CEA-R-3151 - CHAKO Nicholas

CONTRIBUTION A LA THEORIE DE LA DIFFRACTION

Sommaire. - Dans une première partie nous présentons un exposé général de la théorie moderne de la diffraction. La théorie rigoureuse est formulée à partir de l'équation d'onde scalaire et aussi des équations de Maxwell, comme un problème aux valeurs limites. Cependant, un tel programme n'a pas encore été réalisé jusqu'à présent, même pour les plus simples des systèmes optiques, à cause de la complexité de ces conditions aux limites. Les développements récents montrent clairement le caractère approximatif des théories classiques de Fresnel et Young, formulées rigoureusement par Kirchhoff et Rubinowicz. Elles montrent aussi l'insuffisance de ces théories, pour expliquer un certain nombre de phénomènes de diffraction. Nous avons fait l'étude de ces différentes théories approximatives, y compris une tentative ./.

CEA-R-3151 - CHAKO Nicholas

CONTRIBUTION TO DIFFRACTION THEORY

Summary. - In a first part, we have given a general and detailed treatment of the modern theory of diffraction. The rigorous theory is formulated as a boundary value problem of the wave equation or Maxwell equations. However, up to the present time, such a program of treating diffraction by optical systems, even for simple optical instruments, has not been realized due to the complicated character of the boundary conditions. The recent developments show clearly the nature of the approximation of the classical theories originally due to Fresnel and Young, later formulated in a rigorous manner by Kirchhoff and Rubinowicz, respectively and, at the same time the insufficiency of these theories in explaining a number of diffraction phenomena. Furthermore, ./.

récente, pour les améliorer et nous en avons montré les limites.

La deuxième partie contient une analyse mathématique générale de la diffraction des aberrations.

Après un exposé des aberrations géométriques et ondulatoires selon les développements classiques et modernes (Nijboer), les intégrales représentant le champ dans l'espace image, ont été évaluées. Les formules obtenues généralisent tous les résultats des chercheurs antérieurs. Pour la comparer avec la théorie de Zernike-Nijboer, nous avons développé et généralisé notre théorie dans le cas des ouvertures non-circulaires et pour des systèmes optiques qui ne sont pas de révolution. La fonction d'aberration est développée en polynômes orthogonaux sur l'ouverture de la pupille de sortie. La fonction d'image a été calculée, pour des ouvertures triangulaires et elliptiques, dans le cas d'une seule aberration du troisième ordre. ./.

we have made a study of the limitations of the approximate theories and the recent attempts to improve these.

The second part is devoted to a general mathematical treatment of the theory of diffraction of optical systems including aberrations.

After a general and specific analysis of geometrical and wave aberrations along classical and modern (Nijboer) lines, we have been able to evaluate the diffraction integrals representing the image field at any point in image space explicitly, when the aberrations are small. Our formulas are the generalisations of all anterior results obtained by previous investigators. Moreover, we have discussed the Zernike-Nijboer theory of aberration and generalised it not only for rotational systems. but also for non-symmetric systems as well, including the case of non circular apertures. The extension to non-circular apertures is done by ./

Tous ces résultats sont valables, quand les aberrations sont très petites, c'est-à-dire quand la déformation de l'onde réelle est inférieure à la longueur d'onde. Mais nous avons étudié le problème de la diffraction, quand les aberrations sont plus grandes que la longueur d'onde, par l'application de la méthode de phase stationnaire qui permet l'évaluation des inégrales multiples à grand paramètre et qui a été développée en détail dans notre deuxième thèse.

Enfin, les méthodes ont été appliquées au problème de la diffraction par des ondes corpusculaires, dans un système d'optique électronique, où elles satisfont à l'équation de Schrödinger.

1969 203 P.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

---

introducing orthogonal functions or polynomials over such aperture shapes.

So far the results are valid for small aberrations, that is to say, where the deformation of the real wave front emerging from the optical system is less than a wave length of light or of the electromagnetic wave from the ideal wave front. If the aberrations are large, then one must employ the method of stationary phase. A complete mathematical treatment of this method of evaluating multiple integrals containing a large parameter will be found in our second thesis, including applications.

Finally, we have given a detailed development of the diffraction theory of corpuscular waves by an electron aptical system, satisfaging a Schrödinger equation.

1969 203P.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

[PREM]IER MINISTRE, MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
[IN]STITUT NATIONAL DES SCIENCES ET TECHNIQUES NUCLÉAIRES

CEA - R-3151

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE LA DIFFRACTION

par

Nicholas CHAKO

CENTRE D'ÉTUDES NUCLÉAIRES DE SACLAY

Rapport CEA-R-3151

[19]69

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N - SACLAY B.P. n°2, 91 - GIF-sur-YVETTE - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

PLAN DE CLASSIFICATION

1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS

2. BIOLOGIE ET MEDECINE

2\. 1 Biologie générale
2\. 2 Indicateurs nucléaires en biologie
2\. 3 Médecine du travail
2\. 4 Radiobiologie et Radioagronomie
2\. 5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine

3. CHIMIE

3\. 1 Chimie générale
3\. 2 Chimie analytique
3\. 3 Procédés de séparation
3\. 4 Radiochimie

4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE

5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE

6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX

6\. 1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux
6\. 2 Effets des rayonnements sur les matériaux
6\. 3 Corrosion

7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS

7\. 1 Neutronique et physique des réacteurs
7\. 2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité
7\. 3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs

8. PHYSIQUE

8\. 1 Accélérateurs
8\. 2 Electricité, électronique, détection des rayonnements
8\. 3 Physique des plasmas
8\. 4 Physique des états condensés de la matière
8\. 5 Physique corpusculaire à haute énergie
8\. 6 Physique nucléaire
8\. 7 Electronique quantique, lasers

9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES

10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS

10\. 1 Protection sanitaire
10\. 2 Contrôle des rayonnements
10\. 3 Traitement des effluents

11. SEPARATION DES ISOTOPES

12. TECHNIQUES

12\. 1 Mécanique des fluides - Techniques du vide
12\. 2 Techniques des températures extrêmes
12\. 3 Mécanique et outillage

13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE

13\. 1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines
13\. 2 Divers (documentation, administration, législation, etc...)

14. ETUDES ECONOMIQUES ET PROGRAMMES

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2 200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

The C.E.A. reports starting with n° 2 200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Nicholas CHAKO

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à la théorie de la diffraction

DEUXIÈME THÈSE

Etude sur les développements asymptotiques des intégrales multiples de la physique mathématique

Soutenues le 22 Novembre 1966 devant la Commission d'examen

MM.	M. FRANCON	Président
	M. COTTE	Examinateurs
	Th. KAHAN	

- Rapport CEA-R 3151 -

Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires

CONTRIBUTION A LA THEORIE DE LA DIFFRACTION

par

Nicholas CHAKO

- Avril 1969 -

REMERCIEMENTS

Depuis plusieurs années, nous nous occupons de l'étude de Diffraction par des Systèmes Optiques. Les résultats de ces recherches sont présentés maintenant dans 2 thèses préparées au Laboratoire Electrodynamique des Gaz Ionisés de la Faculté des Sciences de Paris, dirigé par M. le Pr M. COTTE.

à M. COTTE, Professeur à la Sorbonne, j'offre ma respectueuse gratitude pour avoir bien voulu accepter la direction de ma thèse et pour ses conseils bienveillants et ses nombreuses et précieuses suggestions.

à M. FRANCON, Professeur à la Sorbonne et à l'institut d'Optique, qu'il me soit permis d'exprimer ma vive reconnaissance pour avoir bien voulu accepter la Présidence du Jury.

à M. T. KAHAN, Directeur de recherches au C.N.R.S., Institut Henri Poincaré, mes vifs remerciements pour avoir accepté d'être Membre du Jury et pour son intérêt soutenu à l'égard de ce travail.

Je suis très reconnaissant aux Autorités du Commissariat à l'énergie Atomique et de l'Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires pour leur invitation à venir travailler en France, et pour la réalisation de l'édition de cet ouvrage.

Enfin, ma reconnaissance va à mon épouse dont l'aide et la patience m'ont été très précieuses.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES (suite)

TABLE DES MATIERES (suite)

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET HISTORIQUE

La théorie de la diffraction, fondée sur la conception ondulatoire de la lumière est dûe à Thomas YOUNG (1801) et à Augustin FRESNEL (1818). Ils ont basé leurs idées sur le principe de Huygens qui assimile la propagation de la lumière à celle d'un mouvement ondulatoire. Les deux savants ont approché le problème de diffraction de la lumière, de points de vue différents. Young a remarqué, comme Newton avant lui, que les bords d'un disque ou d'un écran et en général ceux d'un obstacle placé en face d'une source de lumière, sont brillants et illuminés, même quand l'observateur ne peut pas voir directement la source de la lumière.

En d'autres termes, les bords agissent comme une nouvelle source de vibrations lumineuses.

A la suite de ses observations et de ses expériences sur les trous, Young pouvait inférer que le bord d'un écran et, en règle générale, celui d'un obstacle quelconque, placé dans un faisceau lumineux devient une source secondaire, émettant des ondes secondaires divergentes en diverses directions. Il a expliqué la diffraction de la lumière par l'interférence de deux ondes, soit deux ondes secondaires divergeant de points divers sur le bord de l'écran ou de l'obstacle, soit l'interférence d'une onde directe de la source et une onde secondaire provenant du bord de l'obstacle diffractant.

Le rayon direct (onde primaire) est présent en tous les points de l'espace illuminé directement par la source et se propage selon les principes de l'optique géométrique.

Il est représenté par la forme mathématique de l'onde incidente imperturbée. Un autre nom pour l'onde primaire est l'onde géométrique.

Selon les principes de l'optique géométrique, l'onde primaire ou géométrique est limitée à la région de l'espace, qui reçoit l'illumination directe du rayon de la source de lumière. Alors la lumière ne peut s'étendre jusqu'à la région obscurcie par l'obstacle et par conséquent, la fonction d'onde dans la région d'ombre disparait complètement.

La fonction d'onde qui représente la distribution de la lumière, de l'onde géométrique, présente une discontinuité sur le bord de l'ombre ; en d'autres termes, il y a une obscurité totale dans la région d'ombre créée par l'obstacle diffractant.

D'autre part, l'onde secondaire ou l'onde diffractante, divergeant des bords de l'obstacle produit une vibration lumineuse non seulement dans la partie illuminée par l'onde primaire, mais aussi dans la région de l'ombre, de sorte qu'il y a une illumination dans tout l'espace. Ainsi, la vibration lumineuse résultante est en chaque point de l'espace la superposition de l'onde primaire ou géométrique et de l'onde secondaire diffractée. Puisque l'onde géométrique est discontinue au bord de l'ombre, il faut que l'onde de diffraction comprenne une partie, qui compense la discontinuité de l'onde géométrique, parce que la vibration lumineuse est continue dans tout l'espace.

Selon Young, la diffraction se présente,quand on fait interférer deux ondes. De cette manière, il pouvait rendre compte de la présence des franges d'interférence dans la région de l'ombre, produite par les trous. La décomposition mentionnée ci-dessus d'une onde lumineuse en une,onde géométrique et une onde de diffraction, ressemble à la théorie de la diffraction de la lumière de Newton, qui l'a formulée à partir de l'idée que la propagation de lumière est de nature corpusculaire. Ainsi, l'onde ou le rayon primaire est dû à l'arrivée directe des corpuscules lumineux venant de la source, qui s'éloignent à une certaine distance des bords de l'obstacle diffractant. Cette partie s'accorde avec les lois de la mécanique classique. A présent, nous savons que la description des corpuscules lumineux par la mécanique classique et la description de l'onde primaire par l'optique géométrique, donnent un résultat identique pour l'intensité lumineuse dans la région illuminée. En effet, les propagations des corpuscules et des rayons lumineux (l'onde primaire) sont soumises à des équations de même genre, les équations de Hamilton.

Afin d'expliquer les effets de la diffraction, Newton supposait que les corpuscules lumineux, en passant tout près des bords de l'obstacle présentaient une déflexion ou changement de direction, dûe à l'influence du bord et par conséquent, quelques corpuscules lumineux passaient dans la région d'ombre. Cependant, la théorie corpusculaire de Newton n'est pas arrivée à expliquer la présence des franges d'interférence, dans la région illuminée et dans l'ombre.

D'autre part, l'hypothèse des corpuscules de lumière de Newton est celle qui s'approche le plus du concept moderne de la lumière, c'est-à-dire le photon et la propagation de lumière par un intermédiaire, qui est le photon sans charge électrique. On sait aujourd'hui qu'à tout corpuscule en mouvement, il faut associer un mouvement ondulatoire où la longueur d'onde est donnée par la formule de M. de Broglie.

Dans l'espace libre, un tel corpuscule est représenté par une onde plane. Mais afin d'expliquer la diffraction, il faut introduire une espèce de masse pour le photon, qui sera sous l'influence de l'obstacle. Jusqu'à présent, cette hypothèse n'est pas encore vérifiée par les expériences.

Fresnel a fondé sa théorie de la diffraction de la lumière sur le principe de Huygens (ondes enveloppes) et le principe des interférences. Suivant cette théorie, chaque point de la surface de l'ouverture, devient la source d'ondes secondaires (ondelettes) divergentes qui interférent.

Plus tard la théorie de Fresnel a été mise en forme mathématique rigoureuse par Helmholtz et Kirchhoff, à partir de l'équation des ondes scalaires. Du point de vue de la théorie de Fresnel, la vibration lumineuse est continue en tout point de l'espace et se trouve singulière seulement aux sources propres. En conséquence, il n'y a aucune discontinuité de lumière ou du champ de l'onde, lorsqu'on traverse le bord de l'ombre, du côté illuminé au côté de l'ombre, comme c'est le cas pour la théorie de Young. La théorie de Fresnel, vérifiée par des expériences a prévalu, depuis longtemps, dans le domaine des phénomènes de diffraction. Young lui-même, acceptait l'explication de la diffraction par Fresnel, comme supérieure à la sienne. Cependant les idées de Young ne furent jamais abandonnées et à la fin du dernier siècle et spécialement pendant le premier quart du nôtre, elles se trouvèrent mises de plus en plus en valeur par les travaux théoriques et expérimentaux de nombre de physiciens. A présent nous savons que la discontinuité de la lumière à la traversée du bord d'ombre, n'existe qu'en apparence. La séparation de la fonction d'onde en une onde géométrique et une onde de diffraction, est un artifice mathématique pour simplifier l'expression intégrale, représentant le champ total dans la formulation de Kirchhoff pour le problème de diffraction.

L'expression mathématique du champ total, donnée par l'intégrale de Kirchhoff sur la surface des obstacles diffractants ou ouvertures dans un écran, peut être transformée de telle façon, qu'une partie corresponde à l'onde géométrique et l'autre partie à l'onde de diffraction, qui est donnée par une intégrale de contour prise sur le bord de l'obstacle ou de l'ouverture. De plus, l'intégrale de contour possède une discontinuité à travers le bord d'ombre, dont la grandeur est la moyenne de celle de l'onde géométrique. Sa phase change tout à coup de π lorsqu'on passe du côté illuminé au côté sombre. Ce changement soudain de phase dans l'intégrale de contour compense la discontinuité de l'onde géométrique. Le champ total est continu en tout point de l'espace. Cette décomposition de l'intégrale de diffraction de Kirchhoff, sur toute l'étendue de la surface d'ouverture en une onde géométrique et une onde de diffraction, a été réalisée par Maggi et surtout par Rubinowicz. Elle a été plus tard généralisée par d'autres pour expliquer la diffraction électromagnétique.

Du point de vue de la formulation mathématique, les deux thèses de Fresnel et Young s'accordent bien, pourvu qu'on interprète correctement les résultats mathématiques obtenus, à savoir, d'une part, les expressions obtenues pour les intégrales doubles de Kirchhoff et, d'autre part, la transformation Maggi-Rubinowicz de l'intégrale double.

En effet, quand la longueur d'onde de la lumière est courte comparée à la dimension des obstacles diffractants et la distance au point d'observation, l'évaluation de l'intégrale double de Kirchhoff, par la méthode de la phase stationnaire, donne un terme, qui correspond à l'onde géométrique ; en plus, il y a une contribution provenant du bord de l'obstacle, qui correspond à l'onde diffractée de Young. Ces points, situés au bord de l'obstacle, sont placés de façon que la somme du chemin optique de la source, jusqu'à ces points et de ces points au point d'observation obéissent au principe généralisé de Fermat. Cela veut dire que les points sur le bord sont des points stationnaires de la fonction de phase, qui apparaît dans l'intégrale de diffraction de Kirchhoff. Les résultats s'accordent avec la formulation de Rubinowicz du principe de Young.

Néanmoins, il faut dire que les deux théories, celle de Fresnel formulée par Kirchhoff et ses extensions et celle de Young formulée par Rubinowicz et son extension, sont des théories seulement approximatives. Une théorie exacte de la diffraction de la lumière ou des ondes électromagnétiques, devrait être fondée sur la solution de l'équation d'onde scalaire ou des équations de Maxwell, remplissant les conditions de limite et de régularité. C'est-à-dire qu'il faudrait formuler la théorie, comme un problème de valeur aux limites et de valeur initiale de l'équation d'onde scalaire ou des équations de Maxwell.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons une formulation rigoureuse de la théorie de la diffraction de la lumière et des ondes électromagnétiques, fondée sur les équations d'onde et celles de Maxwell. En plus nous montrerons le caractère approximatif des deux théories de Young et de Fresnel, telles qu'elles ont été formulées par Rubinowicz et Kirchhoff, et leurs extensions modernes.

Du point de vue moderne, une théorie rigoureuse de la diffraction et la formulation des phénomènes optiques en général, doit prendre en considération la double nature de la lumière, comme onde et comme corpuscule. Dans toute théorie de la diffraction, il faut introduire le concept de photon de lumière. Parce que les idées fondamentales de la théorie classique de la diffraction, sont basées sur le caractère ondulatoire de la lumière ou du champ électromagnétique classique, cette théorie ne donne qu'une description incomplète de la diffraction et des autres phénomènes optiques. En effet, toute théorie de rayonnement et de son interaction avec la matière, y compris la diffraction et la formation d'image par des systèmes optiques devrait être formulée selon les principes de la théorie des quanta et non selon les principes classiques du rayonnement. Ces derniers donnent seulement une description approximative des phénomènes physiques réels. Il est nécessaire d'introduire la théorie des quanta de lumière, pour donner l'explication d'un certain nombre d'expériences optiques, y compris les effets de diffraction et la formation d'images, comme le montrent des travaux récents, par exemple, les expériences d'interférence avec des rayons lumineux d'intensité faible ; les expériences de corrélation pour la détection coïncidente de photons, spécialement à propos des sources stellaires (radio-astronomie) et la production de champs cohérents d'une stabilité et d'une intensité élevés. Donc, une théorie correcte des phénomènes lumineux, comprenant la diffraction et l'interférence devrait inclure le caractère d'onde et le caractère corpusculaire de la lumière. Les concepts classiques du champ électromagnétique et de son interaction avec la matière, ne donnent pas une description véritable et une explication des phénomènes optiques.

Ces effets sont hors du domaine de la mécanique classique et de l'électrodynamique classique. Pour arriver à une description complète et correcte, il faudrait formuler une théorie, basée sur les principes de l'électrodynamique quantique.

CHAPITRE II

THEORIE EXACTE DE LA DIFFRACTION

I. EQUATIONS FONDAMENTALES

La théorie rigoureuse de la diffraction de la lumière est fondée sur les équations du champ électromagnétique de Maxwell, qui s'écrivent :

$$\text{(1a)} \quad \nabla_\wedge H - \frac{\partial D}{\partial t} = J$$

$$\text{(1b)} \quad \nabla_\wedge E + \frac{\partial B}{\partial t} = -J'$$

avec les conditions supplémentaires :

$$\text{(2a)} \quad \operatorname{div} D = \rho$$
$$\text{(2b)} \quad \operatorname{div} B = \rho'$$

Les quantités ρ, J, représentent la densité de charge et de courant électrique et ρ , J' représentent la densité de charge et de courant magnétique, quantités fictives, qui n'ont aucune signification physique, mais qu'on fait entrer dans les équations du champ, afin d'obtenir une symétrie. En outre, nous avons les équations de continuité, ou de conservation de la charge électrique :

$$\text{(3a)} \quad \operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

et l'équation analogue, pour la conservation de la charge magnétique fictive :

$$\text{(3b)} \quad \operatorname{div} J' + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$$

On peut tirer les équations de conservation des charges (3), des équations (1) et (2), en prenant la divergence de (1) et la dérivée par rapport au temps de (2).

Dans divers problèmes de diffraction, particulièrement en optique physique et instrumentale, il est fait usage de champs monochromatiques, à savoir, de champs sinusoïdaux de fréquence ω . En ce cas, on peut écrire les champs sous la forme :

$$\text{(4)} \quad F(x_i, t) = e^{-i\omega t} g(x_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où F et g correspondent aux champs E, H, D et B. Les quantités J, J' et ρ, ρ' peuvent également s'écrire sous la même forme.

Portons (4) dans (1), on arrive à :

$$\text{(5a)} \quad \nabla_\wedge H + i\omega\varepsilon E = J$$
$$\text{(5b)} \quad \nabla_\wedge E - i\omega\mu H = -J'$$

où les champs D, B sont liés à E, H par :

$$\text{(6a)} \quad D = \varepsilon E$$
$$\text{(6b)} \quad B = \mu H$$

et pour les corps conducteurs, on a :

$$\text{(7a)} \quad J = \sigma E$$

(7b) $J' = \sigma' H$

où σ , σ' représentent la conductibilité électrique et la conductibilité magnétique.

Les équations (5a, b) sont les équations de Maxwell pour un régime stationnaire.

En général, les quantités ε , μ dépendent des coordonnées (x_i) et du temps t et dans les milieux anisotropes ε , μ sont représentés par des tenseurs du second ordre.

Mais dans ce travail, nous supposons, que ces quantités sont des scalaires constants, indépendant de (x_i) et de t.

Considérons un espace, rempli par un milieu homogène et isotrope, défini par une permittivité électrique ε et par une perméabilité magnétique μ . Les champs sont continus dans tout cet espace (espace de champ), par exemple, l'espace vide.

Si nous introduisons un corps conducteur, les champs E, H se modifient au voisinage du corps, et d'une façon, qui dépend de la forme du corps conducteur. Quand le corps est un conducteur parfait, (conductivité $\sigma \to \infty$), les champs E et H s'évanouissent à l'intérieur du conducteur et satisfont à certaines conditions sur la surface de celui-ci, et le courant est nul à l'intérieur du corps.

On dit, qu'un conducteur parfait est un réflecteur parfait pour les ondes. Sur les parties dites régulières de la surface d'un tel conducteur parfait, les vecteurs électriques et magnétiques E, H satisfont à certaines conditions aux limites : plus précisément E reste toujours normal à cette surface et H est tangent.

Nous avons donc, pour le champ électrique, la première condition aux limites suivante :

(8) $n \wedge E = 0$ sur Σ

où Σ est la surface totale ou la partie régulière de cette surface du conducteur parfait et n la normale extérieure de Σ , (fig. 1a).

Quand $\varepsilon \to \infty$ et $\mu \to 0$, on dit que le corps est un corps conducteur électrique parfait.

De même, quand $\mu \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, on dit que le corps est un corps conducteur magnétique parfait. Ceux-ci sont des corps fictifs, car ce sont des abstractions qui n'existent pas en physique. Ils sont introduits simplement afin de mettre la théorie des champs sous une forme symétrique.

Dans cette hypothèse, on obtient une condition pour le champ magnétique H, sur la surface du corps magnétique parfait :

(9) $n \wedge H = 0$ sur Σ'

où Σ' est la surface (régulière) du conducteur magnétique. (voir fig. 1b).

