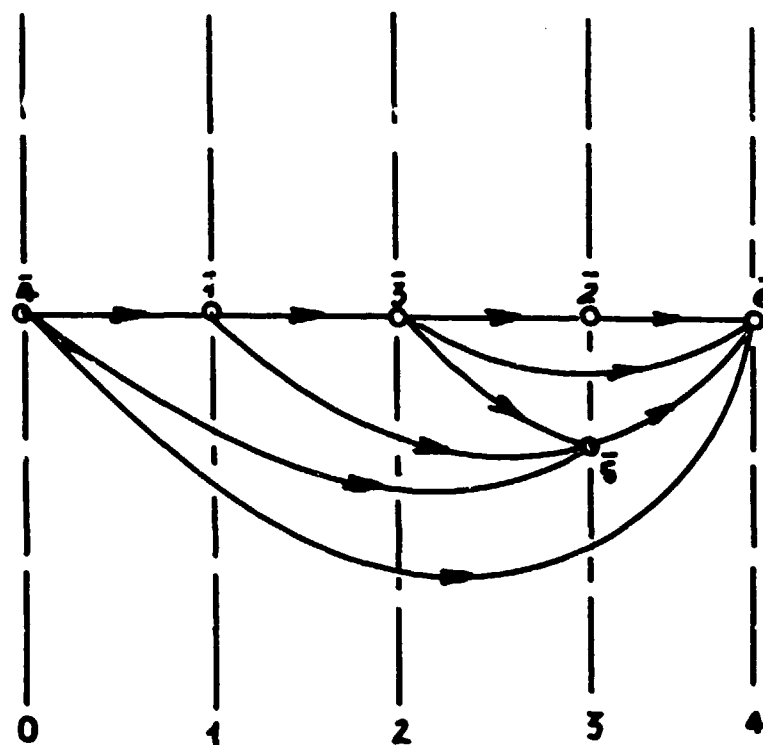


	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	
$\bar{1}$	0	0	1	0	1	0	
$\bar{2}$	0	0	0	0	0	1	
$\bar{3}$	0	1	0	0	1	1	
$\bar{4}$	1	0	0	0	1	1	
$\bar{5}$	0	0	0	0	0	1	
$\bar{6}$	0	0	0	0	0	0	
$v(0)$	1	1	1	0	3	4	$x(0) = \{\bar{4}\}$
$v(1)$	0	1	1	0	2	3	$x(1) = \{\bar{1}\}$
$v(2)$	0	1	0	0	1	3	$x(2) = \{\bar{3}\}$
$v(3)$	0	0	0	0	0	2	$x(3) = \{\bar{2}, \bar{5}\}$
$v(4)$	0	0	0	0	0	0	$x(4) = \{\bar{6}\}$

Note : the number of arcs of G is equal to $\sum_{j=1}^{\alpha} v_j(0)$

The ordinal function can then be demonstrated on graph G' which is identical to G :

G'

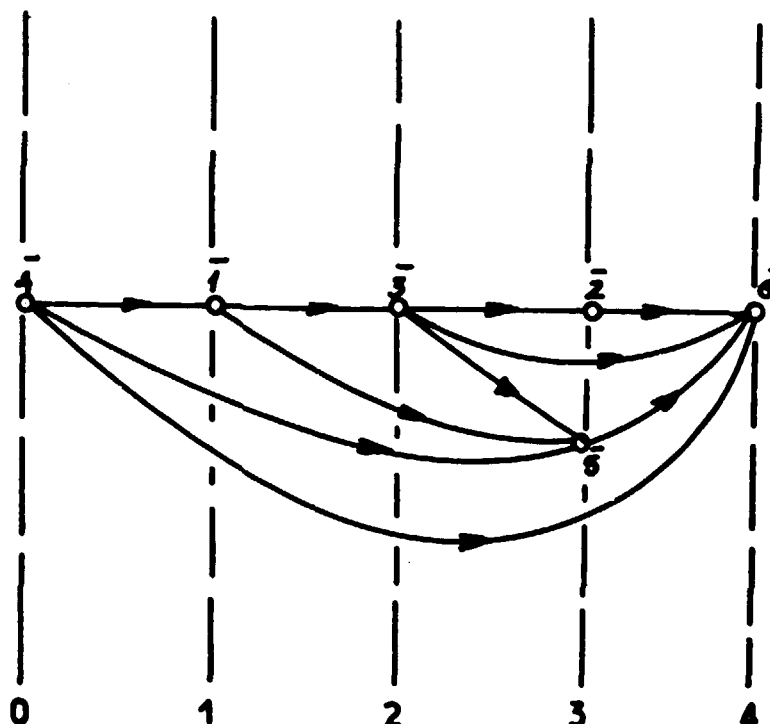


	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	
$\bar{1}$	0	0	1	0	1	0	
$\bar{2}$	0	0	0	0	0	1	
$\bar{3}$	0	1	0	0	1	1	
$\bar{4}$	1	0	0	0	1	1	
$\bar{5}$	0	0	0	0	0	1	
$\bar{6}$	0	0	0	0	0	0	
$v(0)$	1	1	1	0	3	4	$x(0) = \{\bar{4}\}$
$v(1)$	0	1	1	0	2	3	$x(1) = \{\bar{1}\}$
$v(2)$	0	1	0	0	1	3	$x(2) = \{\bar{3}\}$
$v(3)$	0	0	0	0	0	2	$x(3) = \{\bar{2}, \bar{5}\}$
$v(4)$	0	0	0	0	0	0	$x(4) = \{\bar{6}\}$

Remarque : le nombre d'arcs de G est égal à $\sum_{j=1}^n v_j(0)$

La fonction ordinale peut alors être mise en évidence sur le graphe G' identique à G :

G' :



2*- Circuits in a graph :

The procedure given on pages 34 and 35 is in fact applicable on any graph.

1.- If $X(0)$ is void (i.e. if all the components of are not zero) there is a circuit in G.

Let $x(0) = \emptyset$

$x \in G$

$$\begin{aligned} x \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_x^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_1 \in \Gamma_x^{-1} \\ x_1 \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_{x_1}^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_2 \in \Gamma_{x_1}^{-1} \quad (x_2 \in \Gamma_x^{-2}) \\ x_2 \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_{x_2}^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_3 \in \Gamma_{x_2}^{-1} \quad (x_3 \in \Gamma_x^{-3}) \\ \dots &\dots \\ x_n \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_{x_n}^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_{n+1} \in \Gamma_{x_n}^{-1} \quad (x_{n+1} \in \Gamma_x^{-n}) \end{aligned}$$

Thus, if the values of $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ are not all different, there is a circuit, otherwise $\forall n : \Gamma_x^{-n} \neq \emptyset$

The graph being finite (∞ vertices), for $n > \infty : x \in \Gamma_x^{-n}$

There is therefore a path from x to x . It is a circuit.

2.- Let us assume that none of the $x(0), x(1), \dots, x(p)$ is void

It is clear that there is no circuit in the sub-graph of vertices

$$\bigcup_{i=0}^p x(i)$$

(the arcs are oriented from $x \in x(u)$ to $y \in x(v)$ such that $v > u$ no "return" is possible).

The set $\bigcup_{i=0}^p x(i)$ acts as the "source" for the rest of G

(which is called R).



$$R = \left[\bigcup_{i=0}^p x(i) \right]$$

2*- Circuits dans un graphe :

Le procédé donné pages 34 et 35 est en fait applicable sur un graphe quelconque.

1.- Si $X(0)$ est vide (c'est-à-dire si toutes les composantes de $V(0)$ sont non nulles), il existe un circuit dans G.

En effet, soit : $x(0) = \emptyset$

$x \in G$

$$\begin{aligned} x \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_x^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_1 \in \Gamma_x^{-1} \\ x_1 \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_{x_1}^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_2 \in \Gamma_{x_1}^{-1} \quad (x_2 \in \Gamma_x^{-2}) \\ x_2 \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_{x_2}^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_3 \in \Gamma_{x_2}^{-1} \quad (x_3 \in \Gamma_x^{-3}) \\ \dots &\dots \\ x_n \notin x(0) &\Rightarrow \Gamma_{x_n}^{-1} \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad x_{n+1} \in \Gamma_{x_n}^{-1} \quad (x_{n+1} \in \Gamma_x^{-n}) \end{aligned}$$

Dont si les $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ ne sont pas tous différents, il y a un circuit sinon : $\forall n : \Gamma_x^{-n} \neq \emptyset$

Le graphe étant fini (∞ sommets), pour $n > \infty : x \in \Gamma_x^{-n}$

Il existe donc un chemin allant de x à x . C'est un circuit.

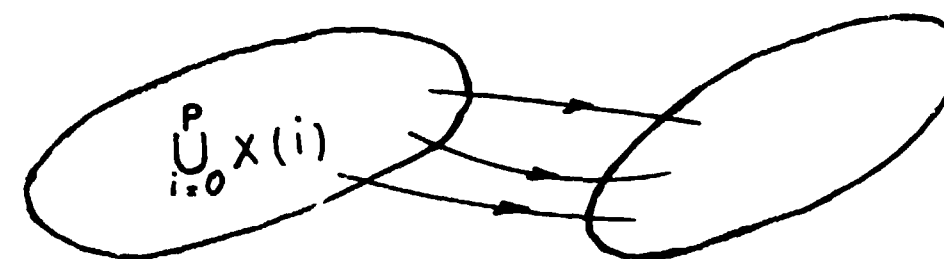
2.- Supposons qu'aucun des $x(0), x(1), \dots, x(p)$ ne soit vide.

Il est bien évident qu'il n'existe aucun circuit dans le sous-graphe de

$$\text{sommets } \bigcup_{i=0}^p x(i)$$

(les arcs sont orientés de $x \in x(u)$ vers $y \in x(v)$ tel que $v > u$ aucun "retour" n'est possible).

L'ensemble $\bigcup_{i=0}^p x(i)$ joue le rôle de "source pour le reste de G (qu'on appelle R).



$$R = \left[\bigcup_{i=0}^p x(i) \right]$$

3.- If $\bigcup_{i=0}^p x(i) = C$ ($R = \phi$) all the vertices are classified
and according to 2.-, there is no circuit in G.

. If $R \neq \phi$ let us assume that $x(p+1) = \phi$
Thus $\forall x \in \Gamma_x^{-1} \not\subset \bigcup_{i=0}^p x(i)$ et $\Gamma_x^{-1} \neq \phi$ since $x \in x(0)$
 $\Rightarrow \exists x_1 \in \Gamma_x^{-1}, x_1 \in R$
 $\Rightarrow \exists x_2 \in \Gamma_{x_1}^{-1}$ if $x_2 \subset \{x, x_1\}$: there is a circuit in R
Otherwise we have at least $x_2 \in R$
 $\Rightarrow \exists x_3 \in \Gamma_{x_2}^{-1}$ If $x_3 \subset \{x, x_1, x_2\}$: there is a circuit in R
Otherwise we have at least $x_3 \in R$
 $\Rightarrow \exists x_n \in \Gamma_{x_{n-1}}^{-1}$ If $x_n \subset \{x, x_1, \dots, x_{n-1}\}$
There is a circuit in R
Otherwise we have at least $x_n \in R$
(the x_i are thus all different).

Now R is finite (and its number of vertices is $< \infty$).

Taking $n > \infty$: $x_n \subset \{x, x_1, \dots, x_{n-1}\}$

There is thus a circuit in G.

Conclusion

Necessary and sufficient condition for the existence of
a circuit in a finite connected graph.

3.- Si $\bigcup_{i=0}^p x(i) = G$ ($R = \phi$), tous les sommets sont classés
et d'après 2.-, il n'y a aucun circuit dans G.

. Si $R \neq \phi$ supposons que $x(p+1) = \phi$
Donc $\forall x \in R, \Gamma_x^{-1} \not\subset \bigcup_{i=0}^p x(i)$ et $\Gamma_x^{-1} \neq \phi$ puisque $x \in x(0)$
 $\Rightarrow \exists x_1 \in \Gamma_x^{-1}, x_1 \in R$
 $\Rightarrow \exists x_2 \in \Gamma_{x_1}^{-1}$ Si $x_2 \subset \{x, x_1\}$: il y a un circuit dans R.
Sinon, on a au moins $x_2 \in R$
 $\Rightarrow \exists x_3 \in \Gamma_{x_2}^{-1}$ Si $x_3 \subset \{x, x_1, x_2\}$: il y a un circuit dans R.
Sinon, on a au moins $x_3 \in R$
 $\Rightarrow \exists x_n \in \Gamma_{x_{n-1}}^{-1}$ si $x_n \subset \{x, x_1, \dots, x_{n-1}\}$
Il y a un circuit dans R
Sinon on a au moins $x_n \in R$
(les x_i sont donc tous différents).

Or R est fini (et son nombre de sommets est $< \infty$).

Prenant $n > \infty$: $x_n \subset \{x, x_1, \dots, x_{n-1}\}$

Il y a donc un circuit dans G.

Conclusion

C N S d'existence d'un circuit dans un graphe fini connexe.

- If none of the $X(n)$ is void, the ordinal function of G is determined thus ; the vertices x of G are all classified in one of the sub-sets $X(n)$ of X , for $n = 0, 1, \dots, q$. $q \leq \alpha$

- If $\exists m$ such that $X(m) = \emptyset$ there is then a circuit in G ; the vertices of this circuit belong to the set $\left[\bigcup_{i=0}^m X(i) \right]$
[all the vertices of $m=0$ belong to the circuit]

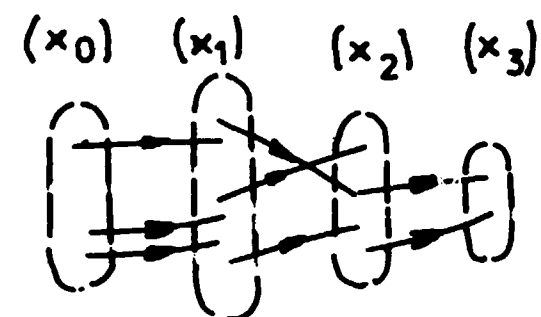
3°- Sequential graph (still limited here to finite connected G)

G is a sequential graph if :

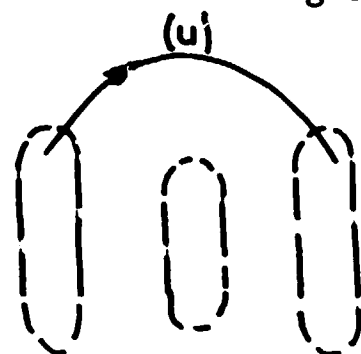
. there is an ordinal function defined over X with values $0, 1, 2, \dots, N$
(i.e. G is without circuits).

$$\bigcap X(N) \subset X(N+1)$$

We can represent in a diagram :



. Therefore in a graph without circuits but non-sequential, there is an arc of the following type (u) :



- Si aucun des $X(n)$ n'est vide, on détermine ainsi la fonction ordinale de G ; les sommets x de G sont tous classés dans un des sous-ensembles $X(n)$ de X ceci pour $n = 0, 1, \dots, q$. $q \leq \alpha$

- Si $\exists m$ tel que $X(m) = \emptyset$, il existe alors un circuit dans G ; les sommets de ce circuit appartiennent à l'ensemble $\left[\bigcup_{i=0}^m X(i) \right]$
[si $m = 0$, tous les sommets de G appartiennent au circuit]

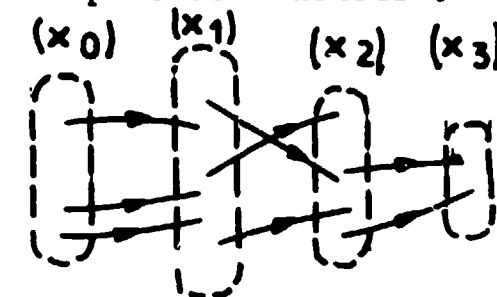
3°- Graphe séquentiel (on se limite toujours ici à G fini connexe) :

G est un graphe séquentiel si :

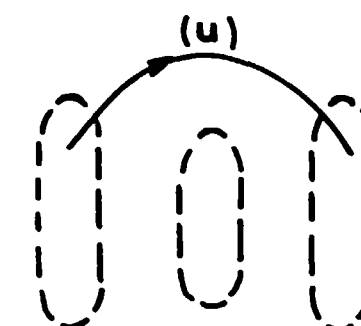
. il existe une fonction ordinale définie sur X , ayant pour valeurs $0, 1, 2, \dots, N$ (c'est-à-dire G est sans circuit) .

