

**REPONSE IMPULSIONNELLE
SPATIO-TEMPORELLE D'UN REACTEUR
CYLINDRIQUE EN REGIME SOUS-CRITIQUE**

par

Jean CAZEMAJOU

Rapport C E A - R 2836

1965

Ca

CEA-R 2836 - CAZEMAJOU Jean

REPONSE IMPULSIONNELLE SPATIO-TEMPORELLE D'UN REACTEUR
CYLINDRIQUE EN REGIME SOUS-CRITIQUE

Sommaire. - Dans le présent rapport, on propose une nouvelle formulation de la réponse impulsionnelle spatio-temporelle d'un réacteur sous-critique, en géométrie cylindrique.

Une expression de la fonction de transfert entre une source ponctuelle placée au centre des coordonnées et le flux au point courant (r, z) est obtenue en résolvant, par transformation de LAPLACE, l'équation de la diffusion à un seul groupe d'énergie. Dans cette fonction de transfert, les variables r et p (variable de LAPLACE) demeurent groupées dans une fonction de BESSEL modifiée.

Le retour à l'original est effectué de deux manières :

- la méthode de MELLIN-FOURIER qui sépare les variables r et t , permet d'établir l'identité entre la nouvelle formulation et la formulation classique.
- un original conservant les variables r et t groupées est proposé qui comporte une approximation pour l'original du facteur d'extrémité ; cela permet de remplacer la série des modes harmoniques radiaux de l'expression classique par une fonction unique.

./.

CEA-R 2836 - CAZEMAJOU Jean

SPACE-TIME DEPENDENT IMPULSE RESPONSE OF A SUBCRITICAL
CYLINDRICAL REACTOR

Summary. - In this paper, a new formulation of the spatial dependent impulse response of a subcritical reactor in a cylindrical geometry is proposed;

An expression of the transfer function between a point source at the center of coordinates and the flux at a given point (r, z) is obtained by solving, by means of LAPLACE transform, the one group diffusion equation. In this transfer function, variables r and p (p being the LAPLACE variable) remain linked within a modified BESSEL function.

Taking the inverse LAPLACE transform is done by two different ways :

- using the MELLIN-FOURIER method which separates variables r and t . This method makes it possible to establish that there is identity between the classical formulation and the new one.
- using an inverse LAPLACE transform which keeps variables r and t linked. This method requires to approximate the inverse LAPLACE transform of the end factor. It is then possible to replace the radial harmonics modes series of the classical expression by a single function.

./.

Cette nouvelle formulation semble particulièrement intéressante dans le cas des réacteurs de grandes dimensions et à grand temps de vie, ainsi que chaque fois que les harmoniques jouent un rôle important.

1965

34 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

This new formulation seems to be of particular interest when dealing with reactors of large size and lifetime. It is also interesting each time the harmonics play an important role.

1965

34 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 16, rue Lord Byron, PARIS VIIIème.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 16, rue Lord Byron, PARIS VIIIème.

- Rapport CEA-R 2836 -

Département d'Electronique Générale
Service d'Electronique des Réacteurs

REPONSE IMPULSIONNELLE SPATIO-TEMPORELLE
D'UN REACTEUR CYLINDRIQUE EN REGIME SOUS-CRITIQUE

par

Jean CAZEMAJOU

- Novembre 1965 -

REPONSE IMPULSIONNELLE SPATIO-TEMPORELLE D'UN REACTEUR CYLINDRIQUE EN REGIME SOUS-CRITIQUE

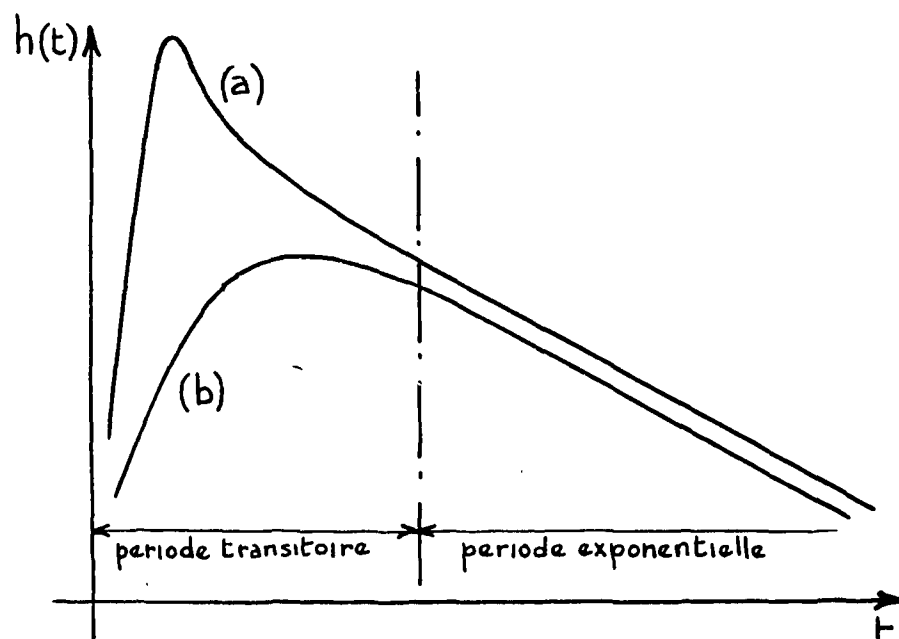
I - INTRODUCTION

Parmi les méthodes d'étude des réacteurs nucléaires en régime sous-critique, la détermination de la réponse impulsionnelle apparaît comme un outil commode et relativement précis. Ceci tient au fait qu'étant la transformée inverse de FOURIER de la fonction de transfert, elle contient tous les renseignements caractéristiques du système à étudier.

Deux procédés directs de mesure de la réponse impulsionnelle sont :

- la méthode désormais classique, des "neutrons pulsés" périodiques [[1] , [2] et [3] par exemple], dont l'appareillage est couramment vendu dans le commerce.
- la méthode d'excitation pseudo-aléatoire de source et intercorrélation [[4] , [5] , [6]] ou bien, la méthode d'excitation aléatoire de réactivité et intercorrélation [[7] , [8] , [9]] par exemple.]

Dans les deux cas, et lorsque la source est placée au centre de symétrie du réacteur, la courbe $h(t)$ mesurée peut présenter, selon la position du détecteur, une des deux allures schématisées sur la figure 1 (les ordonnées sont logarithmiques).



- Fig. 1 -

Le comportement (a) correspond au cas du détecteur proche de la source et le comportement (b) au cas du détecteur loir de la source.

Après une période transitoire, la réponse du réacteur évolue selon un régime exponentiel décroissant qui comporte les renseignements cherchés [1], [2], [4]....

Lorsque les dimensions du réacteur sont importantes, ou bien, lorsque pour des raisons pratiques, l'expérimentateur est obligé de placer son détecteur loin du centre de symétrie, la période transitoire dure plus longtemps et il faut attendre un certain temps avant d'atteindre le régime exponentiel [2], [3].

Les taux de comptage mesurés étant statistiques, les points les plus précis, c'est-à-dire les points de plus haute amplitude sur la courbe, sont inutilisés. Il faut alors augmenter la durée de la mesure pour obtenir une précision suffisante.

Nous avons pensé qu'il pouvait être intéressant d'exploiter ces points de la période transitoire en essayant d'établir une nouvelle formulation de la réponse impulsionnelle.

Nous rappellerons tout d'abord, la formulation classique, puis nous chercherons une nouvelle expression en regroupant certaines variables.

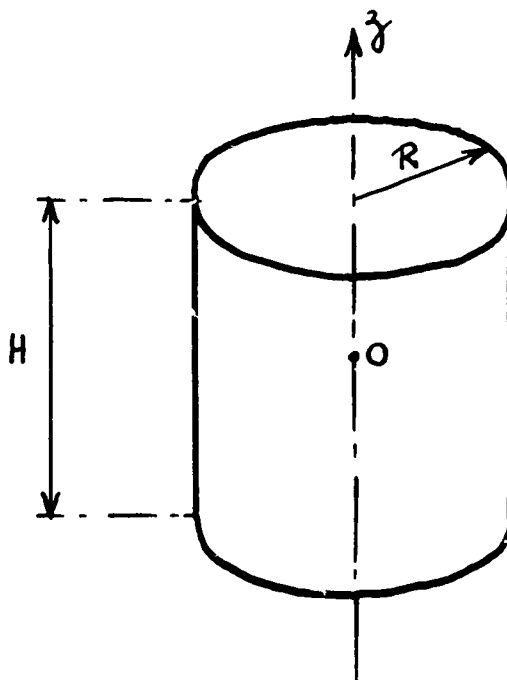
II - FORMULATION CLASSIQUE DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE

A) Hypothèses

1) Le réacteur

Nous considérerons le cas d'un réacteur cylindrique, homogène, nettement sous-critique ($\rho \simeq - 5000$ pcm, pour fixer les idées). Dans ce cas, il sera légitime de négliger la contribution des neutrons retardés dans la réponse impulsionnelle.

Soient R et H le rayon et la hauteur de ce réacteur (figure 2).