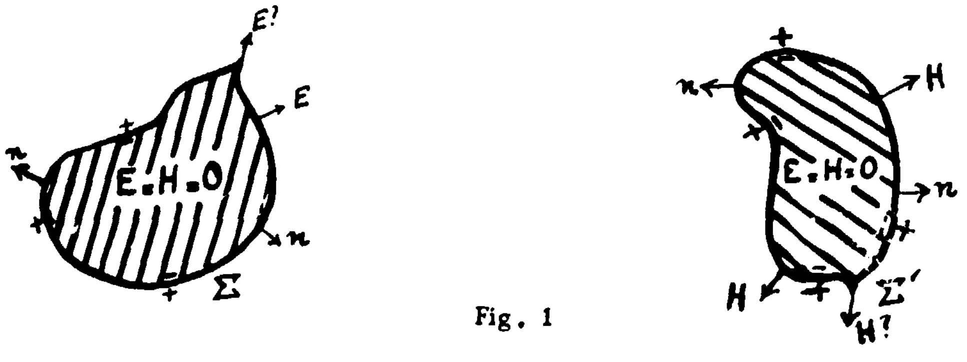


Fig. 1

a) Corps électrique parfait : E est parallèle à n.

b) Corps magnétique parfait : H est parallèle à n.

II. DISCONTINUITÉS DES CHAMPS ELECTROMAGNÉTIQUES

Prenons une surface régulière quelconque Σ et sa normale extérieure n. Cette surface peut-être la surface d'un corps conducteur, qui divise l'espace de champ en deux parties. Les composantes tangentielles des champs, s'écrivent alors :

$$(10) \quad n \wedge E = -J'_s$$
$$n \wedge H = J_s$$

où J_s et J'_s sont des vecteurs arbitraires, mais continus et se trouvent toujours sur le plan tangent à chaque point de la surface Σ, où ils sont définies. Par suite, nous avons pour les composantes normales des champs, les relations :

$$(11a) \quad (n.E) = \frac{i}{\varepsilon\omega} \nabla \wedge H = \frac{i}{\varepsilon\omega} \nabla (n \wedge H) = - \frac{i\,\widehat{\mathrm{div}}.}{\varepsilon\omega} J_s$$

$$(11b) \quad (n.H) = \frac{i\,\widehat{\mathrm{div}}.\ J'_s}{\mu\omega}$$

Les relations (11a, b) se calculent en appliquant les équations de Maxwell (5) et la relation:

$$(12) \quad \nabla \wedge \vec{n} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma$$

en supposant que Σ est une surface lisse. Les relations (11a) et (11b) ne seront pas valables en cas de discontinuités du plan tangent, c'est-à-dire, quand il peut exister plus d'un plan tangent (arête, sommet, point conique de Σ, etc...).

La divergence $\widehat{\mathrm{div}}$, apparaissant dans (11a) et (11b), agit sur un vecteur de la surface Σ et se définit d'une façon semblable à l'opérateur tri-dimensionnel.

Supposons, que les vecteurs du champ prennent des valeurs différentes, suivant que l'on s'approche de Σ d'un côté ou de l'autre (fig. 1). Représentons par E_+, H_+ et E_-, H_- les valeurs de E et H du côté de la normale extérieure à Σ et par, E_-, H_- les valeurs du côté opposé. Alors, la discontinuité du champ électrique, à travers Σ s'écrit : $E_+ - E_-$ et celle du champ magnétique $H_+ - H_-$. Les discontinuités des composantes tangentielles de E et H sont données par : (fig. 2).

$$(13) \quad (n \wedge (E_+ - E_-)) = J'$$
$$(n \wedge (H_+ - H_-)) = J$$

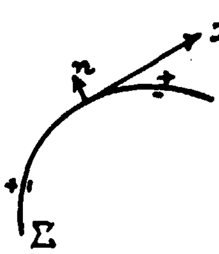
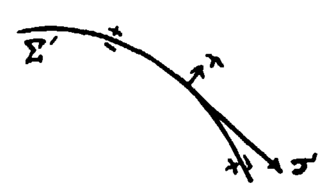


fig. 2



a) Surface électrique mince

b) Surface magnétique mince

et celles des composantes normales par :

$$(14a) \quad (n.(E_+ - E_-)) = \frac{-i}{\varepsilon\omega} \widehat{\mathrm{div}}\, J_s$$

$$(14b) \quad (n.(H_+ - H_-)) = \frac{i}{\varepsilon\omega} \widehat{\mathrm{div}}\, J'_s$$

Quand Σ est la surface d'un conducteur électrique parfait, on a $E_- = H_- = 0$ et :

$$(15) \quad (n \wedge H_+) = J_s$$

puisque pour les conducteurs parfaits $(n \wedge E_+) = 0$ du fait de la condition (8).

La quantité J_s est maintenant le courant électrique superficiel, engendré par le champ magnétique H, sous la forme d'un tourbillon de surface.

De même, la composante normale du champ magnétique est continue à travers Σ, mais le champ électrique subit une discontinuité, donnée par :

$$(16) \quad (n.\, E_+) = -\frac{i}{\varepsilon\omega} \widehat{\mathrm{div}}\, J_s$$

Soit σ_o la charge électrique superficielle sur Σ, nous tirons de (3a) l'équation de continuité pour la charge de surface, c'est-à-dire :

$$(17) \quad \widehat{\mathrm{div}}\, J_s = \frac{i}{\varepsilon\omega} \sigma_o\, \omega$$

D'autre part, si la surface Σ est la surface d'un corps magnétique parfait, les discontinuités des composantes tangentielles et normales des champs, s'écrivent sous la forme suivante :

$$(18) \quad (n \wedge E_+) = -J'_s$$

$$(18b) \quad (n.\, H_+) = \frac{i}{\mu\omega} \widehat{\mathrm{div}}\, J'_s = i\, \sigma'_o\, \omega$$

σ'_o étant définie comme la charge magnétique (fictive) superficielle d'un conducteur magnétique parfait.

Supposons maintenant, que Σ soit la surface d'un écran, fait d'une matière conductrice excellente, comme le cuivre, l'épaisseur de cet écran étant plus petite que la longueur d'onde de l'onde lumineuse, ou électromagnétique. En ce cas, la condition aux limites $(n \wedge E) = 0$ sur chaque côté de l'écran, ou de la feuille de métal, sera presque satisfaite. Et, si Σ' est la surface d'une ouverture dans un tel écran (écran conducteur parfait), alors sur Σ' on aura approximativement $(n \wedge H) = 0$.

En général, il faut remplacer les conditions aux limites mentionnées plus haut, par une relation linéaire - (ou une autre encore plus compliquée), entre les composantes tangentielles de E et H. Parfois, ce genre de relation est appelé : relation d'impédance, quand le nombre d'onde k, définie par $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, n'est plus réel, mais contient un petit terme imaginaire. Ce point de vue permet de définir un soi-disant "écran noir", (en fait un "écran gri qui a joué un grand rôle dans le passé, dans la théorie de la diffraction de la lumière et des ondes électromagnétiques.

Introduisons, par exemple, sur les surfaces Σ et Σ' des polarisations électriques et magnétiques p_e et p_m. Les discontinuités des champs à travers Σ et Σ' s'écrivent alors :

$$(19a) \quad n \wedge (E_+ - E_-) = i\, p_m\, \omega$$

$$(19b) \quad n \wedge (H_+ - H_-) = -\, i\, p_e\, \omega$$

et s'ajoutent aux conditions aux limites (14a) et (14b). De telles conditions aux limites sont satisfaites par les surfaces de corps semi-conducteurs.

III. DÉRIVATION RIGOUREUSE DU PRINCIPE DE HUYGENS

Formulation du Principe de Huygens pour l'équation d'onde scalaire.

La propagation des ondes lumineuses, non-polarisées monochromatiques, obéit à l'équation scalaire de Helmholtz :

$$(20) \quad \Delta\, u + k^2 u = 0$$

Soit u et v des solutions de (20), régulières dans un domaine fini K de l'espace de champ, limité par la surface Σ , règulière et fermée (Fig. 3). Le théorème de Green nous donne :

$$(21) \qquad \int_K (v \,\Delta\, u - u \,\Delta\, v)\, dr' = \int_\Sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dr'$$

fig. 3

a) Région sans source fermée par Σ

b) Région K où les corps sont bien à l'intérieur de Σ (ainsi que les sources)

Supposons que K contienne les sources, ainsi que les corps diffractants. Soit v(r) une solution régulière de (20) et u la fonction de Green $g_o\,(r/r')$, pour l'espace non-borné. La fonction de Green est une fonction symétrique de la distance entre les points r et r', c'est-à-dire :

$$(22) \qquad g_o\,(r/r') = g_o\,(r'/r)$$

Dans l'espace libre, on peut écrire $g_o\,(r/r')$, sous la forme explicite suivante :

$$(23) \qquad g_o\,(r/r') = \frac{e^{ik|r - r'|}}{|r - r'|}$$

ou $|r - r'| = R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$

Elle satisfait l'équation suivante :

$$(24) \qquad (\Delta + k^2)\, g_o\,(r/r') = - \delta\,(r - r')$$

où δ (r) est la distribution de Dirac tri-dimensionnelle et où g_o est régulière, sauf au point $r = r'$; g_o représente une source unité, parce que :

$$(25) \qquad \int_\Sigma \text{grad}'\; g_o\,(r/r')\, n\, d\hat{r}' = -1$$

si $\hat{r} \in \Sigma$ et $r' \in \Sigma$

En désignant l'intégrale du second membre de (21) par $W(\hat{r}/\hat{r}')$:

$$(26) \qquad W(\hat{r}/\hat{r}') = v(\hat{r}')\, \nabla'\, g_o(\hat{r}/\hat{r}') - \nabla'\,(v\,(r'))\, g_o(r/r')$$

Sa divergence s'écrit :

$$(27) \qquad \widehat{\text{div}}\; W\,(r/r') = v \Delta' g_o - g_o\, \Delta' v = - v\,(r')\, \delta\,(r - r')$$

d'après (24) Δ' étant le laplacien pris par rapport à $\hat{r}'$

Alors, par l'intégration de (27) dans le volume K, on obtient :

$$(28)\quad v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_K \nabla' W(r/r')\, d\hat{r} = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma W(r/r')\, n\, dS$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ v(\hat{r}')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v(\hat{r}')}{\partial n'} \right\} g_o(r/\hat{r}')\, d\hat{r}'$$

lorsque r est à l'intérieur du domaine K, limité par Σ et l'intégrale s'annule pour $r \notin K + \partial K$, c'est-à-dire $r \neq r'$ au dehors de Σ.

Cette expression nous donne la formulation exacte du Principe de Huygens*. La formule nous dit qu'en chaque point intérieur à la surface, l'onde lumineuse, ou le champ peut s'exprimer par une superposition d'ondes sphériques $\frac{e^{ikR}}{R}$, engendrées par des charges superficielles de densité $\frac{\partial v(r')}{\partial n'}$ et d'ondes di-polaires $g_o(r/r')$ de densité superficielle $v(r')$.

Cette formule représente sous une forme plus compliquée, la formulation par Fresnel du Principe de Huygens. Pour les points en dehors de la surface, on remarquera que seuls subsistent les ondes secondaires.

Notons que le choix de Σ est en un certain sens arbitraire. La surface Σ peut se diviser en deux surfaces, Σ_1 et Σ_2, Σ_2 étant la surface extérieure et Σ_1, la surface intérieure, contenant toutes les sources et tous les corps diffractants ou obstacles (fig. 3 et 4). Quand Σ_2 tend vers l'infini, on peut prendre pour Σ_2, une sphère de rayon R_n et alors les contributions de Σ_2 à v(r), disparaissent, à condition que nous posions une condition sur le comportement de v(r) à l'infini.

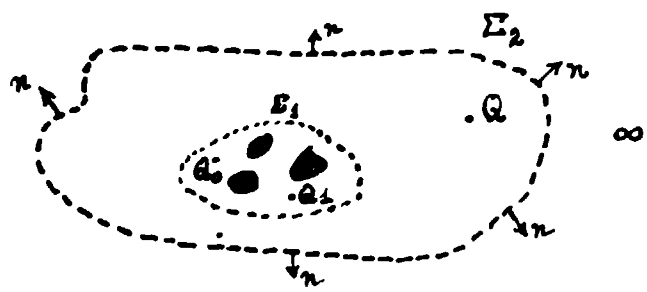


fig. 4

Mais dans le cas où un champ d'ondes est engendré par une source ρ (x, y, z), il satisfait l'équation d'ondes non-homogènes de Helmholtz.

$$(20)\ \Delta u + k^2 u = -\rho(x,y,z)$$

Dans ce cas, la fonction u est donnée par l'intégrale de surface (28) complétée par une intégraie de volume, de la forme :

$$\int_K \rho(\hat{r}')\, g_o(r/\hat{r}')\, d\hat{r}'$$

qui apporte à la fonction d'onde v(r) les contributions de toutes les sources contenues dans le volume K.

* - Voir les livres de Born et Wolf (1959) Stratton (1941) Sommerfeld (1954, 1965) Copson et Baker (1950) et l'article sur la théorie de la diffraction dans Handbuch der Physik (1961).

La formule (28) donne :

$$(28) \qquad v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_K \rho(\hat{r}')\, g_o\,(r/r')\, d\hat{r}' + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left(v(\hat{r})\, \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v(r')}{\partial n'}\right) g_o\,(r/r')\, d\hat{r}'$$

Les généralisations du Principe de Huygens aux ondes non-stationnaires et dans diverses dimensions d'espaces Euclidiens ou dans les espaces de Riemann sont possibles. Dans le cas de l'espace ordinaire (espace-temps) une bonne démonstration est donnée par Jones (1964) et aussi dans Stratton (1941, 1961) Baker et Copson (1950). On remarque ici que proprement un Principe de Huygens existe seulement pour un nombre impair de dimensions spatiales.

Mais au sens large, on peut associer chaque équation aux dérivées partielles hyperboliques à une sorte de Principe de Huygens généralisé, pour un nombre pair de dimensions - (Courant-Hilbert) (1962).

La condition que nous posons pour v(r) et $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ quand Σ_2 s'en va à l'infini est la condition de rayonnement de Sommerfeld, dont nous parlerons plus loin.

Dans ce cas, la formule (28) prise sur Σ_1, nous donne la valeur de v(r), quand $r \in K$, $r \in \Sigma_1$. L'intégrale s'évanouit, quand r est dehors de Σ_1, $r \notin K$, $r \notin \Sigma_1$. Le vecteur n est dirigé à l'intérieur de Σ_1.

Prenons pour Σ_1 cette surface Σ, qui divise l'espace du champ en deux parties :

a) Une partie à l'extérieur de Σ, dans laquelle aucune source ou corps diffractant ne se trouve : on dénote cet espace par K+ ;

b) L'autre partie de l'espace, contenant toutes les sources et tous les corps diffractants, qu'on dénote par K-.

La frontière ou bord de Σ, au côté de l'espace K_+ est dénotée par Σ_+ et l'autre côté vers K- par Σ_-, (comme indiqué dans la figure 3).

En franchissant la surface du domaine K_+ au domaine K_- nous verrons, que l'intégrale saute de la valeur v(r') du côté Σ_+, à la valeur zéro, du côté Σ_-. La dérivée normale $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ fait un saut de $\frac{\partial v(r')}{\partial n}$, quand on prend l'intégrale sur $\Sigma+$ à la valeur zéro, quand l'intégrale est prise sur $\Sigma-$.

IV. RELATIONS INTÉGRALES ENTRE LES VALEURS AUX LIMITES

Considérons v(r) comme une solution régulière de l'équation scalaire d'onde (20) dans un domaine K, limité par la surface Σ. Lorsque v(r), ou sa dérivée normale $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ sont données arbitrairement sur Σ la solution est unique.

Donc, il doit exister une relation entre v(r') et $\frac{\partial v(r')}{\partial n}$ pris sur la surface Σ. Pour trouver cette relation, prenons l'équation (28) et supposons que v(r) s'approche de la surface de l'un ou de l'autre côté, $\Sigma+$ ou $\Sigma-$, $r \to r' + 0$ sur le côté $\Sigma+$ et $r \to r' - 0$ sur le côté $\Sigma-$. Comme l'intégrale (28) satisfait (20) dans le domaine K, celle-ci ne peut s'annuler que si, et seulement si v(r) et aussi $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ s'évanouissent simultanément, quelles que soient les valeurs que v(r) et $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ prennent dans K_+, quand r s'approche de la surface $\Sigma+$, $r \to \hat{r}' + 0$, parce que pour $r \in K_+$ la valeur de l'intégrale reste égale à v(r).

Si nous introduisons les deux fonctions $\varphi(\hat{r}')$ et $\psi(\hat{r}')$ données par :

$$(29) \qquad \varphi(\hat{r}') = v^+(\hat{r}')$$

$$\psi(\hat r') = \left(\frac{\partial v(\hat r')}{\partial n}\right)_+$$

où $\hat r'$ est la valeur de r sur Σ_+, $r \to r' + 0$ l'intégrale (28) s'écrit alors :

(30) $$v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n} - \psi(\hat r')\right\} g_o(r/\hat r')\,d\hat r'$$

pour $r \in K_-$ et est égale à zéro si $r \in K_+$.

Considérons maintenant la valeur de la première intégrale quand $r \to \hat r' \pm 0$:

(31) $$\lim_{r\to\hat r' \pm 0}\int_\Sigma\left\{\varphi(r')\frac{\partial}{\partial n}\right\} g_o(r/\hat r')\,d\hat r'$$

où $\hat r'$ est la valeur de r sur Σ_+.

L'intégrale s'écrit alors :

(32) $$v(r') = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left\{\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n} - \psi(\hat r')\right\} g_o(r/\hat r')\,d\hat r'$$

si $r \in K_+$

et :

(33) $$0 = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left\{\varphi \hat r' \frac{\partial}{\partial n'} - \psi(\hat r')\right\} g_o(r/\hat r')\,d\hat r'$$

si $r \notin K_+$

Pour trouver la valeur de l'intégrale (30) quand $r \to r' \pm 0$:

$$\lim_{r\to\hat r'+0}\int_\Sigma \varphi(r')\frac{\partial}{\partial n'}\, g_o(r/\hat r')\,d\hat r'.$$

Nous prenons un élément de surface de Σ (Σ_Ω) au voisinage de r, $r \in \Sigma_\Omega$. Dans ce voisinage, la fonction de Green peut s'écrire de la manière suivante :

(34) $$g_o(r/\hat r') = \frac{e^{ik|r-\hat r'|}}{4\pi|r-\hat r'|} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|r-\hat r'|} + \dots\dots$$

Alors à la limite, quand $r \to \hat r'$, nous avons :

(35) $$g_o(r/\hat r') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|r-r'|}$$

Par suite :

(36) $$\lim_{r\to\hat r'\pm 0}\int_\Sigma \varphi(r')\frac{\partial}{\partial n'}\, g(\hat r/\hat r')\,d\hat r' = \frac{1}{4\pi}\lim_{r\to\hat r'\pm0}\int_{\Sigma_\Omega}\varphi(r')\frac{1}{|r-\hat r'|}\,d\hat r' + \lim_{r\to\hat r'\pm0}\int_{\Sigma-\Sigma_\Omega}\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'}\, g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r'$$

Dans la deuxième intégrale $\frac{\partial}{\partial n'} g(r/r')$ est continue et bornée. De plus, nous avons :

(37) $$\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|r-\hat r'|}\,d\hat r = \frac{n'|\hat r - \hat r'|}{|\hat r-\hat r'|^3}\,d\hat r = d\omega(r,\hat r')$$

où $d\omega$ est l'angle solide sous tendu par l'élément de surface Σ_Ω au point r. Donc, à la limite $r \to \hat r \pm 0$, nous obtenons :

(38) $$\lim_{r\to\hat r\pm0}\int_{\Sigma_-}\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|r-\hat r'|}\,d\hat r' = \pm 2\pi\,\varphi(\hat r_o)$$

où $\hat r_o$ est un point sur Σ_Ω. Quand on diminue Σ_Ω jusqu'au point $\hat r'$, on obtient pour (38) l'expression suivante [1].

(39) $$\lim_{r\to\hat r\pm0}\int_\Sigma \varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'}\, g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r' = \pm\varphi(r') + \fint_\Sigma \varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'}\, g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r'$$

où $\fint$ est la valeur principale d'intégrale, quand l'élément de surface Σ_Ω, tend vers le point $\hat r + 0$.

De la même façon, nous obtenons, pour la deuxième intégrale :

(40) $$\lim_{r\to\hat r+0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\Sigma\psi(\hat r')\, g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r' = \pm\psi(\hat r') + \fint_\Sigma \psi(r')\frac{\partial}{\partial n'}\, g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r'$$

si $\psi(\hat r')$ est une fonction continue dans Σ.

De la formule (39) et (40) nous tirons l'expression suivante, pour la valeur limite de l'intégrale (32) :

(41) $$\lim_{r\to\hat r+0}\int_\Sigma\left[\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'} - \psi(\hat r')\right] g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r' = \pm\frac12\varphi(\hat r') \pm\fint_\Sigma\left\{\varphi(\hat r'_o)\frac{\partial}{\partial n'} - \psi(\hat r'_o)\right\} g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r'$$

et pour la dérivée normale $\frac{\partial v(\hat r)}{\partial n}$, nous obtenons une formule analogue :

(42) $$\lim_{r\to\hat r+0}\frac{\partial}{\partial n}\fint_\Sigma\left\{\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'} - \psi(\hat r')\right\} g(\hat r/\hat r')\,d\hat r' = \pm\frac12\psi(\hat r') + \frac{\partial}{\partial n}\fint_\Sigma\left\{\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'} - \psi(\hat r')\right\} g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r'$$

En nous souvenant que $v(\hat r)$ et $\frac{\partial v(\hat r)}{\partial n}$, s'évanouissent sur Σ_-, mais sont égales à $v(\hat r)_+$ et $\left(\frac{\partial v(\hat r)}{\partial n}\right)_+$ sur Σ_+; nous obtenons des relations (41) et (42), les expressions suivantes :

(43) $$\frac12\varphi(\hat r) = \frac{1}{4\pi}\fint_\Sigma\left\{\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'} - \psi(\hat r')\right\} g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r'$$
$$\frac12\psi(\hat r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n'}\fint_\Sigma\left\{\varphi(\hat r')\frac{\partial}{\partial n'} - \psi(\hat r')\right\} g_o(\hat r/\hat r')\,d\hat r'$$

(1) Une analyse détaillée est donnée par C. Müller dans son livre important : Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen, Berlin 1957.

relations, qui doivent être satisfaites par les fonctions v ($\hat{r}$) et sa dérivée normale $\frac{\partial v(\hat{r})}{\partial n}$ c'est-à-dire, les valeurs limites sur la surface Σ .

Le symbole $\int$ représente la partie finie ou valeur principale (au sens de Cauchy) de l'intégrale.

Les relations (43) entre $\varphi(\hat{r}')$ et $\psi(\hat{r}')$ forment un système de deux équations intégrales, pour les valeurs aux limites inconnues de la solution de l'équation scalaire d'onde (20) et sa dérivée normale. C'est l'intégration de ces équations, qui déterminera complètement la solution de l'équation d'onde, donnée par l'expression intégrale (28).

Cette intégrale est la fondation rigoureuse de la diffraction pour les ondes scalaires de la théorie de Fresnel-Helmholtz-Kirchhoff. Nous en discuterons dans les paragraphes suivants.

Malheureusement, il est bien difficile d'obtenir des solutions exactes pour (43), même dans le cas le plus simple, où Σ est une surface géométrique, non sphérique (Fock, 1965).

Cependant, on sait que l'on peut attribuer des valeurs arbitraires sur Σ à $\varphi(\hat{r})$ ou $\psi(\hat{r})$, ou bien, soit à v($\hat{r}$), soit à $\frac{\partial v(\hat{r})}{\partial n'}$.

