CEA-R 3214

PREMIER MINISTRE
COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

CEA-R 3214

THEORIE DES BARRIERES DISCRETES ET APPLICATIONS A DES PROBLEMES LINEAIRES ELLIPTIQUES DU "TYPE DE DIRICHLET"

par

Pierre JAMET

Rapport CEA - R 3214

1967

Ca

CENTRE D'ETUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY

- Rapport CEA-R 3214 -

THEORIE DES BARRIERES DISCRETES ET APPLICATIONS A DES PROBLEMES LINEAIRES ELLIPTIQUES DU "TYPE DE DIRICHLET"

par

Pierre JAMET

Conférence faite au Séminaire du Professeur J. L. LIONS le 21 février 1967 à l'Institut Blaise Pascal. Cet exposé est une synthèse résumée et amplifiée des principaux résultats [4] et [5].

Je suis très reconnaissant au Professeur S. V. PARTER qui m'a dirigé dans ces travaux.

- Juin 1967 -

THEORIE DES BARRIERES DISCRETES ET APPLICATIONS A DES PROBLEMES LINEAIRES ELLIPTIQUES DU "TYPE DE DIRICHLET"

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE

INTRODUCTION

Soient G un domaine borné dans R^n, Γ la frontière de G, Γ_1 et Γ_2 deux sous-ensembles complémentaires de Γ, $\Gamma_2 \neq \emptyset$.

Soit L un opérateur différentiel linéaire du 2^{nd} ordre, elliptique dans G, défini sur $C^2(G)$.

Soient $f(P) \in C(G)$ et $g(P) \in C(\bar{G})$

Nous considérons l'équation différentielle :

$$Lu = f \tag{1.1}$$

et le problème aux limites :

$$\begin{cases} Lu(P) = f(P), & P \in G \\ u(P) = g(P), & P \in \Gamma_2 \\ u(P) \in C^2(G) \cap C(G \cup \Gamma_2) \cap B(G) \end{cases} \tag{1.2}$$

Ce problème est un problème aux limites du "type de DIRICHLET". Lorsque $\Gamma_2 = \Gamma$, ce problème n'est autre que le problème de DIRICHLET proprement dit.

Au sujet de ce problème nous allons nous poser les questions suivantes : Existence d'une solution ? Unicité ? Méthodes de calcul numérique et convergence des approximations ?

La question de l'unicité restera une question indépendante, à laquelle, d'ailleurs, nous ne donnerons pas de réponse générale. Par contre, nous traiterons les deux autres questions simultanément : nous rechercherons une suite d'approximations qui converge vers une fonction que l'on démontrera être une solution du problème (1.2). Pour celà, nous allons utiliser la théorie des "barrières discrètes". Cette théorie résulte de la discrétisation de la théorie classique des barrières de PERRON (voir [1]). L'idée de la discrétisation est due à PETROVSKY [9] qui donna, par cette méthode, une nouvelle démonstration de l'existence de la solution du problème de DIRICHLET pour l'équation de LAPLACE ; S.V. PARTER pensa à appliquer cette méthode à des problèmes élliptiques singuliers.

Dans la 2ème partie nous exposons la théorie des barrières discrètes. La 3ème partie est consacrée à des exemples d'application. Dans la 4ème partie nous étudions le problème de l'unicité. Dans la 5ème partie nous montrons comment la théorie des barrières discrètes peut s'appliquer au calcul de certaines solutions non bornées. Enfin la 6ème partie évoque certains problèmes qui ne seront pas traités dans cet exposé.

DEUXIEME PARTIE.
THEORIE DES BARRIERES DISCRETES.

1° Discrétisation d'un problème du type de DIRICHLET - Rappels

Nous allons remplacer le problème (1.2) par un système fini d'équations algébriques linéaires.

Soit h un paramètre et $\bar{G}(h)$ un ensemble fini de points dans $\bar{G}$ tel que :

(2.1) $$\sup_{P \in G} d(P, \bar{G}(h)) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } h \longrightarrow 0$$ 2)

Soient $G(h)$ et $\Gamma(h)$ deux sous-ensembles complémentaires non vides de $\bar{G}(h)$.

Les points de $G(h)$ sont appelés points "intérieurs" de $\bar{G}(h)$; les points de $\Gamma(h)$ sont appelés "points frontières" de $\bar{G}(h)$ 3).

A chaque point intérieur P est associé un ensemble $N(P) \subset \bar{G}(h) - \{P\}$ appelé "voisinage" de P dans $\bar{G}(h)$ ou ensemble des points "voisins" de P dans $\bar{G}(h)$. Nous supposons :

$$\max_{P \in G(h)} \; \max_{P' \in N(P)} d(P, P') \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } h \longrightarrow 0$$

Définition 2.1

On dit que $\bar{G}(h)$ est faiblement connexe si : $\forall P \in G(h)$, $\exists$ une suite de points $P_o, P_1, P_2, \ldots\ldots P_r$ tels que :

---

2) Nous désignons par $d(E, E')$ la distance entre 2 ensembles E et E' dans R^n

3) Il est très important de ne pas confondre ces notions avec les notions correspondantes pour le domaine continu G : un point frontière de $\bar{G}(h)$ peut être un point intérieur de $\bar{G}$ et inversement un point frontière de $\bar{G}$ peut être un point intérieur de $\bar{G}(h)$.

$$(2.2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} P_o = P & \\ P_1, P_2, \ldots\ldots P_{r-1} \in G(h) & \\ P_r \in \Gamma(h) & \\ P_{j+1} \in N(P_j), & j = 0, 1, 2, \ldots\ldots (r-1). \end{array}\right.$$

Définition 2.2.