- Fig. 2 -

2) La source

Nous supposons que la source est ponctuelle et placée au centre de symétrie, O, de l'empilement qui sera pris comme centre des coordonnées. Cette source émettra au temps $t = 0$, une bouffée de neutrons assimilée à une impulsion de DIRAC. Elle peut s'écrire :

$$S(r, z, t) = S_0 \delta(r) \delta(z) \delta(t)$$

3) Les équations

Enfin, nous supposons que le comportement du flux neutronique est correctement représenté par une équation de la diffusion à un seul groupe d'énergie :

$$L^2 \Delta \phi(r, z, t) + \left[k_0 (1 - \beta) e^{-B^2 \tau} - 1 \right] \phi(r, z, t) + \frac{S(r, z, t)}{\Sigma_a} = l_0 \frac{\partial \phi(r, z, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Dans cette expression, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 : \text{coefficient de multiplication en milieu infini} \\ l_0 : \text{temps de vie moyen des neutrons en milieu infini} \\ e^{-B^2 \tau} : \text{facteur correctif des pertes en cours de ralentissement} \\ \beta : \text{fraction des neutrons retardés} \\ L^2 : \text{longueur de diffusion} \\ \Sigma_a : \text{section efficace macroscopique d'absorption} \end{array} \right.$$

Dans la suite des calculs, pour simplifier l'écriture, on posera :

$$k_0 (1 - \beta) e^{-B^2 \tau} = k'$$

B) Résolution

L'équation (1) s'écrit :

$$\Delta \phi(r, z, t) + \frac{k' - 1}{L^2} \phi(r, z, t) - \frac{l_0}{L^2} \frac{\partial \phi(r, z, t)}{\partial t} = - \frac{S(r, z, t)}{L^2 \Sigma_a} \quad (2)$$

1) Principe

Nous allons résoudre l'équation sans second membre, en cherchant des solutions générales de la forme :

$$\phi(r, z, t) = \mathcal{R}(r) \mathcal{Z}(z) \mathcal{E}(t)$$

Après division par $\mathcal{R}(r) \mathcal{Z}(z) \mathcal{E}(t)$ l'équation (2) devient :

$$\frac{\Delta(\mathcal{R}\mathcal{Z})}{\mathcal{R}\mathcal{Z}} + \frac{k' - 1}{L^2} - \frac{\ell_0}{L^2} \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \quad (3)$$

En coordonnées cylindriques, avec symétrie de révolution, l'opérateur Laplacien s'écrit :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Et l'équation (3) devient :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{d^2 \mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right] + \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} + \frac{k' - 1}{L^2} - \frac{\ell_0}{L^2} \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

Pour qu'elle soit satisfaite, il faudra savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} = \text{constante} = -p^2 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{d^2 \mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right] = \text{constante} = -q^2 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{L^2}{\ell_0} \left[\frac{k' - 1}{L^2} - p^2 - q^2 \right] \end{array} \right. \quad (6)$$

- L'équation (4) a pour solution :

$$\mathcal{Z}(z) = A_1 \cos pz + A_2 \sin pz$$

- L'équation (5) se ramène aisément à une équation de BESSEL en posant : $u = qr$.

Soit :

$$\frac{d\mathcal{R}}{dr} = q \frac{d\mathcal{R}}{du} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \mathcal{R}}{dr^2} = q^2 \frac{d^2 \mathcal{R}}{du^2}$$

$$\text{Elle s'écrit donc : } \frac{d^2 \mathcal{R}}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\mathcal{R}}{du} + \mathcal{R} = 0$$

Et admet pour solutions :

$$\mathcal{R}(r) = B_1 J_0(qr) + B_2 Y_0(qr)$$

- L'équation (6) a pour solution :

$$\mathcal{E}(t) = C_1 e^{-\frac{1 - k' + L^2(p^2 + q^2)}{\ell_0} t}$$

2) Choix des solutions

Il convient maintenant de préciser ces solutions quant à leur forme. Partout dans l'empilement, le flux devra être :

- fini : il faudra donc éliminer la solution Y_0 .
- et non négatif : il faudra éliminer la solution en sinus.

3) Conditions aux limites

Le flux devra s'annuler à la périphérie de l'empilement, c'est-à-dire que l'on devra avoir :

$$\begin{cases} \phi(r, \pm \frac{H}{2}, t) = 0 & (7) \\ \phi(R, z, t) = 0 & (8) \end{cases}$$

La condition (7) implique :

$$p = \frac{(2m+1)\pi}{H}$$

Et la condition (8) :

$$q = \frac{\mu_n}{R}$$

où les μ_n sont les racines successives de l'équation : $J_0(x) = 0$. ($\mu_1 = 2,405$). D'où la solution :

$$\phi(r, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right) e^{-\frac{1 - k' + L^2(p^2 + q^2)}{\ell_0} t}$$

4) Condition de source

Enfin les A_{mn} seront définis par une condition de source ; les fonctions cosinus et J_0 constituant une suite de fonctions orthogonales, on développe le terme source en série de ces fonctions ; on obtient :

$$S(r, z, t) = \frac{2S_0 v}{\pi R^2 H} \delta(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)}$$

(on a multiplié S_0 par la vitesse moyenne des neutrons, v , pour convertir le terme source en flux)

On écrit que, lorsque $t = 0$, chaque harmonique de flux est égal à chaque harmonique de source et l'on trouve :

$$A_{mn} = \frac{2S_0 v}{\pi R^2 H} \frac{1}{J_1^2(\mu_n)}$$

Et l'expression classique finale de la réponse à une impulsion de source s'écrit :

$$\Phi(r, z, t) = \frac{2S_0 v}{\pi R^2 H} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{1-k'+L^2\left[\frac{(2m+1)^2\pi^2}{H^2} + \frac{\mu_n^2}{R^2}\right]t}{\ell_0}}$$

que nous écrirons :

$$h(r, z, t) = \frac{2S_0 v}{\pi R^2 H} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-(\alpha_0 + \alpha_{zm} + \alpha_{rn})t} \quad (9)$$

en posant :

$$\alpha_0 = \frac{1-k'}{\ell_0} \quad \alpha_{zm} = \frac{L^2(2m+1)^2\pi^2}{\ell_0 H^2} \quad \alpha_{rn} = \frac{L^2 \mu_n^2}{\ell_0 R^2}$$

III - NOUVELLE FORMULATION DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE

A) Hypothèses

Nous conserverons les mêmes hypothèses que précédemment et nous allons chercher une solution de l'équation (1) qui groupe les variables r et t.

B) Résolution

L'équation (1) s'écrit :

$$L^2 \Delta \Phi(r, z, t) + (k' + 1)\Phi(r, z, t) + \frac{S(r, z, t)}{\sum a} = \ell_0 \frac{\partial \Phi(r, z, t)}{\partial t}$$

1) Principe

Le principe de la résolution consiste à établir l'expression d'une fonction de transfert entre la source et le flux au point courant (r, z) $\left[[10] , [11] , [12] \right]$. Une transformation inverse de LAPLACE donnera la réponse impulsionnelle.

Si nous supposons toutes les conditions initiales nulles, ($\Phi = \dot{\Phi} = 0$) l'équation (1) transformée de LAPLACE s'écrira :

$$\Delta \bar{\Phi}(r, z, p) + \left(\frac{k' - 1 - l_0 p}{L^2} \right) \bar{\Phi}(r, z, p) = \bar{F}(p) e^{-\lambda r} e^{-\lambda z} \quad (10)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}(r, z, p) = \text{transformée de LAPLACE de } \Phi(r, z, t) \\ \quad = \int_0^{\infty} \Phi(r, z, t) e^{-pt} dt \\ \bar{F}(p) = \text{transformée de LAPLACE de } - \frac{S(t)}{\sum_a} \end{array} \right.$$

Le second membre est nul partout sauf pour $r = z = 0$. La solution sera obtenue en résolvant l'équation sans second membre, où l'on considère p comme un paramètre complexe :

$$\Delta \bar{\Phi}(r, z, p) - A^2(p) \bar{\Phi}(r, z, p) = 0 \quad (11)$$

où : $A^2(p) = \frac{1 - k' + l_0 p}{L^2}$

2) Conditions aux limites et condition de source

On imposera les conditions :

- a) le flux doit être fini et non négatif partout dans l'empilement
- b) il doit s'annuler à la périphérie du réacteur.

La formule de transformation de LAPLACE montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(R, z, t) = 0 \\ \Phi(r, \pm \frac{H}{2}, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{imposent} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}(R, z, p) = 0 \\ \bar{\Phi}(r, \pm \frac{H}{2}, p) = 0 \end{array} \right.$$

- c) une condition de source sera précisée dans la suite du calcul.

3 Résolution

- a) On va tout d'abord chercher des solutions de la forme :

$$\bar{\Phi}(r, z, p) = Z(z) \bar{R}(r, p) \quad 1)$$

Après division des deux membres par $\bar{\Phi}(r, z, p)$, l'équation (11) s'écrit :

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - A^2(p) = 0 \quad (12)$$

Comme dans cette expression, seule la quantité $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$ dépend de z , on devra avoir:

1) Remarque : on peut se demander pourquoi nous donnons un rôle particulier à r en cherchant une solution en (r, t) et non une solution en (z, t) . Nous répondrons à cette question dans la "Discussion" (paragraphe V) du présent exposé.