Si on donne $v(\hat{r}) = v_o(\hat{r})$ sur Σ (problème de Dirichlet), la normale $\frac{\partial v(\hat{r})}{\partial n}$ se calcule à partir de l'une ou de l'autre équation de (43). Lorsque la dérivée $\psi(\hat{r}') = \psi_o(\hat{r})$ est donnée (problème de Neumann), alors $\varphi(\hat{r}') = v_+(\hat{r})$ se détermine en résolvant l'équation intégrale non-homogène de Fredholm, de la seconde espèce, qui se tire de la premiere équation de (43):

$$(44) \qquad \varphi(\hat{r}') = f(\hat{r}) + 2\int_{\Sigma_+} \varphi(\hat{r}')\frac{\partial}{\partial n'} g_o(\hat{r}/\hat{r}')\,d\hat{r}'$$

où $f(\hat{r}')$ est une fonction connue de $\hat{r}$, venant de :

$$(45) \qquad f(\hat{r}') = -2\int_{\Sigma_+} \psi_o(\hat{r}')\, g_o(\hat{r}/\hat{r}')\,d\hat{r}'$$

De la seconde équation se déduit l'équation intégrodifférentielle suivante : pour $\frac{\partial(\varphi)}{\partial n}$

$$(46) \qquad \frac{\partial}{\partial n}\int_{\Sigma_+} \varphi(\hat{r}')\frac{\partial}{\partial n} g_o(\hat{r}/\hat{r}')\,d\hat{r} = \frac{1}{2}\,\varphi_o(\hat{r}) + \int_{\Sigma_+} \psi_o(\hat{r}')\frac{\partial}{\partial n} g_o(\hat{r}/\hat{r}')\,d\hat{r}'$$

La présence de la dérivée normale précédant le signe intégrale, rend l'expression singulière quand $\hat{r} \to \hat{r}'$, et l'intégrale elle-même n'est pas bornée. Afin d'éviter cette difficulté, on fait une intégration par partie, qui introduit une dérivée dans la fonction $\varphi(\hat{r})$: Bouwkamp (1953, 1954) Baker et Copson (1950).

En somme, on peut conclure que le principe de Huygens est lié principalement à la solution d'un des deux problèmes de valeur aux limites, représentées par les équations intégrales (44) ou (46).

Pour les problèmes de diffraction par un écran, la surface Σ est toute la surface de l'écran, c'est-à-dire les deux faces de l'écran et on suppose que, soit le champ, soit sa dérivée normale, disparaissent sur une des surfaces de l'écran. Dans ce cas, les singularités se trouvent à la source (d'onde incidente) ou sur les surfaces de l'écran.

Dans la théorie de Kirchhoff, dont on parlera plus loin, on peut assigner des valeurs arbitraires à $\varphi(\hat{r})$ et $\psi(\hat{r})$ sur la surface Σ . Lorsque celles-ci sont dénotées par $\varphi_o(\hat{r})$ et $\psi_o(\hat{r})$, l'intégrale (28) s'écrit :

$$(47) \qquad v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \left(\varphi_o(\hat{r}')\frac{\partial}{\partial n'} - \psi_o(\hat{r}')\right) g_o(r/\hat{r}')\,d\hat{r}'$$

Ceci est l'intégrale de diffraction de Kirchhoff qu'on emploie parfois dans la théorie de la diffraction, en particulier pour étudier la formation de l'image en optique instrumentale. D'après l'analyse précédente $\varphi_o(\hat{r})$ et $\psi_o(\hat{r})$ ne sont pas les valeurs aux limites de v(r) et $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$, obtenues sur la surface Σ_+ de l'obstacle diffractant, le champ v(r) ne s'évanouit pas, quand r est dans la région K -, puisqu'il faudra que les valeurs aux limites v(r) et $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$. quand $r \to \hat{r}$ soient liées par l'équation (43), ou bien (44) et (46). En général, $\varphi_o(\hat{r})$ et $\psi_o(\hat{r})$ ne satisferont pas simultanément les équations (44) et (46)

Mais on peut rattacher $\varphi_o(\hat{r})$ et $\psi_o(\hat{r})$ à des valeurs limites sur Σ, en introduisant des discontinuités de la solution v(r) et sa dérivée normale à travers Σ.

Les valeurs de $\varphi_o(\hat{r})$ et $\psi_o(\hat{r})$, se définissent directement avec l'aide des équations (44) et (46) qui donnent les valeurs limites de la solution v(r) et de sa dérivée normale $\frac{\partial v}{\partial n}$ sur la surface. Si $v_+(r)$ et $(\frac{\partial v}{\partial n}(r))_+$, sont des valeurs limites de v(r) et $\frac{\partial v}{\partial n}$ sur Σ + et $v_-(r)$ et $(\frac{\partial v}{\partial n})_-$ sur Σ_- (fig. 5), alors nous prenons :

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \varphi_o(\hat{r}) = v_+(\hat{r}) - v_-(\hat{r}) \\ \psi_o(\hat{r}) = \left(\frac{\partial v(\hat{r})}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v(\hat{r})}{\partial n}\right)_- \end{cases}$$

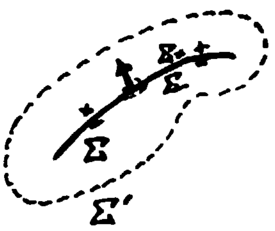


fig. 5

Si v(r) est régulière et satisfait la condition de rayonnement, alors, pour les valeurs des discontinuités quelconques données (A), une intégration de fonction (26) sur tout l'espace, bornée par la surface de discontinuité Σ, peut être prise sur la surface de tout le domaine lorsque la contribution de la région infinie, limitée par une grande sphère, disparait, à cause de la condition de rayonnement, l'application du théorème de Green (26) donne directement (47) ; de plus v(r) est une solution de l'équation d'onde régulière dans tout le domaine et est uniquement déterminée par les valeurs données des discontinuités de v(r) et $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ sur Σ.

Nous remarquons ici, que dans la formule (47), la surface n'est pas nécessairement fermée; elle peut être un morceau de surface.

Pour montrer l'unicité, prenons deux solutions de l'équation d'onde v_1 et v_2 ayant les mêmes valeurs de discontinuité (A) et satisfaisant la condition de rayonnement, alors la différence $w = v_1 - v_2$ est régulière dans tout l'espace et satisfera la condition de rayonnement. En appliquant le théorème de Green à (26), l'intégrale disparait, ce que veut dire $w \equiv 0$.

C'est l'un des avantages du problème de la valeur discontinue d'être beaucoup plus facile à résoudre que le problème des valeurs aux limites correspondant.

Quand les valeurs discontinues de la fonction et de sa dérivée normale sur Σ ou bien sur une surface quelconque, sont simultanément données (voir l'équation (A)), nous obtenons l'intégrale de Kirchhoff (47) :

$$(47') \quad v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \left(\varphi_o(\hat{r}') \frac{\partial}{\partial n'} - \psi_o(\hat{r}') \right) g_o(\hat{r}/\hat{r}')\, dr'$$

D'autre part, afin de représenter la solution de l'équation d'onde v(r) par les valeurs aux limites $v(\hat{r})$ ou bien $\frac{\partial v(\hat{r})}{\partial n}$ sur Σ, il nous faut connaître les fonctions de Green correspondantes. Cela veut dire, la fonction de Green de première et seconde espèce respectivement, pour la surface Σ, qui sera singulière, comme dans le cas de la fonction de Green dans l'espace vide (Sommerfeld 1954, 1965).

Dans ces problèmes, les conditions aux limites sont homogènes. L'expression explicite de fonction de Green donne la solution du problème de diffraction.

V- CONNECTION ENTRE LE PROBLÈME DES VALEURS AUX LIMITES ET LE PROBLÈME DES VALEURS DISCONTINUES.

De ce que nous avons dit ci-dessus, résulte, qu'il doit exister une connection entre le problème des valeurs aux limites et celui des valeurs discontinues.

Soit v(r) une solution de l'équation d'onde :

$$(28A) \quad (\Delta + k^2)\, v(r) = -\,\delta(r - r_o)$$

satisfaisant la condition aux limites de deuxième espèce, $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ (problème de Neumann) sur le côté de Σ +, d'une surface fermée et régulière Σ, ainsi que la condition de rayonnement. Le point r_o est un point quelconque au dehors de Σ. La singularité de la solution v(r) à $r = r_o$, $r_o \notin K+$ est dûe à la fonction de Green de deuxième espèce pour l'espace libre ; celle-ci est une onde sphérique et nous écrivons : $v(r) = v_o(r)$.

En isolant le point r_o par une petite sphère S_o de rayon ρ, nous trouvons la contribution de l'intégrale de surface sur S_o ; elle est égale, d'après la fonction (30) à : $-4\pi\, v_o(r)$ quand $r \to r_o$, ou $(\rho \to 0)$ parce que $\psi(\hat{r}) = \frac{\partial v(\hat{r})}{\partial n} = 0$. Donc on a :

$$(48) \quad v(r) = v_o(r) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \varphi(\hat{r}') \frac{\partial}{\partial n'}\, g_o(r/\hat{r}')\, d\hat{r}'$$

où n' est la normale extérieure à Σ.

La fonction $\varphi(\hat{r}) = v_+(\hat{r})$ est obtenue par l'équation intégrale non-homogène de même forme que (44) :

$$(49) \quad \frac{1}{2}\varphi(\hat{r}) - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \varphi(\hat{r}') \frac{\partial}{\partial n'}\, g_o(\hat{r}/\hat{r}')\, d\hat{r}' = v_o(\hat{r})$$

Quand le point r est bien à l'intérieur de Σ (se trouve en K-), le champ s'annule identiquement, $v(r) = 0$, et alors $\varphi(\hat{r})$ est la discontinuité de v(r) quand on franchit la surface de K_+ à K_-. Pour trouver la fonction inconnue $\varphi(\hat{r})$, on peut résoudre l'équation intégrale (49) par une méthode d'approximation successive (Franz 1949, 1950, Tricomi, 1956).

Nous commençons premièrement par ignorer l'intégrale dans (49), ainsi $\varphi_o(r) = 2\, v_o(r)$. On ajoute cette valeur de $\varphi_o(r)$ à (49) et on calcule v(r) d'après (48), ce qui donne l'approximation d'ordre un, de la valeur exacte de v(r) pour le problème de valeur discontinue. Cette approximation nous donne une solution du problème de la diffraction d'après Kirchhoff.

Pour les approximations élevées, on suit la méthode d'itération (procédés de Neumann) Tricomi 1956 Hamel, 1939).

Cette méthode donne les approximations successives, de différents ordres, pour $v(r)$, et la solution est donnée par une série de Neumann, le terme principal étant l'intégrale de Kirchhoff pour la théorie de la diffraction.

Cependant, une telle solution ne mène pas à un problème de valeur aux limites parce qu'on n'a pas fait la preuve que la série de Neumann converge vers une solution exacte de l'équation d'onde et satisfait en même temps les conditions aux limites (1). En effet le terme principal de la série de Neumann, c'est-à-dire, la solution de Kirchhoff (intégrale), n'est pas l'approximation d'ordre un du problème des valeurs aux limites, mais celle du problème des valeurs discontinues.

Nous avons vu, que dans la formulation originale de la théorie de Kirchhoff, le problème des valeurs aux limites était remplacé par le problème des valeurs discontinues, avec $v_0(\hat{r}) = v_+(\hat{r}) - v_-(\hat{r})$, $\frac{\partial v_0}{\partial n} = (\frac{\partial v}{\partial n})_+ - (\frac{\partial v}{\partial n})_-$ quand on franchissait la surface Σ. En plus, ces valeurs discontinues $v_0(\hat{r})$ et $\frac{\partial v_0(\hat{r})}{\partial n}$ ne s'étendent pas à toute la surface fermée de Σ, mais seulement à la partie Σ_0, accessible directement à l'onde incidente de la source, dans le sens de l'optique géométrique. Alors, la solution de Kirchhoff est donnée par :

$$(50) \qquad v_K(r) = v_0(r) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_0} \left(v_0(\hat{r}')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_0(\hat{r}')}{\partial n'}\right) g_0(r/\hat{r}')\,d\hat{r}'$$

D'autre part, Σ_0 peut se déformer d'une manière continue, en une surface quelconque Σ_1, pourvu que Σ_1 ait les mêmes bords que Σ_0, et qu'à chaque point r des bords d'un domaine K_0 limité par Σ_0, Σ_1, nous écrivions:

$$v'_0(r) = v_0(r)$$

Si r est bien dans ce domaine $r \in K_0$, $v_0(r) = 0$. La valeur de $v_0(r)$ est donnée par une formule de même espèce que (50) prise sur $\Sigma_0 + \Sigma_1$, avec la normale dirigée à l'intérieur de K_0. Alors, l'intégrale sur $\Sigma_0 + \Sigma_1$ donne une partie qui remplace l'intégrale sur Σ_0 de (50) due à la direction opposée de la normale à Σ_0 et seule l'intégrale sur Σ_1, reste. Cela s'écrit:

$$(51) \qquad v_K(r) = v_0(r) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_1} \left(v_0(\hat{r}')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_0(\hat{r}')}{\partial n'}\right) g(r/\hat{r}')\,d\hat{r}'$$

La solution $v_K(r)$ donnée par (50) ou (51) n'a plus de connection avec le problème de valeur aux limites, original, défini par les équations (48) et (49). On peut cependant l'adapter à la limite des ondes géométriques, parce qu'on peut choisir comme surface Σ_1, la frontière de l'ombre géométrique.

Dans ce cas $v_0(r)$ décrit la distribution du champ optique géométrique.

L'intégrale de surface dans (51) donne ensuite, une correction à l'optique géométrique, c'est-à-dire un champ diffractant au sens de l'optique ondulatoire, où la discontinuité du champ, due à $v'_0(r)$ (onde géométrique) est compensée et la solution de l'équation d'onde reste continue, comme nous l'avons remarqué dans le chapitre I.

(1) Voir les travaux de Franz l. c. ; Schelkunoff (1951)

De plus, l'intégrale (51) subit à une diconstinuité, en franchissant le bord d'ombre qui, d'après (A) est donné par $v'_o(\hat{r})$ et $\frac{\partial v_o(\hat{r})}{\partial n}$.

Nous discuterons ce point autre part.

VI - FORMULATION VECTORIELLE DU PRINCIPE DE HUYGENS

Dans les paragraphes précédents, nous avons formulé d'une façon rigoureuse le principe de Huygens, pour l'équation d'onde scalaire. Maintenant, nous donnerons une formule analogue, fondée sur les équations de Maxwell ou des équations vectorielles du champ électromagnétique. La dérivation de cette formule est fondée sur les équations de Maxwell (5a), mises sous la forme (1).

$$(1) \quad \nabla_\wedge H + i\omega\varepsilon E = J$$

$$\nabla_\wedge E - i\omega\mu H = -J'$$

ou bien des équations vectorielles du champ $E_o H$:

$$(2) \quad \nabla_\wedge \nabla_\wedge H - k^2 E = i\omega\varepsilon J' + \nabla_\wedge J$$

$$\nabla_\wedge \nabla_\wedge E - k^2 E = i\omega\mu J - \nabla_\wedge J'$$

et les équations auxiliaires :

$$(3) \quad \operatorname{div} H = \frac{\rho'}{\mu}$$

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

De plus on a les équations de continuité :

$$(4) \quad \operatorname{div} J = i\omega\rho$$

$$\operatorname{div} J' = i\omega\rho'$$

Pour trouver la forme correspondante du Principe de Huygens, il est nécessaire de construire une fonction analogue à la fonction scalaire de Green (22), c'est-à-dire, une fonction de Green pour les champs vectoriels E et H de l'espace libre. Cette fonction qu'on peut écrire $\Gamma(r/r')$ est une fonction tensorielle, ou dyadique, symétrique par rapport aux deux points r et r' dans l'espace libre, $\Gamma(r:r') = \Gamma(r'/r)$ et elle satisfait, en outre, à l'équation vectorielle suivante :

$$(5) \quad \nabla_\wedge \nabla_\wedge \Gamma(r/r') - k^2 \Gamma(r/r') = -I\,\delta(r-r')$$

où le symbole I est le tenseur unité. Alors $\Gamma(r/r')$ représente une source unité placée au point r = r'.

Avant de donner la forme de $\Gamma(r/r')$, appelons $\vec{a}$ un vecteur constant quelconque et supposons qu'un vecteur $g(r/r')$ soit défini par la relation :

$$(6) \quad g(r/r') = \vec{a}\, g_o(r/r')$$

où $g_o(r/r')$ est la fonction scalaire de Green de l'espace libre, donnée explicitement par l'expression (23). Nous obtenons immédiatement les propriétés suivantes pour $g(r/r')$:

(1) Nous supposons que ε, μ sont des scalaires constants et ω une constante.

(7) $\quad \nabla_\wedge\, g(r/r') = (\nabla g_o \wedge \vec{a}) = -(\vec{a} \wedge \nabla' g_o)$

(8) $\quad \nabla_\wedge \nabla_\wedge\, g(r/r') = \vec{a}\nabla(\nabla g_o) - \vec{a}\Delta g_o$

$$= \vec{a}\; \nabla\odot\nabla\, g_o + \vec{a}\, k^2 g_o + \vec{a}\; \delta\,(r-r')$$

$$= \vec{a}\; (\nabla\odot\nabla + k^2)\; g_o\,(r/r') + \vec{a}\; \delta\,(r-r')$$

parce que $g_o\,(r/r')$ satisfait l'équation scalaire d'onde :

(a) $\quad (\Delta + k^2)\; g_o(r/r') = -\;\delta\,(r-r')$

Puisque a est un vecteur constant, nous avons :

(b) $\quad (\Delta + k^2)\; g(r/r') = -\;\vec{a}\,\delta\,(r-r')$

Le tenseur de Green $\Gamma\,(r/r')$ satisfait l'équation (5) et pour les points très éloignés d'une source, il décrit une onde sphérique divergente. Pour trouver la forme explicite de $\Gamma\,(r/r')$ on prendra la divergence de $\Gamma\,(r/r')$. D'après (5), cette divergence est donnée par l'expression suivante :

(9) $\quad k^2\,\nabla\,.\;\Gamma\,(r/r') = I\;(\nabla\,.\;\delta\,(r-r') = -\,I\;(\nabla'\,.\;\delta\,(r-r')$

parce que la divergence d'un rotationnel est nulle.

Par conséquent, nous obtenons, si nous avons (5), l'équation importante :

(c) $\quad (\Delta + k^2)\;\Gamma\,(r/r') = (\dfrac{\nabla\odot\nabla}{k^2} + I)\;\delta\,(r-r')$

Cette équation est satisfaite quand on prend pour $\Gamma\,(r/r')$ l'expression suivante :

(10) $\quad \Gamma\,(r/r') = -\,(\dfrac{\nabla\odot\nabla}{k^2} + I)\;g_o\,(r/r')$

si la fonction $g_o(r/r')$ satisfait l'équation d'onde (a).

Mais la divergence de $\Gamma\,(r/r')$ donnée par (9) impose la limitation suivante sur $g_o(r/r')$:

(d) $\quad (\nabla + \nabla')\;g_o\,(r/r') = 0$

c'est-à-dire que $g_o(r/r')$ est une fonction de la distance $|\,r - r'\,|$ des deux points r et r'. Donc une solution de (d) bien connue est de la forme :

$$g_o\,(r/r') = \frac{1}{4\pi}\;\frac{e^{ik\,|r-r'|}}{|r - r'|}$$

donnée déjà dans le paragraphe 3, formule (23).

A partir de cette valeur de $g_o\,(r/r')$ le tenseur de Green est donné sous la forme explicite suivante (1).

(10)' $\quad \Gamma\,(r/r') = -\,(\dfrac{\nabla\odot\nabla}{k^2} + I)\,\dfrac{1}{4\pi}\;\dfrac{e^{ik\,|r-r'|}}{|r - r'|}$

$$= \Gamma\,(r'/r)$$

Le tenseur de Green dans l'espace libre est symétrique par rapport aux points r et r'_o. On a

$\nabla\Gamma = -\nabla'\Gamma,\quad \nabla_\wedge\Gamma = -\,\nabla'\Gamma$ et $\nabla_\wedge\Gamma = (\nabla g_o \wedge I),\quad (\vec{a}.\nabla_\wedge\Gamma) = (\vec{a}_\wedge \nabla g_o).$

---

(1) Notre expression de $\Gamma\,(r/r')$ est le négatif de la formule donnée par Levine et Schwinger (1950). Ceci est dû au signe de la fonction delta de Dirac dans l'équation (5) satisfaite par $\Gamma\,(r\;\;r')$.

Pour dériver une formule analogue à celle relative au cas d'une onde scalaire, nous multiplions la première équation de (2) par $g(r/r')$ et l'équation (8) par H et après soustraction nous obtenons :

$$(11) \quad g(r/r')\ \nabla_\wedge\ (\nabla_\wedge\ H) - H\ \nabla_\wedge\ (\nabla_\wedge\ g(r\,r'))$$
$$= \vec{a}\ g_o(r|r')\ \nabla_\wedge\ J + i\,\omega\varepsilon\,\vec{a}\ g_o(r/r')\ J'$$
$$- H\ \nabla\ (\nabla\ (\vec{a}\ g_o(r\,r'))) - \vec{a}\ g_o H\ \delta(r - r')$$

Soit K un domaine régulier limité par une surface fermée et régulière Σ. Si les fonctions E, H, J, J', $\nabla_\wedge$ J, $\nabla_\wedge$ J', ∇J, ∇J' sont continues dans K et sur Σ , alors l'application du théorème de Gauss donne :

$$(12) \quad \int_K \left\{ g\ (r/r')\ \nabla_\wedge\ (\nabla_\wedge\ H) - H\ \nabla_\wedge\ (\nabla\ g(r/r')) \right\} dr'$$
$$= \int_K \left\{ i\,\omega\,\varepsilon\ \vec{a}\ g_o(r/r')\ J' + \vec{a}\ g_o(r/r')\ (\nabla_\wedge\ J) \right.$$
$$\left. + H\ \nabla\ (\vec{a}\ \nabla\ g_o(r/r')) + \vec{a}\ H\ \delta(r - r') \right\} dr'$$

Mais d'après la formule vectorielle de Green, l'intégrale à gauche de (12) est égale à l'intégrale sur la surface Σ enveloppant l'espace K :

$$(13) \quad -\int_\Sigma \left\{ \vec{a}(n_\wedge\ H)_\wedge\ \nabla\ g_o - \vec{a}\ g_o\ (\nabla_\wedge\ H) \right\} d\Gamma'$$
$$= -\int_\Sigma \vec{a} \left\{ (n_\wedge\ H)_\wedge\ \nabla\ g_o - i\,\omega\,\varepsilon\ (n_\wedge\ E)\ g_o \right\} d\Gamma'$$

parce que pour l'autre terme $- \vec{a}\ g_o . (J_\wedge\ n) = 0$, n est normale au vecteur J situé sur Σ .

En outre, on peut écrire le troisième terme à la droite de (12) sous la forme :

$$(13') \quad \int_K H\ \nabla\ (\nabla(\vec{a}\ g_o))\ d\Omega' = -\int_K (\nabla\ H)\ (\vec{a}\ \nabla\ g_o)\ dr'$$
$$= \int_\Sigma (n.\,H)\ (\vec{a}\ \nabla\ g_o)\ d\Gamma'$$

Quand on tient compte de (13) et de (13)' et du fait que $\vec{a}$ est un vecteur quelconque, on obtient*:

$$(14) \quad H(r) = \frac{1}{4\pi}\int_K \left[i\,\omega\,\varepsilon\ J' g_o(r|r') + J_\wedge\ \nabla g_o(r|r') + (\nabla H).\ \nabla g_o(r|r') \right] dr'$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\,\omega\,\varepsilon\ (n_\wedge\ E) g_o(r/r') - (n_\wedge\ H)_\wedge\ \nabla g_o(r|r') - (Hn)\ \nabla g_o(r|r') \right\} d\hat{\Gamma}'$$

pour tout point r dans le domaine $r \in K$.

Si r est dehors de ce domaine $r \notin K$, $r \notin \Sigma$, la somme des intégrales s'annule identiquement :

$$(15) \quad 0 = \frac{1}{4\pi}\int_K \left\{ i\,\omega\,\varepsilon\ J' g_o + J_\wedge\ \nabla\ g_o + (\nabla H).\ \nabla g_o \right\} dr'$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\,\omega\,\varepsilon\ (n_\wedge\ E)\ g_o - (n_\wedge\ H)_\wedge\ \nabla g_o - (Hn)\ \nabla g_o \right\} d\Gamma'$$

* $\nabla = \nabla_{r'} = -\nabla_r$.