$$\bigcap X(N) \subset X(N+1)$$

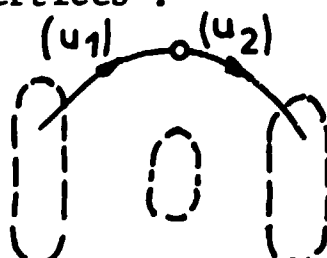
On peut schématiser :



. Donc dans un graphe sans circuit mais non séquentiel, il existe un arc du type suivant (u) :



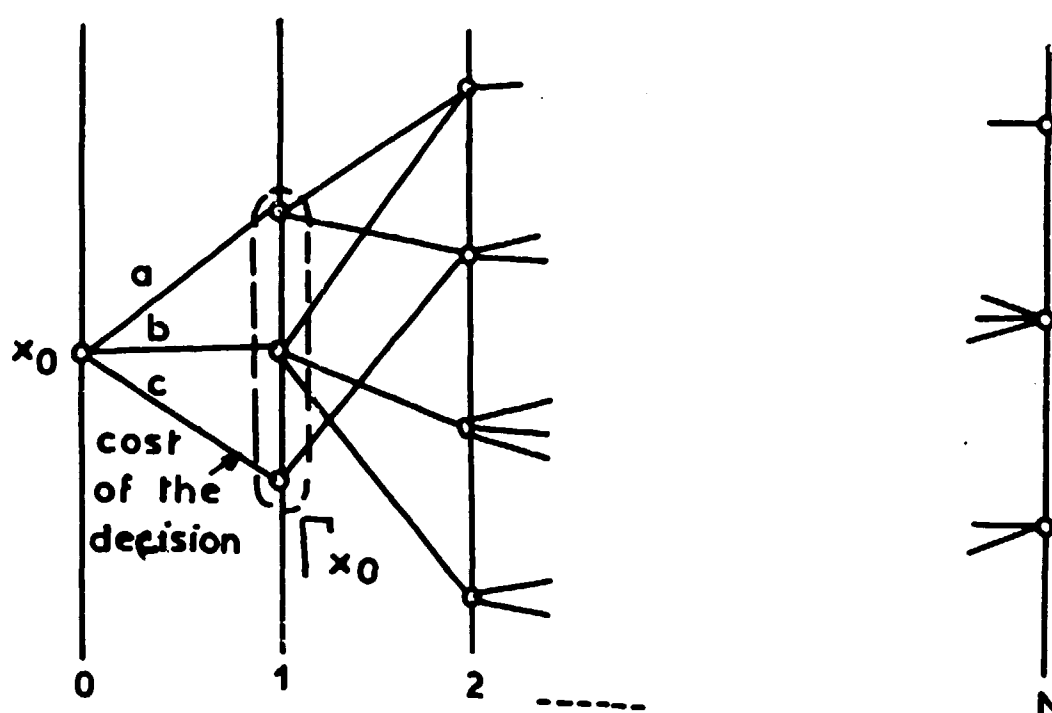
We then see that a graph without a circuit can be made sequential by introducing imaginary vertices :



In the case where a cost c is associated with each arc (u) , it is sufficient to associate two costs (u_1) and (u_2) with (c_1) and (c_2) such that

$$c_1 + c_2 = c$$

We then obtain a graph of the following type :



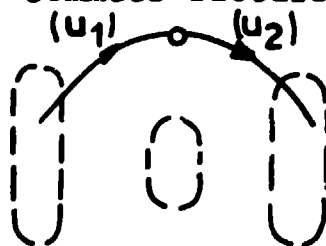
B. g-sequentiality of an optimisation problem

An optimisation problem will be called g-sequential if it can be represented by a sequential graph and consequently is amenable to dynamic programming.

Proposal

A necessary and sufficient condition for a problem to be g-sequential is that the function to be optimised can be put in the form of a finite sum of terms, each term being a function of a decision variable capable of assuming a finite number of discrete values.

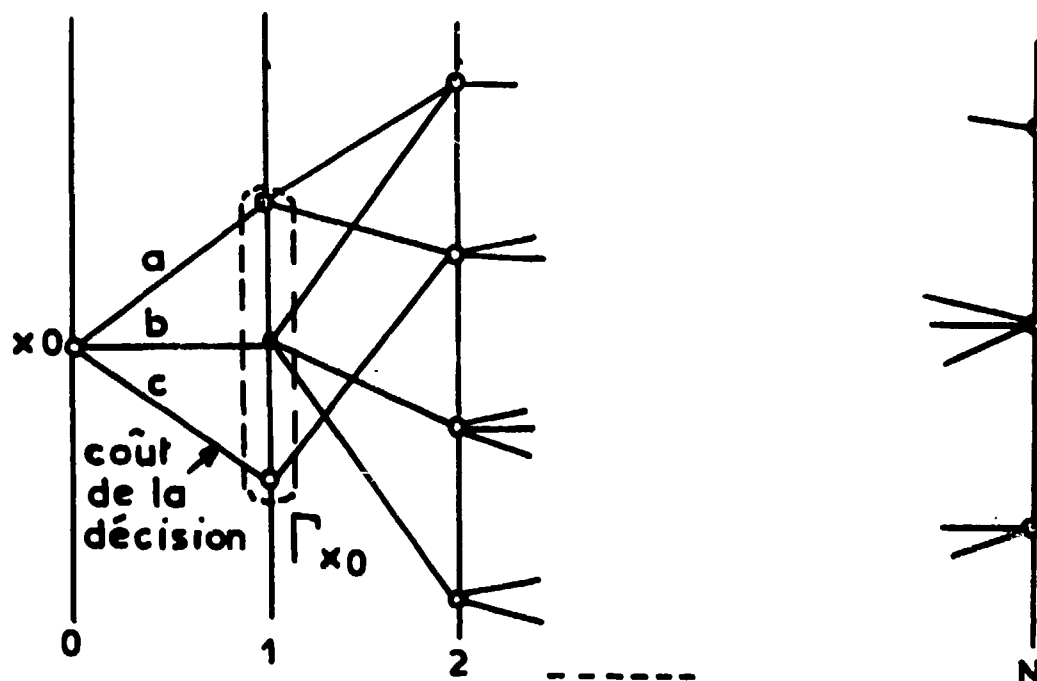
On voit alors que l'on peut rendre séquentiel, un graphe sans circuit en introduisant des sommets fictifs :



Dans le cas où un coût c est associé à chaque arc (u) , il suffit d'associer à (u_1) et (u_2) deux coûts c_1 et c_2 tels que

$$c_1 + c_2 = c$$

On obtient alors un graphe du type suivant :



B. g-séquentialité d'un problème d'optimisation

Un problème d'optimisation sera dit g-séquentiel, s'il est représentable par un graphe séquentiel et par suite, justiciable de la Programmation Dynamique.

Proposition

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème soit g-séquentiel, est que la fonction à optimiser puisse être mise sous la forme d'une somme finie de termes, chaque terme étant fonction d'une variable de décision, pouvant prendre un nombre fini de valeurs discrètes.

- APPENDIX III -
-:-:-:-:-

REPRESENTATION OF THE REPROCESSING PROBLEM

BY A SEQUENTIAL GRAPH

The vertex x_u^j of this graph represents the following state :

The plants built on sites 1, 2, ... u, will reprocess all together in year H the quantity : $j \frac{P(H)}{J} = j \cdot p$

(p being the step of "discretisation" chosen for $P(t)$).

For each arc (x_u^j, x_{u+1}^l) there is an associated cost $C(x_u^j, x_{u+1}^l)$ calculated by means of the formula in Appendix I (and $c = \infty$ if $l < j$).

$C(x_u^j, x_{u+1}^l)$ is the cost of the successive plants on site $u+1$ from year $t_{u+1}^0 = P^{-1}(p \cdot j) + 1$, its maximum size being $(l-j)p$.

The problem is then to find the "path" from x_0^0 to x_N^J minimising the costs associated with each arc, and the "k-optimum paths".

- ANNEXE III -
-:-:-:-:-

REPRESENTATION DU PROBLEME DE RETRAITEMENT

PAR UN GRAPHE SEQUENTIEL

Le sommet x_u^j de ce graphe représente l'état suivant :

Les usines construites sur les sites 1, 2, ... j, retraiteront ensemble l'année H la quantité : $j \frac{P(H)}{j} . j.p$

(p étant le pas de discrétisation choisi pour $P(t)$)

A chaque arc (x_u^j, x_{u+1}^l) est associé un coût $C(x_u^j, x_{u+1}^l)$

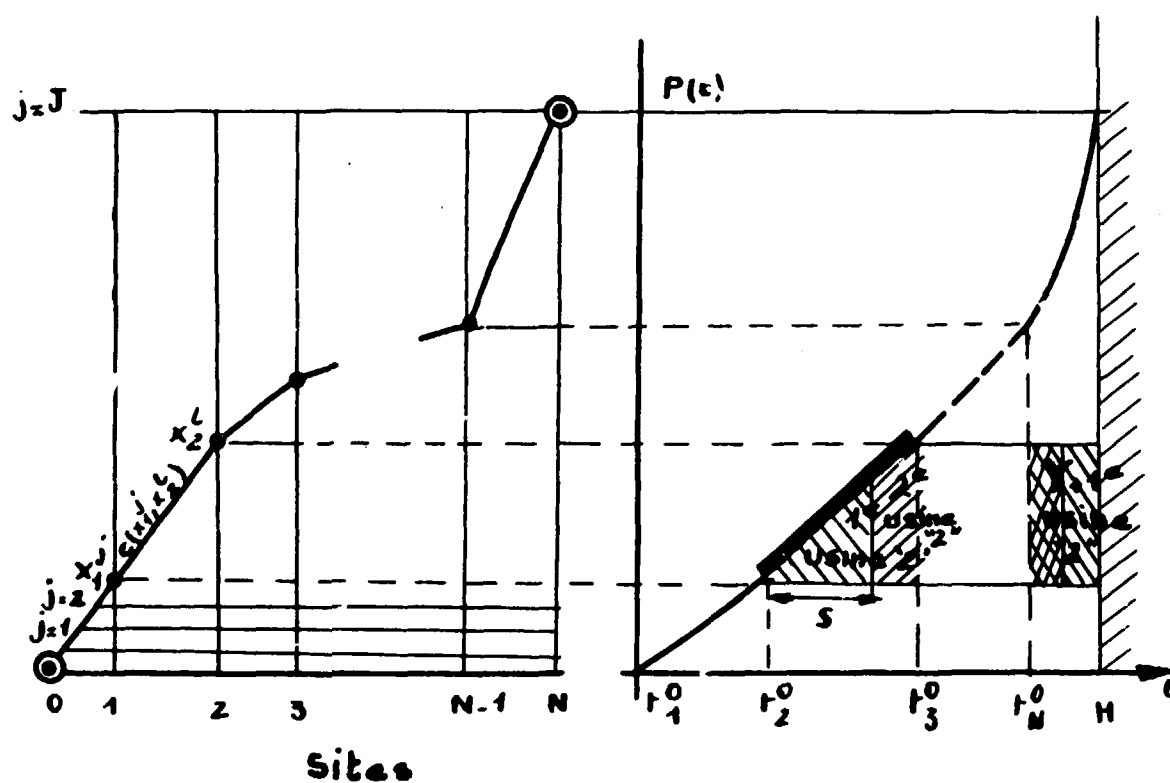
calculé grâce à la formule de l'annexe I (et $c = \infty$ si $l < j$).

$C(x_u^j, x_{u+1}^l)$ est le coût des usines se succédant sur le site $u+1$ à partir de l'année $t_{u+1}^0 = p^{-1}(p.j) + 1$ sa taille maximale étant $(l - j) p$.

Le problème est alors de trouver le "chemin" de x_0^0 à x_N^j minimisant les coûts associés à chaque arc, ainsi que les "chemins k-optimaux".

Note that the numbers 1, 2, ... N, of the sites must be interpreted here as : 1st site used, 2nd site used ... ; correspondence with the true geographical situation will be taken into account in the calculation of the transport costs.

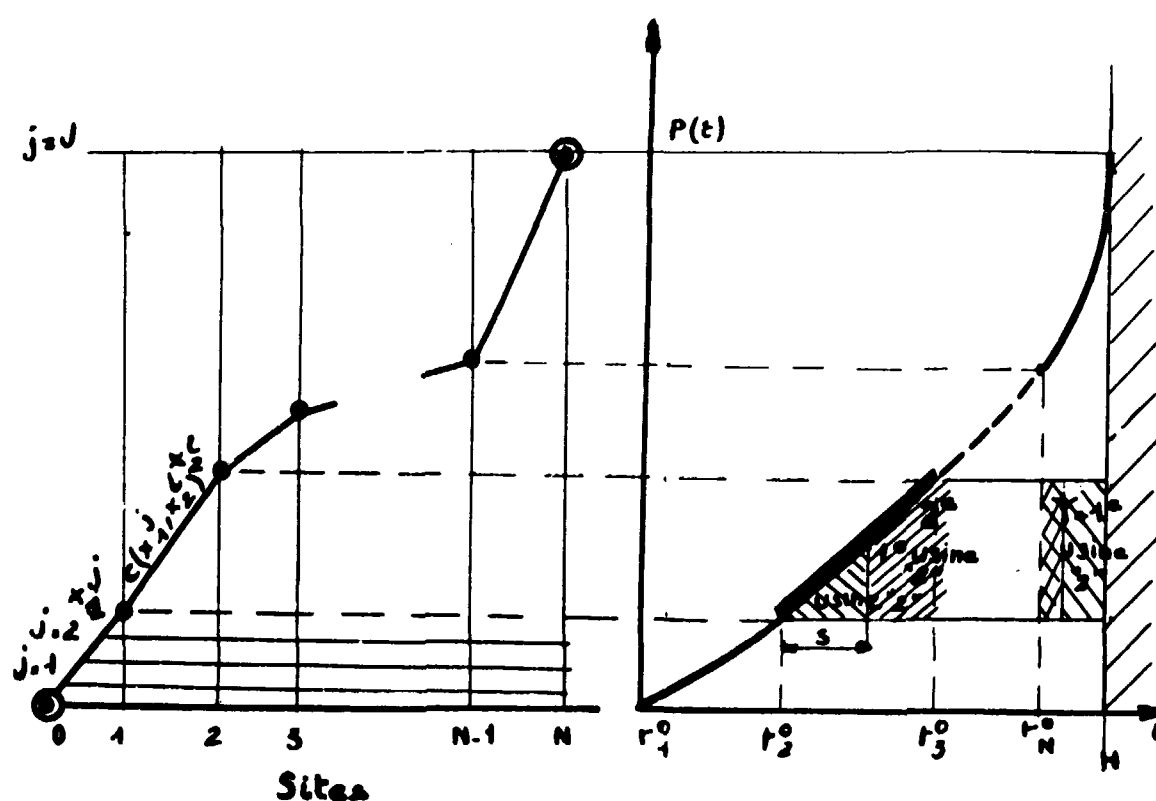
Fig. gives an idea of the formulation of the problem^{*} :



(^{*} cf. References (5)).

Remarquons que les numéros 1, 2, ... N, des sites doivent être interprétés ici comme : 1er site utilisé, 2ème site utilisé ..., la correspondance avec la situation géographique réelle sera prise en compte dans le calcul des frais de transport.

Le graphique suivant donne une idée de la formulation du problème^{*} :



(*) cf. bibliographie (5).

The selection of vertex x_2^l from vertex x_1^j expresses the fact that the plants built on site "2" will take charge of the part of the programme included between $P^{-1}(p.j)$ and $P^{-1}(p.l)$ from t_2^0 to H

The assumption $(A_1)^*$:

- . makes it possible to examine the sites one after the other (If (A_1) were abandoned, a decision concerning a site would be valid for S years only and not up to the horizon).
- . forces the components of the vectors $|Q_{R,u} >$ to increase : so that the selection of vertex x_u^l from vertex x_{u-1}^j determines the value of the last component of $|Q_{R,u} >$ to $(l-j)p$ cost $C(x_{u-1}^j, x_u^l)$ is then the cost of the optimum distribution of plants for the corresponding part of the programme.

Assumption $(A_3)^{**}$ ensures that amongst the N t_{th} components of the vectors $|Q_{R,u} >$ only one is placed in the increasing sequence of the corresponding vector. If the plant on site u is not running at full capacity, then the sites v ($v < u$) are saturated. (This assumption can be given up if site regroupments are envisaged at the end of the calculation. In that case, however, it is more profitable to tackle the problem sequentially according to time).