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \text{constante} = -q^2$$

C'est-à-dire : $Z(z) = A_1 \cos qz + A_2 \sin qz$.

La fonction impaire sera éliminée par la condition (a) ; la condition (b) impose :

$$q = \frac{(2m+1)\pi}{H} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

D'où une infinité de solutions :

$$Z_m(z) = A_m \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H}$$

L'équation (12) s'écrit maintenant :

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2 \bar{R}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{R}}{dr} \right] - \bar{\gamma}_m^2(p) = 0 \quad (13)$$

avec : $\bar{\gamma}_m^2(p) = \bar{A}^2(p) + \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{H^2}$

Si l'on pose : $u = \gamma r$, l'équation (13) devient :

$$\frac{d^2 \bar{R}}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\bar{R}}{du} - \bar{R} = 0$$

C'est une équation modifiée de BESSEL d'ordre zéro, qui admet pour solution :

$$\bar{R}_m(p) = B_1 K_0 \left[r \bar{\gamma}_m(p) \right] + B_2 I_0 \left[r \bar{\gamma}_m(p) \right]$$

La condition (b) impose : $B_1 K_0(R \bar{\gamma}_m) + B_2 I_0(R \bar{\gamma}_m) = 0$

Soit :

$$B_2 = -B_1 \frac{K_0 \left[R \bar{\gamma}_m(p) \right]}{I_0 \left[R \bar{\gamma}_m(p) \right]}$$

D'où :

$$R_m(r,p) = B_1 \left\{ K_0 \left[r \bar{\gamma}_m(p) \right] - \frac{K_0 \left[R \bar{\gamma}_m(p) \right]}{I_0 \left[R \bar{\gamma}_m(p) \right]} I_0 \left[r \bar{\gamma}_m(p) \right] \right\}$$

La solution cherchée est donc de la forme :

$$\bar{\phi}(r, z, p) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \left[K_0(r\bar{\gamma}_m) - \frac{K_0(R\bar{\gamma}_m)}{I_0(R\bar{\gamma}_m)} I_0(r\bar{\gamma}_m) \right]$$

Avec :

$$\bar{\gamma}_m(p) = \left[\frac{1 - k' + t_0 p}{L^2} + \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{H^2} \right]^{1/2}$$

b) La condition de source qui permet de préciser les A_m sera analogue à celle établie en [13], page 122 ; nous allons tout d'abord développer le terme source en série de fonctions orthogonales, pour $r = 0$. Ces fonctions devront vérifier la condition (b). Pour $r = 0$, on cherche $\bar{S}_m(p)$, tel que :

$$\bar{S}(0, z, p) = \bar{S}(p) \hat{0}(z) = \sum_m \bar{S}_m(p) \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H}$$

On obtient :

$$\bar{S}_m(p) = \frac{2 \bar{S}(p)}{H}$$

Il convient de faire une remarque analogue à celle faite en [13], page 117 :

"Si le matériau dans lequel émet la source ponctuelle est un bon modérateur, à une distance relativement faible de l'axe, le flux se comporte comme s'il provenait d'une source filiforme, axiale, uniformément répartie".

La condition de source sera obtenue en écrivant :

"le nombre de neutrons traversant un cylindre de rayon r , de hauteur H , lorsque r tend vers zéro, est égal à l'intensité de la source et, ceci, pour chaque harmonique"

Si \bar{J}_m désigne le mode harmonique d'ordre m du courant neutronique, on devra avoir :

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r H \bar{J}_m = \bar{S}_m(p) \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r H \left(-D \frac{\partial \bar{\phi}_m}{\partial r} \right) = \frac{2}{H} \bar{S}(p) \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H}$$

En se souvenant que :

$$\frac{dK_0(z)}{dz} = -K_1(z) \quad \text{et} \quad \frac{dI_0(z)}{dz} = I_1(z)$$

on a :

$$\frac{\partial \bar{\phi}_m}{\partial r} = A_m \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \bar{\gamma}_m \left[-K_1(r\bar{\gamma}_m) - \frac{K_0(R\bar{\gamma}_m)}{I_0(R\bar{\gamma}_m)} I_1(r\bar{\gamma}_m) \right]$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r H \left(- D \frac{\partial \phi_m}{\partial r} \right) = 2\pi H D A_m \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} x$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r \bar{\gamma}_m K_1(r \bar{\gamma}_m) + \frac{K_0(R \bar{\gamma}_m)}{I_0(R \bar{\gamma}_m)} r \bar{\gamma}_m I_1(r \bar{\gamma}_m) \right\}$$

- lorsque z tend vers zéro, $I_1(z)$ tend vers zéro, et, à fortiori, $z I_1(z)$. Donc :

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \bar{\gamma}_m I_1(r \bar{\gamma}_m) = 0$$

- pour obtenir la limite de $z K_1(z)$, nous considérerons le développement en série de $K_1(z)$ au voisinage de l'origine [14], [15] :

$$K_1(z) = \left[\log \frac{z}{2} - \gamma \right] I_1(z) + \frac{1}{z} - \frac{\binom{3}{2}}{(1!)^2(1+1)} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{\binom{5}{2}}{(2!)^2(1+2)} \left(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots$$

Ainsi, lorsque z tend vers zéro, $z K_1(z)$ tend vers 1, grâce au terme en $1/z$; donc :

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \bar{\gamma}_m K_1(r \bar{\gamma}_m) = 1$$

Et la condition de source s'écrit :

$$\frac{2}{H} \bar{S}(p) \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} = 2\pi H D A_m \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H}$$

Et :

$$A_m = \frac{\bar{S}(p)}{\pi D H^2}$$

D'où l'expression de la transformée de LAPLACE du flux :

$$\bar{\Phi}(r, z, p) = \frac{\bar{S}(p)}{\pi D H^2} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \left[K_0(r \bar{\gamma}_m) - \frac{K_0(R \bar{\gamma}_m)}{I_0(R \bar{\gamma}_m)} I_0(r \bar{\gamma}_m) \right]$$

Et celle de la fonction de transfert cherchée :

$$\bar{H}(r, z, p) = \frac{\bar{\Phi}(r, z, p)}{\bar{S}(p)} = \frac{1}{\pi D H^2} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \left[K_0(r \bar{\gamma}_m) - \frac{K_0(R \bar{\gamma}_m)}{I_0(R \bar{\gamma}_m)} I_0(r \bar{\gamma}_m) \right] \quad (14)$$

avec :

$$\bar{\gamma}_m(p) = \left[\frac{1 - k' + \ell_0 p}{L^2} + \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{H^2} \right]^{1/2}$$

La réponse impulsionnelle sera la transformée inverse de LAPLACE de cette expression :

$$h(r, z, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\bar{H}(r, z, p) \right]$$

C) Retour à l'original

1) Généralités

Nous effectuerons le retour à l'original de $\bar{H}(r, z, p)$ par deux méthodes :

- nous utiliserons tout d'abord le théorème d'inversion de MELLIN-FOURIER ; ce procédé va nous ramener à une séparation de variables et nous permettra ainsi d'établir l'identité entre cette solution et la solution classique

- dans la seconde partie de ce paragraphe, nous chercherons un original de $\bar{H}(r, z, p)$ conservant la non séparabilité des variables r et t , ce qui est le but cherché.

2) Retour à l'original par MELLIN-FOURIER

Pour simplifier l'écriture, on posera comme précédemment :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1 - k'}{\ell_0} \\ \alpha_{zm} = \frac{L^2 (2m+1)^2 \pi^2}{\ell_0 H^2} \end{cases} \quad \text{et } Q^2 = \frac{\ell_0}{L^2}$$

D'où :

$$\bar{\gamma}_m^2(p) = \frac{\ell_0}{L^2} \left[\frac{1 - k'}{\ell_0} + p + \frac{L^2 (2m+1)^2 \pi^2}{\ell_0 H^2} \right] = Q^2 (p + \alpha_0 + \alpha_{zm})$$

L'original de

$$K(r\bar{\gamma}_m) = \frac{K_0(R\bar{\gamma}_m)}{I_0(R\bar{\gamma}_m)} I_0(r\bar{\gamma}_m) = \frac{K_0(r\bar{\gamma}_m) I_0(R\bar{\gamma}_m) - K_0(R\bar{\gamma}_m) I_0(r\bar{\gamma}_m)}{I_0(R\bar{\gamma}_m)}$$

s'écrit :

$$\frac{z}{t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \frac{K_0(Qr\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{zm}}) I_0(QR\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{zm}}) - K_0(QR\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{zm}}) I_0(Qr\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{zm}})}{I_0(QR\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{zm}})} dt$$

Posons : $p + \alpha_0 + \alpha_{zm} = s$

$$f(t) = \frac{e^{-(\alpha_0 + \alpha_{zm})t}}{2\pi j} \int_{c' - j\infty}^{c' + j\infty} e^{st} \frac{K_0(QR\sqrt{s})I_0(QR\sqrt{s}) - K_0(QR\sqrt{s})I_0(QR\sqrt{s})}{I_0(QR\sqrt{s})} ds \quad (15)$$

Si l'on remplace les fonctions I_0 et K_0 par le premier terme de leur développement asymptotique, lorsque s tend vers l'infini, on s'aperçoit aisément que le lemme de JORDAN s'applique et que l'intégration (15) se ramène à un simple calcul de résidus.