D'après les équations de Maxwell une permutation de H et E, J' et J et μ et ε conduit à une formule analogue pour les champs électriques.

$$(16) \quad E(r) = \frac{1}{4\pi}\int_K \left\{ i\omega\mu J g_o - J'\wedge \nabla g_o + (\nabla E)\nabla g_o \right\} d\hat{r}'$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\mu (n\wedge H) g_o + (n\wedge E)\wedge \nabla g_o + (E.n)\ \nabla g_o \right\} d\,\hat{\gamma}'$$

si $r \in K$, et $E(r)$ s'annule identiquement.

$$(17) \quad 0 = \frac{1}{4\pi}\int_K \left\{ i\omega\mu J g_o - J'\wedge \nabla g_o + (\nabla E)(\nabla g_o) \right\} d\hat{r}'$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\mu (n\wedge H) g_o + (n\wedge E)\wedge\nabla g_o + (E.n)\ \nabla g_o \right\} d\hat{r}'$$

pour $r \notin K$ et $r \notin \Sigma$.

et

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int_K \left\{ i\omega\mu J g_o - J'\wedge \nabla g_o + (\nabla E)(\nabla g_o) \right\} dr'$$

$$(17) \quad - \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\mu (n\wedge H) g_o + (n\wedge E)\wedge\nabla g_o + (En)\nabla g_o \right\} d\hat{r}'$$

Soit β une quantité possédant les propriétés suivantes :

$\beta = 1 \qquad r \in K$

$\beta = 0 \qquad r \notin K, \quad r \notin \Sigma$

nous écrivons les équations (14) (15) et (16) (17) sous la forme simple :

$$(A) \quad \beta E(r) = \frac{1}{4\pi}\int_K \left\{ i\omega\mu J g_o - J'\wedge\cdot \nabla g_o + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla g_o \right\} dr'$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\mu (n\wedge H) g_o + (n\wedge E)\wedge \nabla g_o + (En).\ \nabla g_o \right\} d\hat{r}'$$

$$(B) \quad \beta H(r) = \frac{1}{4\pi}\int_K \left\{ i\omega\varepsilon J' g_o + J\wedge\nabla g_o + \frac{\rho'}{\varepsilon}\nabla g_o \right\} dr'$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\varepsilon (n\wedge E) g_o - (n\wedge H)\wedge \nabla g_o - (Hn)\nabla g_o \right\} d\hat{r}'$$

quand on introduit les relations :

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \nabla H = \frac{\rho'}{\mu}$$

Cas particulier :

Si les courants électriques et magnétiques J et J' sont nuls dans K, les champs électromagnétiques satisfont aux équations :

$$\nabla\wedge H + i\omega\varepsilon E = 0$$

$$\nabla_\wedge \; E - i\omega\mu H = 0$$

Alors les intégrales, prises sur K, dans les expressions (A) et (B) disparaissent et nous avons seulement les intégrales sur Σ :

(C) $$\beta E(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\mu (n \wedge H) g_o + (n \wedge E) \wedge \nabla g_o + (En) \nabla g_o \right\} df'$$

(D) $$\beta H(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\varepsilon (n \wedge E) g_o - (n \wedge H) \wedge \nabla g_o - (Hn) \nabla g_o \right\} df'$$

ou bien :

(C)' $$\beta E(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\mu J g_o - \nabla_r \wedge (J' g_o) + \frac{1}{\varepsilon} \; \nabla_r (\rho \; g_o) \right\} df'$$

(D)' $$\beta H(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ i\omega\varepsilon J' g_o + \nabla_r \wedge (J g_o) + \frac{1}{\mu} \; \nabla_r (\rho' g_o) \right\} df'$$

parce que la fonction de Green est symétrique, par rapport à r, r' et satisfait :

$$\nabla_{r'} \; g_o (r/r') = - \nabla_r \; g_o (r/r')$$

Il est facile de prouver que les deux représentations (C, D) - (C' D') satisfont aux équations de Maxwell. En effet, si on prend la rotation de E(r) et H(v), et à l'aide de la relation (1) et (2), on obtient (1).

Les formules (C), (D) ou (C)' et (D)' expriment les formulations vectorielles du Principe de Huygens pour les champs E, et H satisfaisant aux équations de Maxwell. Elles les expriment en chaque point de l'espace par des intégrales, prises sur une surface régulière et fermée Σ quand les valeurs tangentielles et normales des champs, sont données sur cette surface. De plus, nous pouvons éliminer les composantes normales, par une application de l'opérateur rotationnel ($i\nabla_\wedge$) et en utilisant les équations de Maxwell.

On obtient ainsi :

(45) $$\beta E(r) = \frac{1}{4\pi}\left\{ \nabla_\wedge \int_\Sigma (n \wedge E) \; g_o \; df' + \frac{i\nabla_\wedge}{\omega\varepsilon} \; \nabla_\wedge \int_\Sigma (n \wedge H) \; g_o \; df' \right.$$

(46) $$\beta H(r) = \frac{1}{4\pi}\left\{ \nabla_\wedge \int_\Sigma (n \wedge H) \; g_o \; df' - \frac{i}{\omega\mu} \nabla_\wedge \; \nabla_\wedge \int_\Sigma (n \wedge E) \; g_o \; df' \right.$$

dont les dernières parties, contenant le gradient, s'annulent. Donc, l'élimination des composantes normales du champ réduit les intégrales à une forme symétrique, par rapport au champ. Mais les équations(45) - (46) sont un système compliqué parce qu'elles contiennent des composantes tangentielles de E et H. Il nous faut calculer E(r) et H(r), à partir des intégrales de surfaces, en fonction seulement des valeurs des champs eux-mêmes E(f), et ses dérivées, ou H(f) et ses dérivées prises sur la surface Σ. On peut le réaliser en utilisant la fonction de Green vectorielle de la façon suivante :

Dans la dernière intégrale de (45) et (46) on peut remplacer l'opérateur $\nabla \wedge \nabla_\wedge$ par grad div $-\Delta$. Lorsque la fonction scalaire de Green satisfait à l'équation d'onde (a) pour $r \neq r'$, on remplace $\nabla_\wedge \nabla_\wedge$ par l'opérateur $\nabla \otimes \nabla + K^2 1$ et de (6) on écrit :

(b) $$\nabla_\wedge \; (\nabla_\wedge \, a g_o \, (r/r') = (\nabla \otimes \nabla + k^2 1) \; a g_o \, (r/r')$$

Si on introduit une fonction Γ (r/r') qui est le tenseur de Green d'espace libre, définie par :

(c) $$\Gamma \; (r/r') = - (\nabla \otimes \nabla + k^2 1) \; g_o \; (r/r')$$

les équations (45) et (46) peuvent s'écrire sous la forme :

(45a) $$\beta E(r) = \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon}\int_{\Sigma}\left\{\omega\varepsilon(n'\wedge E)(\nabla_\wedge \Gamma(r/r') + i(n'\wedge H)\Gamma(r/r')\right\} dr'$$

(46a) $$\beta H(r) = \frac{1}{4\pi\omega\mu}\int_{\Sigma}\left\{\omega\mu(n'\wedge H)(\nabla_\wedge \Gamma(r/r') + i(n'\wedge E)\Gamma(r/r')\right\} dr'$$

On peut aussi subsituer $H(r) = \frac{1}{i\omega\mu}(\nabla_\wedge E)$ et $E(r) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}(\nabla_\wedge H)$ ce qui permet d'écrire :

(d) $\nabla_\wedge\Gamma(r/r') = \nabla(g_o \wedge I)$

(e) $\nabla_\wedge(\vec{a}\, g_o) = (\vec{a}_\wedge \nabla g_o)$

La substitution donne :

(45b) $$\beta E(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left\{(\nabla'_{r'\wedge}\Gamma)(n'\wedge E(r')) - \frac{1}{k^2}(n'\wedge \nabla\wedge E)\Gamma\right\} dr'$$

(46b) $$\beta H(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left\{(\nabla_{r'\wedge}\Gamma)(n'\wedge H(r')) + \left(\frac{n'\wedge\nabla_\wedge H}{k^2}\right)\Gamma\right\} dr'$$

Maintenant ces formules sont symétriques par rapport au champ. Elles sont exprimées par leur composante tangentielle et leur rotationnel, pris sur la surface Σ . Nous avons prouvé que (45 a, b) et (46 a, b) satisfont aux équations vectorielles.

$$\nabla_\wedge \nabla_\wedge E - k^2 E = 0$$

$$\nabla_\wedge \nabla_\wedge H - k^2 H = O$$

dans un milieu libre (sans source) limité par Σ . Les formules ci-dessus forment une représentation exacte du Principe de Huygens analogue à la représentation scalaire.

Le tenseur $W_{e,m}(r/r')$ défini par :

(A) $W_e(r/r') = \nabla_\wedge\Gamma(r/r')(n'\wedge E) - \frac{1}{k^2}(n'\wedge \nabla_\wedge E)\Gamma(r/r')$

(B) $W_m(r/r') = \nabla_\wedge\Gamma(r/r')(n'\wedge H) - \frac{1}{k^2}(n'\wedge \nabla_\wedge H)\Gamma(r/r')$

est analogue au vecteur $W_o(r/r')$ correspondant, pour le cas scalaire et sa divergence sur Σ :

(C) $\mathrm{div}\, W_e(r/r') = E(r)\,\delta(r-r')$

(D) $\mathrm{div}\, W_m(r/r') = H(r)\,\delta(r-r')$

s'annule en tous les points de la surface et seulement au point $r = r'$ de source ; elles sont égales à E(r) et H(r) respectivement.

VII - LIAISON ENTRE LES VALEURS LIMITES DES COMPOSANTES TANGENTIELLES.

La construction d'une solution unique des équations de Maxwell quand les composantes tangentielles de E et H sont données d'une manière arbitraire, est possible, si et seulement s'il existe une liaison entre E et H. Afin de trouver cette liaison, il nous faut rappeler d'abord, que les composantes tangentielles sont exprimées par les courants J_s et J'_s :

$$(n \wedge H_+)_+ = J_s$$

$$(47) \qquad (n \wedge E)_+ = -J'_s$$

quand on franchit Σ du dômaine K+ à K-.

Si on introduit (47) dans (45) et (46) on obtient :

$$(48) \qquad \beta\, E(r) = \frac{1}{4\pi}\, \nabla\wedge \int_\Sigma J'_s(\mathbf{r}')\, g_o\, d\mathbf{r}' + \frac{i}{\omega\varepsilon}\, \nabla\wedge\, \nabla\wedge \int_\Sigma J_s\, g_o\, d\mathbf{r}'$$

$$(49) \qquad \beta\, H(r) = \frac{1}{4\pi}\, \nabla\wedge \int_\Sigma J_s(\mathbf{r})\, g_o\, d\mathbf{r}' - \frac{i}{\omega\mu}\, \nabla\wedge\, \nabla\wedge \int_\Sigma J'_s(\mathbf{r}')\, g_o\, d\mathbf{r}'$$

Alors, les valeurs limites de E et H, quand $r \to r' \pm 0$ sont données par les expressions :

$$(50) \qquad \beta\,(n\wedge E(\mathbf{r}) = \lim_{r\to r' \pm 0} \left\{ \frac{n\wedge \nabla\wedge}{4\pi} \int_\Sigma J_s(\mathbf{r}') g_o\, d\mathbf{r}' + \frac{i}{\omega\varepsilon}\, n\wedge(\nabla\wedge\, \nabla\wedge) \int_\Sigma J'_s(\mathbf{r}') g_o\, d\mathbf{r}' \right.$$

$$(51) \qquad \beta\,(n\wedge H(\mathbf{r}) = \lim_{r\to r' \pm 0} \left\{ \frac{n\wedge \nabla\wedge}{4\pi} \int_\Sigma J_s(\mathbf{r}') g_o\, d\mathbf{r}' - \frac{i}{\omega\mu}\, n\wedge(\nabla\wedge\, \nabla\wedge) \int_\Sigma J'_s(\mathbf{r}') g_o\, d\mathbf{r}' \right.$$

On met la première intégrale sous la forme:

$$(52) \qquad \lim_{r\to r' \pm 0} \frac{(n\wedge}{4\pi}\, \nabla\wedge \int_\Sigma J_s\, g_o\, d\mathbf{r}' = \frac{\nabla(n}{4\pi} \int J_s\, g_o\, d\mathbf{r}') - \frac{(n\nabla)}{4\pi} \int_\Sigma J_s\, g_o\, d\mathbf{r}'$$

où n est la normale au point $\mathbf{r}$, $\mathbf{r} \in \Sigma$.

Puisque J_s et J'_s sont des vecteurs arbitraires et continus sur Σ , ils se trouvent dans le plan tangent à Σ au point $\mathbf{r}$. Comme pour le cas scalaire, on construit un élément de surface Σ_Ω au voisinage du point $\mathbf{r}$, $\mathbf{r} \in \Sigma_\Omega$, de telle façon, qu'elle puisse faire partie d'un élément du plan tangent de Σ . Parce que J_s se trouve sur le plan tangent, le vecteur n lui est normal, donc, la première intégrale de (52) s'annule sur la limite $\Sigma_\Omega \to \mathbf{r}$.

La seconde intégrale de (52) donne une contribution qui peut être évaluée comme nous l'avons déjà fait pour (40) (équation paragr. 3). Ainsi, on obtient pour (52) la forme suivante :

$$(53) \qquad \lim_{r\to r' \pm 0} n\wedge\, \nabla\wedge \int_\Sigma J_s\, g_o\, d\mathbf{r}' = \pm\frac{1}{2} J_s(\mathbf{r}') - \int_\Sigma n\wedge\, (J_s(\mathbf{r}')\wedge\, \nabla g_o(r/\mathbf{r}'))\, d\mathbf{r}'$$

parce que :

$$\int n\wedge\, \nabla\wedge\, J_s\, g_o\, d\mathbf{r}' = -\, n\wedge\, J_s\, \nabla g_o$$

Pour la deuxième intégrale (52) on peut écrire:

$$(54) \qquad \lim_{r\to r' \pm 0} \nabla\wedge\, \nabla\wedge \int J'_s\, g_o\, d\mathbf{r}' = -\, \nabla\wedge \int J_s\, \nabla g_o\, d\mathbf{r}'$$

En effet, on remplace $\nabla\wedge\, \nabla\wedge$ par $\nabla\otimes\nabla + k^2 1$, on obtient :

$$\lim_{r\to r' \pm 0} \nabla\wedge\, \nabla\wedge \int J'_1(\mathbf{r})\, g_o(r/r')\, d\mathbf{r}' = (\nabla\otimes\nabla + k^2 1) \int J'_s(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'$$

$$= \nabla \int_\Sigma J_s(\mathbf{r})\, \nabla g_o(r/r')\, d\mathbf{r}' + k^2 I \int_\Sigma J'_s(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'$$

Ainsi, de (53) et (54), nous tirons les relations suivantes, satisfaites par les courants J_s et J'_s ou les composantes tangentielles de E et H :

$$(55) \qquad \frac{1}{2} J_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(n\wedge\, H(\mathbf{r}))_+ = i\left\{ n\nabla\wedge \int_\Sigma (J'_s(\mathbf{r}')\wedge\, \nabla g_o(\mathbf{r}/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \right.$$

$$- \int_\Sigma n\wedge\, (J_s(\mathbf{r}')\wedge\, \nabla g_o(\mathbf{r}/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'$$

$$(56) \qquad \frac{1}{2} J'_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(n\wedge\, E(\mathbf{r}))_+ = -\int_\Sigma n\wedge\, (J'_s(\mathbf{r}')\wedge\, \nabla g_o(\mathbf{r}/\mathbf{r}'))\, d\mathbf{r}'$$

$$-\, i\left\{ n\, \nabla\wedge \int_\Sigma (J_s(\mathbf{r}')\wedge\, \nabla g_o(\mathbf{r}/\mathbf{r}'))\, d\mathbf{r}' \right.$$

Les équations ci-dessus expriment la liaison générale entre les composantes tangentielles du champ électromagnétique, sur une surface arbitraire

Par conséquent, les vecteurs des champs E(r), H(r) sont définis de façon univoque en chaque point du domaine K+ (sans source), limité par Σ . Ils sont engendrés par les courants superficiels électriques et magnétiques et sont liés par les équations (55) et (56). Dans le domaine K-, qui se trouve en dehors de la surface Σ , les courants n'engendrent pas un champ électromagnétique, puisque les intégrales dans (47) et (48) s'évanouissent, quand $r \in$ K-.

Une telle interprétation du champ de rayonnement par les courants superficiels, peut recevoir une interprétation physique, si Σ coïncide avec la surface réelle du corps diffractant.

VIII - DISCONTINUITÉ DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Plus haut, nous avons dérivé les équations (55, 56) liant les composantes tangentielles de E et H, quand celles-ci sont données par des valeurs arbitraires sur Σ :

$$(57) \qquad (n\wedge\, H)_+ = J_o(\mathbf{r})$$

$$(n\wedge\, E)_+ = -J'_o(\mathbf{r})$$

Les deux vecteurs $J_o(\mathbf{r})$ et $J'_o(\mathbf{r})$ sont parallèles au plan tangent de Σ , touchant la surface en $\mathbf{r}$. Alors, une solution des équations de Maxwell s'exprime sous la forme :

$$(57) \qquad \beta E(r) = \frac{1}{4\pi}\left\{ \nabla\wedge \int_\Sigma J'_o(\mathbf{r})\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' + \frac{i}{\omega\varepsilon}\, \nabla\wedge\, \nabla\wedge \int_\Sigma J_o\, g_o(r/\mathbf{r})\, d\mathbf{r}' \right\}$$

$$(58) \qquad \beta H(r) = \frac{1}{4\pi}\left\{ \nabla\wedge \int_\Sigma J_o(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' - \frac{i}{\omega\mu}\, \nabla\wedge\, \nabla\wedge \int_\Sigma J'_o(\mathbf{r})\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \right\}$$

En introduisant la fonction tensorielle de Green $\Gamma(r/r')$ les équations (57) et (58) prennent la forme suivante :

$$(59) \qquad \beta E(r) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left\{ J'_s(\mathbf{r})\, \nabla\wedge\, \Gamma(r/\mathbf{r}') - i\, J_s(\mathbf{r}')\, \Gamma(r/\mathbf{r})' \right\} d\mathbf{r}'$$

$$(60) \qquad \beta H(r) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left\{ J_s(\mathbf{r}')\, \nabla\wedge\, \Gamma(r/r') + i\, J'_s(\mathbf{r}')\, \Gamma(r/r') \right\} dr'$$

où la surface Σ n'est pas nécessairement une surface fermée. En effet, (59) et (60) sont des solutions des équations de Maxwell, même pour une surface non-fermée, lorsqu'on peut écrire la deuxième intégrale de (57) et (58) sous la forme :

$$(61) \qquad \nabla\wedge\, \nabla\wedge \int J_s(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = (\nabla\otimes\nabla + k^2 I) \int J_s(\mathbf{r}').g_o(r/\mathbf{r}')\, dr'$$

$$= k^2 \int J_s(\mathbf{r})\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' + \nabla \int J_s(\mathbf{r}')\, \nabla g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'$$

Cependant J_s, J'_s ne représentent plus des valeurs aux limites, mais des valeurs discontinues des composantes tangentielles de E et H, qui subissent, en franchissant la surface Σ (de $\Sigma +$ à $\Sigma -$), les discontinuités :

(62) $$\left(n \wedge (H_+(\mathbf{r}) - H_-(\mathbf{r})\right) = J(\mathbf{r})$$

$$\left(n \wedge (E_+(\mathbf{r}) - E_+(\mathbf{r})\right) = -J'(\mathbf{r})$$

Celles-ci se déduisent des équations (59) et (60). Dans le domaine k (extérieur à Σ), E et H s'annulent.

L'analyse précédente donne une solution unique des équations de Maxwell, basée sur le Principe de Huygens, mis sous forme intégrale, exprimé par les équations (59) et (60) et par l'intermédiaire des valeurs de discontinuités de E et H (57) et les conditions de rayonnement (voir paragraphe 10).

IX - L'ENERGIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE ET LE VECTEUR DE POYNTING

Lorsqu'une énergie rayonnante remplit tout l'espace, alors que toutes les sources sont à distance finie, le comportement des vecteurs E et H à grande distance sera tel, que l'énergie totale, passant à travers une surface fermée éloignée, reste finie. On peut prendre pour cette surface une sphère, de grand rayon. Le vecteur de Poynting est donné par :

(63) $$S = E \wedge H$$

et la densité du champ électromagnétique par :

(64) $$W = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

où E et H sont réels. Si E et H sont des quantités complexes, chaque composante de E et H peut se mettre sous la forme :

(65) $$E_k = |A_k|\, e^{i(\theta_K - \omega t)}$$

et la partie réelle de E s'écrit :

(66) $$R_e(E_k) = |A_k| \cos(\theta_k - \omega t)$$

Dans les expériences, on n'observe pas le flux d'énergie à chaque instant, particulièrement quand ω est élevé, mais on mesure sa valeur moyenne dans le temps sur un cycle. Donc, on peut écrire la valeur moyenne dans le temps sur un cycle, du produit $E_k E_e$.

(66) $$\langle E_k E_e \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} R_e(E_k) R_e(E_e)\, dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} |A_k|\, |A_e| \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \cos(\theta_k - \omega t) \cos(\theta_e - \omega t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} |A_k|\, |A_e| \cos(\theta_k - \theta_e)$$

$$= \frac{1}{2} R_e(E_k E_e^*) = \frac{1}{2} R_e(E_k^* E_e)$$

Ainsi, quand E et H sont complexes, le vecteur de Poynting a pour valeur moyenne prise sur un cycle.

(67) $$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \langle E \wedge H \rangle = \frac{1}{2} R_e(E \wedge H^*)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ (E \wedge H^*) + (E^*_\wedge H) \right\}$$

La composante normale de S représente la moyenne dans le temps du flux par unité de surface d'énergie. De même la moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique W, devient :

(68) $$\langle W \rangle = \frac{1}{4} \left\{ (E\, E^*) + (H\, H^*) \right.$$

Les équations de Maxwell nous donnent :

(69) $$\operatorname{div}\langle S \rangle = \langle W_o \rangle = -\frac{1}{2} R_e(JE^*)$$

dont le côté droit est l'énergie fournie par les courants j de la source. Quand il n'y a pas de sources présentes, j = 0, et ainsi, la moyenne temporelle du flux d'énergie à travers une surface fermée s'évanouit.

Si nous calculons (69) sur un volume K, entouré par une surface lisse et fermée Σ, nous écrivons :

(70) $$\int_K \operatorname{div}\langle S \rangle\, dr' = \int_\Sigma \langle S_n \rangle\, dv'$$

ou

(71) $$\frac{1}{4}\int_\Sigma \left\{ (E_\wedge H^*) + (E^*_\wedge H) \right\}_n d\mathbf{r} = \frac{1}{4}\int_\Sigma (H^* \nabla_\wedge E + E\, \nabla_\wedge H^* + E^* \nabla_\wedge H + H\, \nabla_\wedge E^* - EJ^* - E^*J)\, d\mathbf{r}$$

$$= \frac{1}{4}\int_K 2 \left\{ i\omega\varepsilon\,(E\,E^*) - i\omega\mu\,(H\,H^*) - EJ^* - E^*J \right\} d\mathbf{r}$$

alors on a :

(72) $$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left\{ E_\wedge H^* \right\}_n d\mathbf{r}' = \int_K \left\{ i\omega\varepsilon\,(E\,E^*) - i\omega\mu\,(H\,H^*) - EJ^* \right\} dr'$$

Si le milieu est conducteur $J = \sigma E$ et le dernier terme est remplacé par σ (E. E)

En séparant dans (72) la partie réelle et la partie imaginaire, il devient :

(72) $$\mathrm{Re}\, \frac{1}{2}\int_\Sigma \langle S_n \rangle\, d\mathbf{r}' = -2\sigma \int_K E\,E^*\, dr'$$

où le second membre représente le double de la chaleur de Joule, et :

(73) $$\frac{1}{2}\int_\Sigma \langle S_n \rangle\, d\mathbf{r}' = 2 \int_K \left\{ \cdot\,\omega\mu\,(H.\,H^*) + (\omega\,\varepsilon)\,(E.^*\,E) \right\} dr'$$

$$= 2\omega \int_K (E.\,D^*) + (HB^*)\, dr'$$

La partie imaginaire est donc 4 ω fois la différence entre l'énergie électrique moyenne, et l'énergie magnétique moyenne, contenue dans le champ électromagnétique à l'intérieur de K.