* See p. 8

** See p. 11

Le choix du sommet x_2^l à partir du sommet x_1^j exprime que les usines construites sur le site "2" prendront en charge le tranche de programme de $P^{-1}(p.j)$ à $P^{-1}(p.l)$ et ceci de t_2^0 à H

L'hypothèse $(H_1)^*$:

- . permet d'examiner les sites les uns après les autres. (si H_1 était abandonnée une décision relative à un site ne vaudrait que sur S années et non jusqu'à l'horizon).
- . impose aux composantes des vecteurs $|Q_{R,u} >$ d'aller en croissant. Ainsi le choix du sommet x_u^l à partir du sommet x_{u-1}^j fixe la valeur de la dernière composante de $|Q_{R,u} >$ à $(l-j)p$; le coût $C(x_{u-1}^j, x_u^l)$ est alors celui de la distribution optimale d'usines couvrant la tranche correspondante de programme.

L'hypothèse $(H_3)^{**}$ assure que sur les N t ièmes composantes des vecteurs $|Q_{R,u} >$ une seule est située dans la séquence croissante du vecteur correspondant. Si l'usine du site u ne fonctionne pas à pleine charge alors les sites v ($v < u$) sont saturés. (On peut abandonner cette hypothèse en prévoyant à la fin du calcul des regroupements de sites mais il est alors plus intéressant de traiter le problème séquentiellement par rapport au temps).

* Voir p. 8

** Voir p. 11

- ANNEXE IV -
-:-:-:-:-

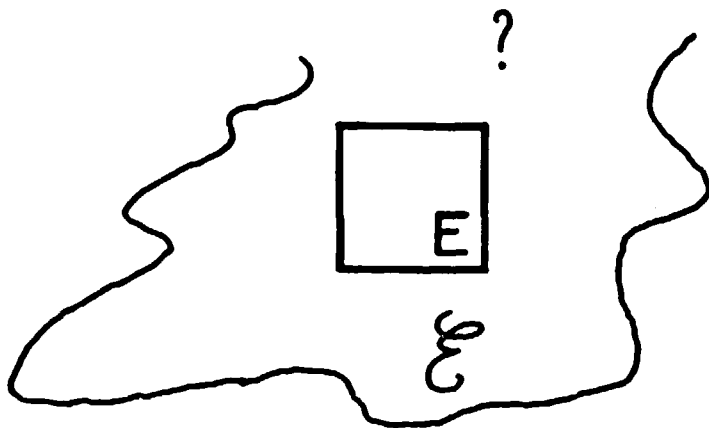
SOUS-OPTIMA D'UN PROBLEME g-SEQUENTIEL

A. INTRODUCTION

Soit à "étudier" un processus (économique) : $\mathcal{E}$

Le modèle E, que nous choisissons pour représenter $\mathcal{E}$
en est une schématisation, qui laisse de côté :

- la structure fine de $\mathcal{E}$ ("les détails")
- les composantes difficilement formalisables de $\mathcal{E}$
(humaines, psychologiques,...)
- ce que "nous ignorons plus ou moins" de $\mathcal{E}$



Il est donc bien évident que la politique optimale donnée par E, n'est pas forcément "la meilleure", pour $\mathcal{E}$. Il y a donc intérêt à dégager des politiques qui, relativement à E, sont "presque aussi bonnes" que la politique optimale.

If the problem is g-sequential, E is a sequential graph ; finding the k-optimum policies amounts to finding the paths of the graph going from an initial vertex x_0 to a final vertex x_N such that the costs associated with these paths are k-optima.

B. MODEL (cf. (6))

Let 0, 1, 2, ..., n, ..., N, be the times when the state of the process is considered and a decision must be taken.

At time n, the state of the process is marked by a vertex

$$x_n^l \left[l = 1, 2, \dots, p(n) \right]$$

From this state it is possible, at time $n + 1$ to be in one of the states of a set marked by a set of vertices noted as Γx_n^l . The decision taken at time n consists in choosing the state $x_{n+1}^m \in \Gamma x_n^l$. The cost of this decision is noted as : $v(x_n^m, x_{n+1}^l)$

We describe as a policy a set of vertices $x_0^{i_0}, x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$.

which mark the successive states of the process from time 0 to time N.

The objective is to determine a policy making it possible to go from an initial state to a final state, minimising the total cost C :

$$C = v(x_0^{i_0}, x_1^{i_1}) + v(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}) + \dots + v(x_{N-1}^{i_{N-1}}, x_N^{i_N})$$

Si le problème est g-séquentiel, E est un graphe séquentiel ;
chercher les politiques k-optimales revient à chercher les chemins du graphe,
allant d'un sommet initial x_0 à un sommet final x_N , tels que les coûts
associés à ces chemins soient k-optima.

B. MODELE (CF. (6))

Soient $0, 1, 2, \dots, n, \dots, N$, les instants où l'on considère l'état
du processus et où l'on doit prendre une décision.

A l'instant n , l'état du processus est repéré par un sommet
 x_n^l [$l = 1, 2, \dots, P(n)$]

A partir de cet état, on peut, à l'instant $n + 1$, être dans
un des états d'un ensemble repéré par un ensemble de sommets noté : Γx_n^l

La décision prise à l'instant n consiste à choisir l'état $x_{n+1}^m \in \Gamma x_n^l$

Le coût de cette décision est notée : $v(x_n^m, x_{n+1}^l)$

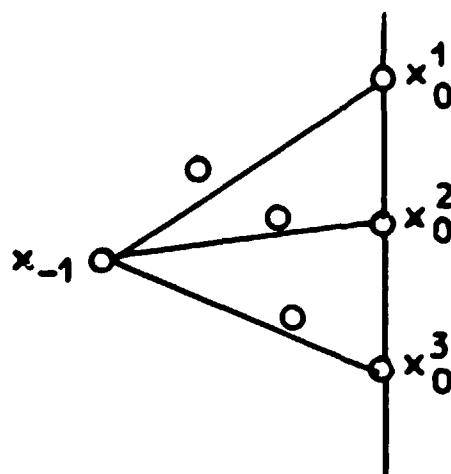
On appelle politique un ensemble de sommets $x_0^{i_0}, x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$

qui repèrent les états successifs du processus de l'instant 0 à l'instant N.

L'objectif est de déterminer une politique permettant d'aller
d'un état initial à un état final, minimisant le coût total C :

$$C = v(x_0^{i_0}, x_1^{i_1}) + v(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}) + \dots + v(x_{N-1}^{i_{N-1}}, x_N^{i_N})$$

We assume the initial state x_0 to be fixed ; if it were not, it would be sufficient to introduce a state x_{-1} connected to all the states x_1^i by arcs of zero cost and to change the numbering.



Or again, it is possible to study the problem from x_0^1 then from x_0^2

Starting from x_0 , let $D(x_0)$ be the set of possible paths going from x_0 to a final state (or again the set of possible w policies from x_0).

We call $f_{0,N}^{(k)}(x_0)$ the k -optimum of C , from x_0

We note $f_{0,N}^k(x_0) = \text{OPT}_{C}^{(k)}$

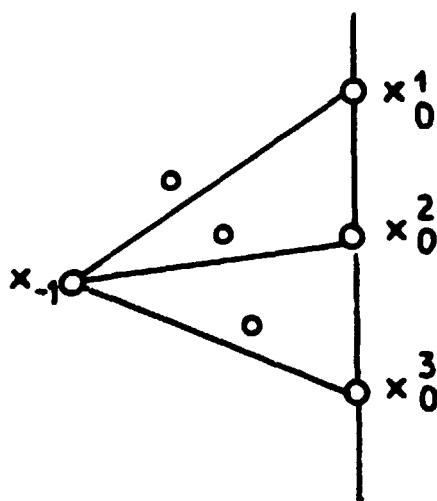
$$w \in D(x_0)$$

$$w = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_N^{i_N})$$

and similarly $f_{n,N}^{(k)}(x_n^l)$

the value of the k -optimum policy from x_n^l .

Nous supposons l'état initial x_0 fixé ; s'il ne l'était pas, il suffirait d'introduire un état x_{-1} , relié à tous les états x_1^i par des arcs de coût nul et de changer le numérotage.



Ou encore, on peut étudier le problème à partir de x_0^1 puis à partir de x_0^2 ...

Partant de x_0 , soit $D(x_0)$ l'ensemble des chemins possibles allant de x_0 à un état final (ou encore l'ensemble des politiques ω possibles à partir de x_0).

On appelle $f_{(0,N)}^{(k)}(x_0)$ le k-optimum de C à partir de x_0

On note $f_{0,N}^{(k)}(x_0) = \text{OPT}^{(k)}_C$

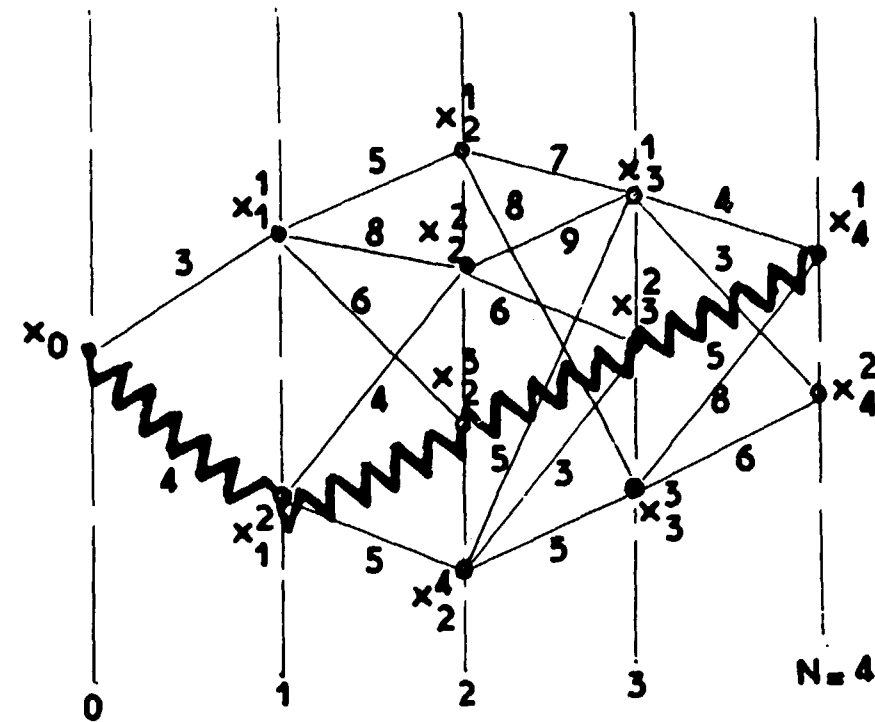
$$\omega \in D(x_0)$$

$$\omega = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_N^{i_N})$$

et de même $f_{n,N}^{(k)}(x_n^l)$

la valeur de la politique k-optimale à partir de x_n^l

EXAMPLE



The objective is to find the paths going from x_0 x_4^1 x_4^2 giving the lowest values for the sum of the costs of the arcs through which one passes (the optimum here is a minimum).

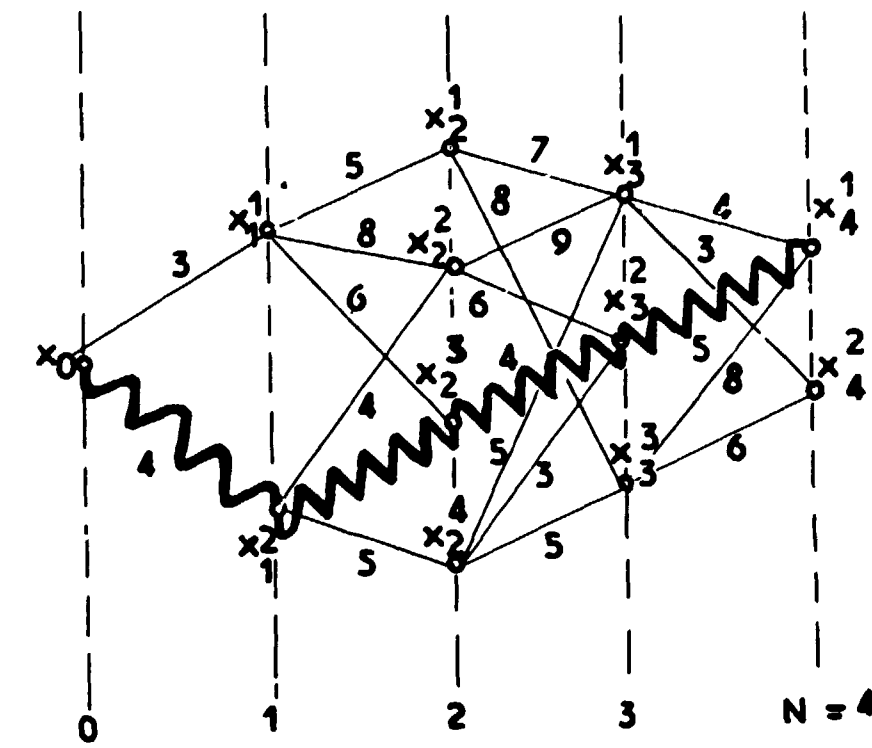
$\{x_1^1, x_2^3, x_3^2, x_4^1\}$ is for example an element of x_0 the value of the associated policy is : $3 + 6 + 4 + 5 = 18$

On this graph, the 1-optimum policy is :

$\{x_0, x_1^2, x_2^3, x_3^2, x_4^1\}$
and we have $f_{0,N}^{(1)}(x_0) = 16$

For example : $f_{3,4}^{(1)}(x_3^1) = 3$, $f_{3,4}^{(2)}(x_3^1) = 4$

EXAMPLE



L'objectif est de trouver les chemins allant de x_0 à x_4^1 ou x_4^2 donnant les plus faibles valeurs pour la somme des coûts des arcs que l'on parcourt (l'optimum est ici un minimum).

$\{x_1^1, x_2^3, x_3^2, x_4^1\}$ est, par exemple, un élément de x_0
la valeur de la politique associée est : $3 + 6 + 4 + 5 = 18$.

Sur ce graphe, la politique 1-optimale est :

$\{x_0, x_1^2, x_2^3, x_3^2, x_4^1\}$
et on a $f_{0,N}^{(1)}(x_0) = 16$

par exemple : $f_{3,4}^{(1)}(x_3^1) = 3$, $f_{3,4}^{(2)}(x_3^1) = 4$

There are four 2-optimum policies from x_0 ; they are :

$$\begin{aligned} & \{ x_0, x_1^2, x_2^4, x_3^2, x_4^1 \} \\ & \{ x_0, x_1^2, x_2^4, x_3^1, x_4^2 \} \\ & \{ x_0, x_1^1, x_2^3, x_3^2, x_4^1 \} \\ & \{ x_0, x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^2 \} \end{aligned}$$

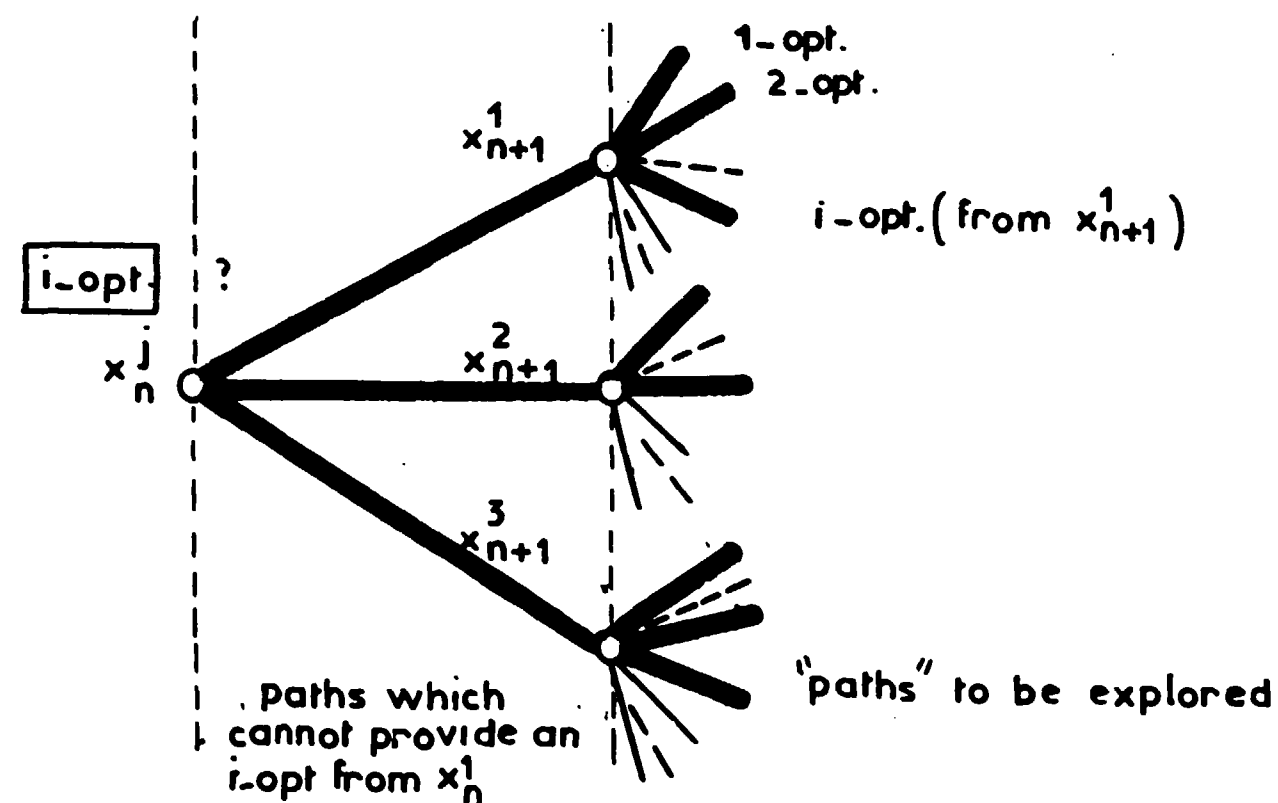
$$f_{0,4}^{(2)}(x_0) = 18$$

C. ALGORITHMS

1.- BELMAN and KALABA's algorithm

It consists in a systematic exploration of all possible policies from all the vertices of the graph.