Dans la suite du calcul, nous aurons à utiliser les relations suivantes : [14], [15], [16].

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0(\gamma) = J_0(j\gamma) \quad (16) \\ I'_0(\gamma) = I_1(\gamma) \quad (17) \\ I_1(j\gamma) = jJ_1(\gamma) \quad (18) \\ I_0(\gamma)K_1(\gamma) + I_1(\gamma)K_0(\gamma) = 1/\gamma \quad (19) \end{array} \right.$$

Les pôles de la fonction de l'intégrale (15) sont les valeurs S_n

$$I_0(QR\sqrt{S_n}) = 0$$

c'est-à-dire, d'après (16) : $J_0(jQR\sqrt{S_n}) = 0$

Or on sait que tous les zéros de la fonction $J_0(\cdot)$ sont réels ; soient μ_n ces zéros et $j\mu_n$ ceux de I_0 . On en tire :

$$\sqrt{S_n} = \frac{j\mu_n}{QR} \quad S_n = \frac{-\mu_n^2}{Q^2 R^2}$$

Le résidu au point S_n est donc, avec les relations (17) et (18) :

$$R_n = e^{-\frac{\mu_n^2 t}{Q^2 R^2}} \frac{K_0(QR\frac{j\mu_n}{QR})I_0(QR\frac{j\mu_n}{QR}) - K_0(QR\frac{j\mu_n}{QR})I_0(QR\frac{j\mu_n}{QR})}{I_1(QR\frac{j\mu_n}{QR})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 R^2}{j\mu_n}$$

Et avec les relations (16) et (18), après simplification :

$$\mathcal{R}_n = e^{-\frac{\mu_n^2 t}{Q^2 R^2}} \frac{K_0\left(j\frac{r}{R}\mu_n\right) J_0(\mu_n) - K_0(j\mu_n) J_0\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)}{\frac{Q^2 k^2}{2\mu_n} J_1(\mu_n)}$$

En se souvenant que $J_0(\mu_n) = 0$, et en multipliant haut et bas par $J_1(\mu_n)$:

$$\mathcal{R}_n = \frac{2}{Q^2 R^2} \frac{J_0\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 t}{Q^2 R^2}} \left[-\mu_n K_0(j\mu_n) J_1(\mu_n) \right]$$

Les relations (18) et (19) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} K_0(j\mu_n) J_1(\mu_n) &= \frac{1}{j} \left[K_0(j\mu_n) I_1(j\mu_n) \right] = \frac{1}{j} \left[\frac{1}{j\mu_n} - I_0(j\mu_n) K_1(j\mu_n) \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_n} \quad \text{puisque } I_0(j\mu_n) = J_0(\mu_n) = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{R}_n = \frac{2L^2}{R^2 \ell_0} \frac{J_0\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\alpha_{rn} t}$$

en remplaçant Q^2 par sa valeur et $\frac{L^2 \mu_n^2}{\ell_0 R^2}$ par α_{rn} .

D'où l'original de $\bar{H}(r, z, p)$, c'est-à-dire la réponse impulsionnelle, lorsque l'amplitude de l'impulsion de source convertie en flux est $S_0 v$:

$$\frac{2L^2 S_0 v}{\ell_0 R^2 \pi D H^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-(\alpha_0 + \alpha_m + \alpha_{rm}) t}$$

c'est-à-dire, en se souvenant que $L^2 = \frac{D}{\sum_a}$ et $\ell_0 = \frac{1}{v \sum_a}$

$$h(r, z, t) = \frac{2 S_0 r^2}{\pi^2 H^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \frac{J_0(\mu_n \frac{r}{R})}{J_1^2(\mu_n)} e^{-(\alpha_0 + \alpha_{zm} + \alpha_{rn}) t} \quad (20)$$

Nous voyons que l'expression (20) est identique quant à sa forme, à l'expression classique (9) ²⁾. La différence entre les coefficients placés devant les sommations provient de ce que l'on n'a pas choisi les mêmes conditions de source dans les deux calculs de $h(r, z, t)$.

3) Original conservant r et t groupés

Afin de conserver la non séparabilité des variables, nous allons considérer séparément les deux termes de la fonction de r et p dans $\bar{H}(r, z, p)$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}(r, p) &= K_0(Qr \sqrt{p + \alpha_0 + \alpha_{zm}}) - \frac{K_0(QR \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p})}{I_0(QR \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p})} I_0(rQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p}) \\ &= \bar{\mathcal{R}}_1(r, p) - \bar{\mathcal{R}}_2(r, p) \end{aligned}$$

$$a) \underline{\bar{\mathcal{R}}_1(r, p) = K_0(rQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p})}$$

Cette expression constitue le terme principal de $\bar{\mathcal{R}}(r, p)$: en effet, en module, les fonctions K_0 décroissent et les fonctions I_0 , croissent, lorsque le module de leur argument croît ; d'où :

$$\frac{|I_0(rz)|}{|I_0(Rz)|} \ll 1 \quad \text{puisque } r \ll R$$

Et comme $|K_0(Rz)| < |K_0(rz)|$

$$|K_0(rQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p})| \gg \left| \frac{K_0(RQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p}) I_0(rQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p})}{I_0(RQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{zm} + p})} \right|$$

²⁾ Remarque : un calcul aboutissant au même résultat, et utilisant des développements en séries de FOURIER-BESSEL a été effectué par M. G. WANNER de l'INSTN, que je remercie particulièrement pour les entretiens que j'ai eus avec lui et l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail. Cependant, étant donné l'extrême simplicité de la méthode par MELLIN-FOURIER, je ne reproduirai pas ses calculs ici.

On trouve l'original de cette fonction dans les dictionnaires d'images [17] par exemple

$$K_0(rQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{\gamma m} + p}) \left[\frac{1}{2t} e^{-(\alpha_0 + \alpha_{\gamma m})t} e^{-\frac{r^2 Q^2}{4t}} \right]$$

(On trouvera la démonstration de cette relation en APPENDICE 1)

D'où :

$$\mathcal{R}_1(r, t) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{r^2}{4L^2 t}} e^{-(\alpha_0 + \alpha_{\gamma m})t} \quad (21)$$

$$b) \overline{\mathcal{R}}_2(r, p) = \frac{K_0(RQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{\gamma m} + p})}{I_0(RQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{\gamma m} + p})} I_0(rQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{\gamma m} + p})$$

Cette expression constitue le "facteur d'extrémité" de la fonction de transfert. Elle assure la nullité du flux à la périphérie du réacteur.

— Malheureusement, nous n'avons pu établir une expression rigoureuse de l'original de $\overline{\mathcal{R}}_2(r, p)$. Les méthodes que nous avons essayées sont :

- MELLIN-FOURIER : elle conduit au résultat, mais aussi, à la séparation des variables r et t , ainsi que nous l'avons vu au paragraphe précédent,

- la méthode qui permet de trouver l'original de $K_0(a\sqrt{p})$: elle consiste à utiliser une représentation intégrale de la fonction dont on veut trouver l'original, à prendre l'original de la quantité sous le signe somme, puis effectuer l'intégration.

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il convient d'établir une expression intégrale de la fonction :

$$\frac{1}{I_0(RQ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_{\gamma m} + p})}$$

Cette fonction est solution de l'équation différentielle :

$$yy'' + y' \left(\frac{y}{z} - 2y' \right) + y^2 = 0$$

et, nous n'avons pas su en établir une forme intégrale convenant au calcul à effectuer (la méthode essayée étant la méthode de LAPLACE, par analogie avec les formes intégrales des fonctions de BESSEL).

Pour établir une forme approximative de l'original de $\bar{h}_2(r,p)$, nous avons remplacé les fonctions I_0 et K_0 par le premier terme de leur développement asymptotique. Ces développements sont rapidement convergents [14], [15], particulièrement pour K_0 et, si r et R ne sont pas très petits, on peut espérer que seules les composantes très basse-fréquence de $h(r, \gamma, t)$ seront affectées par cette approximation. Par la suite, nous tenterons une discussion sur le domaine de validité de cette approximation.