X - CONDITION DE RAYONNEMENT

Dans notre discussion de la formulation de Helmholtz-Kirchhoff pour le problème de la diffraction, la solution de l'équation d'onde a été mise sous la forme de l'intégrale (28), prise sur la surface arbitraire Σ, que nous avons remplacée par deux surfaces fermées Σ_1 et Σ_2. Le domaine, enfermé par Σ_1, contenant toutes les sources et corps diffractants et Σ_2 pouvant être considéré comme une large sphère de rayon r', tendant vers l'infini, et centré dans la région enfermée par Σ_1.

En un point r, situé à l'intérieur de Σ_2 et à l'extérieur de Σ_1, la valeur de la fonction d'onde est donnée seulement par l'intégrale, prise sur la surface Σ_1, parce que l'intégrale étendue sur Σ_2, s'annule, si on impose une condition convenable au comportement du champ à l'infini.

A présent, nous cherchons la forme de la condition relative à v(r) pour les ondes scalaires. On peut écrire l'intégrale sur Σ_2, quand $r' \to \infty$:

$$(1) \qquad \lim_{r' \to \infty} \int_{\Sigma_2} \left\{ v(r') \frac{\partial}{\partial v'} - \frac{\partial v(r')}{\partial r'} \right\} g_o(r/r')\, r'^2\, d\omega$$

parce que $\vec{n'} \to \vec{r'}$, car $r' \to \infty$. La fonction $g_o(r/r')$ est exprimée par :

$$(2) \qquad g_o(r/r') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}$$

où $R \to r'$. Donc, l'intégrale (1) devient :

$$(3) \qquad \lim_{r' \to \infty} - \left\{ \int_{\Sigma_2} r\left(\frac{\partial v}{\partial r'} - i\,kv \right) e^{ikr'}\, d\omega + \int_{\Sigma_2} v(r')\, e^{ikr'}\, d\omega \right.$$

Pour que (3) tende vers zéro, il faut supposer :

$$(4) \qquad r'\left(\frac{\partial v}{\partial r'} - i\,k.v\right) \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$$

et

$$(5) \qquad r'\; v(r') \sim 0(1)$$

C'est-à-dire :

$$(6) \qquad \lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv\right) = 0$$

et

$$(7) \qquad \lim_{r \to \infty} rv < \infty \text{ ou } \lim_{r \to \infty} (rv) = C_o$$

où C_o est une constante arbitraire $C_o < \infty$. L'équation (6) est la condition de rayonnement dite celle de Sommerfeld, et (7) est la condition finie ou bornée. Ces deux conditions devront être satisfaites pour toutes les valeurs des angles polaires (θ, φ). Mais, comme Rellich l'a démontré, il n'est pas nécessaire d'imposer l'équation (7), parce qu'elle est satisfaite automatiquement quand (6) est vrai.

Une intégration de (6) donne :

$$v(r) \simeq A(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r \to \infty)$$

où $A(\theta, \varphi)$ est la constante d'intégration.

Toutefois, pour les problèmes où les corps diffractants s'étendent à l'infini (comme le problème de diffraction pour un demi-plan), la condition (6) n'est pas suffisante pour donner l'unicité de la solution du problème de diffraction. La condition de rayonnement devra être modifiée, de façon qu'elle se rapporte seulement à la partie infinie de l'espace qui n'est pas occupée par les corps diffractants.

La raison pour laquelle la condition de rayonnement ne suffit pas à définir une solution unique dans un problème de diffraction de cette espèce est évidente, particulièrement si le corps n'est pas un conducteur idéal. Dans ce cas, il est possible que l'équation d'onde, ou bien de Maxwell homogène, ait une solution non triviale, correspondant aux vibrations libres ou propres. Dans cette situation, s'il y a une solution non-triviale, il y a une infinité de solutions, parce que, à chaque valeur propre, il correspond une solution de l'équation d'onde. Les valeurs propres forment un spectre discontinu.

Pour les corps diffractants qui s'étendent à l'infini, comme le demi-plan ou le demi cylindre, Rellich (1948) et Jones (1953) ont donné des critères pour appliquer la condition du rayonnement pour toutes les valeurs des fréquences ω ou k du spectre continu, qui fait $< W > \rightarrow \infty$.

XI - FORMULATION VECTORIELLE DE LA CONDITION DE RAYONNEMENT

Pour dériver la condition de rayonnement pour les champs électromagnétiques, nous considérons l'intégrale (C, D) qui donne le Principe de Huygens pour le cas vectoriel. De la même façon, la surface Σ est remplacée par Σ_1 et Σ_2, comme dans les paragraphes précédents.

Dans ce cas, on peut se servir de la fonction de Green, $g(r/r') = \vec{a}\, g_o(r/r')$. Quand $r' \rightarrow \infty$ on obtient :

(8) $$\nabla' g(r/r') = (\vec{a}\nabla')g_o(r/r') = -(ik - \frac{1}{r'})\,\vec{a}n'_o\, g_o(r/r') \quad r' \rightarrow \infty$$

où n'_o est la normale extérieure à Σ_2. Ainsi, la contribution de l'intégrale (C) prise sur Σ_2, s'écrit :

(9) $$\int_{\Sigma_2} \left\{ i\omega\mu\,(n'_o \wedge H) + (n'_o \wedge E)\wedge n'_o)\,(ik - \frac{1}{r'}) + (n'_o\, E)\, n'_o\,(ik - \frac{1}{r'}) \right\} g_o(r/r')\, df'$$
$$= \int_{\Sigma_2} \left\{ i\,\omega\mu\,(n'_o \wedge H) + (ik - \frac{1}{r'})\, E \right\} g_o(r/r')\, df'$$

Quand r' s'en va à l'infini, on obtient le résultat :

(10) $$\lim_{r' \rightarrow \infty} \left\{ i \int_{\Sigma_2} \left\{ \omega\mu r'(n'_o \wedge H) + kE \right\} e^{ikr'}\, d\omega - \int_{\Sigma_2} E e^{ikr'}\, d\omega \right.$$

où $df' = r'^2 d\omega$

Afin que cette intégrale tend vers zéro, il faut que nous prenions :

(11) $$\omega\mu\,(n \wedge H) + kE = 0\,(\frac{1}{r}) \qquad E = 0\,(\frac{1}{r}) \qquad H = 0\,(\frac{1}{r})$$

ou

(11)' $$r(\omega\mu\,(n \wedge H) + kE \rightarrow 0, \qquad rE < \infty$$

quanf $r \rightarrow \infty$.

De même, nous pouvons déduire une formule analogue pour la deuxième intégrale (D) :

(13) $$\omega\varepsilon\,(n \wedge E) - kH = 0(\frac{1}{r}) \qquad E = 0(\frac{1}{r}) \qquad H = 0(\frac{1}{r})$$

ou

(13)' $$r(\omega\varepsilon\,(n \wedge E) - kH \rightarrow 0, \qquad rH < \infty \qquad (14)$$

quand $r \rightarrow \infty$.

Les équations (11) et (13), que les champs E et H doivent satisfaire, sont les <u>conditions de rayonnement vectorielles</u> correspondantes. Les équations (12) et (14) sont les <u>conditions bornées</u> ou <u>finies</u>. Par ces équations, on trouve que les composantes normales de champ (n. E) et (n. H) doivent disparaitre plus vite que les composantes tangentielles, quand $r \rightarrow \infty$. Donc, les champs éloignés sont transverses et les composantes tangentielles des vecteurs E et H prennent la même valeur absolue.

Par intégration de (11)' et (13)', nous obtenons les formes suivantes pour les valeurs asymptotiques des champs :

$$(14)\quad E_\infty(r) \simeq \left\{ (n \wedge p_e^{(n)} + n \wedge (n \wedge p_m^{(n)} \right\} \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r \to \infty)$$

$$H_\infty(r) \simeq (n \wedge (n \wedge p_e^{(n)}) - (n \wedge p_m^{(n)}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

où $p_e^{(n)}$ et $p_m^{(n)}$ sont les constantes des intégrations dépendant seulement des angles polaires (ϑ, φ). Ainsi, la forme asymptotique des champs électromagnétiques est plus compliquée que la forme scalaire. Dans quelques problèmes, il est possible de déterminer explicitement $p_e^{(n)}$ et $p_m^{(n)}$.

XII - CONDITION QUE LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DOIT REMPLIR SUR UNE ARETE

Nous avons remarqué plus haut, que les formules sont valables, si la surface Σ est régulière. Mais, pour beaucoup de problèmes, la surface Σ est, en général, une surface ouverte, qui peut s'étendre jusqu'à l'infini. Par exemple, un écran mince, percé par une ouverture, ou un disque mince, ou un demi-plan. Dans ces situations, la condition de rayonnement ne suffit pas pour résoudre le problème de diffraction d'une manière unique, parce que les champs deviennent infinis sur les arêtes des corps diffractants, comme dans le cas, bien connu, de l'électrostatique. En réalité, il n'existe pas de corps ou d'écrans naturels, possédant des arêtes idéales, mais nous considérons comme idéale l'arête ou le point anguleux d'un corps diffractant, quand l'épaisseur de l'arête est moindre que la longueur d'onde. Pour les corps (ou écran) qui possèdent des arêtes tranchantes ou des points anguleux, il faut examiner, avec plus de détails, le comportement du champ électromagnétique au voisinage de cette singularité, du corps diffractant. Les formules (72) et (73) qui représentent l'énergie, transportée par le champ électromagnétique, engendré par les sources éloignées doivent rester finies, parce que la formule de Gauss est seulement applicable dans le cas des champs non-singuliers. Pour les points singuliers des corps, on peut envelopper les points, ou bien les arêtes tranchantes, par une surface tubulaire de rayon ρ et par l'application de la formule de Green, l'énergie apportée par ce volume tubulaire, s'annulera quand $\rho \to 0$. C'est-à-dire, les singularités de la surface de corps ne contribuent en aucune façon à l'énergie rayonnée. Afin de satisfaire ce critère, il faut que les champs présentent une forme fonctionnelle, telle que l'intégrale (A) s'annule, quand ρ tend vers zéro. Ainsi, il faut ajouter une nouvelle condition aux conditions de rayonnement, quand les corps ont des singularités (arêtes, tranchants). Cette condition, qui fut remarquée par Rayleigh, fut plus tard examinée en détails par Bouwkamp et Meixner, qui ont clarifié les comportements des champs au voisinage de ces singularités. Cette condition est appelée la condition sur l'arête, ou bien la condition de Bouwkamp-Meixner. On peut exprimer cette condition comme suit :

IV - Les champs v(r) ou E et H, doivent satisfaire une condition sur l'arête telle qu'il n'y ait plus de rayonnement des singularités (arêtes, tranchants, etc...) des corps diffractants.

On peut formuler cette condition analytiquement avec l'aide du vecteur de Poynting $< \bar{S} >$. Si l'on prend le cas d'une arête tranchante bordant une partie de surface Σ, la direction de la normale n prise le long du bord, subit une rotation égale à π quand on passe de la face positive à la face négative de l'écran.

En regardant l'arête comme l'axe d'un anneau cylindrique de rayon ρ, la condition de l'arête IV - est équivalente à la formule suivante :

$$(a)\quad \lim_{\rho \to 0} \rho < S_n > = \frac{1}{4} \lim_{\rho \to 0} \rho \left\{ (E \wedge H^*) + (E^* \wedge H) \right\}_n = 0$$

c'est-à-dire, que la composante normale du vecteur de Poynting multipliée par ρ s'annule avec ρ. Donc, les arêtes ne rayonnent pas d'énergie électronique.

Pour clarifier notre idée : soit C la courbe limite de l'écran. On prend sur C un point quelconque comme centre de coordonnées orthogonales, une direction étant prise par la tangente à C en r, la deuxième par la direction de la normale extérieure au corps, ou de l'écran et la troisième dans une direction perpendiculaire à t et n, dirigée ver l'intérieur (voyez fig. 6) : $s = (t \wedge n)$.

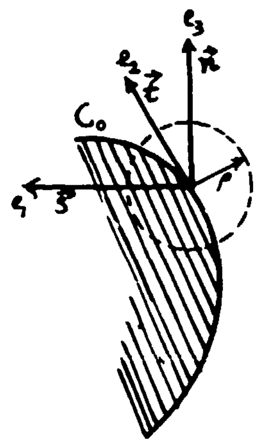


fig. 6

Par exemple, nous écrivons les composantes électriques :

$E_1 = (s.E)$ $\qquad$ $eE_2 = (t.E)$ $\qquad$ $E_3 = (n.E)$

c'est-à-dire E_2 étant la composante parallèle à l'arête, et E_1, E_3 les composantes perpendiculaires à l'arête de l'écran. On peut construire, de même façon, les composantes parallèles et perpendiculaires de H.

D'après la formele (a), il faut que les composantes parallèles de E et H soient finies ou bien s'annulent, quand $\rho \to 0$, mais les composantes perpendiculaires de E et H doivent rester singulières quand $\rho \to 0$, de façon que la forme (a) soit bornée, si $\rho \to 0$, donc $E_\perp$ et $H_\perp$ se conduisent par rapport à ρ, comme:

(b) $\qquad$ $E_\perp \sim \rho^\alpha$ $\qquad$ $(2\alpha > -1)$

$\qquad H_\perp \sim \rho^\alpha$

Pour une arête droite $\alpha = \frac{1}{2}$

En général, il est très difficile de trouver la valeur exacte de α pour des arêtes géométriques compliquées.

XIII - DISCUSSION DU CARACTÈRE DES PROBLÈMES DE DIFFRACTION. UNICITE DE SOLUTION

Après notre analyse de la condition de rayonnement (11)' ou (13)' et la condition sur l'arête (b), nous formulerons, avec précision, les problèmes de diffraction ou diffusion, comme des problèmes aux valeurs limites, qui conduisent à des solutions uniques pour les équations d'ondes scalaires et vectorielles. Nous décrirons le caractère de ces problèmes par la nature de la condition aux limites, imposée sur une surface quelconque Σ , qui est prise ordinairement comme la surface du corps diffractant.

Supposons, que Σ soit une surface régulière, mais possède un nombre fini d'éléments (singularités) non-réguliers, comme arêtes, coins, etc, et se trouve ou bien complètement à distance finie, ou bien s'étende en partie à l'infini, comme p. e. le plan demi-infini, cône cylindrique ou un écran infiniment mince, percé par une ou plusieurs ouvertures, etc...

A - Problèmes de diffraction scalaire

On peut classer la plupart des problèmes de diffraction en deux genres : selon les conditions aux limites relatives à la fonction d'onde v(r), ou sa dérivée normale, $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ sur la surface des corps diffractants.

Dans le premier cas, où la fonction d'onde $v(r) = 0$ sur Σ, il s'agit du problème de Dirichlet pour l'équation d'onde et quand sa dérivée normale $\frac{\partial v(r)}{\partial n} = 0$ sur Σ, il s'agit du problème de Neumann.

En somme, on peut poser l'unicité de la solution du problème de diffraction comme suit : trouver une fonction d'onde $v(r)$ qui remplit les conditions suivantes :

I - L'équation d'onde scalaire, ainsi que la relation d'énergie.

II - La condition aux limites (homogènes) :

a) problème de Dirichlet : $v(\mathbf{r}) = 0 \qquad \mathbf{r} \in \Sigma$

b) problème de Neumann : $\frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial v} = 0 \qquad \mathbf{r} \in \Sigma$

III - La condition de rayonnement de Sommerfeld.

IV - La condition sur l'arête (a) (Bouwkamp-Meixner).

Pour le cas où la surface Σ est régulière et fermée, les conditions I à III suffisent à prouver l'unicité de solution du problème de diffraction. Si la surface possède des arêtes ou d'autres points singuliers, alors, il faudra pour l'unicité de solution, que la fonction d'onde $v(r)$ satisfasse aussi la condition IV.

Pour démontrer l'unicité de solution, regardons $v(r)$ comme une fonction complexe. Alors, selon (67), le vecteur de Poynting $< S >$ qui définit la moyenne temporelle de flux d'énergie, est maintenant donné par :

$$(69) \qquad < S > = \frac{1}{4} <(v \nabla v^* - v^* \nabla v)> = \frac{1}{2} \, \mathrm{Imag} <(v^* \nabla v)>$$

Si la div $< S >$ est intégrée sur l'espace total K de cnamp, borné par la surface Σ et Σ', $\Sigma \subset \Sigma'$ (fig. 7), nous écrirons selon la formule de Green :

$$(70)' \qquad W_o = \int_K \mathrm{div} < S > dv' = \int_{\Sigma \cap \Sigma'} < S_n > dv' = \frac{1}{2} \lim_{r' \to \infty} \int_{\Sigma'} v\, v^* r'^2 \, d\omega$$

parce que l'intégrale, prise sur la surface des corps diffractants, n'entre pas explicitement dans le résultat final à cause de la condition de limite $v(r) = 0$ ou $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur Σ. De plus, il faudra que le corps diffractant n'émette, ni absorbe du rayonnement.

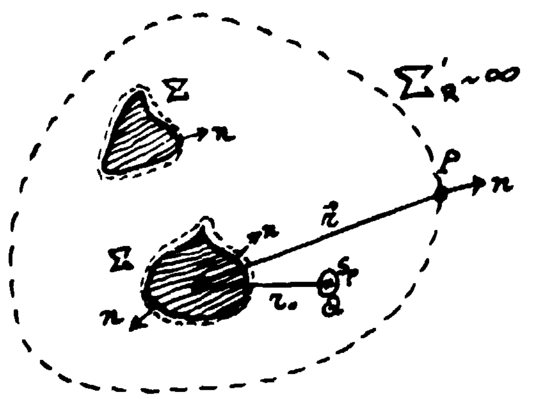


fig. 7

Supposons, comme au paragraphe (10, 11) deux solutions v_1 et v_2 satisfaisant les conditions (I à III) ou (I à IV). Alors, si $W = v_1 - v_2$, il satisfera aussi les mêmes conditions et donc W_o, c'est-à-dire l'intégrale (10') doit s'annuler. Ceci est possible, si $W(r)$ diminue plus rapidement que r^{-1} à l'infini. Mais, selon le théorème de Rellich (1945) $W \equiv 0$. Ainsi $v_1 = v_2$, ce qui prouve l'unicité de la solution.

Si les conditions aux limites II ne sont pas homogènes, c'est-à-dire, conditions non-homogènes, alors on remplace II par :

a) problème de Dirichlet — b) problème de Neumann

II' $\quad v(\mathbf{r}) = \varphi_o(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{r} \in \Sigma \qquad\qquad \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi_o(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{r} \in \Sigma$

Il est facile de démontrer l'unicité de la solution pour les conditions aux limites non-homogènes, puisque la différence $v_1 - v_2$, $\frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n}$ satisfait toutes les conditions du problème A. D'après la démonstration de l'unicité donnée ci-dessus, nous arrivons à la conclusion que l'unicité de la solution pour la condition aux limites non-homogènes II' est vérifiée. Elle est brièvement traitée au paragraphe (11, 12).

B - Problèmes vectoriels

Pour les problèmes vectoriels, il nous faut trouver le champ électrique E et le champ magnétique H, remplissant les conditions suivantes :

I - E et H satisfont les équation de Maxwell et la relation de flux d'énergie.

II - a) E satisfait la condition aux limites $n \wedge E = 0$ " les composantes tangentielles de E sur Σ s'annuleront sur la surface Σ ".
ou
b) H satisfait la condition aux limites $n \wedge H = 0$

III - Les composantes tangentielles de H s'annulent sur Σ. E et H satisfont la condition de rayonnement.

IV - E et H satisfont la condition sur l'arête (Bouwkamp-Meixner)

On peut démontrer l'unicité de la même façon que dans le cas scalaire.

D'après la relation (69), par intégration, nous obtenons :

$$\overline{W} = \int_K \mathrm{div} < S > dr' = \frac{1}{4} \lim_{r' \to \infty} \int_{\Sigma'} (EE^* + HH^*) \, r'^2 \, d\omega$$

Alors, les différences $E_1 - E_2$ et $H_1 - H_2$, où E_1, H_1 et E_2. H_2, satisfont les conditions (I à III), quand la surface est régulière et (I à IV) quand la surface possède des arêtes, coins, etc...D'après (67), il s'en suit que dans l'espace libre de source $W_\cap = 0$ les différences du champ E et H decroissent d'une manière plus rapide que $\frac{1}{r}$. Mais, suivant les travaux de Rellich (1943), Müller (1957) et Jones (1964), les différences $E_1 - E_2 \equiv 0$, $H_1 - H_2 \equiv 0$, donc $E_1 = E_2$, $H_1 = H_2$ et les solutions de ce genre de problèmes sont univoques.

Pour l'existence de solutions, on renvoie le lecteur aux livres de Müller, Jones et Hilbert-Courant, où il trouvera une bibliographie des travaux originaux sur l'existence et l'unicité de solution des équations aux dérivées partielles de formes elliptiques et hyperboliques.

Nous remarquons ici, que les problèmes de diffraction n'introduisent pas les solutions homogènes de l'équation d'onde ou des équations de Maxwell, qui correspondent à des vibrations propres des ondes stationnaires et des effets de résonance. On rencontre ce genre de solutions dans un certain nombre de problèmes de valeurs aux limites quand la surface du corps diffractant contient ou enveloppe une région finie de l'espace ou quand une partie de la surface au limite s'étend à l'infini, et aussi quand les corps diffractants sont des conducteurs non-parfaits. Alors, dans ces cas, la condition de rayonnement (11 ou 13) n'est pas réalisée. Nous exclurons ce genre de problème.

XIV - DEUX MILIEUX DIFFÉRENTS SÉPARÉS PAR UNE SURFACE

Pour terminer ce chapitre, nous considérons deux milieux M_1 et M_2 différents, remplissant tout l'espace du champ et séparés par une surface fermée Σ, où M_1 est défini par ε_1, μ_1 et M_2 par ε_2, μ_2. De plus, nous supposons que ε_1, μ_1 et ε_2, μ_2 sont constants.

On peut formuler le problème de diffraction de façon analogue à un milieu remplissant tout l'espace du champ. Cependant, les conditions aux limites prennent des formes différentes.

Soit E_1, H_1 et D_1, B_1 des champs correspondants au milieu M_1 et E_2, H_2 et D_2, B_2 au milieu M_2. Alors, les composantes tangentielles du champ électrique E sont continues à travers la surface Σ et aussi les composantes normales de l'induction magnétique B. Au contraire, les champs tangentiels magnétiques H et l'induction électrique B sont discontinus à travers Σ. Nous écrivons ces conditions sur Σ comme suit :

(2.14.1) $$n \wedge (E_2 - E_1) = 0$$

$$n \cdot (\mu_2 H_2 - \mu_1 H_1) = 0$$

et $(r \in K_+)$

(2.14.2) $$n \cdot (\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1) = \hat{\rho}_o$$

$$n \wedge (\mu_2 H_2 - \mu_1 H_1) = \hat{J}_o$$

où $\hat{\rho}_o$, $\hat{J}_o$ sont la densité et le courant superficiel électrique sur Σ et n est la normale vers l'espace K_+.

Dans l'espace K_- les équations de Maxwell prennent la forme :

(2.14.3) $$\nabla \wedge H + i\omega \varepsilon_2 E = i\omega(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E = j_s$$

$$\nabla \wedge E - i\omega \mu_2 H = -i\omega(\mu_2 - \mu_1) H = -j'_s$$

où j_s, j'_s représentent le courant électrique et magnétique dans K. A l'extérieur de Σ, $r \in K+$, les équations de Maxwell sont :

(2.14.4.) $$\nabla \wedge H + i\omega\varepsilon_2 E = 0$$

$$\nabla \wedge E + i\omega\mu_2 H = 0$$

La polarisation électrique et magnétique est définie comme dans le problème à un milieu par les relations :

(2.14.5) $$P_s = \nabla(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E \qquad P'_s = \nabla(\mu_2 - \mu_1) H$$

et

(2.14.6) $$\nabla J_s = i\omega\rho_s \quad ; \qquad \nabla J'_s = i\omega \rho'_s$$

Si E^{inc} et H^{inc} sont des champs incidents, ces valeurs s'expriment :

(2.14.7)
$$E^{inc} = \frac{1}{4\pi}\int_{K_+} \left(i\omega\mu_2\ J\ g_{o,2} - J'_\wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho}{\varepsilon_2}\ \nabla\ g_{o,2}\right) dr'$$
$$H^{inc} = \frac{1}{4\pi}\int_{K_+} \left(i\omega\varepsilon_2\ J'\ g_{o,2} + J_\wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho'}{\varepsilon_2}\ \nabla\ g_{o,2}\right) dr'$$

où $g_{o,2}$ est la fonction de Green :

(2.14.8)
$$g_{o,2} = e\frac{ik_2\ |r - r'|}{|r - r'|}$$

14.2 - Les Conditions aux Limites Intérieures et Extérieures de Σ .