The i -optimum policy from x_n^l is the i -th of the policies which consists in choosing a vertex $x_{n+1}^m \in \Gamma x_n^l$ and in following from this vertex a μ -optimum policy such that $\mu \leq i$



Il existe quatre politiques 2-optimales à partir de x_0

ce sont :

$$\begin{aligned} & \{ x_0, x_1^2, x_2^4, x_3^2, x_4^1 \} \\ & \{ x_0, x_1^2, x_2^4, x_3^1, x_4^2 \} \\ & \{ x_0, x_1^1, x_2^3, x_3^2, x_4^1 \} \\ & \{ x_0, x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^2 \} \end{aligned}$$

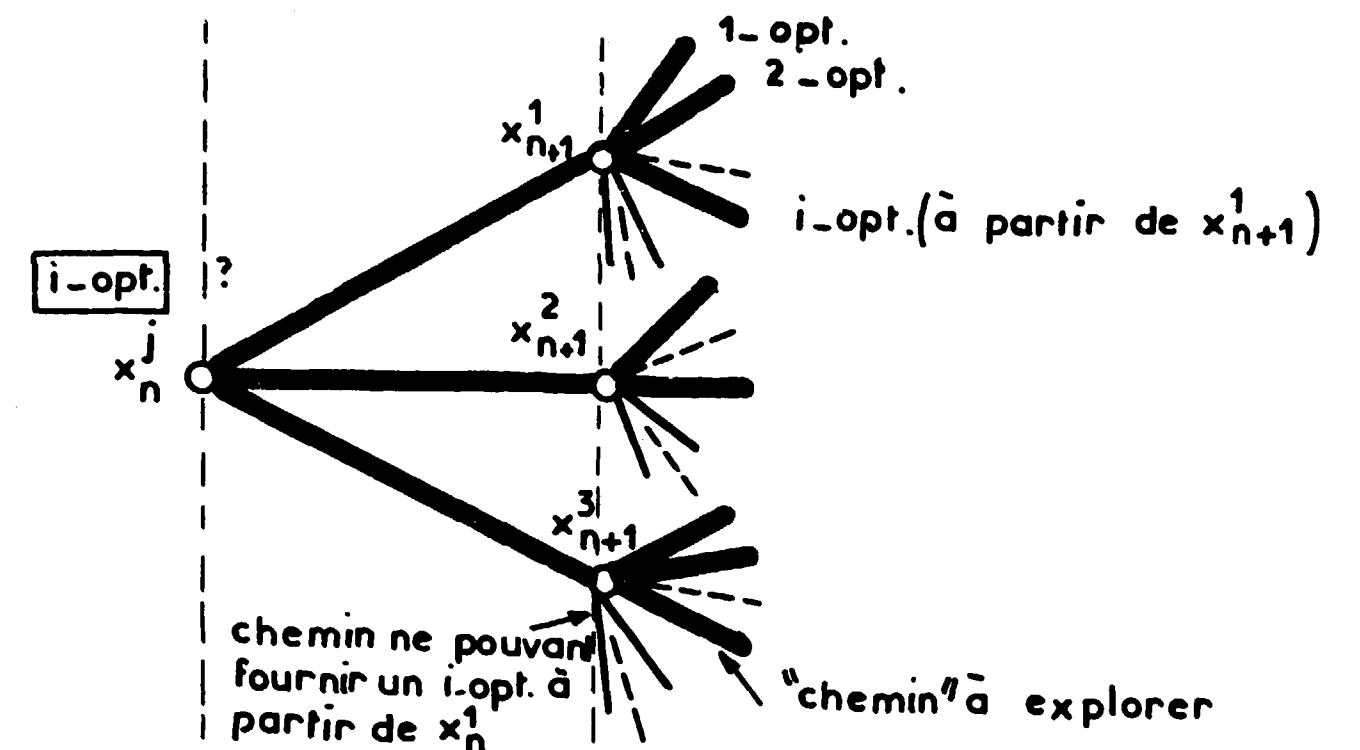
$$f_{0,4}^{(2)}(x_0) = 18$$

C. ALGORITHMES

1.- Algorithme de MM. BELMAN et KALABA

Il consiste en une exploration systématique de toutes les politiques possibles à partir de tous les sommets du graphe.

La politique i -optimale à partir de x_n^l , est la i -ième des politiques qui consistent à choisir un sommet $x_{n+1}^m \in \Gamma x_n^l$ et à suivre à partir de ce sommet une politique μ -optimale telle que $\mu \leq i$



We thus calculate by recurrence from the vertices x_{N-1}^l to the vertex x_0 , the 1, 2, ... k-optimum policies from all the vertices of the graph.

At each stage of the calculation, it is therefore a question of determining the i-th element of a set of i γ elements (γ being the dimension of Γx_n^l).

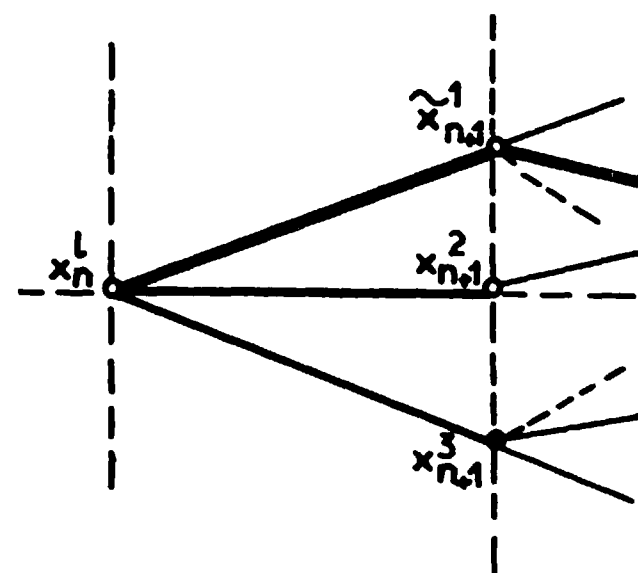
2.- KAUFMANN and CRUON's algorithm

It is based on the following remark :

Let us assume that the 1-optimum policy from x_n^l is found and that it consists in choosing first $\tilde{x}_{n+1}^1$ and following the 1-optimum policy from this vertex.

Then the 2-optimum policy from x_n^l is the best of the following policies :

- choose $\tilde{x}_{n+1}^1$ and follow the 2-optimum policy from this vertex
- choose x_{n+1}^m different from $\tilde{x}_{n+1}^1$ and follow the 1-optimum policy from this vertex.



1-optimum from x_n^l thus from $\tilde{x}_{n+1}^1$
 2-optimum from $\tilde{x}_{n+1}^1$
 1-optimum from x_{n+1}^2
 1-optimum from x_{n+1}^3

} possible paths for the 2-optimum from x_n^l

On calcul ainsi par récurrence depuis les sommets x_{N-1}^l jusqu'au sommet x_0 , les politiques 1, 2, ... k-optimales à partir de tous les sommets du graphe.

A chaque étape du calcul, il s'agit donc de déterminer le i-ième élément d'un ensemble de i γ éléments (γ étant la dimension de Γx_n^l).

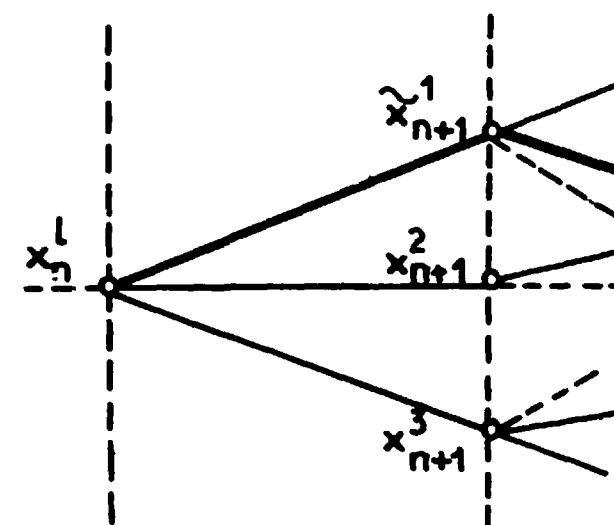
2.- Algorithme de MM. KAUFMANN et CRUON

Il est fondé sur la remarque suivante :

Supposons trouvée la politique 1-optimale à partir de x_n^l et qu'elle consiste à choisir d'abord $\tilde{x}_{n+1}^1$ et à suivre à partir de ce sommet la politique 1-optimale.

Alors la politique 2-optimale à partir de x_n^l est la meilleure des politiques suivantes :

- choisir $\tilde{x}_{n+1}^1$ et suivre la politique 2-optimale à partir de ce sommet.
- choisir x_{n+1}^m différent de $\tilde{x}_{n+1}^1$ et suivre la politique 1-optimale à partir de ce sommet.



1. optimum à partir de x_n^l donc $\tilde{x}_{n+1}^1$
 2. optimum à partir de $\tilde{x}_{n+1}^1$
 1. optimum à partir de x_{n+1}^2
 1. optimum à partir de x_{n+1}^3

} chemins candidats au 2-optimum à partir de x_n^l

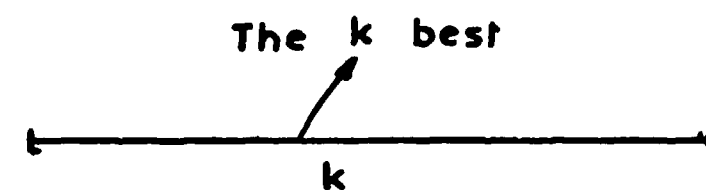
The calculations are then similar to the previous ones but :

At each stage of the calculation it is necessary to determine the first element of a set of γ elements (and doing this i times).

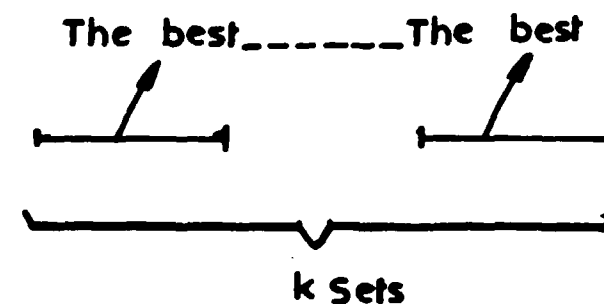
Thus :

In the first algorithm one calculates the k best elements of a set of $K\gamma$ elements.

In the second algorithm, one calculates the best element of a set of γ elements (doing this k times).



Bellman - Kalaba



Kaufmann-Cruon

The improvement is therefore considerable.

In practice, the method consists in associating with each arc (x, y) an index j , which is variable during the course of calculation, which indicates (if one is calculating the i -optimum policy) that j of the μ -optimum policies from x ($\mu = 1, 2, \dots, i - 1$) pass through this arc.

The calculation is made, as previously, from the x_{N-1}^L to x_0 determining at all the vertices of the graph the $1, 2, \dots, k$ -optimum policies from each of them.

We shall give a flow diagram for the calculation.

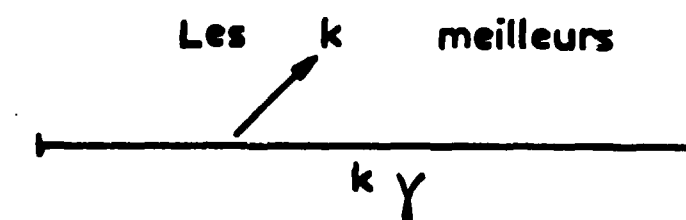
Les calculs sont alors analogues aux précédents mais :

A chaque étape de calcul, il s'agit de déterminer le premier élément d'un ensemble de γ éléments (et ceci i fois).

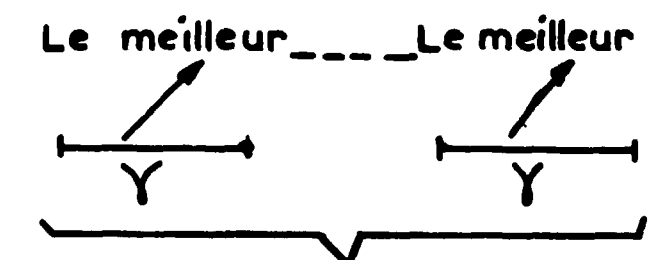
Donc :

Dans le premier algorithme, on calcule les k meilleurs éléments d'un ensemble de $K\gamma$ éléments.

Dans le deuxième algorithme, on calcule le meilleur élément d'un ensemble de γ éléments (et ceci k fois).



M.M. Bellman - Kalaba



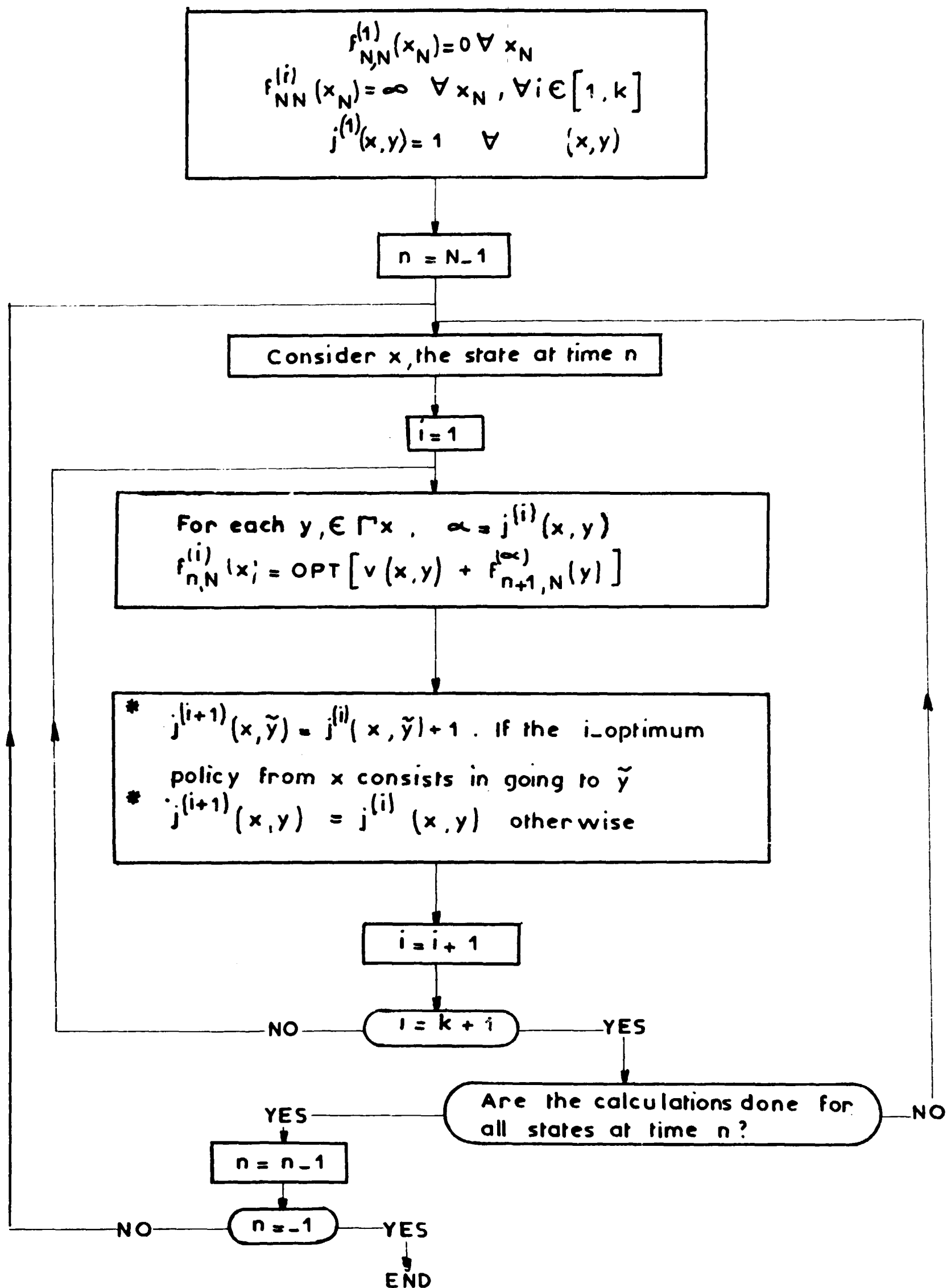
M.M. Kaufmann-Cruon

Le progrès est donc très sensible.