On dit que $\bar{G}(h)$ est connexe si, $\forall\ P \in G(h)$ et $\forall\ Q \in \bar{G}(h)$, $\exists$ une suite de points $P_o, P_1, P_2, \ldots\ldots P_r$ tels que :

$$(2.3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} P_o = P & \\ P_1, P_2, \ldots\ldots P_{r-1} \in G(h) & \\ P_r = Q & \\ P_{j+1} \in N(P_j), & j = 0, 1, 2, \ldots\ldots (r-1) \end{array}\right.$$

Soit v(P) une fonction définie sur $\bar{G}(h)$. En chaque point $P \in G(h)$, on définit un opérateur L_h :

$$(2.4)\qquad L_h\, v(P) = -A(P\,;P)\, v(P) + \sum_{Q \in N(P)} A(P\,;Q)\, v(Q)$$

Définition 2.3

On dit que l'opérateur L_h est de "type positif" si pour tout $P \in G(h)$ on a :

$$(2.5)\qquad \left\{\begin{array}{l} A(P\,;P) > 0 \quad ; \quad A(P\,;Q) > 0, \quad Q \in N(P) \\ E(P) \equiv A(P\,;P) - \displaystyle\sum_{Q \in N(P)} A(P\,;Q) \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Principe du maximum "faible"

Supposons $\bar{G}(h)$ faiblement connexe et L_h de type positif. Soit v(P) une fonction quelconque définie sur $\bar{G}(h)$ et telle que $L_h\ v(P) \geqslant 0,\ \ \forall\ P \in G(h)$.

Alors :

$$\max_{P \in G(h)} v(P) \leqslant \operatorname{Max} \left\{ \max_{P \in \Gamma(h)} v(P)\ ,\ 0 \right\}$$

On en déduit immédiatement un résultat similaire pour le cas où l'on suppose $L_h\ v(P) \leqslant 0$.

Corollaire

Soient $\bar{G}(h)$ faiblement connexe et L_h de type positif. Alors le problème :

$$(2.6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} L_h\, v(P) = f(P) \ , & P \in G(h) \\ v(P) = g(P)\ ; & P \in \Gamma(h) \end{array}\right.$$

a une solution unique.

Principe du maximum "fort" 4)

Supposons $\bar{G}(h)$ connexe et L_h de type positif. Soit v(P) une fonction quelconque définie sur $\bar{G}(h)$ et telle que

$$L_h\, v(P) \geqslant 0\ ,\ \forall\ P \in G(h)\ .\ \text{Alors :}$$

- ou bien : $v(P) = \text{constante},\ P \in \bar{G}(h)$
- ou bien : $\displaystyle\max_{P \in G(h)} v(P) < \operatorname{Max} \left\{ \max_{P \in \Gamma(h)} v(P),\ 0 \right\}$

Définition 2.4

Soient $G' \subset G$ et $G^*(h) \subset \bar{G}(h)$.

Soit v(P ; h) une fonction définie sur $G^*(h)$ pour chaque h et soit u(P) une fonction définie sur G'.

On dit que v(P ; h) converge vers u(P) uniformément dans G' lorsque h tend vers zéro, si :

$$\max_{P \in G^*(h) \cap G'} \left| v(P\,;h) - u(P) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } h \longrightarrow 0$$

---

4) Nous aurons besoin du principe "fort" dans la 5ème partie de cet exposé.
Pour les autres parties, le principe "faible" nous suffira.

Définition 2.5

On dit que l'opérateur L_h est une approximation "consistante" de l'opérateur différentiel L dans $G' \subset G$ si, $\forall\ \varphi \in C^2(\bar{G}')$:

$$(L_h \varphi - L\varphi) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformément dans } G' \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

2° Définition des barrières discrètes

Soit $\mathcal{H} = \{h\}$ une famille infinie de nombres $h > 0$ ayant zéro comme point d'accumulation et considérons les familles $\{\bar{G}(h)\}$ et $\{L_h\}$ correspondantes. Nous supposons L_h de type positif pour h suffisamment petit.

Définition 2.6

Soit $Q \in \Gamma$. Une fonction $B(P\,;Q)$ est une barrière discrète au point Q pour la famille d'opérateurs $\{L_h\}$ si :

(2.7 a) $\qquad B(P\,;Q) \in C(\bar{G})$

(2.7 b) $\qquad B(Q\,;Q) = 0$

(2.7 c) $\qquad B(P\,;Q) < 0\,,\quad P \in \bar{G} - \{Q\}$

(2.7 d) $\qquad L_h B(P\,;Q) - E(P) \geq 0\,,\ \forall\, P \in G(h)$ et $\forall\, h \in \mathcal{H}$ suffisamment petit.

Définition 2.7

Une fonction $B(P\,;Q)$ est une barrière discrète locale au point Q pour la famille d'opérateurs $\{L_h\}$ s'il existe un voisinage N de Q dans R^n tel que les conditions (2.7) soient satisfaites dans $N \cap \bar{G}$.

Définition 2.8

Une fonction $B(P\,;Q)$ est une barrière discrète forte au point Q pour la famille d'opérateurs $\{L_h\}$ si elle satisfait les conditions (2.7 a, b, c) et la condition :

(2.8) $\qquad L_h B(P\,;Q) - E(P) \geq 1,\ \forall\, P \in G(h)$ et $\forall\, h \in \mathcal{H}$ suffisamment petit.