Tout d'abord, remarquons qu'en posant : $S = p + \alpha_0 + \alpha_{\gamma m}$, comme précédemment, on a :

$$\sqrt{-1} \left[\frac{K_0(RQ\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{\gamma m}}) I_0(rQ\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{\gamma m}})}{I_0(RQ\sqrt{p+\alpha_0+\alpha_{\gamma m}})} \right] = e^{-(\alpha_0+\alpha_{\gamma m})t} \sqrt{-1} \left[\frac{K_0(RQ\sqrt{S}) I_0(rQ\sqrt{S})}{I_0(RQ\sqrt{S})} \right]$$

Si l'on admet que : [14], [15]

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0(Qr\sqrt{S}) \approx \frac{e^{Qr\sqrt{S}}}{\sqrt{2\pi QrS^{1/4}}} \\ I_0(QR\sqrt{S}) \approx \frac{e^{QR\sqrt{S}}}{\sqrt{2\pi QR S^{1/4}}} \\ K_0(QR\sqrt{S}) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2QR}} \frac{1}{S^{1/4}} e^{-QR\sqrt{S}} \end{array} \right.$$

alors :

$$\frac{K_0(QR\sqrt{S}) I_0(Qr\sqrt{S})}{I_0(QR\sqrt{S})} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{rQ}} S^{-1/4} e^{-Q(2R-r)\sqrt{S}} \quad (22)$$

On peut trouver l'original de cette expression dans un dictionnaire d'images : [16], page 268 par exemple

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} p^{\frac{r}{2}-1} e^{-q\sqrt{p}} \frac{1}{(2t)^{r/2}} \exp\left(-\frac{q^2}{8t}\right) D_{r-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2t}}\right)$$

Posant : $r = 3/2$, l'original de (22) est donc :

$$\frac{1}{\sqrt{Qr}} \frac{1}{(2t)^{3/4}} \exp \left[- \frac{Q^2(2R-r)^2}{8t} \right] D_{1/2} \left[\frac{Q(2R-r)}{\sqrt{2t}} \right]$$

où $D_{1/2}$ désigne la fonction de WEBER d'ordre $1/2$.

Remplaçons $D_{1/2}$ par le premier terme de son développement asymptotique [18] :
(on peut remarquer qu'ici, l'approximation est justifiable par le fait que t figure au dénominateur de l'argument de la fonction de WEBER et que nous nous intéressons à des valeurs relativement faibles de t)

$$D_{1/2} \left[\frac{Q(2R-r)}{\sqrt{2t}} \right] \approx \frac{1}{(2t)^{1/4}} \sqrt{Q(2R-r)} \exp \left[- \frac{Q^2(2R-r)^2}{8t} \right]$$

Et l'original de (22) s'écrit, après regroupement des termes :

$$\frac{1}{2t} \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{l_0^2(2R-r)^2}{4L^2t}}$$

d'où :

$$\int^{-1} \left[\frac{K_0(QR\sqrt{\alpha_0 + \alpha_j m + p}) I_0(Qr\sqrt{\alpha_0 + \alpha_j m + p})}{I_0(QR\sqrt{\alpha_0 + \alpha_j m + p})} \right] \approx \frac{1}{2t} \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-(\alpha_0 + \alpha_j m)t} e^{-\frac{l_0^2(2R-r)^2}{4L^2t}} \quad (23)$$

Regroupant les expressions (21) et (23), on obtient, pour la réponse impulsionnelle, la nouvelle formulation :

$$f_2(r, z, t) \approx \frac{A}{2t} \left[e^{-\frac{l_0^2 r^2}{4L^2 t}} \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{l_0^2(2R-r)^2}{4L^2 t}} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} e^{-(\alpha_0 + \alpha_j m)t} \quad (24)$$

où A est une constante proportionnelle à l'intensité de la source.

On peut remarquer tout de suite que (24) vérifie les conditions aux limites ; cependant, du fait des approximations,

$$\sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{l_0(2R-r)^2}{4L^2t}} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} e^{-(\alpha_0 + \alpha_z m)t}$$

n'est pas solution rigoureuse de l'équation de diffusion.

IV - DISCUSSION

1) Exemple numérique

Nous sommes donc en présence de deux développements en série qui représentent, aux approximations précédentes près, la même fonction $h(r, z, t)$.

$$h(r, z, t) = A \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-(\alpha_0 + \alpha_z m + \alpha_{rn})t} \quad (9)$$

$$h(r, z, t) = \frac{A'}{2t} \left[e^{-\frac{l_0 r^2}{4L^2t}} - \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{l_0(2R-r)^2}{4L^2t}} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{H} e^{-(\alpha_0 + \alpha_z m)t} \quad (24)$$

avec les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{1 - k'}{l_0} \\ \alpha_z = \frac{L^2(2m+1)^2 \pi^2}{l_0 H^2} \\ \alpha_{rn} = \frac{L^2 \mu_n^2}{l_0 R^2} \end{array} \right.$$

Dans la suite de l'exposé, nous nous placerons à la côte $z = 0$, afin d'éliminer les fonctions cosinus.

Nous avons tracé, sur la figure (3), en coordonnées semi-logarithmiques, "le mode fondamental" de la réponse impulsionnelle (24), dans le cas d'un réacteur dont les caractéristiques seraient les suivantes :

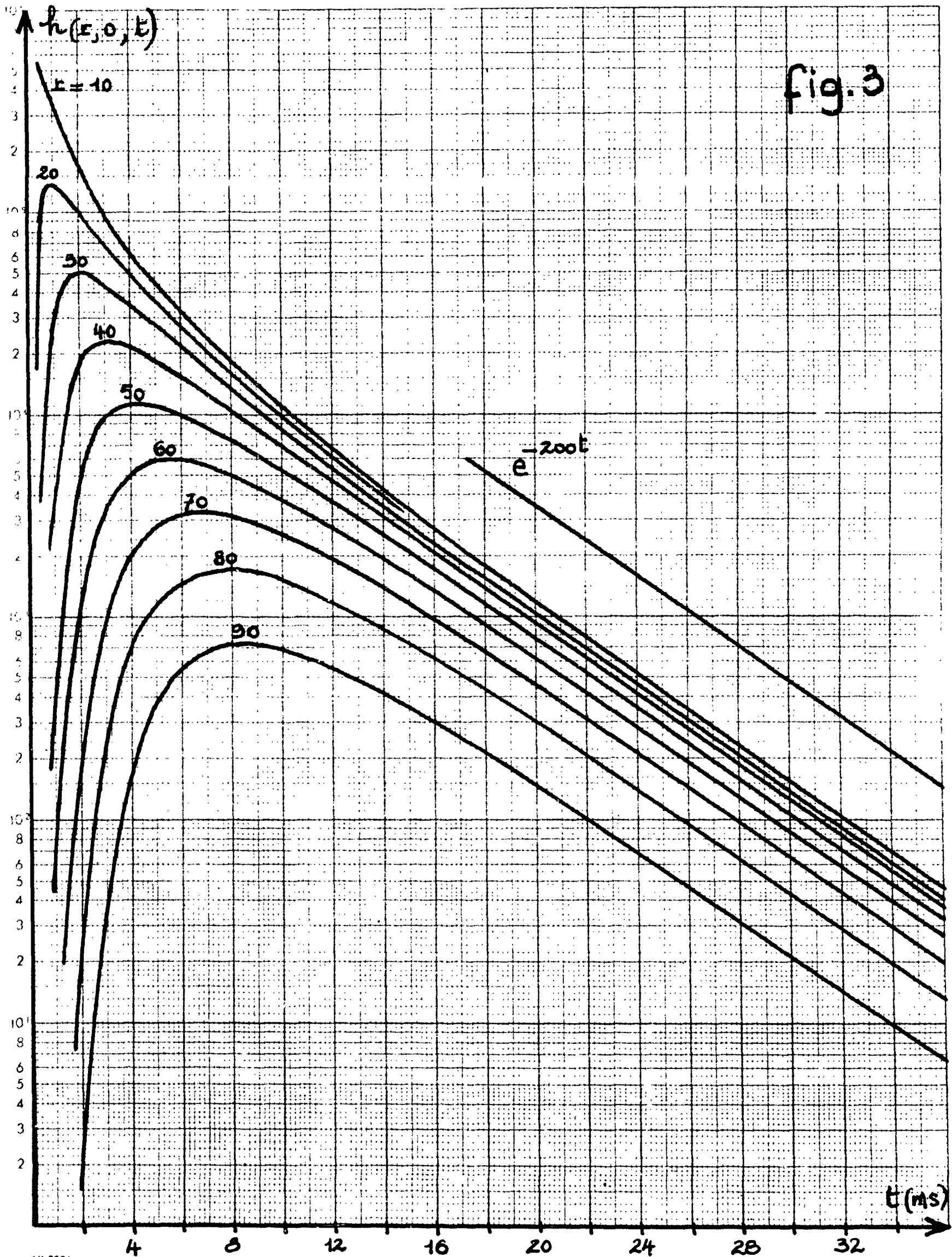


fig. 3

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 100 \text{ cm} \\ H = 100 \text{ cm} \\ k' = 0,9676 \\ l_0 = 500 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ L^2 = 43.3 \text{ cm}^2 \end{array} \right.$$

Ces valeurs peuvent correspondre au cas d'un réacteur au graphite et conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \approx -10\,000 \text{ pcm} \\ \alpha_0 + \alpha_{\gamma 0} + \alpha_{r1} = \alpha\text{-Rossi} = 200 \text{ s}^{-1} \\ \alpha_0 + \alpha_{\gamma 0} = 150 \text{ s}^{-1} \end{array} \right.$$

Sur la figure (3), $h(r,0,t)$ est tracée en fonction de t , pour diverses valeurs de r allant de 0 à R de 10 cm en 10 cm.