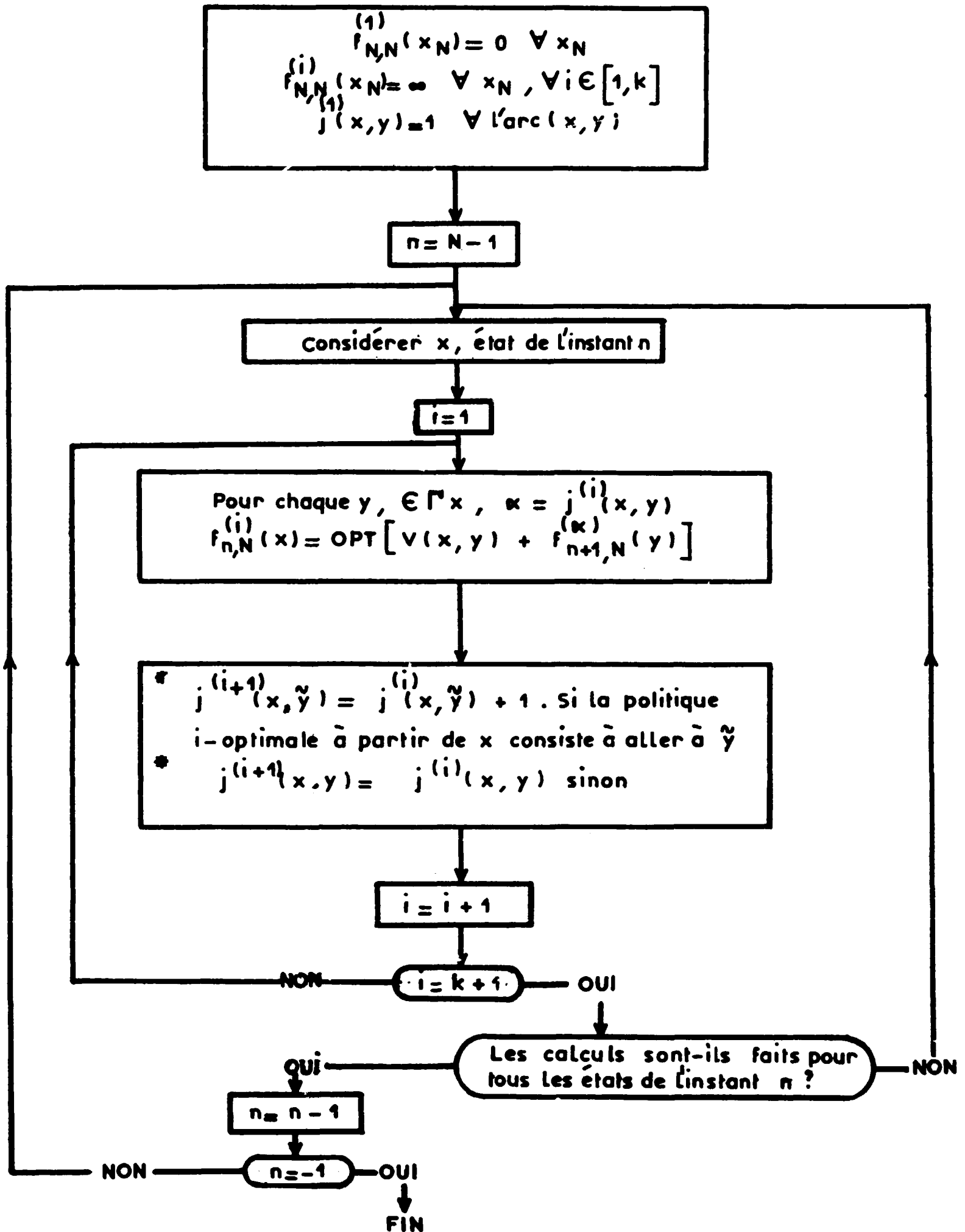
Pratiquement, la méthode consiste à associer à chaque arc (x, y) un indice j , variable dans le cours du calcul, qui indique (si l'on calcule la politique i -optimale) que j des politiques μ -optimales à partir de x ($\mu = 1, 2, \dots, i - 1$) passent par cet arc.

Le calcul s'effectue, comme précédemment des x_{N-1}^L vers x_0 en déterminant en tous les sommets du graphe, les politiques $1, 2, \dots, k$ -optimales à partir de chacun d'entre eux.

Nous donnons un organigramme du calcul.



"Organigramme" (QPT = MIN)



3. "Reflection" Algorithm ^(★)

This is based on the following remarks :

Let us assume that the 1-optimum policy from x_0 has been found.

Then, to find the 2-optimum policy from x_0 , it is sufficient to know the 2-optimum sub-policies from the vertices of the graph belonging to the 1-optimum policy, and the 1-optimum sub-policies from the other vertices and those alone.

Similarly, to find the i -optimum policies $i \leq k$ from x_0 it is useless to know all the i -optimum policies ($i \leq k$) from all the vertices of the graph.

Thus, in the example given above, it is sufficient to know the 2-optimum policy from x_1^2 to find the 2-optimum policy from x_0 . If we took $k = 2$ the KAUFMANN and CRUON algorithm would carry out eight useless calculations.

The algorithm which we propose comprises two phases for the calculation of each i -optimum policy from x_0 :

The first phase consists in scanning the graph from 0 to N, which enables us to determine the calculations which have to be carried out : we thus mark the vertices of the $(i-1)$ optimum policy from x_0 and the number j of the j -optimum policy from these vertices which must be calculated to determine the i -optimum policy from x_0 .

The second phase consists in scanning the graph from N to 0, which enables the calculations to be carried out.

The calculation uses an index associated with each arc, an index associated with each vertex (variable during the course of the calculation) and a "memory pile" T.

(★) This algorithm was developed by M.A. DELEDICQ.

3. Algorithme "à réflexion"(*)

Il est fondé sur la remarque suivante :

Supposons trouvée la politique 1-optimale à partir de x_0

Alors pour connaître la politique 2-optimale à partir de x_0 , il suffit de connaître les sous-politiques 2-optimales à partir des sommets du graphe appartenant à la politique 1-optimale, et les sous-politiques 1-optimales à partir des autres sommets, et celles-là seulement.

De même pour connaître les politiques i -optimales $i \leq k$ à partir de x_0 , il est inutile de connaître toutes les politiques i -optimales ($i \leq k$) à partir de tous les sommets du graphe.

Ainsi dans l'exemple donné plus haut, il suffit de connaître la politique 2-optimale à partir de x_1^2 pour connaître la politique 2-optimale à partir de x_0 . Si on prenait $k = 2$ l'algorithme de MM. KAUFMANN et CRUON effectuerait huit calculs inutiles.

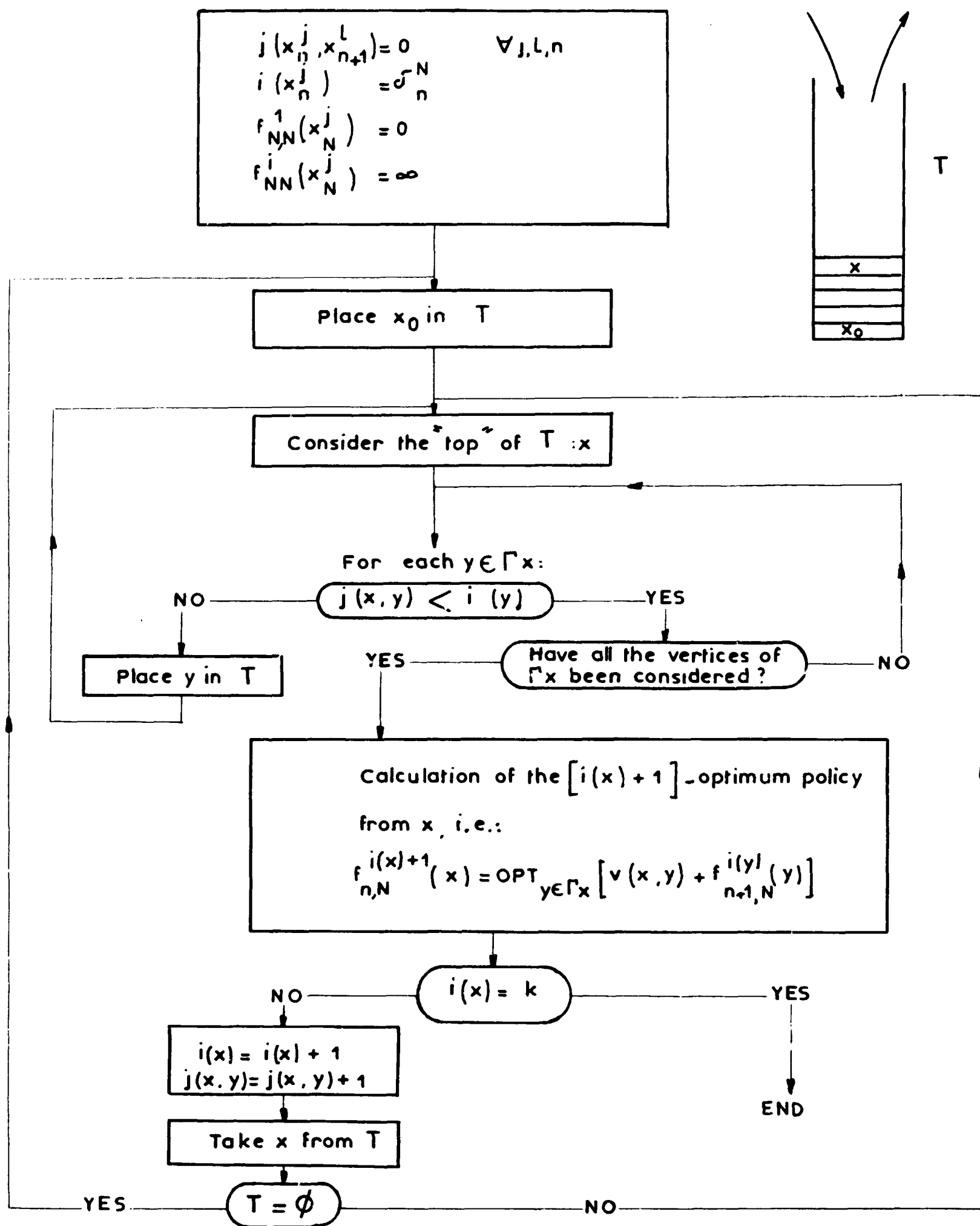
L'algorithme que nous proposons comporte deux phases pour le calcul de chaque politique i -optimale, à partir de x_0 :

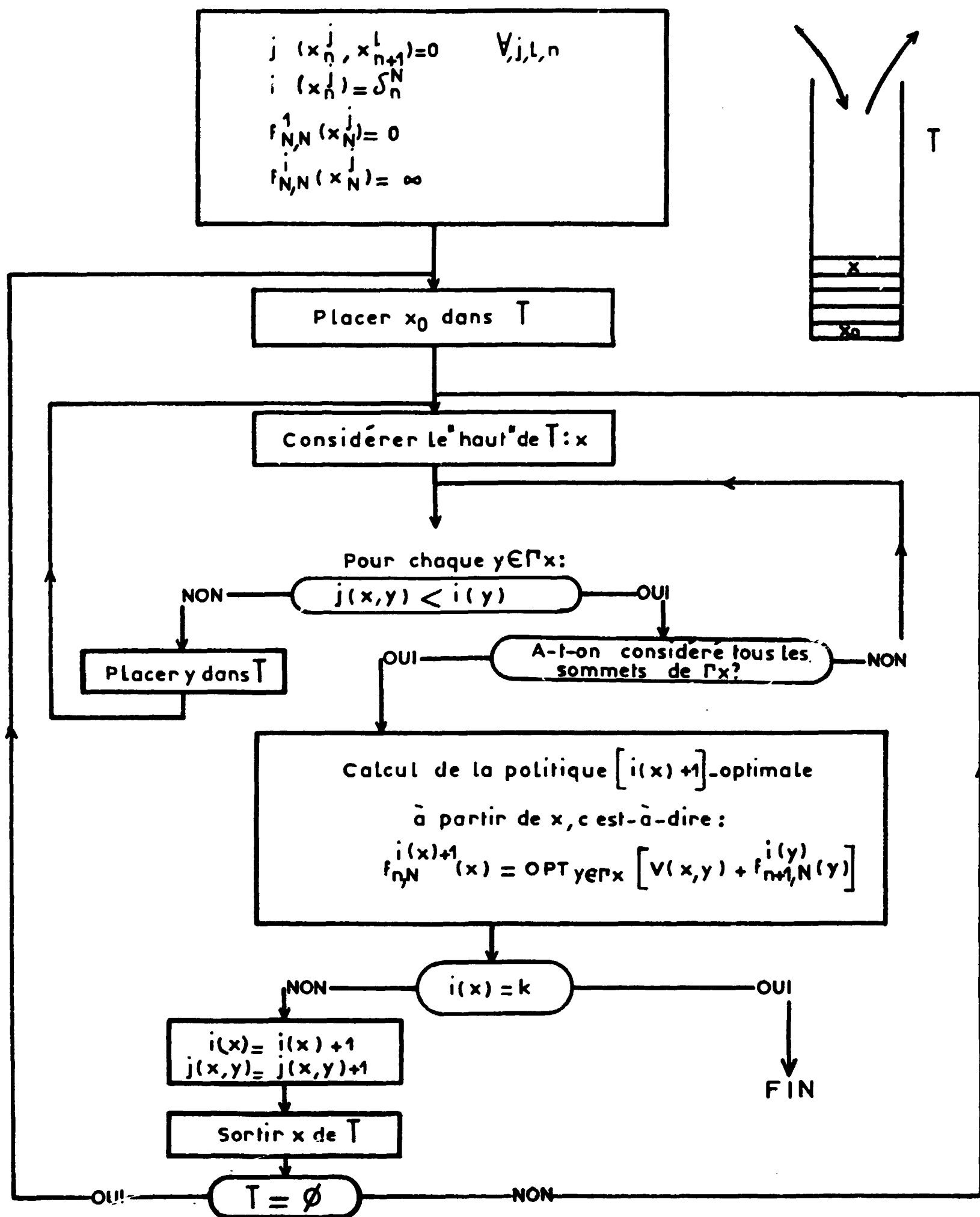
Une première phase consiste en un balayage du graphe de 0 vers N permettant de déterminer les calculs qu'il est nécessaire d'effectuer : on repère ainsi les sommets de la politique $(i-1)$ -optimale à partir de x_0 et le numéro j de la politique j -optimale à partir de ces sommets que l'on doit calculer pour déterminer la politique i -optimale à partir de x_0 .

Une deuxième phase consiste en un balayage du graphe de N vers 0 permettant d'effectuer les calculs.