Lemme 2.1.

Pour qu'il existe une barrière discrète au point Q, il faut et il suffit qu'il existe une barrière discrète locale au point Q.

Démonstration : Soit $B_o(P\,;Q)$ une barrière discrète locale et soit N le voisinage de Q correspontant à la définition 2.7.

Soit $m < 0$ le maximum de $B_o(P\,;Q)$ sur $\bar{G} \cap \{\text{Frontière de } N\}$ et soit $K = \operatorname{Max}\left\{1, -\frac{2}{m}\right\}$. Définissons :

$$B(P\,;Q) = \begin{cases} \operatorname{Max}\{K\,B_o(P\,;Q), -1\}, & P \in N \cap \bar{G} \\ -1, & P \in \bar{G} - N \end{cases}$$

Alors $B(P\,;Q)$ est une barrière discrète au point Q. La réciproque résulte immédiatement des définitions 2.6 et 2.7.

Remarque : Le lemme 2.1 ne peut être étendu aux barrières fortes que si l'on introduit certaines hypothèses supplémentaires sur l'opérateur L_h (par exemple si $E(P) > c_o > 0\ \ \forall\, P \in G(h)$ et $\forall\, h$).

3° Théorème fondamental

Théorème 2.1

Supposons $f(P) \equiv 0$.

Supposons $\bar{G}(h)$ faiblement connexe et L_h de type positif pour $h \in \mathcal{H}$.

Soit $\mathcal{F} = \{v(P\,;h)\,;\,h \in \mathcal{H}\}$ la famille des solutions de (2.6).

Supposons que, quel que soit $G' \subset \bar{G}' \subset G$, toute suite $\{v(P\,;h_n)\,;\,h_n \longrightarrow 0\} \subset \mathcal{F}$ admet une sous-suite qui converge uniformément dans G' vers une solution de l'équation différentielle (1.1).

Supposons qu'en chaque point $Q \in \Gamma_2$, il existe une barrière discrète locale pour la famille d'opérateurs $\{L_h\}$. Alors, le problème (1.2) admet au moins une solution u(P). De plus, si cette solution est unique, $v(P\,;h)$ converge vers u(P) lorsque $h \in \mathcal{H}$ et $h \longrightarrow 0$, uniformément dans $G - N(\Gamma_1)$ où $N(\Gamma_1)$ est un voisinage arbitraire de Γ_1.

Remarque : Dans le cas d'une équation non homogène ($f(P) \not\equiv 0$) on peut supposer $f(P) \in B(G)$, puisqu'il est toujours possible de se ramener à ce cas en divisant les 2 membres de l'équation (1.1) par une fonction convenable.

Alors il faut remplacer, dans l'énoncé du théorème, les barrières discrètes locales par des barrières discrètes fortes (non locales).

Démonstration du théorème 2.1

a) Soit $\left\{ G'_r \right\}_{r=0}^{\infty}$ une suite de sous-domaines de G tels que :

$$\bar{G}'_0 \subset \bar{G}'_1 \subset \ldots\ldots \subset \bar{G}'_r \subset \ldots\ldots \subset G$$

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} G'_r = G$$

Par un procédé diagonal on peut extraire une sous-suite $S \subset \mathfrak{F}$ qui converge dans G, uniformément dans tout $G' \subset \bar{G}' \subset G$, vers une fonction $u(P) \in C^2(G)$ solution de l'équation (1.1).

b) Soit Q un point de Γ_2 et soit $B(P\,;Q)$ une barrière discrète (non locale) au point Q ; une telle fonction existe d'après le lemme 2.1. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et considérons les fonctions :

$$\left\{ \begin{aligned} F(P) &= g(Q) - \varepsilon + \flat\, B(P\,;Q) \\ G(P) &= g(Q) + \varepsilon - \flat\, B(P\,;Q) \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

où $\flat > 0$ est choisi suffisamment grand pour que :

$$F(P) \leqslant g(P) \leqslant G(P) \quad , \quad \forall\, P \in \bar{G} \tag{2.10}$$

Nous avons :

$$L_h F(P) = -E(P)\,[g(Q) - \varepsilon] + \flat\, L_h B(P\,;Q) \geqslant$$
$$\geqslant E(P)\,(\flat - g(Q))$$

et : $$L_h G(P) \leqslant E(P)\,(-\flat - g(Q))$$

Donc, pour $\flat > |g(Q)|$:

$$L_h F(P) \geqslant 0 \geqslant L_h G(P) \quad , \quad \forall\, P \in G(h) \quad , \quad \forall\, h \in \mathcal{H} \tag{2.11}$$

D'où, en appliquant le principe du maximum :

$$F(P) \leqslant v(P\,;h) \leqslant G(P) \quad , \quad \forall\, P \in \bar{G}(h) \quad , \quad \forall\, h \in \mathcal{H} \tag{2.12}$$

C'est-à-dire :

$$\left| v(P\,;h) - g(Q) \right| \leqslant \varepsilon - b\, B(P\,;Q) = \varepsilon + b \left| B(P\,;Q) \right|$$

Mais, $B(P\,;Q) \longrightarrow B(Q\,;Q) = 0$ quand $P \longrightarrow Q$ dans $\bar{G}$

Donc, il existe un voisinage N_Q de Q tel que :

(2.13) $$\left| v(P\,;h) - g(Q) \right| < 2\varepsilon, \quad P \in \bar{G}(h) \cap N_Q, \quad \forall\, h \in \mathcal{K}$$