Soit E, H les champs intérieurs à $\mathcal{G}$, satisfaisant les équations de Maxwell. Les composantes tangentielles de E sur Σ prennent les valeurs données :

(2.14.9)
$$n_\wedge\ E = \hat{f}$$

A l'extérieur de Σ , E, H satisfont les équations de Maxwell et la condition de rayonnement. Sur Σ on a :

(2.14.10)
$$n_\wedge\ E = \hat{f}$$

On suppose que les valeurs aux limites sont continues et que les dérivées satisfont la condition de Holder. Alors E et H engendrent les courants superficiels quand $r \to \hat{r} \pm 0$

Soit

(2.14.11)
$$E_k\ (j,\ j'),\ H_k\ (j,\ j'), \qquad (k = 1,2)$$

du côté Σ +. Alors, les discontinuités de E, H à travers Σ sont exprimées par :

(2.14.12)
$$n_\wedge\ (E_2 - E_1) = j'$$
$$n_\wedge\ (H_2 - H_1) = -j$$

n étant normale vers K_+.

Supposons qu'à l'intérieur de Σ , $J = J' = 0$

Alors, nous obtenons :

(2.14.13)
$$n_\wedge\ E_1\ (-n_\wedge E_1\ ;\ n_\wedge E_2) = n_\wedge\ E_1$$
$$n_\wedge\ H_1\ (-n_\wedge H_1\ ;\ n_\wedge H_2) = n_\wedge\ H_1$$

De la même façon qu'au paragraphe (4,7), nous obtenons les valeurs limites $r \to \hat{r} \pm 0$

(2.14.14)
$$n(r)_\wedge \int_{\Sigma\pm} j(\hat{r})_\wedge\ \nabla\ g_o\ d\hat{r} = \pm 2\pi\ j(r) + \int_\Sigma \bar{n}(r)_\wedge (j(\hat{r})_\wedge\ \nabla\ g_o)\ d\hat{r}$$

Donc on écrit les équations intégrales homogènes, satisfaites par $j(r)$ et $j(\hat{r})$.

(2.14.15)
$$j(\hat{r}) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma n(\hat{r})_\wedge\ (j(\hat{r})_\wedge\ \nabla\ g_o)\ d\hat{r}$$
$$j'(\hat{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma n(\hat{r})_\wedge\ (j'(\hat{r})_\wedge\ \nabla\ g_o)\ d\hat{r}$$

Maintenant, soit E^{inc}, H^{inc} les champs incidents. Ils sont exprimés par les intégrales suivantes :

(2.14.16)
$$E^{inc} = \frac{1}{4\pi}\int_{K-} (i\omega\mu_2 J g_{o,2} - J' \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho}{\varepsilon_2} \nabla g_{o,2})\, dr'$$

$$H^{inc} = \frac{1}{4\pi}\int_{K-} (i\omega\varepsilon_2 J' g_{o,2} + J \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho'}{\mu_2} \nabla g_{o,2})\, dr'$$

où

(2.14.17)
$$g_{o,2}(r/r') = \frac{e^{ik_2 |r - r'|}}{|r - r'|}$$

et

(2.14.18)
$$\nabla j = i\omega\rho \; ; \; \nabla j' = i\omega\rho'$$

$$J_s = i\omega(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E^{inc}, \qquad J'_s = i\omega(\mu_2 - \mu_1) H^{inc}$$

Les champs à un point $r \in K+$ sont alors :

(2.14.19)
$$E_2 = E^{inc} + E_2^{réfl.}$$

$$H_2 = H^{inc} + H_2^{réfl.}$$

où les champs réfléchis sont exprimés par :

(2.14.20)
$$E_2^{refl} = \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_2}\int_\Sigma (n.J_s)\nabla g_{o,2}\, dr'$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{K-} \left[i\omega\mu_2 J_s g_{o,2} - j' \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho_s}{\varepsilon 2} \nabla g_{o,2}\right] dr'$$

$$H_2^{refl} = \frac{1}{4\pi\omega\mu_2}\int_\Sigma (n.J'_s)\nabla g_{o,2}\, dr'$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{K-} \left[i\omega\varepsilon_2 J'_s g_{o,2} + j_s \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho'_s}{\mu 2} \nabla g_{o,2}\right] dr'$$

Dans le domaine K_+, E^{refl}, H^{refl} satisfont les équations de Maxwell et la condition de rayonnement. Les courants superficiels sont définis par :

(3.14.21)
$$\hat{j}_2 = - n \wedge H_2^{refl}$$

$$\hat{j}'_2 = n \wedge E_2^{refl}$$

et comme au paragraphe (6), nous obtenons :

(2.14.22)
$$E_2^{refl} = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[i\omega\mu_2 \hat{j}_2 g_{o,2} - \hat{j}'_2 \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho_{o,2}}{\varepsilon\, 2} \nabla g_{o,2}\right) dr'$$

$$H_2^{refl} = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[i\omega\varepsilon_2 \hat{j}'_2 g_{o,2} + \hat{j}_2 \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho'_{o,2}}{\mu 2} \nabla g_{o,2}\right) dr'$$

quand on franchit la surface Σ de côté - à côté +. Les composantes tangentielles de E_2^{refl}, H_2^{refl} sont données par :

(2.14.23)
$$n \wedge \hat{j}'_2 = n \wedge (n \wedge E_2^{refl}) = - E_{tang}^{refl} \neq 0$$

$$n \wedge j'_2 = n \wedge (n \wedge H_2^{refl}) = H_{tang}^{refl} \neq 0$$

et sont égales à zéro sur Σ_-.

Par conséquent, à l'intérieur de Σ les champs s'annulent. De même façon, on définit les courants superficiels $\hat{J}_1$, $\hat{J}'_1$ comme :

(2.14.24)
$$\hat{J}_1 = - n \wedge H_1, \qquad \hat{J}'_1 = n \wedge E_1 \qquad (r \to r' - 0)$$

$$\nabla \hat{J}_1 = i\omega\rho_{o,1}, \qquad \nabla \hat{J}' = i\omega\rho'_{o,1}$$

Si $r \in K+$, on a :

(2.14.25)
$$\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[i\omega\mu_1 \hat{J}_1 g_{o,1} - \hat{J}'_1 \wedge \nabla g_{o,1} + \frac{\rho_{o,1}}{\varepsilon 1} \nabla g_{o,1}\right] dr' = 0$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[i\omega\varepsilon_1 \hat{J}'_1 g_{o,1} + \hat{J}_1 \nabla g_{o,1} + \frac{\rho'_{o,1}}{\mu 1} \nabla g_{o,1}\right] dr' = 0$$

Sur la surface Σ nous avons les relations :

(2.14.26)
$$\hat{j}^{inc} + \hat{J}_2 = \hat{J}_1, \qquad \hat{j}_2^{inc} + \hat{J}'_2 = \hat{J}'_1$$

Donc, $\hat{J}_1^{inc}$ et $\hat{J}'_1{}^{inc}$ sont donnés par les expressions

(2.14.27)
$$j'^{inc} = \frac{1}{4\pi} n \wedge \int_{\Sigma-} \left[i\omega\mu_2 j^{inc} g_{o,2} - j'^{inc} \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho_o^{inc}}{\varepsilon 2} \nabla g_{o,2}\right] dr'$$

$$j^{inc} = \frac{1}{4\pi} n \wedge \int_{\Sigma-} \left[i\omega\varepsilon_2 j'^{inc} g_{o,2} + j^{inc} \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho_o'^{inc}}{\mu 2} \nabla g_{o,2}\right] dr'$$

Mais d'après les relations (2.14.23), on a :

(2.14.28)
$$\frac{1}{4\pi} n \wedge \int_{\Sigma-} \left[i\omega\mu_2 j'_2 g_{o,2} - j'_2 \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho_{o,1}}{\varepsilon 2} \nabla g_{o,2}\right] dr' = 0$$

et d'après (2.14.26) :

$$j'^{inc} = \frac{1}{4\pi} n \wedge \int_{\Sigma-} \left[i\omega\mu_2 j_1 g_{o,2} - j'_1 \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho_{o,1}}{\varepsilon 2} \nabla g_{o,2}\right] dr'$$

$$j^{inc} = -\frac{1}{4} n \wedge \int_{\Sigma-} \left[i\omega\varepsilon_2 j_1 g_{o,1} + j_1 \wedge \nabla g_{o,2} + \frac{\rho'_{o,1}}{\mu 2} \nabla g_{o,2}\right] dr'$$

D'autre part, du côté $\Sigma +$, nous déduirons de (2.14.25)

(2.14.30)
$$\frac{1}{4\pi} n \wedge \int_{\Sigma+} \left[i\omega\mu_1 j_1 g_{o,2} - j'_1 \wedge \nabla g_{o,1} - \frac{\rho_{o,1}}{\varepsilon 1} \nabla g_{o;1}\right] dr' = 0$$

$$\frac{1}{4} n \wedge \int_{\Sigma+} \left[i\omega\varepsilon_1 j'_1 g_{o,1} + J_1 \wedge \nabla g_{o,1} + \frac{\rho'_{o;1}}{\mu 1} \nabla g_{o,1}\right] dr' = 0$$

Mais si $\rho_{o,1}$, $\rho'_{o,1}$ satisfont la condition de Hölder, on a :

(2.14.31a)
$$n \wedge \int_{\Sigma+} \rho_{o,1} \nabla \frac{1}{|r' - r'|}\, dr' = - n \wedge \nabla' \int_{\Sigma+} \rho_{o,1} \left(\frac{1}{|r' - r'|}\right) dr'$$

et

(2.14.31b)
$$\nabla\left(g_{o,2} - \frac{1}{|r - r'|}\right), \qquad \nabla\left(g_{o,1} - \frac{1}{|r - r'|}\right)$$

sont bornées.

Nous déduirons d'après les relations (2. 14. 27) (2. 14. 30) les équations suivantes :

(2. 14. 32) $$e_2 j'^{inc} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} j'_1 + \frac{i}{4\pi\omega} n_\wedge \int_\Sigma (j_1 \nabla) \nabla(g_{o,2} - g_{o,1}) \, d\Gamma$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left[\frac{i}{\omega} (n_\wedge j_1) (k_2^2 g_{o,2} - k_1^2 g_{o,1}) + n_\wedge (j'_1 \wedge \varepsilon_2(\nabla g_{o,2} - \varepsilon_1 \nabla g_{o,1})\right]$$

$$\ldots d\Gamma$$

Ainsi, nous obtenons les équations intégrales en j_1 et j'_1 :

$$J'_1 = \frac{2\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1\ \varepsilon_2} j'^{inc} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \int_\Sigma (n_\wedge (j'_1 \wedge \nabla(\varepsilon_2 g_{o,2} - \varepsilon_1 g_{o,1})) d\Gamma$$

$$- \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i}{\omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\right) \int_\Sigma \left[(n_\wedge j'_1 (k_2^2 g_{o,2} - k_1^2 g_{o,1}) + n_\wedge (j_1 \nabla) \nabla(g_{o,2} - g_{o,1})\right] d\Gamma$$

$$J = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} j^{inc} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\omega \varepsilon 1 + \varepsilon 2} \int_\Sigma (n_\wedge j_1 \wedge \nabla(\mu_2 g_{o,2} - \mu_1 g_{o,1})) \, d\Gamma$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega(\mu_1 + \mu_2)} \int_\Sigma (n_\wedge j'_1)(k_2^2 g_{o,2} - k_1^2 g_{o,1}) + n_\wedge (j'_1 \nabla) \nabla (g_{o,2} - g_{o,1})\Big] \, d\Gamma$$

avec $j^{inc} = - n_\wedge H^{inc}$ $\qquad j'^{inc} = n_\wedge E^{inc}$

Les champs réflechis et réfractés sont alors exprimés par :

(2. 14. 34) $$E^{re}(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[(i\omega \mu_1 j\, g_{o,1} - j'_\wedge \nabla g_{o,1} + \frac{\rho}{\varepsilon_1} \nabla g_{o2}\right] d\Gamma$$

$$H^{re}(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[(i\omega \varepsilon_1 j' g_{o1} + j_\wedge \nabla g_{o1} + \frac{\rho'}{\mu_1} \nabla g_{o1}\right] d\Gamma$$

et

(2. 14. 35) $$E^{refl}(r) = - \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[(i\omega \mu_2 j\, g_{o2} - j'_\wedge \nabla g_{o2} + \frac{\rho}{\varepsilon_2} \nabla g_{o2}\right] d\Gamma$$

$$H^{refl}(r) = - \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[(i\omega \varepsilon_2 j' g_{o2} + j_\wedge \nabla g_{o2} + \frac{\rho'}{\mu_2} \nabla g_{o2}\right] d\Gamma$$

où

(2. 14. 36) $$\hat{J}' = n_\wedge (E^{refl} + E^{re})_{\Sigma+} = (n_\wedge E^{re})_{\Sigma-}$$

$$\hat{J} = - n_\wedge (H^{refl} + H^{re})_{\Sigma+} = (n_\wedge H^{re})_{\Sigma-}$$

et

(2. 14. 37) $$\nabla j = i\omega\rho \qquad \nabla j' = i\omega\rho'$$

Il n'est pas très difficile de donner la formule analogue pour les ondes scalaires et aussi de formuler la théorie de diffraction par une ouverture A sur un écran S situé au plan z = 0, d'après les hypothèses de Kirchhoff. Pour le cas général de milieu non-homogène, voir le livre de Müller où une étude approfondie de ce sujet est exposée.

CHAPITRE III

THEORIES APPROXIMATIVES

SCALAIRES
ET
VECTORIELLE

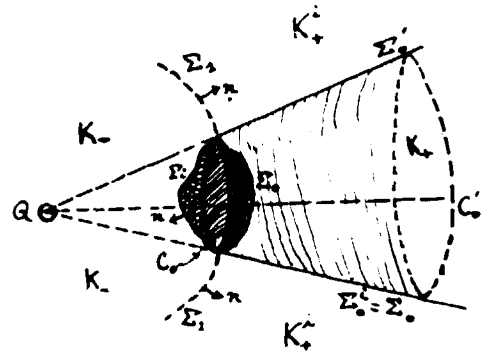


Fig. 1

I - THEORIE DE KIRCHHOFF

Interposons un corps diffractant devant une source de lumière Q (fig. 1). Comme il a été dit au chapitre I, le corps diffractant projette une ombre remplissant un cône tronqué dont les génératrices s'appuient sur la courbe C_0 lieu géométrique des points de contact des rayons de la source Q tangents à la surface du corps diffractant. Le long de C_0 la courbe engendrée de cette façon est appelée la courbe d'ombre, et la surface conique tronquée la surface d'ombre Σ_0.

Considérons une surface ouverte Σ_1 limitée à la courbe C_0 n'entourant ni la source ni l'obstacle diffractant. Cette surface peut ou non s'étendre jusqu'à l'infini. La surface Σ_1 et la partie non illuminée de la surface du corps diffractant Σ'_0 forment par leur réunion une surface fermée $\Sigma'' = \Sigma_1 + \Sigma'_0$ qui enveloppe la région de l'espace que nous avons précédemment appelée k_+. Cette région ne contient ni la source, ni le corps diffractant. La partie de l'espace extérieure à Σ'' est k_-, qui contient la source et le corps diffractant.

Dans l'espace K_+ la fonction d'onde v(r) est la même que dans l'onde non perturbée à savoir la fonction d'onde géométrique, si r se trouve hors de la région d'ombre, dans l'espace illuminé ($r \in K_+^i$); elle est nulle si r se trouve dans la région d'ombre K_+^o ($r \in K_+^o$). Le principe d'Huygens (28) nous donne:

$$(3.1) \quad v_g = \beta v_0(r) + \int_{\Sigma'_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma''} W_0(r/r')\, dr'$$

où $\beta = 1$ pour $r \notin \Sigma'_0$

$\beta = 0$ pour $r \notin \Sigma'_0$

La fonction $W_0(r/r')$ est la même que dans (2.26)

$$(3.2) \quad W_0(r/r') = \left[v_0(r') \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v(r')}{\partial n'} \right] g_0(r/r')$$

où v_0 (r) est la valeur au point r de l'onde sphérique émise par la source placée en Q ($r = r_0$)

$$(3.3) \quad v_0(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r - r_0|}}{|r - r_0|}$$

Donc $U_o\ (r/r')$ s'écrit*:

$$(3.4)\quad U_o\ (r/r') = \frac{1}{(4\pi)^2}\left\{\frac{e^{ik|r'-r_o|}}{|r'-r_o|}\ \nabla'\ \frac{e^{ikr}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R}\ \nabla'\ \frac{e^{ik|r'-r_o'|}}{|r'-r_o|}\right\}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2}\cdot\frac{e^{ik(|r'-r_o|+R)}}{|r'-r_o|\ R}\left[ik\left(\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{R} - \frac{(\vec{r}'-\vec{r}_o)}{|r'-r_o|}\right)+\left(\frac{(\vec{r}'-\vec{r}_o)}{|r'-r_o|^2} - \frac{(\vec{r}'-\vec{r})}{R^2}\right)\right]$$

$$\simeq \frac{1}{(4\pi)^2}\ \frac{e^{ik(|r'-r_o|+R)}}{|r'-r_o|\ R}\ ik\left(\frac{(\vec{r}'-\vec{r})}{R} - \frac{(\vec{r}'-\vec{r}_o)}{|r'-r_o|}\right)$$

ou $R = |r'-r|$ et les relations, $k|r'-r_o|\gg 1$, $kR \gg 1$.

Alors, la fonction d'onde et sa dérivée normale subissent en franchissant le bord d'ombre Σ_o du côté + au côté -, les discontinuités données par :

$$(3.5\,a)\quad v_g\ (\mathbf{r})_+ - v_g\ (\mathbf{r})_- = v_o\ (\mathbf{r})$$

$$(3.5\,b)\quad \left\{\frac{\partial v_g}{\partial n}\right\}_+ - \left\{\frac{\partial v_g}{\partial n_-}\right\} = \frac{\partial v_o(\mathbf{r})}{\partial n}$$

De (3. 5a) et (3. 5b) nous déduisons que pour r K +, la fonction d'onde ou le champ satisfait l'équation d'onde scalaire. Le champ d'onde est dû à des sources fictives distribuées sur la surface Σ'. Construisons maintenant une fonction $v_k(r)$ qui satisfait l'équation d'onde dans K+, et la condition de rayonnement (2. 6). Ainsi, en ajoutant la fonction v_g (r), la fonction $v_k(r)$ aura une discontinuité à travers le bord d'ombre Σ_o, égale et opposée à - $v_o(r)$. Cependant, dans toutes les autres parties de K+, v_k (r) est régulier. Le terme supplémentaire v_g (r) à $v_k(r)$ détermine un problème de valeurs aux limites, discontinues pour $v_k(r)$, ce qui donne d'après (47) une solution de la forme :

$$(3.6\,a)\quad \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_o}\left\{v_o\ (\mathbf{r}')\ \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_o(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right\}g_o\ (r/\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}'$$

Nous déduisons donc de (3. 1) une solution régulière

$$(3.6\,b)\quad v_k\ (r) = v_g\ (r) - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_o}\left\{v_o(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_o(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right\}g_o\ (r/\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'}\left\{v_o\ (r')\ \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_o\ (\mathbf{r}')}{-\partial n'}\right\}g_o\ (r/\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'} W_o\ (r/\mathbf{r}')\quad d\mathbf{r}'$$

Ceci est la solution de Kirchhoff que l'on peut interpréter comme suit : Le champ d'onde en un point quelconque $r\in K_+$ est dû à une superposition d'ondes élémentaires (ondelettes provenant de chaque point de la surface Σ' de l'ouverture. Ceci est en accord avec la formulation par Fresnel du principe de Huygens déjà mentionnée dans le premier chapitre.

*$U_o\ (r/r') = \left[v(r')\ \nabla' - \nabla' v(r')\right]\ g_o(r/r')$

En particulier, on peut déformer la surface Σ' de façon qu'elle coïncide avec le côté illuminé de l'obstacle Σ_1. Mais on obtient ainsi une singularité à la source qu'on peut isoler par une petite sphère S_ρ.

Alors, la surface Σ dans (3.6b) est remplacée par $\Sigma_i \cup S_\rho$, et comme la contribution de l'intégrale (6) sur la petite sphère S_ρ est $4\pi v_o(r)$, quand son rayon ρ tend vers zéro, on obtient au lieu de (6) la formule nouvelle suivante :

$$(3.7)\quad v_k(r) = v_o(r) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_i}\left[v_o(r')\ \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_o(r')}{\partial n'}\right] g_e(r/r')\ dr'$$

car $\quad r \in K+$

Maintenant, l'espace K+ est l'espace de champ total qui exclut celui occupé par les sources et les corps diffractants.

Dans les formules (3.6b) ou (3.7) exprimant la solution de Kirchhoff, le bord de l'ombre défini par la courbe C_o, n'entre pas dans la solution, mais seulement la surface Σ' ou Σ_i limitées par la courbe d'ombre C_o. Cela résulte de la fonction de source libre $W_o(r/r')$ entrant dans (3.6b) ou (3.7).

Pour préciser, considérons le problème particulier de diffraction, où les corps diffractants (fig. 2 a-b) se réduisent à des écrans infiniment minces faisant partie de Σ.

La courbe du bord de l'ombre est alors la frontière de l'écran ; mais ce n'est pas vrai en général, quand l'obliquité de l'ouverture par rapport aux rayons lumineux issus de la source est grande.

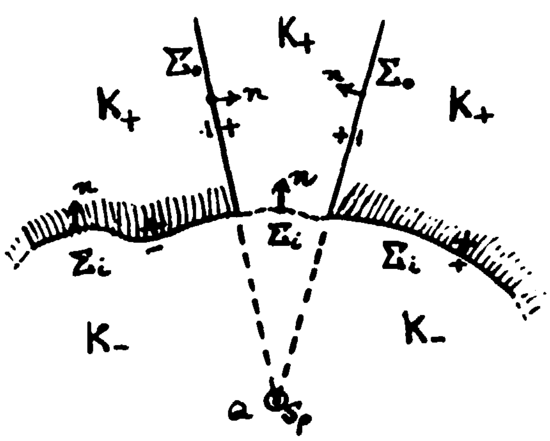


fig. 1 a

Diffraction par une ouverture dans un écran mince d'après la théorie de Kirchhoff.

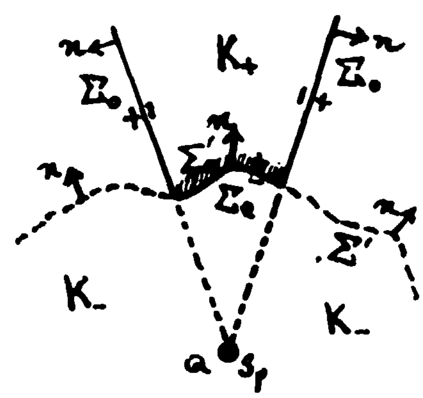


fig. 1 b

Diffraction (Diffusion) par un écran mince d'après la théorie de Kirchhoff.

Pour que la solution (3. 6b) soit continue quand on passe de l'espace K + à K - à travers l'ouverture Σ', nous avons, d'après la formule (28) du paragraphe 3, la formule :

$$(3.8)\ \beta\, v_o(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_e \cup \Sigma_i} W_o\,(r/r')\; dr'$$

où $\beta = 1$ pour $r \in K+$ et $\beta = 0$ pour $r \in K-$.

La surface Σ correspondant à l'intégrale (28) est ici remplacée par $\Sigma_e \cup \Sigma_i$ comme il est indiqué par les figures (a) (b).