Le calcul utilise un indice associé à chaque arc, un indice associé à chaque sommet (variables au cours du calcul) et une "pile de mémoire" T.

(*) Cet algorithme a été élaboré par M. A. DELEDICQ.





Note

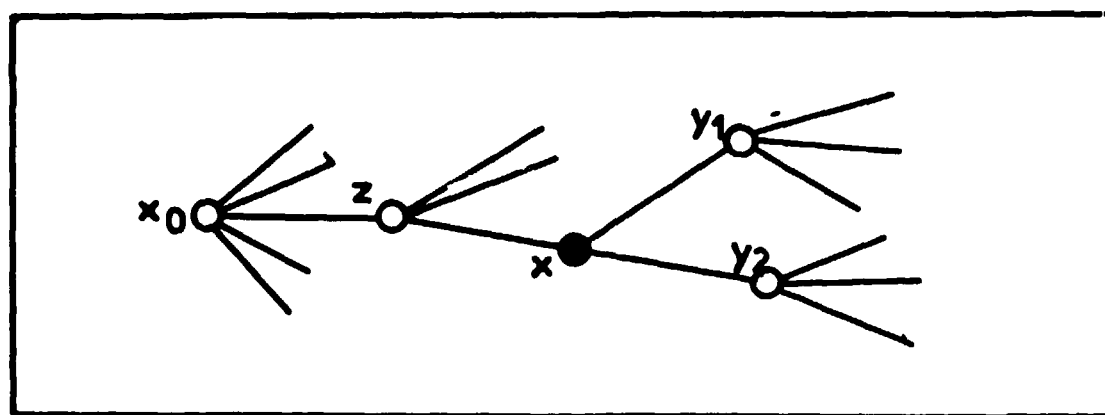
. $i(x)$ is the number i of the i -optimum policy already calculated from x .

. $j(x, y)$ is the number j of the j -optimum policy from x passing through the arc (x, y) (similar to the j of the algorithm described by KAUFMANN and CRUON).

. Calculation of the $[i(x)+1]$ optimum policy from x will therefore be possible if for all the y of Γx we have :

$$j(x, y) < i(y)$$

More precisely, let us consider the configuration of the calculation from a certain stage in its development :



The $i(x_0)$ -optimum policy from x_0 being already calculated, the calculation of the $[i(x_0)+1]$ optimum policy requires calculation of the $[i(z)+1]$ optimum policy from z (i.e. $j(x_0, z) \geq i(z)$) which requires the calculation of the $[i(x)+1]$ -optimum policy from x

We assume this policy to be calculable, i.e. $j(x, y_1) < i(y_1)$ and $j(x, y_2) < i(y_2)$

Thus of the $i(x)$ policies already calculated from x , $j(x, y_1)$ consist in choosing y_1 and $j(x, y_2)$ in choosing y_2 .

Commentaire

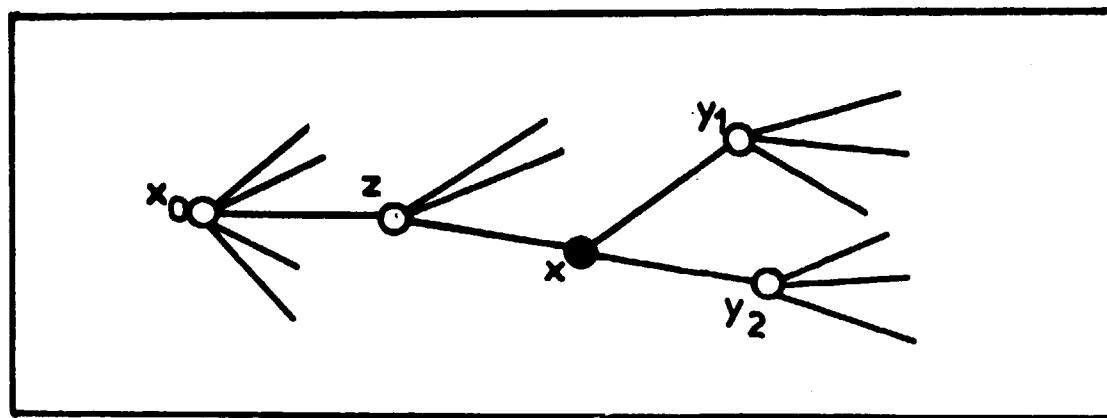
. $i(x)$ est le numéro i de la politique i -optimale déjà calculée à partir de x .

. $j(x, y)$ est le numéro j de la politique j -optimale à partir de x passant par l'arc (x, y) (analogue au j de l'algorithme exposé par MM. KAUFMANN et CRUON).

. Le calcul de la $[i(x) + 1]$ optimale politique à partir de x sera donc possible si pour tous les y de Γx on a :

$$j(x, y) < i(y)$$

Plus précisément considérons la configuration du calcul à une certaine étape de son déroulement :



La politique $i(x_0)$ optimale à partir de x_0 étant déjà calculée, le calcul de la politique $[i(x_0) + 1]$ optimale nécessite le calcul de la politique $[i(z) + 1]$ -optimale à partir de z (c'est-à-dire $j(x_0, z) \geq i(z)$) laquelle nécessite le calcul de la politique $[i(x) + 1]$ optimale à partir de x (c'est-à-dire $j(z, x) \geq i(x)$)

Nous supposons cette politique calculable c'est-à-dire :

$j(x, y_1) < i(y_1)$ et $j(x, y_2) < i(y_2)$. Ainsi parmi les $i(x)$ politiques déjà calculées à partir de x , $j(x, y_1)$ consistent à choisir y_1 et $j(x, y_2)$ à choisir y_2 .

We have : $f^{i(x)+1} x = \text{OPT} [v(x,y) + f^{i(y)}(y)]$

The pile T then contains the vertices $\{x_0, z, x\}$

If x is the last vertex of T we can calculate the $[i(z)+1]$ -optimum policy from z : otherwise x is replaced by another vertex s of T such that $j(z,s) \geq i(s)$ and the process of calculation is continued.

. Note that it is necessary to calculate the 1-optimum policy from all the vertices of the graph, and so it can be calculated before using the algorithm. Only the initials change $[i(x_n^j) = 1 \forall j, n]$ and $j(x_n^j, x_{n+1}^l) = 1$ or 0 according to whether the 1-optimum policy from x_n^j consists in going first to x_{n+1}^l or not].

4. Speed of algorithms

The 3 algorithms above have been programmed on an I.B.M. 7040 and tested on graphs such that the mean number of possible decisions from a vertex is between 4 and 100 (depending on the graphs). It appears that the ancillary operations consisting in marking the arcs of vertices increase the calculation time very slightly compared with the gain made possible by saving numerous calculations.

The gain in time also increases with the number of vertices in the graph. Thus when $\gamma \geq k$ the reflection algorithm is about k times quicker than that of KAUFMANN and CRUON, which is about k times quicker than that of BELLMAN and KALABA

$$\text{On a : } f^{i(x)+1}(x) = \underset{y \in \Gamma_x}{\text{OPT}} \left[v(x,y) + f^{i(y)}(y) \right]$$

La pile T contient alors les sommets $\{x_0, z, x\}$
 Si x est le dernier sommet de Γ_z on pourra calculer la politique $[i(z)+1]$ -optimale à partir de z ; sinon on remplace x par un autre sommet s de $\Gamma(z)$ tel que $j(z,s) \geq i(s)$ et on continue le processus de calcul.

. Remarquons qu'il est nécessaire de calculer la politique 1-optimale à partir de tous les sommets du graphe, on peut donc la calculer avant d'utiliser l'algorithme. Seule l'initialisation change

$\left[i(x_n^j) = 1 \forall j, n \text{ et } j(x_n^j, x_{n+1}^l) = 1 \text{ ou } 0 \text{ suivant que la politique 1-optimale à partir de } x_n^j \text{ consiste à aller d'abord à } x_{n+1}^l \text{ ou non} \right]$.

4. Rapidité des algorithmes

Les 3 algorithmes précédents ont été programmés sur I.B.M. 7090 et testés sur des graphes tels que le nombre moyen de décisions possibles à partir d'un sommet, soit (suivant les graphes) compris entre 4 et 100. Il apparaît que les opérations annexes consistant à marquer des arcs ou des sommets, augmentent très faiblement le temps de calcul en regard du gain que permet l'économie de nombreux calculs.

Le gain de temps augmente d'ailleurs avec le nombre de sommets du graphe. Ainsi, lorsque $\gamma \gg k$, l'algorithme à réflexion est environ k fois plus rapide que celui de MM. KAUFMANN et CRUON, lequel est environ k fois plus rapide que celui de MM. BELLMAN et KALABA.

- APPENDIX V -
-:-:-:-:-

NUMERICAL DATA

The installed nuclear power programme is as follows :

Year	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Installed nuclear power in MW(E)	400	1400	3000	7000	16000	25000	34000

Four possible sites (A, B, C, D) for reprocessing plants are considered. The economic hypotheses are as follows :

- Horizon : 30 years
- Life of the plants : 15 years
- Discounting rate : 7 %
- Transport cost : 32 F/tonne-km

- ANNEXE V -
-:-:-:-:-

DONNEES NUMERIQUES

Le programme d'énergie nucléaire installée est le suivant :

Année	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Puissance nucléaire installée en MWe	400	1400	3000	7000	16000	25000	34000

Quatre sites possibles (A, B, C, D) d'usines de traitement ont été retenus. Les hypothèses économiques sont les suivantes :

- Horizon : 30 ans
- Durée de vie des usines : 15 ans
- Taux d'actualisation : 7 %
- Coût de transport : 32 F/tonne-km

- REFERENCES -

-:-:-:-:-

- (1) Capital and operating costs of reprocessing plants for irradiated natural uranium
by L. THIRIET, C. JOUANHAUD, J. COUTURE, J. DUBOZ, C. OGER
European Atomic Energy Society - Extended symposium "Fuel cycles for power reactors"
BADEN-BADEN (Germany) - 9/14 September 1963.
- (2) 1964 Geneva Conference (P/64).
- (3) H.E. BELLMAN and S.E. DREYFUS "Applied Dynamic Programming"
Princeton University Press, 1962.
- (4) C. BERGE : Theory of graphs and its applications - (Dunod).
- (5) L. THIRIET and J. GAUSSENS - "Dynamic plant problems - Method of selecting investments and allocations -"
4 th International Conference on Operational Research - Boston 1966.
- (6) A. KAUFMANN and R. CRUON - "Study of sensitivity in Dynamic Programming" -
Revue Française de Recherche Opérationnelle n° 32 .

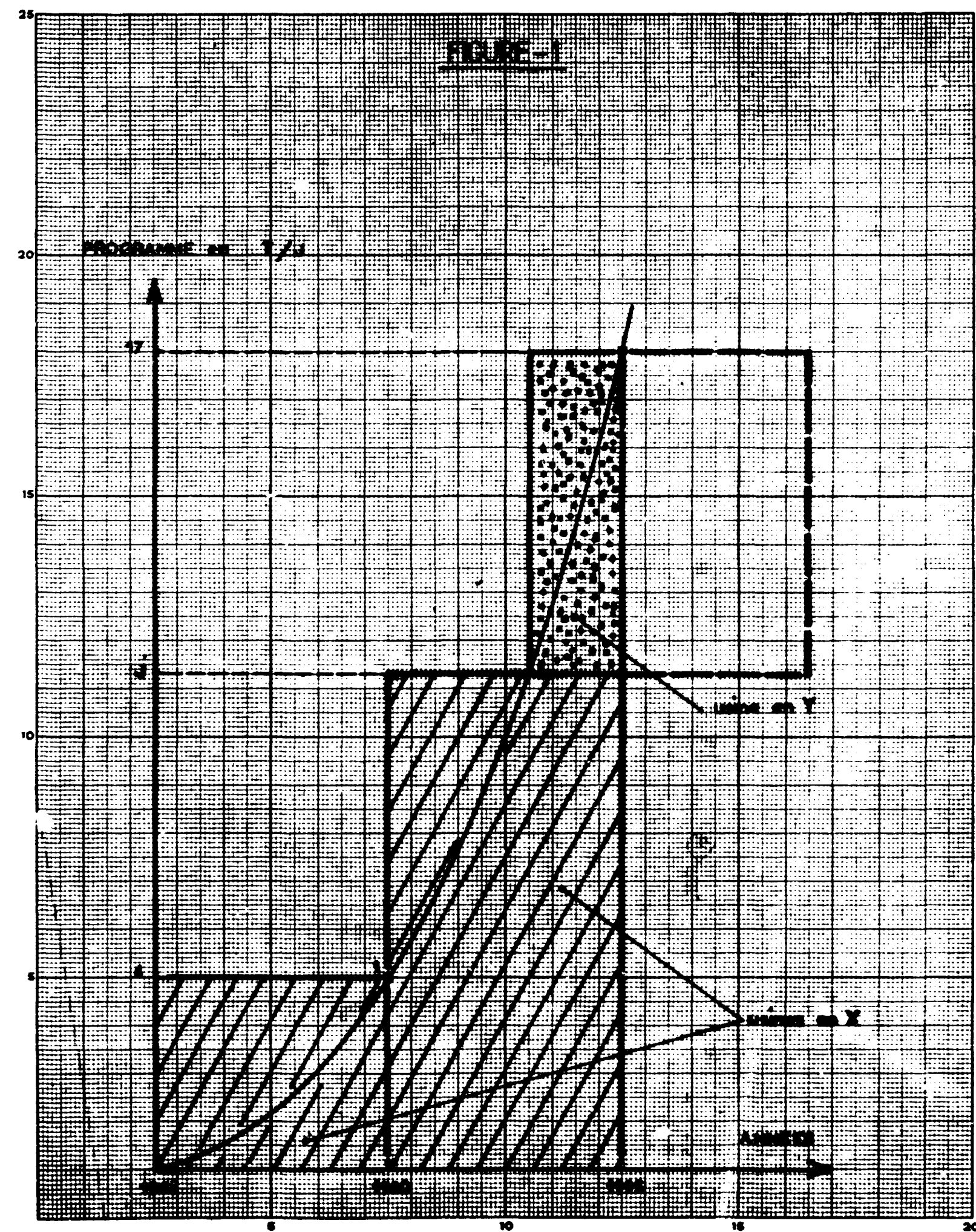
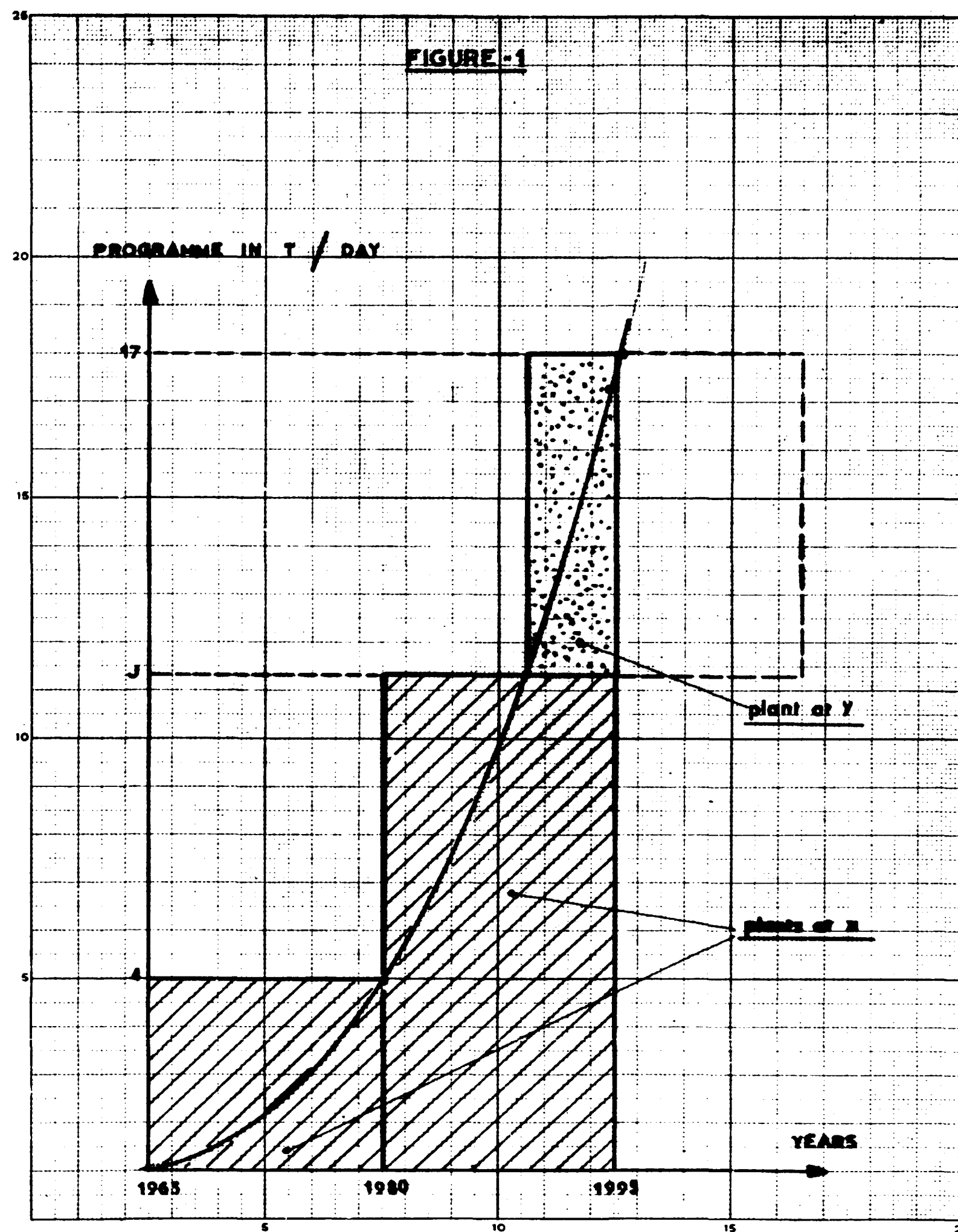
Manuscrit reçu le 25 août 1967