De (2.12) et (2.13), on déduit :

(2.14) $$F(P) \leqslant u(P) \leqslant G(P)$$

(2.15) $$\left| u(P) - g(Q) \right| \leqslant 2\varepsilon, \quad P \in \bar{G} \cap N_Q$$

Donc $u(P) \in B(G)$ et $u(P) \longrightarrow g(Q)$ quand $P \longrightarrow Q$. Ceci est vrai pour tous les points $Q \in \Gamma_2$; donc, nous pouvons étendre la fonction $u(P)$ en posant $u(Q) = g(Q)$, $Q \in \Gamma_2$; la fonction ainsi obtenue est une solution du problème 1.2.

c) Supposons maintenant que l'on ait pu démontrer a priori l'unicité de la solution ; alors, on déduit immédiatement que $v(P\,;h)$ converge vers $u(P)$ uniformément dans tout $G' \subset \bar{G}' \subset G$ lorsque $h \longrightarrow 0$ et $h \in \mathcal{K}$.

Il reste à démonter que la convergence est uniforme dans $G - N(\Gamma_1)$.

Soit $N(\Gamma_1)$ un voisinage ouvert de Γ_1. A tout point $Q \in \Gamma_2 - N(\Gamma_1)$ correspond un voisinage ouvert N_Q tel que l'on ait (2.13) et (2.15) donc :

$$\left| v(P\,;h) - u(P) \right| < 4\varepsilon, \quad P \in \bar{G}(h) \cap N_Q$$

La famille de tous ces N_Q est un recouvrement ouvert de $\Gamma_2 - N(\Gamma_1)$ et alors, puisque $\Gamma_2 - N(\Gamma_1)$ est compact, on peut en extraire un recouvrement fini $\left\{ N_{Q_1} \ldots N_{Q_r} \right\}$. Soit $N = N_{Q_1} \cup \ldots \cup N_{Q_r}$.

On a :

(2.16) $$\left| v(P\,;h) - u(P) \right| < 4\varepsilon, \quad P \in \bar{G}(h) \cap N$$

Mais, $G - N - N(\Gamma_1)$ est intérieur à G [5] et par conséquent, pour h suffisamment

5) Nous disons qu'un sous-ensemble G' est intérieur à G si $\bar{G}' \subset G$.

petit, on a :

(2.17) $$|v(P\,;h) - u(P)| < 4\,\varepsilon\ ,\ P \in \bar{G}(h) \cap (G - N - N(\Gamma_1))$$

Groupant (2.16) et (2.17), on déduit :

$$|v(P\,;h) - u(P)| < 4\,\varepsilon\ ,\ P \in \bar{G}(h) \cap (G - N(\Gamma_1))$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque :

Supposons que le problème (1.2) a une solution unique u(P). Une condition nécessaire pour la convergence des approximations v(P ; h) vers u(P) est évidemment que, pour tout $Q \in \Gamma_2$:

(2.18) $$d(Q, \Gamma(h)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } h \longrightarrow 0$$

Il résulte du théorème 2.1 que (2.18) est une condition nécessaire pour l'existence d'une barrière discrète au point Q.

TROISIEME PARTIE
APPLICATIONS : THEOREMES D'EXISTENCE.

1° Préliminaires

Le théorème 2.1 réduit le problème d'existence à l'étude de 2 problèmes distincts.

1) Convergence de sous-suites dans des sous-domaines intérieurs.
2) Existence de barrières discrètes locales.

Dans cette partie nous allons donner quelques résultats particuliers relatifs à ces 2 problèmes. Pour simplifier les notations nous allons nous placer dans l'espace R^2.

Nous allons considérer l'opérateur différentiel :

(3.1) $$Lu = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} - qu$$

où : a(P), b(P), c(P), d(P), q(P) $\in C^1(G)$ [6)]

a(P), b(P) > 0 , $q \geq 0$

Cet opérateur peut aussi s'écrire sous la forme :

(3.2) $$Lu = \frac{a}{p}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{b}{r}\frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\partial u}{\partial y}\right) - qu$$

où

6) Il est en fait suffisant de supposer que ces fonctions sont continues au sens de LIPSCHITZ dans tout sous-domaine G' intérieur à G. Mais pour des soucis de simplicité nous ne cherchons pas ici à optimaliser les hypothèses.

$$p(x, y) = \exp \int^{x} \frac{c(t, y)}{a(t, y)} \, dt$$

$$r(x, y) = \exp \int^{y} \frac{d(x, t)}{b(x, t)} \, dt$$

Dans ces formules les bornes inférieures d'intégration doivent être choisies convenablement selon la position du point $P = (x, y)$ considéré dans G. Ce choix est particulièrement simple si G est convexe ; il est alors facile d'obtenir des fonctions $p(P)$ et $r(P)$ telles que :

$$p, r, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \in C^1(G) \tag{3.3}$$

Dans la suite, chaque fois que nous considérerons la forme (3.2) de l'opérateur L nous supposerons que les conditions (3.3) sont satisfaites.