L'examen de la figure (3) et la comparaison des expressions (9) et (24) appellent quelques remarques.

2) L'allure générale des courbes de la figure (3) montre que le "seul mode fondamental" de la nouvelle expression suffit pour rendre compte :

- des divers types de comportement de $h(r, \gamma, t)$ que nous avons mentionnés dans l'introduction du présent exposé et schématisés sur la figure (1)

- de la propagation d'une onde neutronique, du centre vers la périphérie du réacteur: le passage du maximum du flux neutronique se produit de plus en plus tard, et ce maximum décroît fortement, au fur et à mesure que le point d'observation s'éloigne du centre des coordonnées

- du comportement exponentiel décroissant, d'exposant $\alpha_0 + \alpha_{\gamma 0} + \alpha_{r1} = \alpha\text{-Rossi}$, vers lequel tend la réponse du réacteur, quel que soit le point d'observation.

D'ores et déjà, l'intérêt du nouveau développement apparaît, puisque son seul "mode fondamental" donne déjà la "forme" de la courbe à représenter.

3) Comparaison des expressions (9) et (24) - Influence des harmoniques

Ainsi que le suggèrent les notations $\alpha_{\gamma m}$ et α_{rn} déjà utilisées, nous appellerons :

- harmoniques axiaux : les modes harmoniques, d'ordre m , représentés par :

$$f_m(t) = e^{-\alpha_{\gamma m} t} = e^{-\frac{L^2 \pi^2 (2m+1)^2}{l_0 H^2} t}$$

- harmoniques radiaux : les modes harmoniques, d'ordre n , représentés par :

$$\mathcal{R}_n(r,t) = \frac{J_0\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\alpha_{rn}t} = \frac{J_0\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{L^2\mu_n^2}{R^2}t}$$

a) Comparaison de (9) et (24)

Les expressions (9) et (24) s'écrivent donc, respectivement (à un facteur multiplicatif près) :

$$h(r,z,t) = e^{-\alpha_0 t} \sum_n \mathcal{R}_n(r,t) \sum_m \mathcal{A}_m(t) \quad (9')$$

$$h(r,o,t) = e^{-\alpha_0 t} \frac{1}{2t} \left[e^{-\frac{\ell_0 r^2}{4L^2 t}} - \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{\ell_0 (2R-r)^2}{4L^2 t}} \right] \sum_m \mathcal{A}_m(t) \quad (24')$$

Comme (9') et (24') représentent la même fonction, nous voyons que :

"la série des harmoniques radiaux de l'expression classique a été remplacée par une fonction unique dans la nouvelle expression"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{L^2\mu_n^2}{R^2}t} \approx \frac{1}{2t} \left[e^{-\frac{\ell_0 r^2}{4L^2 t}} - \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{\ell_0 (2R-r)^2}{4L^2 t}} \right] \quad (25)$$

b) Comportement au voisinage de l'origine des temps

Considérons le second membre de l'expression (25) ; si l'on y pose : $y = 1/t$, et si l'on y fait tendre t vers zéro, sa limite est celle de y/e^y , lorsque y tend vers l'infini, c'est-à-dire zéro.

La réponse impulsionnelle passe bien par l'origine, ce qui est, bien sûr, très normal, mais n'apparaît pas du premier coup d'oeil dans le premier membre de (25), où cela se traduit par :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x\mu_n)}{J_1^2(\mu_n)} = 0 \quad \text{quel que soit } x, \text{ compris entre } 0 \text{ et } 1$$

$(x = r/R)$

De la même façon, la dérivée par rapport au temps du second membre de (25) s'écrit :

$$\frac{-1}{2t^2} \left[E_1 - C E_2 \right] + \frac{1}{2t^3} \left[\frac{\ell_o r^2}{4L^2} E_1 - C \frac{\ell_o (2R-r)^2}{4L^2} E_2 \right]$$

où l'on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \sqrt{\frac{2R}{r}} - 1 \\ E_1 = \exp \left(-\frac{\ell_o r^2}{4L^2 t} \right) \\ E_2 = \exp \left[-\frac{\ell_o (2R-r)^2}{4L^2 t} \right] \end{array} \right.$$

Posant à nouveau $y = 1/t$ et faisant tendre t vers zéro, cette dérivée se comporte comme :

$$\frac{y^2}{e^y} + \frac{y^3}{e^y} \quad \text{lorsque } y \text{ tend vers } 1' \infty$$

c'est-à-dire qu'elle tend vers zéro.

On en déduit donc aisément que la fonction passe par l'origine avec une pente nulle, ce qui est normal puisque nous avons supposé toutes les conditions initiales nulles ; mais, à nouveau, cette propriété n'est pas évidente d'après le premier membre de (25) puisqu'elle s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} (-\alpha_{rn}) = \frac{-L^2}{\ell_o^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \frac{J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \frac{J_0(x\mu_n)}{J_1^2(\mu_n)} = 0 \quad \text{quel que soit } x \text{ compris entre } 0 \text{ et } 1 \text{ (} x = r/R \text{)}$$

Ces deux dernières propriétés montrent que :

"les harmoniques radiaux et les harmoniques axiaux ne jouent pas un rôle symétrique"

En effet, l'expression (9) peut s'écrire de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}
\frac{h(r, \gamma, t)}{e^{-\alpha_0 t}} &= \mathcal{R}_1(r, t) \sum_m \mathcal{A}_m(t) \\
&+ \mathcal{R}_2(r, t) \sum_m \mathcal{A}_m(t) \\
&+ \mathcal{R}_3(r, t) \sum_m \mathcal{A}_m(t) \\
&+ \text{-----}
\end{aligned} \tag{A}$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
\frac{h(r, \gamma, t)}{e^{-\alpha_0 t}} &= \mathcal{A}_0(t) \sum_n \mathcal{R}_n(r, t) \\
&+ \mathcal{A}_1(t) \sum_n \mathcal{R}_n(r, t) \\
&+ \mathcal{A}_2(t) \sum_n \mathcal{R}_n(r, t) \\
&+ \text{-----}
\end{aligned} \tag{B}$$

Lorsque nous faisons tendre t vers zéro, chaque terme de la série (B) tend vers zéro, mais pas chaque terme de la série (A). Ce sont donc les harmoniques radiaux qui sont les plus gros responsables de la forme générale de la réponse et de la propagation d'onde.

"C'est la raison pour laquelle nous avons cherché, dans la résolution de l'équation de diffusion, une solution groupant r et t et non, une solution groupant γ et t ".

c) Application numérique et courbes

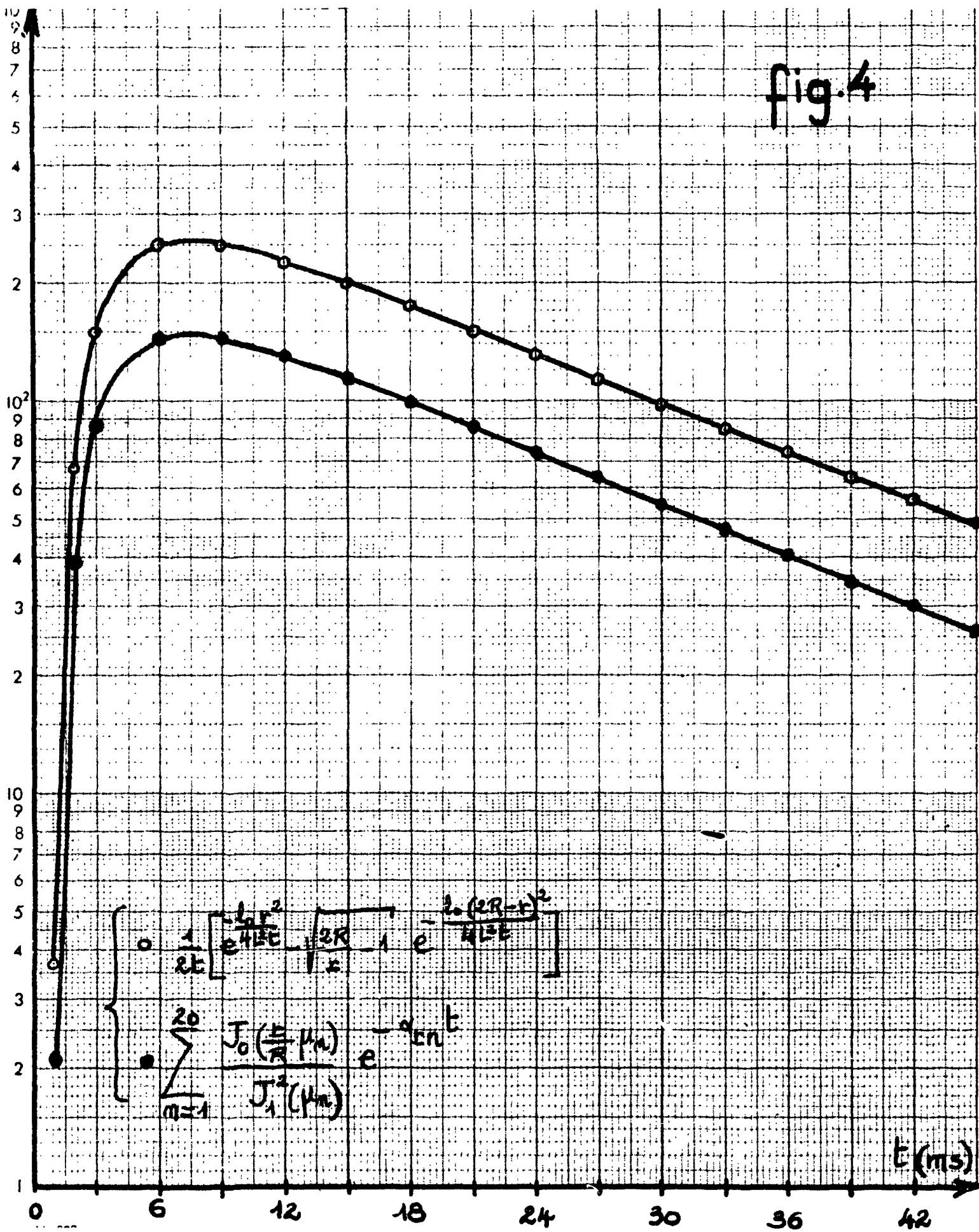
- Harmoniques radiaux : sur la figure (4) nous avons tracé, en coordonnées semi-logarithmiques, les fonctions :