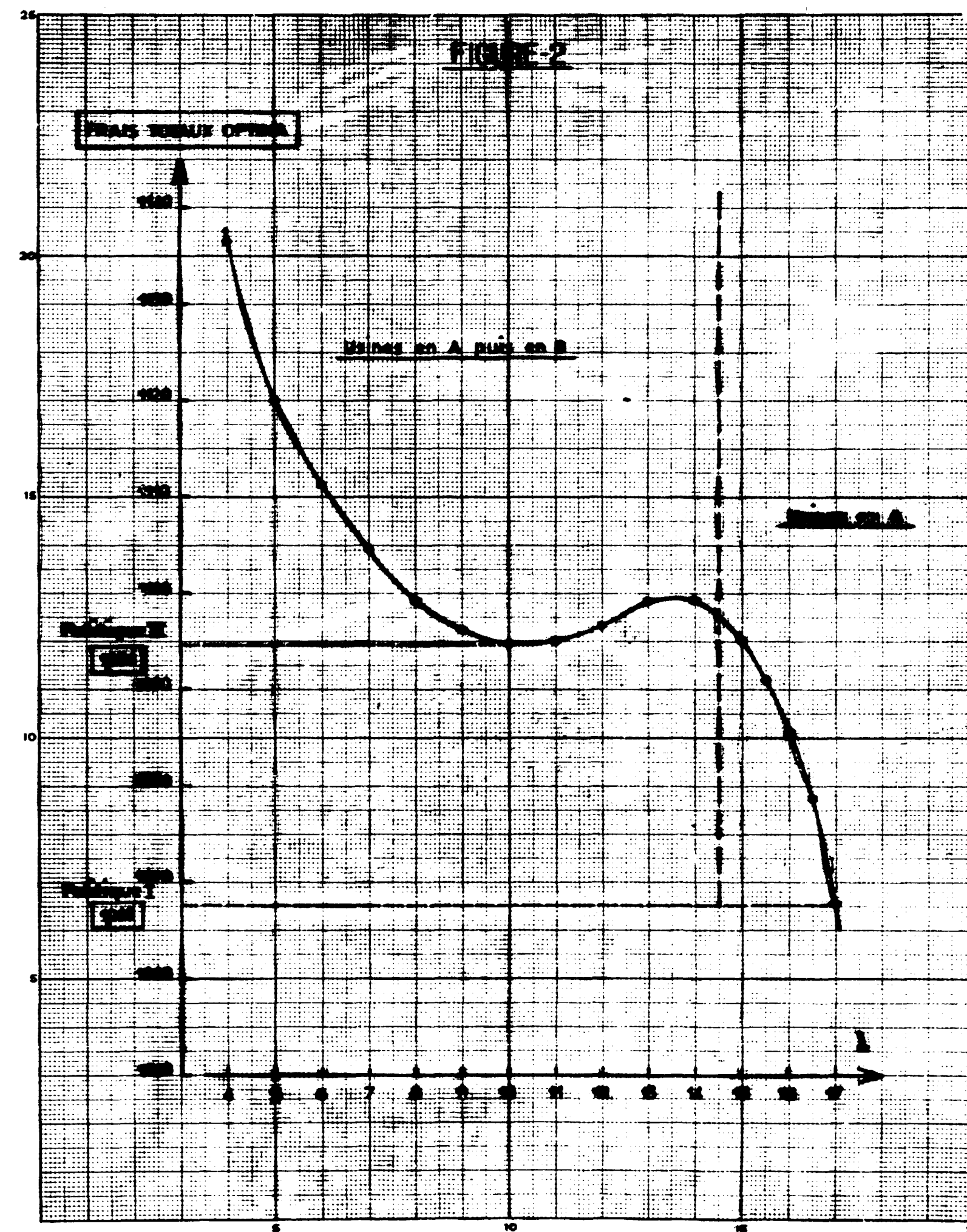
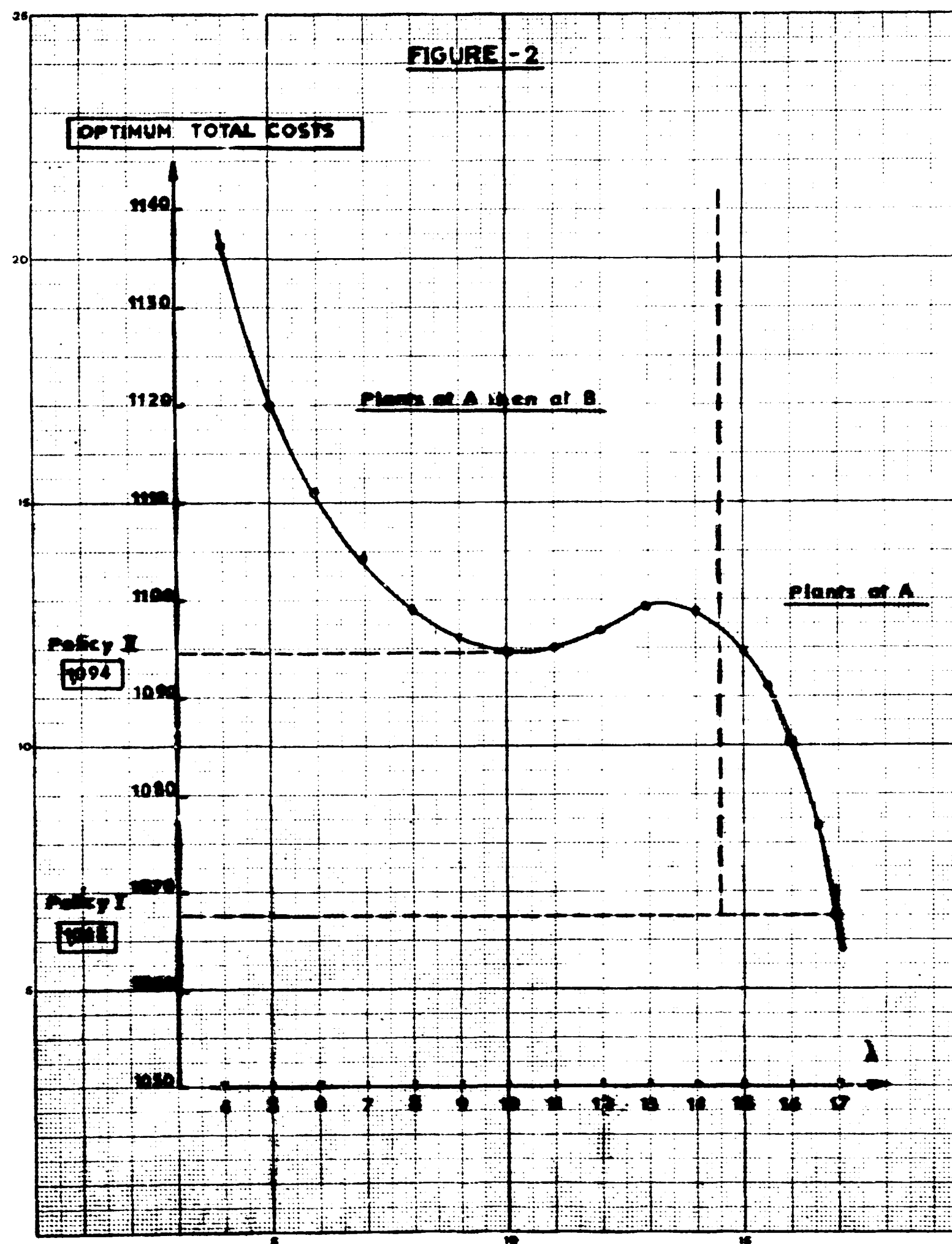
- BIBLIOGRAPHIE -

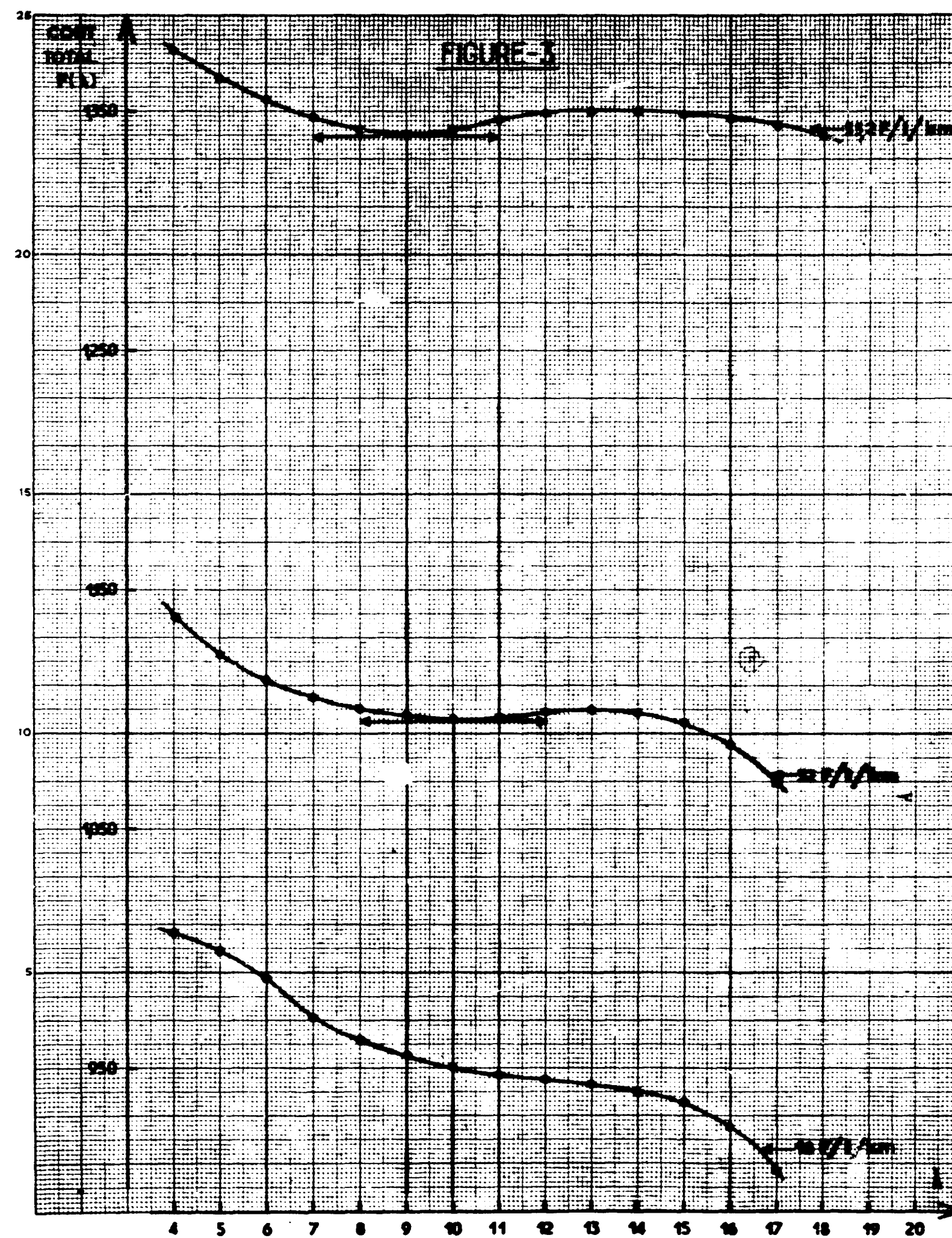
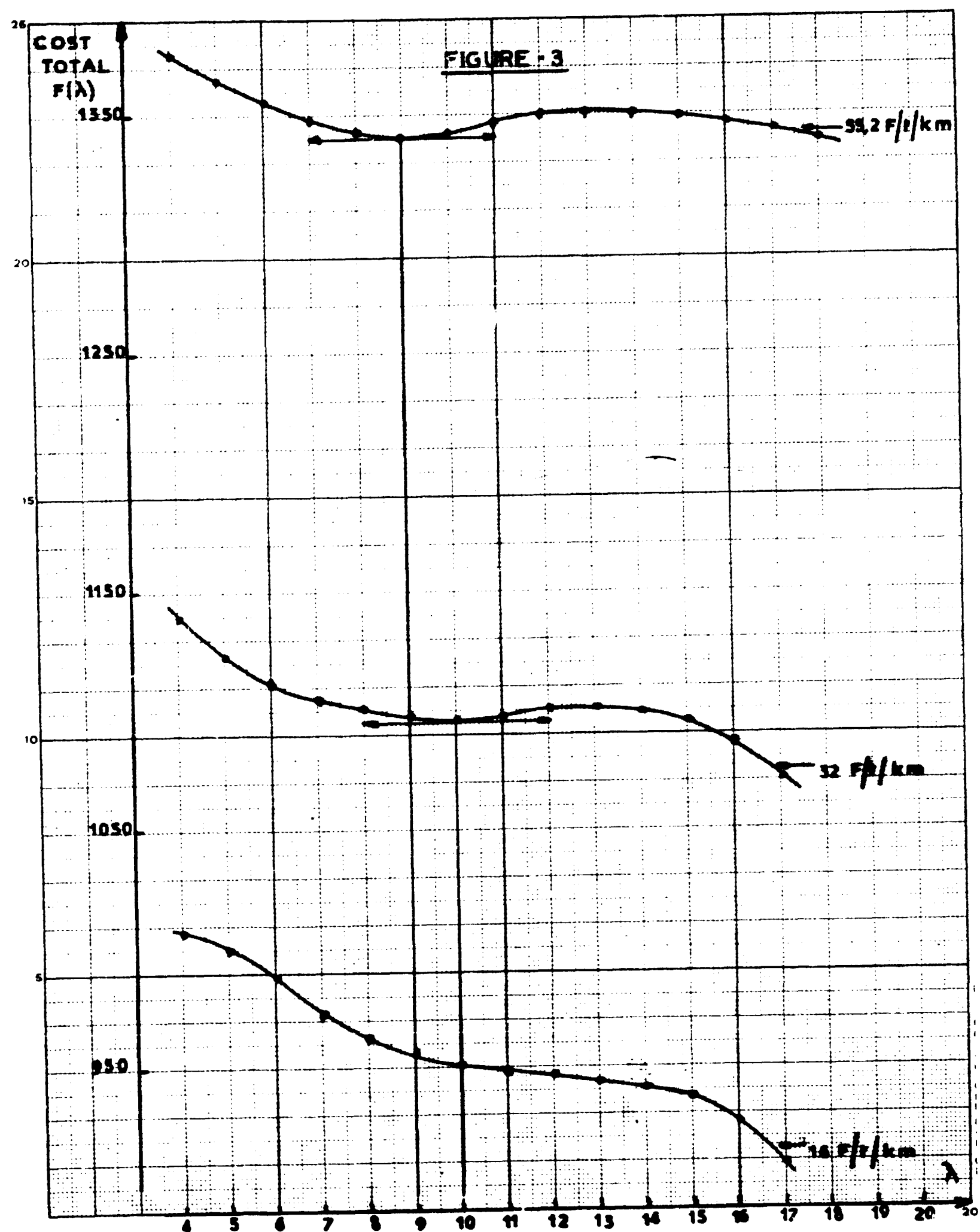
-:-:-:-:-