Nous allons maintenant considérer un réseau carré :

$$R(h) = \{ P = (i h, j h) \; ; i, j \text{ entiers} \}$$

Pour tout $P = (ih, jh) \in R(h)$, soit :

$$N_o(P) = \{ P_1, P_2, P_3, P_4 \} = \{ ((i \pm 1)h, (j \pm 1)h) \}$$

Définissons :

$$\bar{G}(h) = \bar{G} \cap R(h)$$

$$G_o(h) = \{ P \in \bar{G}(h) \; ; \; N_o(P) \subset \bar{G}(h) \}$$

$$\Gamma_2(h) = \{ P \in \bar{G}(h) - G_o(h) \; ; \; d(P, \Gamma_2) < h \}$$

$$\Gamma_1(h) = \bar{G}(h) - G_o(h) - \Gamma_2(h)$$

Choisissons $\Gamma(h)$ tel que :

$$\Gamma_2(h) \subset \Gamma(h) \subset \Gamma_1(h) \cup \Gamma_2(h)$$

On a alors :

$$G_o(h) \subset G(h) \subset G_o(h) \cup \Gamma_1(h)$$

En tout point $P \in G_o(h)$ on définit $N(P) \equiv N_o(P)$ et on définit l'opérateur L_h par l'une ou l'autre des 2 formules suivantes :

$$L_h v \equiv a\, v_{x\bar{x}} + b\, v_{y\bar{y}} + c\, \frac{v_x + v_{\bar{x}}}{2} + d\, \frac{v_y + v_{\bar{y}}}{2} - q\, v \tag{3.4}$$

$$L_h v \equiv \frac{a}{p} \left(p_{i+\frac{1}{2}}\, v_x\right)_{\bar{x}} + \frac{b}{r} \left(r_{j+\frac{1}{2}}\, v_y\right)_{\bar{y}} - q\, v \tag{3.5}$$

(En utilisant des notations usuelles qui sont explicitées dans [4]).

Aux points $P \in G(h) - G_o(h)$ on choisit $N(P)$ et L_h de façon arbitraire, à la seule condition que $\bar{G}(h)$ soit faiblement connexe et que L_h satisfasse les conditions (2.5) en tout point $P \in G(h) - G_o(h)$ [6'].

Remarquons que les opérateurs (3.4) et (3.5) sont des approximations consistantes de l'opérateur L dans tout sous-domaine G' intérieur à G.

L'opérateur (3.5) est de type positif ; mais l'opérateur (3.4) n'est de type positif que pour h suffisamment petit et à condition que les coefficients de l'opérateur L satisfassent certaines hypothèses supplémentaires au voisinage de la frontière.

2° Convergence dans des sous-domaines intérieurs.

Théorème 3.1

Supposons $f(P) \equiv 0$. Soient L et L_h les opérateurs définis dans le paragraphe précédent. Supposons que L_h est de type positif pour h suffisamment petit et soit $v(P\,;\,h)$ la solution du système (2.6). Soit G' un sous-domaine arbitraire intérieur à G. Alors, toute suite $\{ v(P\,;\,h_n) \;;\; h_n \to 0 \}$ admet une sous-suite qui converge uniformément dans G' vers une solution de l'équation (1.1).

Démonstration

Pour $h < h_o$ suffisamment petit, G' est recouvert par des mailles carrées du réseau et, par interpolation linéaire dans ces mailles, on peut étendre la définition de $v(P\,;\,h)$ dans $\bar{G}'$. La famille de fonctions $\mathcal{F} = \{ v(P\,;\,h) \;;\; 0 < h < h_o \}$ est uniformément bornée dans G, d'après le principe du maximum. Il en résulte qu'elle est équicontinue dans G', d'après un important théorème de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY [7]. Appliquant le Théorème d'ASCOLI,

6') Un tel choix est évidemment toujours possible.

7) Voir annexe I.

on en déduit que toute suite $\{ v(P\ ;h_n)\ ;\ h_n \longrightarrow 0 \}$ admet une sous-suite qui converge uniformément dans G' vers une fonction $u(P) \in C(\bar{G}')$. Il reste à montrer que $u(P) \in C^2(G')$ et satisfait l'équation différentielle (1.1). Ceci peut être fait de diverses manières [8].

Remarque -

Ce théorème est vrai dans le cas inhomogène à condition de supposer que $f(P) \in C^1(G)$ et que la famille des solutions de (2.6) est uniformément bornée dans G.

3° Existence de barrières

Dans ce paragraphe nous allons donner plusieurs critères locaux garantissant l'existence d'une barrière discrète locale. Q désigne un point de Γ_2 et N_Q un certain voisinage de Q dans R^2 tel que $\Gamma_1 \cap N_Q = \emptyset$

a) Cas d'une équation uniformément elliptique à coefficients bornés

Théorème 3.2.

Supposons qu'il existe un cercle S tel que $S \cap \bar{G} = \{ Q \}$. Supposons que L est uniformément elliptique et à coefficients bornés dans $G \cap N_Q$. Alors, il existe une barrière discrète locale au point Q pour les opérateurs (3.4) et (3.5).

Démonstration.

Il existe au point Q une barrière locale forte (non discrète) (voir [1] page 341) et le théorème résulte du fait que L_h est une approximation consistante de L dans $G \cap N_Q$. Voir [4] ou [5].

b) Cas d'une singularité sur une partie rectiligne de la frontière.