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\alpha_{rn} t}$$

$$\frac{1}{2t} \left[e^{-\frac{\ell_0^2 r^2}{4L^2 E}} \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{\ell_0^2 (2R-r)^2}{4L^2 t}} \right]$$

avec les valeurs numériques de l'exemple précédent [courbes de la figure (3)], dans le cas $r = 50$ cm.

fig. 4



On voit que ces deux fonctions sont bien identiques, à un facteur constant près, c'est-à-dire que l'approximation est satisfaisante (tout au moins pour l'exemple choisi).

- Harmoniques axiaux : sur la figure (5) nous avons tracé, avec les mêmes valeurs numériques :

- le mode fondamental
- le mode fondamental plus le premier harmonique axial
- le mode fondamental plus les deux premiers harmoniques axiaux

de la réponse impulsionnelle (24).

La valeur du rapport :

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = e^{-\frac{8m L^2 \pi^2}{L_0 H^2} t}$$

montre que, dans l'exemple considéré, A_1 est éteint en 6 ms et qu'en général, l'influence de A_2 est négligeable.

4) Limites de validité de l'approximation

Nous ne ferons pas ici, un calcul détaillé de l'erreur commise dans l'approximation du facteur d'extrémité. Cette étude fera l'objet d'un rapport ultérieur.

Nous noterons simplement qu'une borne supérieure de validité sera donnée par la valeur du temps, T, pour laquelle l'expression entre crochets dans (24) s'annule :

$$e^{-\frac{l_0 r^2}{4l^2 T}} = \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{l_0 (2R - r)^2}{4L^2 T}}$$

c'est-à-dire :

$$T = \frac{2 l_0 R (R - r)}{L^2 \text{Log} \left[\frac{2R}{r} - 1 \right]}$$

L'approximation sera donc d'autant meilleure que T sera plus grand, c'est-à-dire que :

- le temps de vie du réacteur sera plus élevé
- et, surtout, que le rayon R de ce réacteur sera plus grand.

Sur la figure (6) nous avons tracé, en coordonnées cartésiennes, les courbes de la figure (4) normalisées sur leur maximum. On voit que la fonction