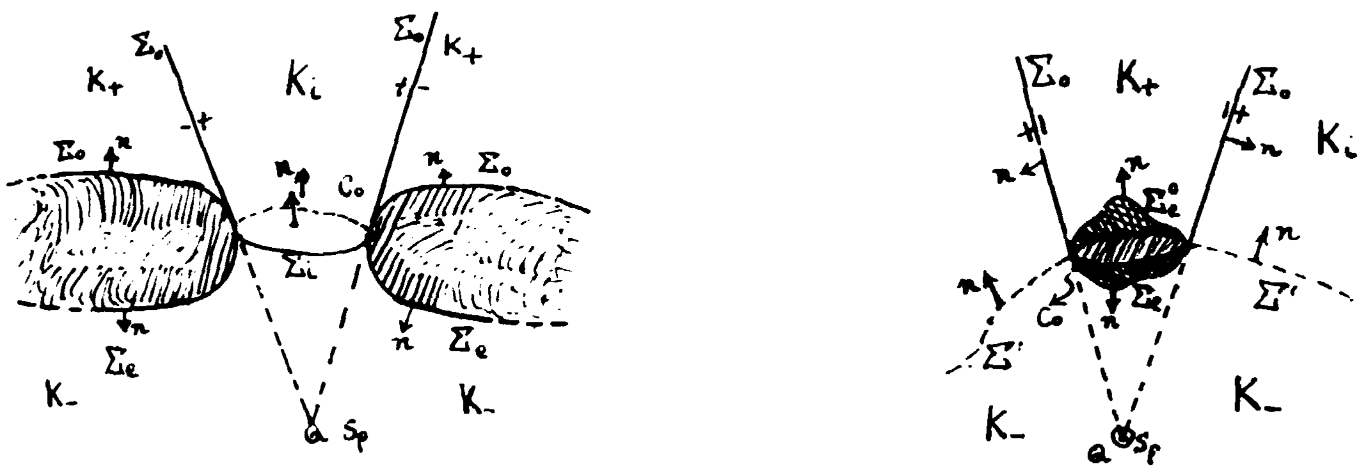


Fig. 2

a) Diffraction par un écran percé d'épaisseur finie, d'après la théorie de Kirchhoff.

b) Diffraction (diffusion) par un corps étendu d'après la théorie de Kirchhoff.

Mais l'intégrale (3. 8) est la somme d'une intégrale sur Σ_e et d'une intégrale sur Σ_i et la formule (3. 6b) donne :

$$(3.9)\ \beta\, v_o(r) = v_o(r) - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_e \cup} W_o\,(r/r')\; dr'$$

On peut obtenir encore cette formule en déformant la surface Σ_i, entrant dans l'expression (3. 7) pour la faire coïncider avec le côté opposé négatif de Σ_e. Alors l'intégrale sur l'écran Σ reste régulière à travers l'ouverture Σ_i, ce qui n'est pas vrai pour l'expression (3. 6b), parce qu'elle est seulement définie dans K+ où elle est d'accord avec (3. 9).

Cependant, la formule (3. 9) a la même singularité dans K- que $v_o(r)$ et ainsi (3. 9) donne la construction exigée de (3. 6b) dans K- lorsqu'on franchit l'espace de champ de K+ à K-. D'autre part quand on tient compte de (3. 8), on peut mettre (3. 9) sous la forme :

$$(3.10)\quad v_k(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_i}\left\{v_o(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_o(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right\} g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}', \qquad (r \in K+)$$

$$(3.11)\quad v_k(r) = v_o(r) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_i}\left\{v_o(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_o(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right\} g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}', \quad (r \in K-)$$

La solution de Kirchhoff, donnée par les formules (3. 9), (3. 10) et (3. 11) est une solution de l'équation d'onde scalaire et sa singularité dans le domaine K- est celle de $v_o(r)$. de plus , elle remplit les conditions de discontinuité à travers l'écran :

$$(3.12)\quad \begin{aligned} v_o &= (v_{k+}) - (v_{k-}) \\ \frac{\partial v_o}{\partial n} &= \left(\frac{\partial v_k}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v_k}{\partial n}\right)_- \end{aligned}$$

Les expressions (3. 10)-(3. 11) montrent que la solution présente une discontinuité égale à l'onde incidente lorsqu'on franchit le bord de l'ombre. Cela veut dire que dans la théorie de la diffraction de Kirchhoff, la discontinuité que présente l'onde géométrique se nivèle. Ce procédé de régularisation de la solution, représentée par v_k (r) est montré dans la formule (3. 9.) ou (3. 10) qu'on peut interpréter par la superposition d'ondes élémentaires (ondelettes) divergeant à partir de la surface de l'ouverture.

En particulier, sa formulation dans (3. 9) permet une liaison de la solution de Kirchhoff avec un problème de valeurs aux limites pour une situation réelle ou physique, au moins dans un sens quantitatif. Puisque les ondes élémentaires divergentes ont leur origine dans Σ_e et sont indépendantes, leur densité est mesurée par les valeurs discontinues (3. 12). Celles-ci sont exactement les sources sur la surface Σ_e qui rayonnent en directions données par l'expression entre parenthèses dans la formule (3. 4) et comme on peut l'observer, il n'y a aucune interaction des éléments de surface l'un sur l'autre.

Par cette hypothèse, et par l'application de la formule de Green, on peut écrire :

$$(3.13)\quad \int_{\Sigma} W_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = \int_{\Sigma}\left\{v_o(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial v(\mathbf{r}')}{\partial n}\right\} g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = 0$$

où Σ est une surface fermée.

Mais l'intégrale de surface prend la forme :

$$(3.14)\quad \int_{\Sigma}\left\{v(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial v(\mathbf{r}')}{\partial n}\right\} g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = \int_{S_{\rho_1}} + \int_{S_{\rho_2}} + \int_{\Sigma_R} + \int_{\Sigma'}\left\{v(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial v(\mathbf{r}')}{\partial n}\right\} g_o(r/\mathbf{r}')\, dr'$$

où les sphères S_{ρ_1}, S_{ρ_2} et les surfaces Σ_R, Σ' sont indiquées sur la fig. (3) et n est la normale dirigée vers l'espace K_+.

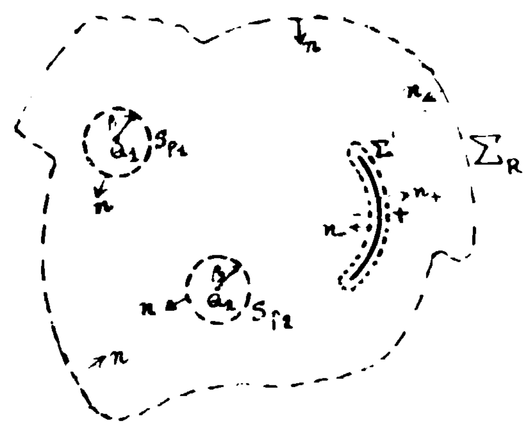


Fig. 3

Les contributions des sphères S_{ρ_1} et S_{ρ_2} sont respectivement égales à $+ 4\pi v_0(r)$ et $- 4\pi v_0(r)$, où $v_0(r)$ représente la source.

Alors on a :

$$(3.15)\quad v(r) = v_0(r) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'} \left\{ v(r')\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial v(r')}{\partial n} \right\} g_0(r/r')\, dr'$$

Mais l'intégrale de surface, prise sur Σ' est évidemment égale à la même intégrale sur les deux faces de la surface Σ, $\Sigma+$ et $\Sigma-$. Nous avons :

$$(3.16)\quad \int_{\Sigma'} W_0(r/r')\, dr' = \int_{\Sigma+\cup\Sigma-} W_0(r/r')\, dr' = \int_{\Sigma+} W_0(r/r')\, dr' + \int_{\Sigma-} W_0(r/r')\, dr'$$

Or

$$(3.17)\quad \int_{\Sigma+} + \int_{\Sigma-} = \int_{\Sigma} \left\{ \left[v_+(r') - v_-(r') \right] \frac{\partial}{\partial n'} - \left[\left(\frac{\partial v}{\partial n'}\right)_+ - \left(\frac{\partial v}{\partial n'}\right)_- \right] \right\} g_0(r/r')\, dr'$$

$$= -\int_{\Sigma} \left\{ \left[v_+(r') - v_-(r') \right] \frac{\partial}{\partial n'} - \left[\left(\frac{\partial v}{\partial n'}\right)_+ - \left(\frac{\partial v}{\partial n'}\right)_- \right] \right\} g_0(r/r')\, dr'$$

$$= -\int_{\Sigma} \left\{ v_0(r') \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial v_0(r')}{\partial n'} \right\} g_0(r/r')\, dr'$$

où n' est la normale orientée vers le côté d'ombre de Σ. Alors, si on tient compte de (3.14) et de (3.15) nous avons :

$$(3.18)\quad v(r) = v_0(r) - \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ v_0(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right\} g_0(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'$$

Cette formule a été obtenue par Kottler d'une manière rigoureuse. Quand on fait l'hypothèse des valeurs discontinues de la fonction d'onde donnée par (3.12), la formule (3.18) est équivalente à la formule (3.11).

II - THÉORIE DE KOTTLER

Dans la formulation du problème des valeurs aux limites, on peut règler la distribution du courant superficiel, d'une part par l'onde incidente, d'autre part, par les ondes secondaires rayonnant du même élément de la surface de façon qu'elles incorporent les valeurs aux limites correspondantes sur l'écran.

Nous avons déjà présenté ce point de vue ailleurs (b) (paragraphe 1) et il est exprimé en particulier par l'équation (3.18). Il faut noter ici que la solution de Kirchhoff v_k (r) est une solution du problème des valeurs discontinues donné par (3.12) qui possède la même discontinuité que la fonction $v_0(r)$ comme Rubinowicz (1917) et Kottler (1923) l'ont démontré. (Voir Baker et Copson). Pour traiter le problème de la diffraction comme un problème de valeurs aux limites, il est nécessaire d'introduire des solutions multivaluées de l'équation d'onde, qui sont univoques en chaque point d'un "espace" de Riemann, comme Sommerfeld l'a fait pour le problème du demi-plan. Il est nécessaire de prolonger les solutions multivaluées dans cet "espace" formé par un nombre infini de feuilles qui se raccordent le long du bord de l'ombre. Naturellement cet espace n'est pas l'espace ordinaire physique, mais un espace "imaginaire" mathématique.

Dans cet espace, les solutions deviennent univoques quand on passe d'un feuillet à l'autre en franchissant la frontière de l'ombre.

La coupure de ramification correspond à l'écran, et la ligne de ramification à la frontière de l'écran. Cet "espace" de Riemann est à l'espace ordinaire ce que la surface de Riemann est au plan ordinaire. Dans ce sens la coupure de ramification de l'espace "imaginaire" est cousue à l'espace ordinaire de la physique. Quand on passe de l'espace imaginaire à l'espace ordinaire en franchissant la frontière de l'ombre, l'onde incidente $v_0(r)$ apparaît dans la solution comme les formules (3.10 - 3.11) le montrent. Physiquement, on dit que l'onde réfléchie a son origine dans l'espace "imaginaire" (T+) et elle apparait dans l'espace ordinaire en franchissant l'écran. Cette notion a servi à Kottler comme définition de l'écran "noir". Il aurait obtenu la même formule que (3.11) si Σ était la surface d'un écran "noir" mince, avec l'hypothèse que les valeurs v_0 (r) et $\frac{\partial v_0(r)}{\partial n}$ sur la surface Σ de l'écran sont données par la relation (3.12). La différence entre la formule de Kottler et celle de Kirchhoff pour le problème de la diffraction par un écran "noir" mince est dans l'interprétation des valeurs v_0 (r) et $\frac{\partial v_0(r)}{\partial n}$ sur l'écran noir. D'après Kottler, qui a obtenu sa formule d'une manière rigoureuse v_0 (r) et $\frac{\partial v_0(r)}{\partial n}$ sont les discontinuités de la fonction d'onde et de sa dérivée normale, prises sur la surface de l'écran Σ et données par (3.12). D'après Kirchhoff elles sont les valeurs aux limites sur Σ.

Nous avons déjà montré que l'argument de Kirchhoff est faux, parce que dans notre analyse du paragraphe (4, II) les données arbitraires $v_0(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$ et $\frac{\partial v_0(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi(\mathbf{r})$ sur Σ sont incompatibles avec la solution de l'équation d'onde scalaire. La connaissance de $v(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$ sur la surface suffit en général à déterminer $v(\mathbf{r})$ à l'intérieur de Σ, et de plus la détermination de $v(\mathbf{r})$ est univoque. Donc $\frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi(\mathbf{r})$ est déterminé quand on connait seulement $\varphi(\mathbf{r})$, et inversement $\varphi(\mathbf{r})$ est déterminé si $\psi(\mathbf{r})$ est connu (voir paragraphe 5, II).

Cependant il existe des cas exceptionnels, où la connaissance, soit $\varphi_0(\mathbf{r})$ ou bien de $\psi_0(\mathbf{r})$ ne suffit pas à déterminer l'autre fonction.

Ces cas exceptionnels existent, quand l'équation d'onde possède des solutions propres à l'intérieur de Σ, et la quantité k (nombre d'onde) prend des valeurs propres k_1, k_2, k_3 ...., correspondant à la solution du problème aux limites. Par exemple les fonctions d'onde :

$$(3.19) \quad v_n(r, t) = \cos \omega_n t. \quad v_n(r) \qquad n = 1, 2, 3 \dots$$

qui sont des solutions particulières de l'équation d'onde scalaire, et où $v_n(r)$ est une solution de l'équation de Helmoltz (II 3.20), possède les valeurs propres $k_n = \frac{\omega n}{c}$

Mais les solutions $v_n(r, t)$ ou bien $v_n(r)$ de ce genre, ne satisfont pas la condition de rayonnement.

Pour les problèmes à l'extérieur de Σ, les solutions propres n'existent pas.

Les valeurs aux limites $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ interviennent dans les équations intégrales que nous avons obtenues, équations (43)-(45).

D'autre part, la solution de l'équation d'onde, obtenue par la procédure d'un nombre infini de solutions ramifiées dans l'espace "imaginaire" de Riemann n'est pas univoque parce que le comportement de la fonction d'onde peut varier considérablement dans l'espace imaginaire (Sommerfeld 1966). De plus, la solution $v_k(r)$ ne satisfait pas les conditions sur l'arête : c'est-à-dire elle donne un rayonnement engendré par les arêtes de l'écran ou du corps diffractant.

La solution de Kirchhoff pour un écran réel, qu'on peut décrire par les valeurs aux limites représente bien les résultats expérimentaux quand la longueur d'onde λ est très petite, et quand les points d'observation sont très éloignés des corps diffractants et ne se trouvent pas au voisinage de la frontière d'ombre.

Ces faits expérimentaux ont pu faire croire que la solution de Kirchhoff était la première approximation de la solution exacte du problème aux valeurs limites pour une très courte longueur d'onde.

Alors d'après la méthode d'approximations successives on pourrait calculer les approximations d'ordre supérieur $v^n(r)$ et si la série ainsi obtenue était rapidement convergente pour λ très petit, elle tendrait vers la solution exacte du problème aux limites. On a cru que la formule (3.11) donnait réellement le champ total sur l'écran et l'ouverture $\Sigma_e + \Sigma_i$ quand les valeurs $v_k(r')$ et $\frac{\partial v_k(r')}{\partial n}$ sont mises dans la formule (28) du paragraphe (3, II). Par conséquent, nous pourrions calculer les approximations successives du champ de fonction d'onde $v_k(r)$, par la méthode d'itération en introduisant les valeurs de $v_k^{p-1}(r')$, $\frac{\partial v_k^{p-1}}{\partial n}(r')$ (p = 1, 2, 3 ....) dans la formule (28). Mais nous avons remarqué que cette méthode ne mène pas à un résultat nouveau, parce que par cette procédure (comme il est démontré au paragraphe 7) on arrive à la même solution $v_k(r)$. Et la solution de Kirchhoff, en général, n'est pas le terme principal d'une série, obtenue par l'application de la méthode mentionnée plus haut et dont la somme $u_k^p(r)$ pour $p \to \infty$ tendrait vers la solution exacte du problème aux valeurs limite (3.12).

Pour la solution analogue de Kirchhoff dans le cas vectoriel, on considère les valeurs discontinues des composantes tangentielles des champs $n_\wedge E_o(r)$ et $n_\wedge H_o(r)$ sur la surface Σ. Alors à partir de l'équation (57) on obtient :

$$(3.20) \quad E_K(r) = \beta E_o(r) + \frac{1}{4\pi} \nabla_\wedge \int_\Sigma (n'_\wedge E_o(r'))\, g_o(r/r')\, dr'$$

$$- \frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{\nabla_\wedge \nabla_\wedge}{4\pi} \int_\Sigma (n'_\wedge H_o(r'))\, g_o(r/r')\, dr'$$

$$(3.21) \quad H_K(r) = \beta H_o(r) + \frac{1}{4\pi} \nabla_\wedge \int_\Sigma (n'_\wedge H_o(r'))\, g_o(r/r')\, dr'$$

$$+ \frac{i}{4\pi\omega\mu} \nabla_\wedge \nabla_\wedge \int_\Sigma (n'_\wedge E_o(r'))\, g_o(r/r')\, dr'$$

où $\beta = 1$ si $r \in K-$

$\beta = 0$ si $r \in K+$

Les champs $E_o(r)$, $H_o(r)$ sont définis par l'onde incidente sur l'écran. Les équations (13') et (14') sont les solutions des équations de Maxwell et satisfont les conditions aux limites des composantes tangentielles des champs E, H sur Σ, où ils prennent respectivement les valeurs discontinues $n_\wedge E_o(r')$ et $n_\wedge H_o(r')$.

III - LA THÉORIE DE YOUNG-RUBINOWICZ.

On a vu que la solution du problème de diffraction donnée par Kirchhoff s'exprime par une intégrale (3.1) sur la surface Σ, en général non fermée, limitée par une courbe ou un contour C_o.

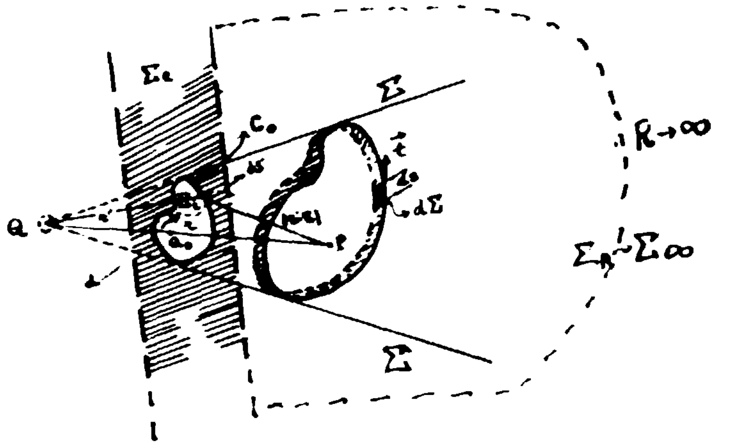


Fig. 1

$$\Sigma = \Sigma_i + \Sigma_{éc} + \Sigma_R = \Sigma_i + \Sigma'$$

$$\Sigma' = \Sigma_{éc} \cup \Sigma_R \qquad \Sigma' \to \Sigma''$$

$$\Sigma = \Sigma_i \cup \Sigma'' \qquad \Sigma_i = A$$

$$\Sigma = A \cup \Sigma''$$

Le contour C_o est la section selon laquelle le cône de sommet Q tangent à la surface du corps diffractant est tronquée. Nous avons montré au paragraphe précédent que $\Sigma = \Sigma_{éc} \cup \Sigma_i$ constitue une surface fermée. La source Q est à l'intérieur de Σ et en outre, le point d'observation (P) est situé à l'intérieur comme le montre la figure. On peut la déformer d'une manière continue afin qu'elle coïncide avec Σ.

Cette déformation ne change pas la valeur de l'intégrale sur Σ. Ainsi on peut remplacer S par Σ. Mais, comme la normale à Σ et celle à S prennent les directions opposées sur la partie commune, on obtient la formule suivante :

$$(3.22) \quad v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} W_o(r/r')\,dr' = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(v_o(r')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_o(r')}{\partial n'}\right) g_o(r/r')\,dr'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial v_o(r')}{\partial n} - v_o(r)\frac{\partial}{\partial n}\right) g_o(r/r')\,dr'$$

où n est la normale dirigée vers la face illuminée de la surface Σ (1). La solution donnée par Kirchhoff, au moyen d'une intégrale double, prise sur la surface Σ en général non-fermée, admet une propriété mathématique intéressante, qui nous permet de donner une interprétation physique simple du phénomène de diffraction. Cette propriété est qu'on peut la transformer en une intégrale, prise sur le contour C_o qui est le bord de la surface Σ''(2). La transformation de l'intégrale sur la surface Σ en une intégrale sur le contour, bordant la surface Σ'', est possible si Σ ne contient pas des sources, ou des corps diffractants dans l'intérieur, et si la fonction d'onde ou les champs ne sont réguliers au bord de la surface Σ, c'est-à-dire, si on peut appliquer le théorème de Stokes à Σ. Cette transformation de l'intégrale de Kirchhoff en une intégrale de contour a été faite d'une manière rigoureuse, d'abord par Maggi (1888), puis particulièrement par Rubinowicz (1917) qui a montré la liaison avec la théorie de la diffraction de Young. Récemment, la formule de Rubinowicz a été généralisée par Ingarden (1955), puis d'une manière rigoureuse et générale, qui comprend les formules de Rubinowicz et Ingarden, par Miyamoto et Wolf (1960, 1961, 1962) et aussi par Rubinowicz (1961, 1962, 1965).

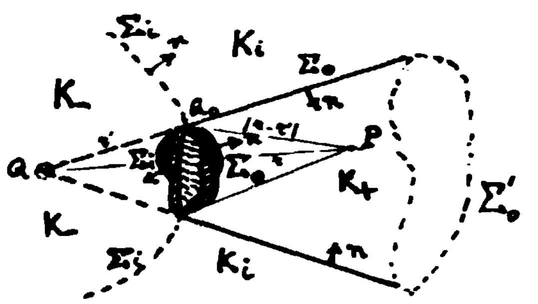


Fig. 2

(1) - Parce que Σ n'est pas en fait une surface réelle (surface d'écran ou de corps diffractant), mais une surface d'ombre fictive, les deux côtés de Σ'' sont illuminés. Pour une ouverture dans un écran non réfléchissant, on peut prendre Σ comme la réunion de la surface d'ouverture A et de la surface d'ombre.

(2) - Cette transformation de l'intégrale de Kirchhoff sur une ouverture (éq. 3.24) en une intégrale prise sur le bord de l'ouverture, nous donne le concept de diffraction de Young. Nous en avons parlé en détail au chapitre I : la diffraction apparait à cause de l'interférence mutuelle de deux ondes, une ayant pour origine le bord de l'ouverture ou du disque, l'autre est l'onde géométrique directe de la source.

La possibilité de la transformation de l'intégrale de Kirchhoff vient du fait que l'intégrale de surface de Kirchhoff représente le flux d'un vecteur sans divergence, ce qui permet d'appliquer le théorème de Stokes. Cela veut dire que l'intégrant $W_o(r/r')$ contenu dans l'intégrale de surface peut être exprimé comme le rotationnel d'un vecteur $V(r/r')$ ou d'un tenseur $T(r/r')$ dans le cas vectoriel.

$$(3.23\,a) \quad W_o(r/r') = \nabla' \wedge V(r/r') \cdot n'$$

$$(3.23\,b) \quad W(r/r') = \nabla' \wedge T(r/r') \cdot n'$$

Par le théorème de Stokes, l'intégrale sur la surface Σ, ou sur l'ouverture A dans un écran S se réduit à une intégrale de contour prise sur le bord C_o de la surface Σ ou de l'ouverture A. Nous obtenons :

$$(3.24\,a) \quad \int_{\Sigma} W_o(r/r')\,dr' = \int_{\Sigma} \nabla' \wedge V(r/r')\, n' \cdot dr' = +\int_{C_o} (V(r/r')\, d\vec{s}')$$

$$(3.24\,b) \quad \int_{\Sigma} W(r/r')\,dr' = \int_{\Sigma} \nabla' \wedge T(r/r')\, n' \cdot dr' = \int_{C} (T(r/r')\, d\vec{s}')$$

Pour réaliser cette transformation, on considère la surface Σ ou l'ouverture A dans un écran S, qui s'étend à l'infini et qui est parfaitement "noir". La source est au point $r = r_o = O$.