Supposons Q sur l'axe des x et $G \cap N_Q$ situé dans le demi-plan $y > 0$. Supposons que, dans $G \cap N_Q$, l'opérateur L peut s'écrire, à un facteur positif près, sous la forme :

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b \frac{\partial u}{\partial y}\right) - q\,u$$

où :

8) Voir annexe II.

$$(3.6)\quad \begin{cases} a(P) = \lambda(y)\,\alpha(x, y) \\ b(P) = y^{\sigma}\,\beta(x, y) \\ 0 < |\sigma| < 1 \\ 0 < \lambda(y) < K\,y^{\sigma-1} \\ \lambda(y) \in C^1 \quad \text{pour } y > 0 \\ \alpha(P),\ \beta(P) \in C^2(\bar{G} \cap N_Q) \\ \alpha(P),\ \beta(P) > c_o > 0 \\ 0 \leqslant q(P) < K \end{cases}$$

Exemples :

$$Lu = \Delta u + \frac{\sigma}{y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

(Cas des potentiels axialement symétriques généralisés ; voir S.V. PARTER [7], [8]).

$$Lu = y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma}{y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial y}$$

Il est facile de vérifier que, sous les hypothèses (3.6), l'opérateur (3.4) est de type positif dans $G \cap N_Q$ pour h suffisamment petit. Noter, d'autre part, que l'opérateur (3.5) est dans ce cas :

$$L_h v = (a_{i+\frac{1}{2}}\, v_x)_{\bar{x}} + (b_{j+\frac{1}{2}}\, v_y)_{\bar{y}} - q\,v$$

Alors, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3

Soit ξ l'abscisse du point Q et soit :

$$V(P ; Q) = -c(x - \xi)^2 + y - y^{1-\sigma} \qquad \text{si } 0 < \sigma < 1$$

$$V(P ; Q) = -c(x - \xi)^2 - y \qquad \text{Si } -1 < \sigma < 0$$

Alors, si $c > 0$ est suffisamment petit, $V(P ; Q)$ est une barrière discrète locale au point Q pour les opérateurs (3.4) et (3.7).

Démonstration

Le cas $0 < \sigma < 1$ est le plus difficile. On doit utiliser les 2 inégalités suivantes:

$$(1+z)^{1-\sigma}\left(1+\frac{\sigma}{2}z\right) - 2 + (1-z)^{1-\sigma}\left(1-\frac{\sigma}{2}z\right) < 0$$

$$\left(1+\frac{z}{2}\right)^{\sigma}\left[(1+z)^{1-\sigma}-1\right] + \left(1-\frac{z}{2}\right)^{\sigma}\left[(1-z)^{1-\sigma}-1\right] < 0$$

quels que soient σ et z, $0 < \sigma < 1$, $0 < z < 1$. Voir [4] ou [5].

c) Cas d'une singularité sur une partie convexe de la frontière

Supposons que $\Gamma \cap N_Q$ admet une représentation de la forme $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction convexe et supposons $Y = y - \varphi(x) > 0$ pour tous les points $P = (x,y) \in G \cap N_Q$. Supposons que, dans $G \cap N_Q$, l'opérateur L peut s'écrire, à un facteur positif près sous la forme :

$$Lu = a(P)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(P)\left[\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(P)\frac{\partial u}{\partial y}\right] - q(P)\,u$$

où :

$$\left\{\begin{array}{l} a(P),\ f(P),\ \alpha(P),\ \beta(P),\ q(P) \in C^1(G \cap N_Q) \\ 1 \leq a(P) < K\, Y^{-k-1}, \quad 0 < k < 1 \\ 0 \leq f(P) < \dfrac{k}{Y} \\ \alpha^2(P) + \beta^2(P) = 1 \\ 0 \leq q(P) < K. \end{array}\right.$$

Théorème 3.4

Soit ξ l'abscisse du point Q et soit $k < \sigma < 1$.

Alors, la fonction $V(P ; Q) = -(x-\xi)^2 - Y^{1-\sigma}$ est une barrière discrète locale au point Q pour l'opérateur (3.4).

Démontration : voir [4]

Remarque : On a évidemment un résultat similaire en permutant x et y.

QUATRIEME PARTIE.

UN THEOREME D'UNICITE.

Nous ne disposons pour le moment d'aucune théorie générale pour résoudre la question de l'unicité [9)]; bien sûr, dans le cas du problème de DIRICHLET proprement dit, l'unicité est un corollaire du principe du maximum (pour les opérateurs différentiels).

Nous allons donner maintenant un théorème d'unicité pour un problème qui présente une singularité sur une partie rectiligne de la frontière.

Soit $G \subset R^2$ un domaine borné situé dans le demi-plan $y > 0$ et supposons $\Gamma_1 = \Gamma \cap (Ox) \neq \emptyset$, où Ox désigne l'axe des x. Soit L l'opérateur :

$$\text{(4.1)} \qquad Lu = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} - q\, u$$

où :

$$\begin{cases} a(P),\ c(P),\ d(P),\ q(P) \text{ sont définis dans } G \\ a(P) > 0,\ \ d(P) \geq \operatorname{Max} \left\{ 0,\ \frac{1}{y} - K \right\},\ q(P) \geq 0 \end{cases}$$

Exemples :

$$Lu \equiv \Delta u + \frac{\sigma}{y} \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \sigma \geq 1$$

(Potentiels axialement symétriqus généralisés).

$$Lu \equiv \Delta u + \frac{\sigma}{y^{\alpha}} \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \sigma > 0, \quad \alpha > 1$$

<u>Théorème 4.1</u>

Sous les hypothèses ci-dessus, le problème (1.2) a au plus une solution.

---

9) Il semble pourtant que l'unicité soit liée à des conditions <u>locales</u> le long de Γ_1.