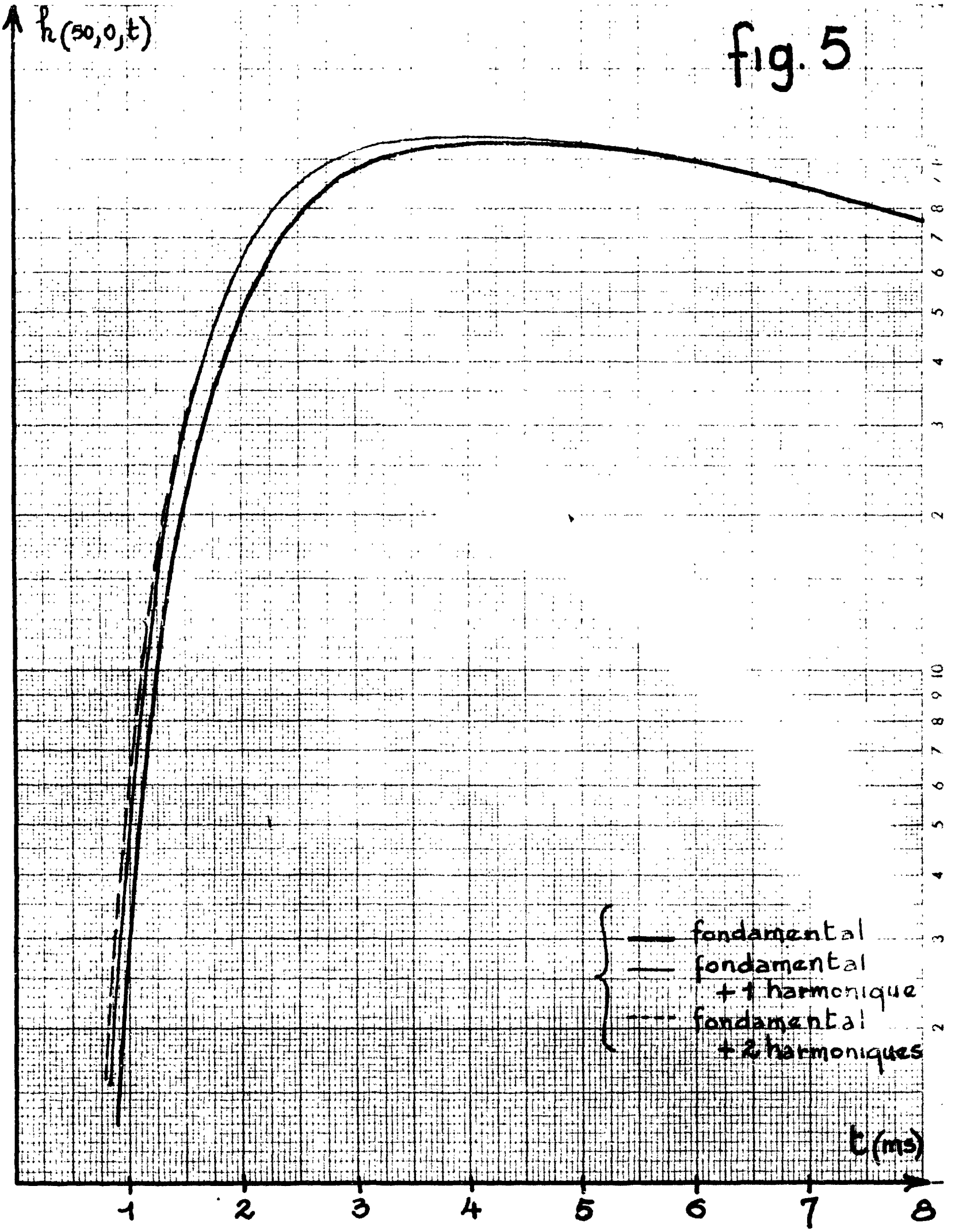


fig. 5

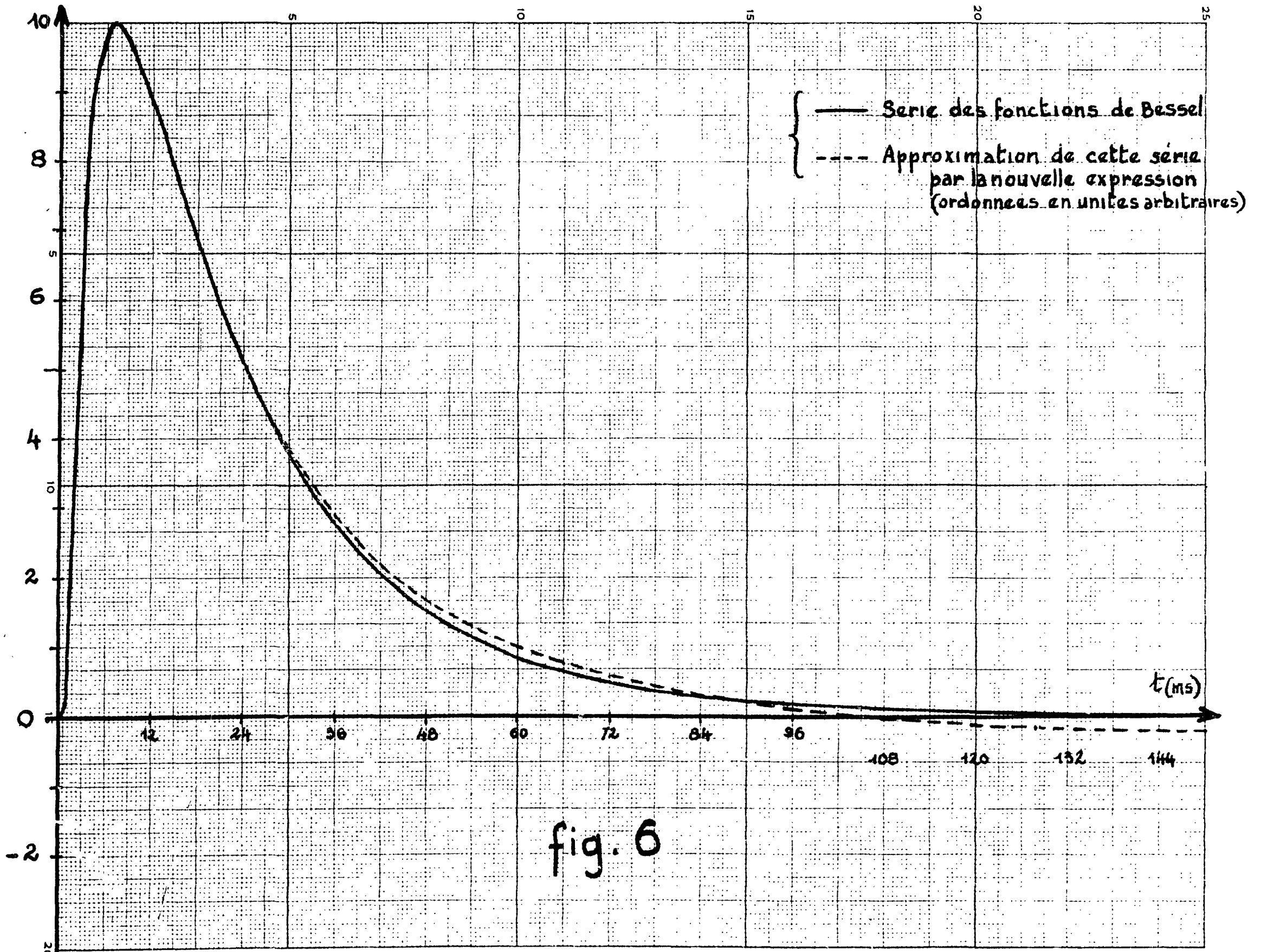


fig. 6

$$\frac{1}{2t} \left[e^{-\frac{\lambda_0 r^2}{4L^2 t}} - \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} e^{-\frac{\lambda_0 (2R - r)^2}{4L^2 t}} \right]$$

cadre d'abord exactement avec la fonction

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} - \mu_n\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\alpha_{rn} t}$$

puis la dépasse légèrement pour finir par la couper et devenir légèrement négative.

V - CONCLUSION

Ainsi, nous venons de montrer que la réponse d'un réacteur sous-critique à une impulsion de source pouvait être représentée par, au moins, deux développements en série différents.

La précédente discussion montre que l'on aura intérêt à considérer l'une ou l'autre de ces formulations selon le type de réacteur auquel on a affaire ;

- dans le cas des réacteurs à faible temps de vie (uranium enrichi, eau légère) ou bien de faibles dimensions, l'expression classique conserve tout son intérêt ; dans ce cas, la réponse impulsionnelle se réduit très vite à une exponentielle décroissante.

- dans le cas de réacteurs de grandes dimensions et à grand temps de vie (graphite, eau lourde) la nouvelle expression donnera une forme analytique plus rapidement convergente que la formule classique.

Il convient toutefois de remarquer que la nouvelle expression s'applique à tous les cas de réacteurs si l'on prend davantage de termes dans les développements asymptotiques du facteur d'extrémité.

D'autre part, son utilisation pourra être profitable quel que soit le type de réacteur, si le point d'observation est assez loin de la source ou bien, dans toutes les expériences, pas forcément exponentielles, qui utilisent les phénomènes transitoires [19].

APPENDICE

ORIGINAL DE $K_0(q\sqrt{p})$

Pour trouver l'original de cette expression, une méthode simple consiste à utiliser une représentation intégrale de la fonction $K_0(q\sqrt{p})$: [14]

$$K_0(q\sqrt{p}) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-qx\sqrt{p}}}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

L'original de cette expression sera :

$$\mathcal{L}^{-1} [K_0(q\sqrt{p})] = \mathcal{L}^{-1} \left[\int_1^{\infty} \frac{e^{-qx\sqrt{p}}}{\sqrt{x^2-1}} dx \right] = \int_1^{\infty} \frac{\mathcal{L}^{-1} [e^{-qx\sqrt{p}}]}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

or :

$$\mathcal{L}^{-1} [e^{-qx\sqrt{p}}] = \frac{qx}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{q^2 x^2}{4t}}$$

D'où :

$$\mathcal{L}^{-1} [K_0(q\sqrt{p})] = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_1^{\infty} \frac{qx}{\sqrt{x^2-1}} e^{-\frac{q^2 x^2}{4t}} dx$$

Posons : $x^2 - 1 = y^2$ soit : $x dx = y dy$

$$\int_0^{\infty} \left[K_0(q\sqrt{p}) \right]^{-1} = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} q e^{-\frac{q^2}{4t}(y^2+1)} dy = \frac{e^{-\frac{q^2}{4t}}}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} q e^{-\frac{q^2 y^2}{4t}} dy$$

Pour évaluer : $\int_0^{\infty} q e^{-\frac{q^2 y^2}{4t}} dy$, nous ferons le changement de variable :

$$u = \frac{q^2 y^2}{4t}$$

d'où :

$$dy = \frac{\sqrt{t}}{q} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

et :

$$\int_0^{\infty} q e^{-\frac{q^2 y^2}{4t}} dy = \int_0^{\infty} q e^{-u} \frac{\sqrt{t}}{q} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{t} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \sqrt{t} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi t}$$

Soit finalement :

$$\int_0^{\infty} \left[K_0(q\sqrt{p}) \right]^{-1} = \frac{1}{2t} e^{-\frac{q^2}{4t}}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VON DARDEL G. F.
L'interaction des neutrons lourds avec la matière,
étudiée au moyen d'une source de neutrons pulsés
Thèse, Göteborg, 1953
- [2] BACH, BUNCH, CERBONE, SLOVACEK
Prompt neutrons decay constants in multiplying hydrogenous media
Nuclear Science and Engineering, 1961, 11, 199-210
- [3] SAGOT, TELLIER
Etude d'un réacteur à combustible légèrement enrichi (RUBEOLE)
à l'aide de sources pulsées de neutrons
Rapport CEA-R 2201
- [4] STERN, VALAT, CAZEMAJOU
Chapitre XI du Bulletin d'Information Scientifique
et Technique,
Mai 1962, 61
- [5] STERN, BLAQUIERE, VALAT
Reactivity measurement using pseudo-random
source excitation
Reactor Science and Technology, Décembre 1962
- [6] STERN, VALAT, BLAQUIERE, CAZEMAJOU
Mesure des très basses réactivités à partir de la réponse
impulsionnelle d'un réacteur déterminée par intercorrélation -
Interprétation de certains résultats
Rapport C. E. A. n° 2377
- [7] BALCOMB, DEMUTH, GYFTOPOULOS
A crosscorrelation method for measuring
the impulse response of reactor systems
Nuclear Science and Engineering, 1961, 10, 337
- [8] RAJAGOPAL
Experimental Study of Nuclear Reactor Internal Transfer
Functions using Random Reactivity Variations and Correlations
Analysis, Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1960
- [9] GERMAIN
Etude expérimentale et théorique à différents niveaux
de puissance du bruit neutronique interne dans les réacteurs
type piscine et de leur réponse impulsionnelle par excitation
aléatoire
Thèse, Université de Grenoble, 1964
- [10] ASELTINE
Les méthodes de transformation dans l'analyse
des systèmes linéaires
Dunod, 1964

- [11] LAMAR I., DEVERALL
Solution of Time-Dependent Thermal
Neutron Diffusion Equation
Nuclear Science and Engineering, 1958, 4, 495-498
- [12] UHRIG
The Impulse Response of an Exponential Assembly
Paper n° SM 42/43. Symposium on Exponential and
Critical Experiments. Amsterdam, 1963
- [13] GLASSTONE, EDLUND
The Elements of Nuclear Reactor Theory
D. Van Nostrand Co, 1952
- [14] WATSON
Theory of Bessel functions
Cambridge, 1952
- [15] PETIAU
La théorie des fonctions de Bessel
Centre National de la Recherche Scientifique, 1953
- [16] RYSHIK, GRADSTEIN
Tables
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957
- [17] CAMPBELL, FOSTER
Fourier Integrals
D. Van Nostrand, 1961
- [18] KIREYEVA, KARPOV
Tables of Weber Functions
Pergamon Press, 1961
- [19] BELIARD, WEILL
Une nouvelle méthode d'intégration pour mesure
de la réactivité d'un réacteur nucléaire en régime sous-critique
L'Onde Electrique, t. XLIV, Juillet-Août 1964, 448-449

FIN