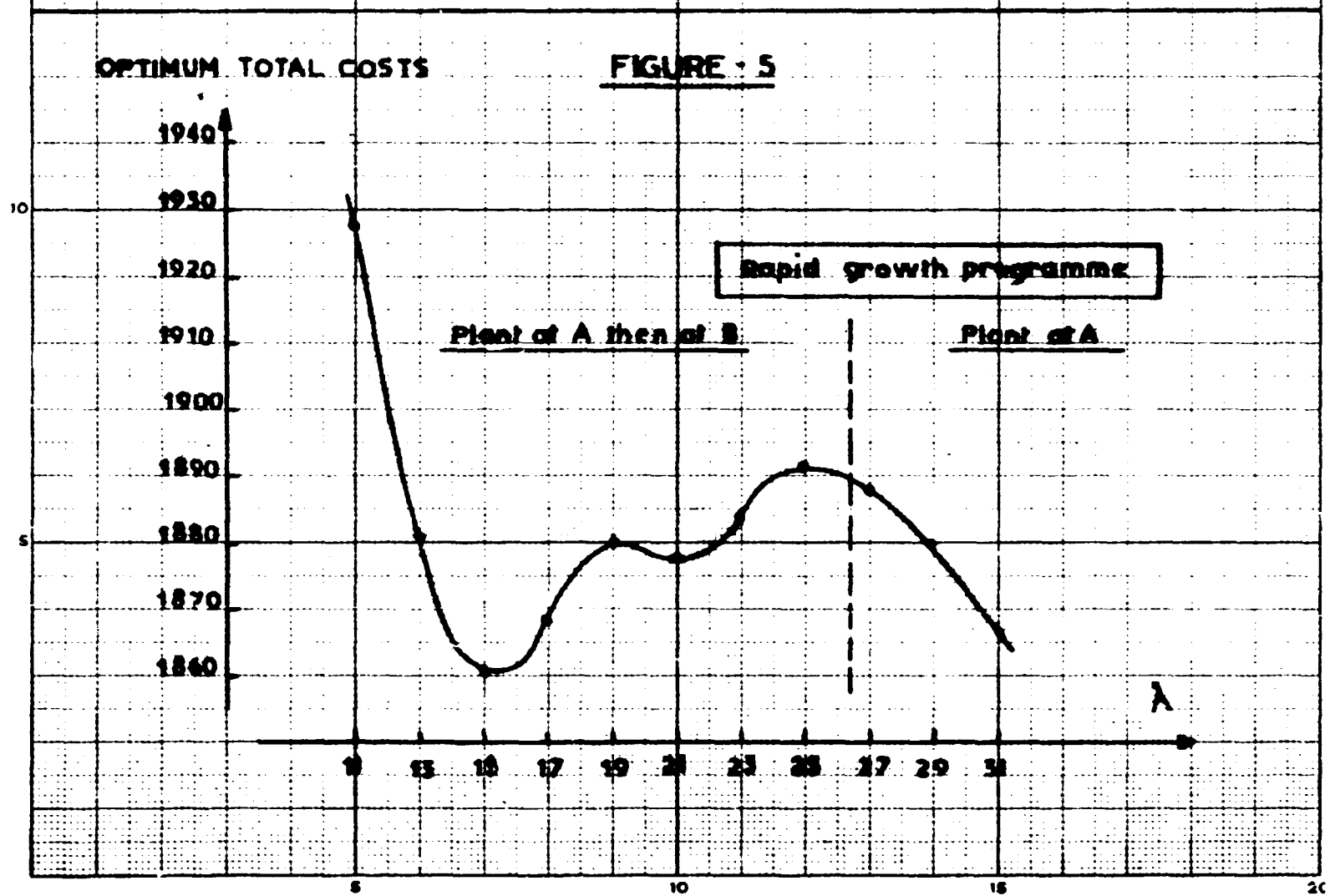
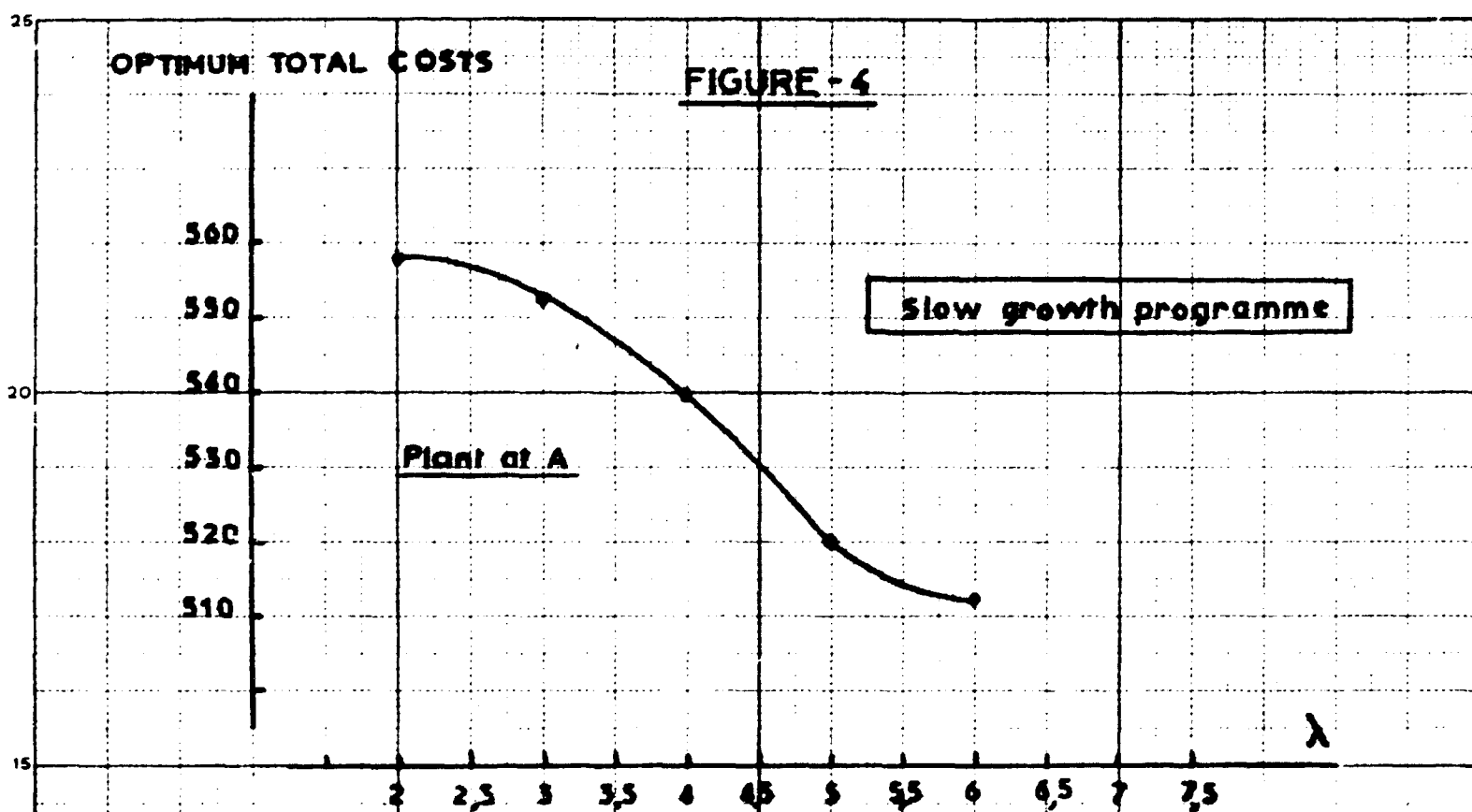
- (1) Coûts d'investissements et d'exploitation des usines de retraitement de l'uranium naturel irradié
par L. THIRIET, C. JOUANHAUD, J. COUTURE, J. DUBOZ, C. OGER
Société Européenne d'Energie Atomique - Colloque élargi "Cycles de combustibles pour les réacteurs de puissance" -
BADEN-BADEN (Allemagne) - 9/14 Septembre 1963.
- (2) Conférence de Genève 1964 (P/64)
- (3) R.E. BELLMAN et S.E. DREYFUS "Applied Dynamic Programming"
Princeton University Press 1962.
- (4) C. BERGE : Théorie des graphes et ses applications - (Dunod).
- (5) L. THIRIET et J. GAUSSENS - "Problèmes d'équipements dynamiques -
Méthode de choix des investissements et des affectations -"
4 th International Conference on Operational Research - Boston 1966.
- (6) A. KAUFMANN et R. CRUON - "Etude de la sensibilité en Programmation
Dynamique" - Revue Française de Recherche Opérationnelle n° 32 .

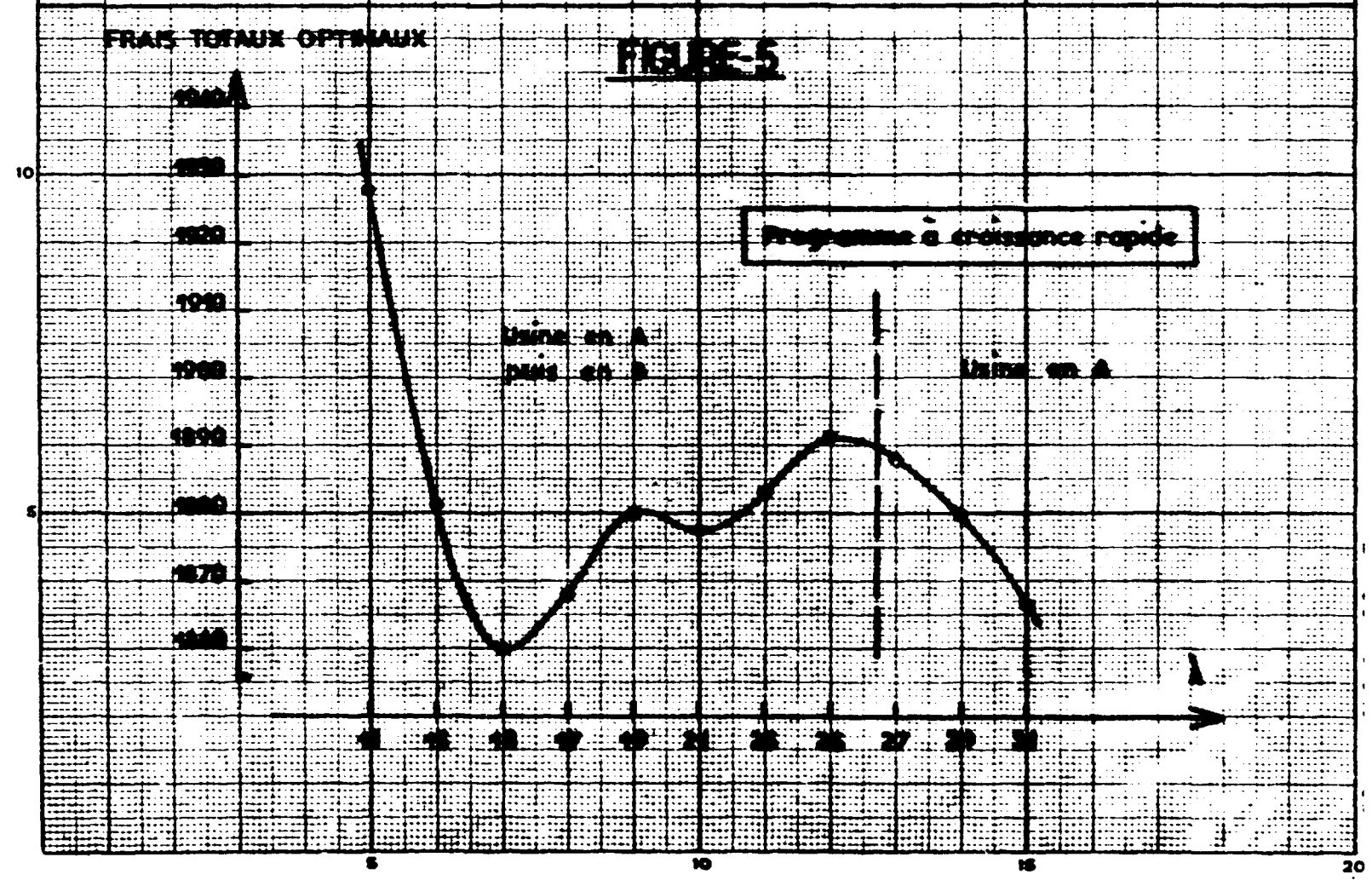
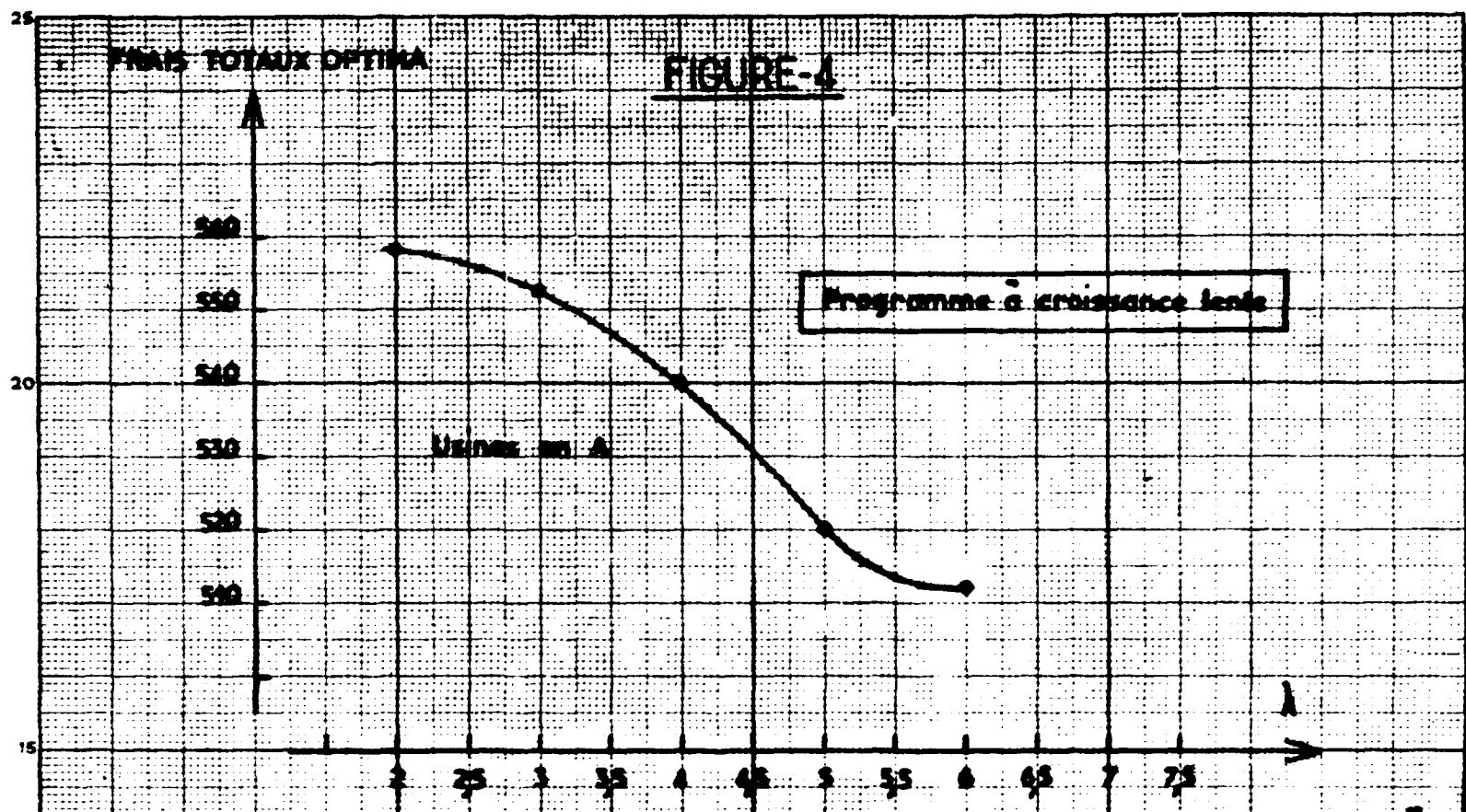
Manuscrit reçu le 25 août 1967











FIN