Démonstration

Soit $z(P) \not\equiv 0$ une solution du problème :

$$(4.2)\qquad \begin{cases} Lz(P) = 0, & P \in G \\ z(P) = 0, & P \in \Gamma_2 \\ z(P) \in C^2(G) \cap C(G \cup \Gamma_2). \end{cases}$$

Supposons, par exemple, $z(P_o) > 0$ pour un certain $P_o \in G$.

Soit $Z(y) = \underset{x}{\mathrm{Max}}\ z(x, y)$ où le maximum est pris selon tous les x tels que $P = (x, y) \in \bar{G}$. On démontre que $Z(y)$ est une fonction continue, positive, non-croissante, convexe et finalement que $Z(y) \longrightarrow \infty$ quand $y \longrightarrow 0$. Il en résulte évidemment que $z(P) \notin B(G)$. Donc le problème homogène associé à (1.2) n'admet que la solution $z(P) = 0$.

Remarque :

Ce théorème et sa démonstration s'étendent immédiatement au cas de l'espace R^n (il faut alors remplacer l'axe des x par un hyper-plan).

CINQUIEME PARTIE
ETUDE D'UN AUTRE TYPE DE PROBLEME.

Le problème (1.2) est un cas particulier du problème :

$$(5.1)\qquad \begin{cases} Lu(P) = f(P), & P \in G \\ u(P) = g(P), & P \in \Gamma_2 \\ u(P) \in G^2(G) \cap C(G \cup \Gamma_2) \cap \mathcal{E} \end{cases}$$

où $\mathcal{E}$ est un certain ensemble de fonctions.

Dans cette partie nous allons étudier le cas suivant : 10)

$$(5.2)\qquad \begin{cases} \Gamma_2 = \Gamma - \{ Q_o \}, & Q_o \in \Gamma \\ \mathcal{E} = \{ u(P) ; u(P_o) = u_o \}, & P_o \in G \end{cases}$$

Nous admettrons que ce problème a au plus une solution. Lorsque $f(P) \equiv 0$ et $g(P) \equiv 0$, cette solution est, à un facteur constant près, le noyau de POISSON au point Q_o du problème considéré. Il suffit évidemment de considérer ce cas particulier, puisque lorsque $f(P) \not\equiv 0$, $g(P) \not\equiv 0$, la solution s'obtient par combinaison linéaire avec une solution du problème (1.2) que nous venons d'étudier.

Supposons $G \subset R^2$ 11). Soit L l'opérateur (3.1) et L_h l'opérateur (3.5) ou l'opérateur (3.4) que nous supposons de type positif pour h suffisamment petit. Nous supposons qu'en tout point $Q \in \Gamma - \{ Q_o \}$, il existe une barrière locale discrète.

---

10) Ce problème a été suggéré par le Professeur J.L. LIONS. Il entre bien dans le domaine d'application des barrières discrètes.

11) Cette hypothèse est nécessaire pour notre démonstration, sinon pour la validité du théorème 5.1.

Notons que $\Gamma_1(h) = \emptyset$, donc $G(h) = G_o(h)$ et $\Gamma(h) = \bar{G}(h) - G_o(h)$.

Soient $Q_o(h) \in \Gamma^*(h) = \Gamma(h) \cap \left\{ \bigcup_{P \in G(h)} N(P) \right\}$ et

$P_o(h) \in G(h)$, tels que $d(Q_o(h), Q_o) \longrightarrow 0$ et $d(P_o(h), P_o) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$.

Considérons le problème :

$$(5.3) \qquad \begin{cases} L_h v(P) = 0, & P \in G(h) \\ v(P) = u_o, & P = P_o(h) \\ v(P) = 0, & P \in \Gamma(h) - \{ Q_o(h) \} \end{cases}$$

Comme $G(h) \cup \Gamma^*(h)$ est connexe pour h suffisamment petit, il résulte du principe du maximum fort que le problème (5.3) a une solution unique $v(P ; h)$.

Théorème 5.1

Supposons $f(P) \equiv 0$ et $g(P) \equiv 0$. Alors, le problème (5.1, 5.2) admet une solution (unique) $u(P)$ et $v(P ; h)$ converge vers $u(P)$ uniformément dans $G - N(Q_o)$ où $N(Q_o)$ est un voisinage arbitraire de Q_o.

Démonstration

Pour pouvoir appliquer la théorie des barrières discrètes il suffit de démontrer que la famille de fonctions $v(P ; h)$ est uniformément bornée dans $G - N(Q_o)$. Pour cette démonstration, voir un article à paraître.

Remarque :

Sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut démontrer que $v(Q_o(h) ; h) = 0(h^{-1})$ (voir article à paraître). Soit alors $V(P ; h)$ la solution du problème.

$$(5.4) \qquad \begin{cases} L_h V(P) = 0, & P \in G(h) \\ V(P) = \frac{1}{h}, & P = Q_o(h) \\ V(P) = 0, & P \in \Gamma(h) - \{ Q_o(h) \} \end{cases}$$

Toute suite $\{ V(P ; h_n) ; h_n \longrightarrow 0 \}$ admet une sous-suite qui converge uniformément dans $G - N(Q_o)$ vers une fonction qui est proportionnelle à la solution du problème (5.1, 5.2). Pourtant la suite elle-même ne converge pas en général.

SIXIEME PARTIE
REMARQUES ET COMMENTAIRES.

1° Choix des conditions aux limites discrètes près de Γ_1

Lorsque le problème (1.2) a une solution unique il est évidemment impossible d'imposer à la solution u(P) des conditions aux limites supplémentaires le long de Γ_1, à moins bien sûr que l'on choisisse précisément des conditions qui sont déjà satisfaites par cette solution unique. Au contraire, dans le problème discret, il est nécessaire d'imposer certaines conditions "aux limites" sur $\Gamma_1(h)$ pour garantir l'unicité de la solution ; nous avons vu qu'on peut choisir ces conditions aux limites de façon arbitraire ; en particulier, on peut imposer aux approximations v(P ; h) de prendre des valeurs arbitraires sur $\Gamma_1(h)$, ou encore, on peut considérer les points de $\Gamma_1(h)$ comme des points "intérieurs" du domaine discret $\bar{G}(h)$ et leur associer un certain opérateur aux différences arbitraire . Nous avons obtenu ainsi la convergence uniforme dans G moins un voisinage de Γ_1. On peut s'attendre à obtenir un résultat meilleur si l'on choisit judicieusement les conditions aux limites discrètes le long de Γ_1 ; en particulier lorsque u(P) $\in$ C($\bar{G}$) on peut espérer obtenir la convergence uniforme dans tout le domaine G. Voir à ce sujet [7] (Section 3 ; potentiels symétriques axialement symétriques généralisés) et [4] (Partie IV : paragraphe IV : problèmes unidimensionnels).

2° Opérateurs qui ne sont pas de type positif.

Pour simplifier l'exposé, nous avons imposé à l'opérateur L_h d'être de type positif. En fait, on peut admettre des opérateurs L_h pour lesquels les conditions (2.5) ne sont pas satisfaites près de Γ_1, à condition que le système d'équations aux différences (2.6) admette, pour chaque h $\in \mathcal{H}$, une solution unique et que la famille de fonctions $\{ v(P ; h) ; h \in \mathcal{H} \}$ soit uniformément bornée dans G. Voir à ce sujet [4] (Partie IV ; paragraphe IV : problèmes unidimensionnels).

3° Résultats propres aux problèmes unidimensionnels

Dans le cas des problèmes unidimensionnels il est possible d'obtenir des résultats plus précis concernant :

a) Existence de barrières discrètes fortes (non locales)

b) Monotonicité de la convergence et comparaison des schémas correspondant aux opérateurs (3.4) et (3.5),

c) Obtention d'une borne uniforme pour l'erreur,

d) Obtention d'une formule asymptotique représentant le comportement de l'erreur dans le domaine considéré.

Voir [4] et un article à paraître.

4° Conclusion

Cet exposé est un nouvel exemple de construction de théorèmes d'analyse à partir d'éléments de pure technique numérique. Etant donné le développement spectaculaire récent des techniques numériques, cette démarche semble appelée à jouer un rôle important en mathématiques.

ANNEXE I (voir paragraphe III.2)

Ce théorème fut démontré par COURANT, FRIEDRICHS et LEWY [2] dans le cas de l'équation de LAPLACE. L'extension à un opérateur elliptique général dans R^2 a été faite par W.V. KOPPENFELS [6]. Puis l'extension à des opérateurs dans R^n a été admise et affirmée par un certain nombre d'auteurs dont O.A. LADYSHENSKAYA. La démonstration a été donnée récemment par C.W. CRYER [3].

ANNEXE II (voir paragraphe III.2)

Si l'on suppose que les coefficients de l'opérateur L sont dans $C^3(G)$ on peut employer la méthode de COURANT - FRIEDRICHS et LEWY [2] fondée sur l'équi continuité des différences premières et secondes des fonctions v(P ; h) dans tout sous-domaine intérieur G'.

Sous des hypothèses plus faibles on peut démontrer que la fonction limite u(P) est une solution faible de l'équation différentielle, puis on utilise l'équivalence des solutions faibles et des solutions ordinaires (voir [5]).

Enfin, on peut fonder la démonstration sur les estimations de SCHAUDER (voir [4]).

Manuscrit reçu le 8 mars 1967

REFERENCES.

[1] COURANT R.
Partial Differential Equations (Courant - Hilbert, vol. II)
Interscience Publishers, 1962.

[2] COURANT R., FRIEDRICHS K.O., LEWY H.
Uber die partiallen Differenzgleichungen der mathematischen Physik,
Math. Ann., 1928, 100, 32-74

[3] CRYER C.F.
On difference Approximations to Elliptic Partial Differential Equations in R^n
(à paraître).

[4] JAMET P.
Numerical Methods and Existence Theorems for Singular Linear Boundary-Value Problem, Thèse à l'Université du Wisconsin, 1967. (Une traduction en Français sera publiée par le Commissariat à l'Energie Atomique).

[5] JAMET P., PARTER S.V.
Numerical Methods for Elliptic Differential Equations whose Coefficients are Singular on a Portion of the Boundary.
A paraître (S.I.A.M. Journal Series B - Numerical Analysis).

[6] KOPPENFELS W.V.
Uber die Existenz der Losungen linearer partialler Differentialgleichungen vom elliptischen Type
Thèse, Göttingen, 1929

[7] PARTER S.V.
Numerical Methods for Generalized Axially Symetric Potentials
S.I.A.M. Journal, Series B - Numerical Analysis, 2, 1965, 500-516.

[8] PARTER S.V.
On the Existence and Uniqueness of Symmetric Axially Symmetric Potentials.
A paraître.

[9] PETROVSKY I.G.
New Proof of the Existence of a solution of Dirichlet's Problem by the Method of Finite Difference.
Uspehi Mat. Nauk 8, 161-170, 1941.

FIN