Nous avons :

$$(3.25) \quad W_o(r/r') = \left(v(r')\frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v(r')}{\partial n'}\right) g_o(r/r')$$

$$= (v(r')\,\nabla' - \nabla'(v(r'))\, n'\, g_o(r/r') = U_o \cdot n'\, g_o(r/r')$$

Puisque la divergence de $W_o(r/r')$ est égale à zéro (éq. 27, par. 3) on peut écrire :

$$(3.26a) \quad W_o(r/r') = (v(r')\,\nabla' - \nabla' v(r'))\cdot n'\, g_o(r/r') = \nabla' \wedge V(r/r') \cdot n'\, g_o(r/r')$$

$$(3.26b) \quad \operatorname{div} U_o(r/r') = v_o(r)\left[\delta(r-r') - \delta(r_o - r')\right] = 0$$

où $r' \neq r, \quad r' \neq r_o = O^*$

L'expression de $W_o(r/r')$ est donnée par la formule (3.4). Alors (3.26) est une équation différentielle permettant de déterminer le vecteur inconnu V, à un gradient près.

Le vecteur $V(r/r')$ reste toujours normal au plan de r'R, parce que $W_o(r/r')$ se trouve sur ce plan. Donc on peut mettre $V(r/r')$ sous la forme :

$$(3.27) \quad V(r/r') = (r' \wedge \vec{R})\, \varphi(\vec{r}', \vec{R}) \qquad (R = |r' - r|), \quad \vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$$

*$\vec{r}_o$ est le rayon vecteur de la source et $v_o(r)$ correspond à l'onde sphérique donnée par l'expression, $v_o(r) = g_o(r/r_o) = \frac{1}{4}\frac{e^{ik|r-r_o|}}{|r-r_o|}$

où $\varphi(\vec{r}', \vec{R})$ est une fonction scalaire, on écrit :

$$(3.28) \quad \nabla'_{\wedge} V(\vec{r}'/\vec{r}) = \vec{r}'\left[2 + (\vec{R}\nabla')\right]\varphi - \vec{R}\left[2 + (\vec{r}'\nabla')\right]\varphi$$

Mais d'après l'identité :

$$(3.29) \quad \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}(r'^2\varphi) = \left\{2 + (\vec{r}'\nabla')\right\}\varphi$$

on a :

$$C\ (3.30) \quad \nabla'_{\wedge} V(r'/r) = \frac{\vec{r}'}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\varphi) - \frac{\vec{R}}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}(r'^2\varphi)$$

En comparant les coefficients de $\vec{r}'$ et $\vec{R}$ de (3.30) et de (3.4), nous avons les équations différentielles suivantes :

$$D_1 \quad (3.31\ a) \quad \frac{\partial}{\partial r'}(r'^2\varphi(r', \vec{R})) = -\frac{e^{ik(r'+R)}}{(4\pi)^2}\left\{\frac{ik}{R^2} - \frac{1}{R^3}\right\}$$

$$D_2 \quad (3.31\ b) \quad \frac{\partial}{\partial R}(R^2\varphi(r', \vec{R})) = -\frac{e^{ik(r'+R)}}{(4\pi)^2}\left\{\frac{ik}{r'^2} - \frac{1}{r'^3}\right\}$$

Les deux équations ont même forme. On passe de l'une à l'autre en permutant $\vec{r}'$ et $\vec{R}$. Pour intégrer D_1, D_2 nous considérons la fonction

$$(3.32) \quad u = \frac{R}{r'}\left[r'R + (\vec{r}'.\vec{R})\right] = R^2\frac{\partial(r'+R)}{\partial r'}$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial r'}\frac{1}{u} = -\frac{1}{R^3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r'} = \frac{u^2}{R^3}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{e^{ik(r'+R)}}{u}\right) - e^{ik(r'+R)}\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{1}{u}\right) = ik\,\frac{e^{ik(r'+R)}}{R^2}$$

on a :

$$(3.33) \quad \frac{\partial}{\partial r'}\left\{\frac{e^{ik(r'+R)}}{u}\right\} = e^{ik(r'+R)}\left(\frac{ik}{R^2} - \frac{1}{R^3}\right)$$

Si on substitue dans (3.31 a) et si on fait l'intégration en r', on obtient:

$$(3.34) \quad \phi(\vec{r}', \vec{R}) = \frac{e^{ik(r'+R)}}{(4\pi)^2 r'^2 u} + \phi_0(\vec{R})$$

où ϕ_0 dépend seulement de $\vec{R}$. De la même façon, en intégrant l'équation (D_2) on obtient pour $\phi(\vec{r}', \vec{R})$, l'expression suivante :

$$(3.35) \quad \phi(\vec{r}', \vec{R}) = \frac{e^{ik(r'+R)}}{(4\pi)^2 R^2 u} + \psi_0(\vec{r}')$$

où $\psi_0(\vec{r}')$ dépend seulement de $\vec{r}'$. Mais d'après la symétrie de $\phi(\vec{r}', \vec{R})$, $\varphi_0(\vec{R})$ et $\psi_0(\vec{r}')$ s'annulent. Par conséquent, nous avons l'expression :

$$(3.36) \quad \varphi(\vec{r}', \vec{R}) = -\frac{e^{ik(r'+R)}}{(4\pi)^2 r'^2 u} = -\frac{e^{ik(r'+R)}}{r'R}\;\frac{\vec{r}'_{\wedge}\vec{R}}{r'R + (\vec{r}'\vec{R})}$$

La quantité

$$(3.37) \quad \frac{\vec{r}'_{\wedge}\vec{R}}{r'R + (\vec{r}'\vec{R})} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

est le facteur d'alignement. L'angle α est l'angle de QR et PR. Avec cette expression de $\varphi(\vec{r}', \vec{R})$ nous obtenons :

$$(3.38) \quad \int_{\Sigma} W_0(r/r')\,dr' = \int_{\Sigma}(v_0(r')\nabla' - \nabla' v_0(r')).n\; g_0(r/r')\,dr'$$

$$= \int_{\Sigma}(\nabla'_{\wedge} V(r'/r))\,n\,dr' = \int_{C_0}(V(r'/r)\,\vec{ds})$$

où $\vec{ds}$ est l'élément d'arc vectoriel de C_0. Mais, quand le point d'observation est situé de manière à recevoir directement la lumière de la source Q, l'angle $\alpha = \pi$ et dans ce cas le facteur d'alignement devient infini. La singularité de l'intégrant apporte à l'intégrale de contour, d'après la formule de Cauchy, une contribution qui est égale à l'onde directe géométrique de la source au point d'observation, parce que, dans l'application de la formule de Stokes, on peut isoler les points singuliers de l'intégrant situés sur la surface d'intégration par de petits cercles de rayon ρ ; et comme dans l'application du théorème de Green, l'intégrale (3.38) devient :

$$(3.39) \quad \oint_{C_0 \cup C_j}(V(r'/r)\,\vec{ds}) = \oint_{C_0}(V(r'/r)\,\vec{ds}) + \lim_{\rho \to 0}\oint_{C_j}(V(r'/r)\,\vec{ds})$$

$$= v_g(r) + \oint_{C_0}(V(r'/r)\,\vec{ds})$$

La limite de la seconde intégrale donne la partie géométrique de l'onde, c'est-à-dire, l'onde non perturbée, arrivant directement de la source au point d'observation et la première intégrale représente l'onde diffractée ou l'onde secondaire de Young. Alors, la seconde intégrale de (3.39) représente l'onde géométrique $v_g(r)$ et la formule (3.10 - 3.11) prend la forme suivante : (1)

$$(3.40) \quad v_k(r) = v_g(r) + \oint_{C_0} v_0(r')\,g_0(r/r')\,\frac{((r'_{\wedge} r)\,\vec{ds})}{\left[r'\,|r' - r| + r'.(r' - r)\right]}$$

(1) Pour les différentes démonstrations de cette formule, voir les travaux de Miyamato et Wolf, et de Rubinowicz déjà cités, où on trouve une analyse détaillée et aussi des applications à des cas divers. Quelques applications intéressantes et généralisations sont aussi données par Petykiewicz (1965) et Fabiansky (1964).

où v_g (r) donne l'onde géométrique :

$$(3.41) \qquad v_g(r) = v_o(r) = \frac{\beta\, e^{ikr}}{4\pi r}$$

avec $\beta = 1$, si $r \in K_i$ et $\beta = O$, si $r \notin K_i$

au sens de l'optique géométrique, c'est-à-dire, si le point d'observation se trouve ou non dans le domaine directement illuminé par la source. Dans le cas d'une ouverture dans un écran, l'espace K_i est l'intérieur du cône, limité par la courbe C_o du bord de l'ouverture, et ayant la source pour sommet. Dans le cas d'un corps diffractant, K_i est tout l'espace en dehors du cône tronqué d'ombre, qui est engendré par la courbe C_o qui divise la surface du corps en deux parties, l'une illuminée, l'autre non-illuminée directement par la source.

Puisque la fonction d'onde $V_k(r)$ satisfait l'équation d'onde, elle est une fonction continue dans tout l'espace, même sur la frontière de l'ombre, et de plus sa dérivée normale est continue dans cet espace. Donc, la discontinuité de l'onde géométrique $v_g(r)$, lorsqu'on franchit la frontière de l'ombre du côté illuminé vers le côté de l'ombre, est compensée par une discontinuité de l'intégrale sur C_o (3.40). Ceci est le cas, en effet parce que la quantité $[r' \,|r' - r| + \vec{r}'.(\vec{r}' - \vec{r})]$, qui parait dans la formule (3.40) s'annule si le point d'observation (r) se trouve sur la surface de l'ombre et la valeur de l'intégrale (3.40) quand $r \to \hat{r}+$ est égale à la valeur quand $r \to \hat{r}-$ avec un changement de phase égal à π. La valeur absolue de l'intégrale, quand $r \to \hat{r} \pm O$ est égale à la moitié de $v_g(\hat{r})$.

Par conséquent, nous voyons encore une fois que, comme dans le point de départ de la théorie de Kirchhoff, les conditions aux limites ne sont pas déterminées sur l'écran réel ou sur la surface physique du corps, mais sur une surface discontinue "imaginaire", qui divise l'espace en une partie illuminée directement par la source, au sens de l'optique géométrique et en une autre l'espace d'ombre. Cette surface "imaginaire" est la frontière de l'ombre géométrique, produit par l'écran ou par les corps interposés en face d'une source lumineuse. Et la propagation de cette vibration lumineuse obéit aux principes de l'optique géométrique, ce qui est une conséquence de la solution du problème de valeurs limites, quand on fait tendre λ vers O. En effet, cette valeur solution est indépendante de la condition aux limites exigée sur l'écran ou sur la surface du corps diffractant.

Une transformation analogue de l'intégrale de Kirchhoff en une intégrale de contour pour les ondes électromagnétiques, a été accomplie par Laporte et Meixner (1958). Le point de départ d'une telle transformation pour le cas vectoriel est la formule (3.20) et (3.21), représentant les champs électromagnétiques, analogues à l'intégrale de Kirchhoff. Mais ici, les quantités discontinues sont les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique, lorsqu'on franchit l'écran Σ. Comme la divergence des champs E (r) et H (r) s'annule dans un domaine libre de sources et de corps diffractants, les intégrales de surface (3.24a) et (3.24b) représentent un flux d'un tenseur libre de sources ; on a donc :

$$(3.42) \qquad \operatorname{div} \varphi_K(r/r') = O, \qquad (\varphi_K(r/r') \equiv \nabla' \wedge T(r/r') \cdot n' \;(3.23b)$$

si $r \neq r'$

Alors $\varphi_K(r/r')$ est donné par un autre tenseur $\psi_K(r/r')$ de la manière suivante :

$$(3.43) \quad \varphi_K(r/r') = \nabla'_\wedge \psi_K(r, r') \cdot n, \qquad ((\psi_K(r/r') \equiv T(r/r'))$$

Par suite l'application du théorème de Stokes donne :

$$(3.44) \quad E_K(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \varphi_K(r/r')\, dr' = \int_\Sigma \nabla' \wedge \psi_K(r/r')\, n.\, dr'$$

$$= \int_{C_o} (\psi K(r/r') \; \vec{ds})$$

$$= E_g(r) + \oint_{C_o} (\psi_K(r/r') \; \vec{ds})$$

Cette formule est l'analogue de la formule de Rubinowicz pour le cas scalaire. La détermination du tenseur ψ_K (r/r') est l'objet du travail de Laporte et Meixner, déjà cité, où on trouve une analyse détaillée permettant de construire cette fonction et par M. Rubinowicz suivant une autre méthode (1962).

La formule (3.44), exprime sous une forme mathématique la substance de la nouvelle théorie de la diffraction, qui est déjà ancienne du point de vue physique. Elle est la formulation mathématique rigoureuse de la théorie de Young, selon laquelle le champ total de l'onde est la superposition d'un champ d'onde géométrique et d'un champ d'ondes secondaires, engendrées au bord de l'ouverture. L'onde secondaire, dite "onde de Young" est donnée par l'intégrale de contour. Le facteur d'alignement

$$\left[\frac{(\vec{r'} \wedge \vec{R})}{r' \, | \, r' - r \, | + (r'.(\vec{r'} - \vec{r}))}\right]$$

dépend seulement des positions de la source et du point d'observation et des points sur le bord de l'ouverture. Il caractérise l'indépendance de chaque ondelette de Young, ayant son origine au bord.

En général l'évaluation de l'intégrale curviligne est difficile, mais on peut faciliter le calcul par l'application de la méthode de la phase stationnaire. Les contributions principales proviennent des points du bord, où la phase figurant dans l'intégrale, reste stationnaire le long du bord. En effet, les contributions des autres points du bord s'annulent par interférence, à cause de la variation rapide de la phase.

Les points qui satisfont cette condition, dits "points stationnaires", sont donnés par :

$$(3.45) \quad \cos(\vec{r'}, s) + \cos(\vec{R}, s) = 0$$

qui est la loi de réflexion. Les points d'observations qui satisfont (3.45) sont sur la surface d'un cône dont le sommet est au point stationnaire et dont l'axe est tangent à la courbe C_o. Le chemin optique géométrique, de la source au point d'observation, en passant par le point stationnaire du bord, satisfera au principe de Fermat généralisé.

Ce ne sont pas tous les points du bord qui contribuent à la vibration lumineuse au point d'observation, comme on le croit généralement, mais seulement les points stationnaires, ou la phase r' + R reste constante. De ce point de vue nous avons une connection avec la théorie de Fresnel, quand on évalue l'intégrale double de Fresnel-Kirchhoff sur la surface de l'ouverture par la méthode de la phase stationnaire. Nous en parlerons dans un autre chapitre.

Mais finalement, il faut souligner que la théorie de Young-Rubinowicz et de leurs continuateurs, est une théorie approximative. De plus, la théorie est en défaut, parce que le bord d'une ouverture, ou l'arête d'un écran devient une source de rayonnement d'énergie. En effet, l'intégrale de contour possède une forte singularité quand r s'approche du point r' du bord de l'arête. Cette singularité du champ de l'onde secondaire est de forme logarithmique. Ainsi, le bord d'une ouverture, ou l'arête d'un écran, devient l'origine d'un rayonnement et même la densité de flux d'énergie rayonnée devient infinie, quand r tend vers un point sur le bord de l'arête. Mais, ce comportement de la fonction d'onde au voisinage du bord ou de l'arête, contredit la condition sur l'arête de Bouwkamp-Meixner : dans la théorie exacte de la diffraction, il n'y a aucun rayonnement du bord ou de l'arête : il n'y a pas de source engendrée sur le bord d'une ouverture ou sur l'arête d'un écran et il n'y aura jamais un rayonnement réel du bord d'une ouverture ou de l'arête d'un écran.

Donc, la réalisation de cette transformation, qui donne naissance à l'onde de bord est même un grave défaut de la théorie de Kirchhoff. Les ondes secondaires d'Young représentées par l'intégrale sur le bord d'une ouverture ou l'arête d'un écran, sont, en principe, des ondes fictives. La théorie exacte de la diffraction montre, que, si l'écran est conducteur parfait, l'arête ne deviendra pas une source réelle de rayonnement.

La forte singularité de la fonction d'onde, qui apparait dans l'intégrale de contour, est engendrée par la transformation mathématique, qui ramène la surface d'intégration (surface de l'ouverture) à une courbe. En effet, la valeur du champ ou la distribution de la lumière sur chaque point de l'ouverture à deux dimensions, représentée par l'onde incidente, est rassemblée sur une ligne.

Cependant, dans la théorie de Young, et de ses continuateurs, les ondes secondaires, émises par les bords des ouvertures ou les arêtes des écrans, elles paraissent même dans la forme asymptotique du champ en un point éloigné de la source. On peut comparer ce résultat aux résultats de la théorie de la diffraction par un demi-plan, obtenus dans les études de Sommerfeld, Rubinowicz et Bouwkamp.

IV - THEORIES SCALAIRES APPROXIMATIVES

1. - FORMULATION DU PROBLEME DE DIFFRACTION.

Dans la théorie de la diffraction par un système optique, la surface d'intégration Σ dans la formule (3.1) est en général une surface plane : c'est-à-dire comprend le plan total, formé par l'ouverture A (pupille de sortie) et l'écran S (Σ = A U S).

L'écran S est supposé parfaitement réfléchissant.

Pour les ondes électromagnétiques, l'écran est en principe très mince et son épaisseur d est supposée plus petite que la longueur d'onde λ ($d \ll \lambda$). De plus, l'écran est un très bon conducteur électrique : les composantes tangentielles au champ électrique satisfont à peu près à la condition relative à un conducteur parfait ($N \wedge E = 0$ sur S). Dans le cas de la diffraction par un disque S, la surface coïncide avec tout le plan formé par la surface S et le plan libre A, au dehors de S.

Soit z = o le plan total, formé par A et S.

Pour cette forme géométrique de Σ, la discontinuité de la fonction d'onde, d'après la formule (2.28) est symétrique par rapport au plan z = o et égale à la différence des valeurs prises sur les deux faces du plan z = o. D'après la formule (43.II), nous avons la relation :

$$(3.46) \quad \lim_{z \to \pm o} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Sigma} \psi_0(\mathbf{r}') \, g_o(r/\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' = - \lim_{z \to \pm o} \int_{\Sigma} \psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z'} g_o(r/\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'$$

$$= \mp \frac{\beta}{2} \psi_0(\mathbf{r})$$

ou $\beta = 1$ si $r \in \Sigma$ et $\beta = o$ pour $r \notin \Sigma$

Mais $\psi_0 \sigma$, est une fonction quelconque, définie sur S et s'annule sur A, quand $z \to \pm o$. D'après cette hypothèse la formule (3.46) nous donne :

$$(3.47) \quad v_1(r), = \mp \frac{2}{4\pi} \int_{\Sigma} v(\mathbf{r}'), \frac{\partial}{\partial z'} g_o(r/\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}', \qquad (z \lessgtr o)$$

ou

$$(3.48) \quad v_2(r), = \pm \frac{2}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial v(\mathbf{r}')}{\partial z'}, g_o(r/\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}', \qquad (z \lessgtr o)$$

suivant que $\frac{\partial v}{\partial z}$ ou v est égal à zéro sur Σ

Les quantités $\upsilon(\mathbf{r}')$ et $\frac{\partial \upsilon(\mathbf{r}')}{\partial z'}$ prennent des valeurs arbitraires, quand on fait $z \to \pm o$, de l'un ou l'autre côté du plan $z = o$. Alors, si nous introduisons deux fonctions g_I et g_{II} définies par :

(3.49a) $\quad g_I(r, \mathbf{r}') = 2 \frac{\partial}{\partial r'} \, g_o(r/\mathbf{r}')$

(3.49b) $\quad g_{II}(r, \mathbf{r}') = 2\, g_o(r/\mathbf{r}')$

(2.47) et 2.48) prennent la forme simple.

(3.50a) $\quad \upsilon_1(r) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \upsilon(\mathbf{r}')\, g_I(r, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}', \quad (z \leqslant o)$

(3.50b) $\quad \upsilon_2(r) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\partial \upsilon(\mathbf{r}')}{\partial z}\, g_{II}(r, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}', \quad (z \leqslant o).$

Les fonctions de Green de première et deuxième espèce g_I et g_{II} pour le demi espace, sont données par les relations :

(3.51a) $\quad g_I(r, \mathbf{r}') = g_o(r/\mathbf{r}', +z) - g_o(r/\mathbf{r}', -z)$

(3.51b) $\quad g_{II}(r, \mathbf{r}) = g_o(r/\mathbf{r}', +z) + g_o(r/\mathbf{r}', -z).$

Les formes explicites de g_I, g_{II} sont

(3.52a) $\quad g_I(n, r') = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{ikr_2}}{r_2}$

(3.52b) $\quad g_{II}(r, r') = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2}$

avec

(3.53) $\quad r_1^2 = (x_o' - x)^2 = (y_o' - y)^2 + (z_o' - z)^2$

$\quad r_2^2 = (x_o' - x)^2 + (y_o - y)^2 + (z_o + z)^2$

où (x, y, z) sont les coordonnées de P, et (x, y, - z) les coordonnées de l'image de P par rapport au plan z = O, et (x_o, y_o, z_o) les coordonnées du point Q (fig. 1)

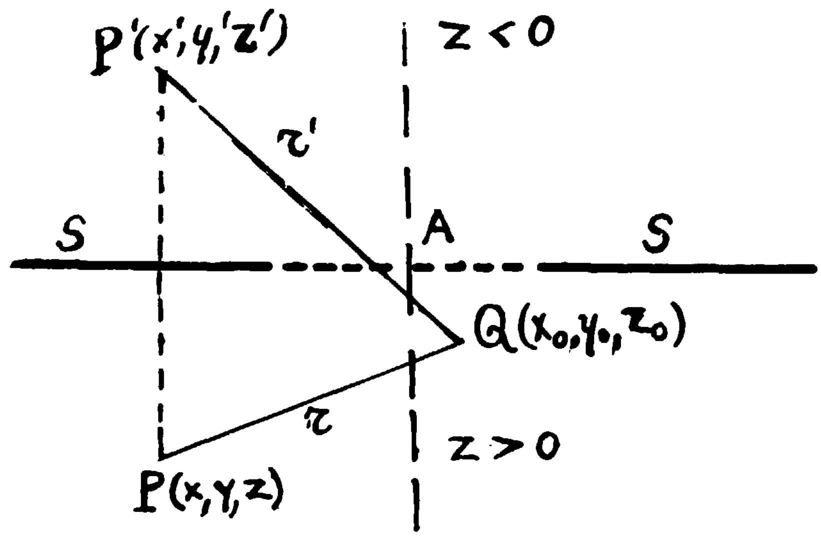


Fig. 1

Pour un point Q situé sur le plan $z = o$, nous avons :

$$(3.54a) \quad g_I = 0 \qquad g_{II} = 2 \frac{e^{ikr_2}}{r_2} = 2\ g_o (r/\hat{r})$$

et

$$(3.54b) \quad g_I = 2 \frac{\partial}{\partial r'} g_o (r/\hat{r}) \quad , \quad g_{II} = 0 \qquad (r_2^2 = (x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 + z^2)$$

comme en (3.41a) et (3.41b). Par conséquent, la construction de g_I et g_{II} à l'aide de la fonction de Green de l'espace libre, s'appuie sur le principe des images de Lord Kelvin (Sommerfeld 1965) et satisfait les conditions aux limites

$$(3.55a) \quad g_I = 0 \qquad \text{sur le plan } z = 0$$

$$(3.55b) \quad g_{II} = 0 \qquad \text{sur le plan } z = 0$$

et la fonction d'onde est donnée par (3.50a) et (3.50b) respectivement.

A l'aide des deux fonctions de Green, g_I et g_{II}, on peut construire une théorie modifiée de la diffraction sans les contradictions de la théorie de Kirchhoff en ce qui concerne les valeurs limites de v (r) et de sa dérivée normale $\frac{\partial v(r)}{\partial z}$ sur le côté positif de l'écran S, ou sur l'ouverture A. Cette formulation est le but des paragraphes suivants, où nous exposons d'une façon précise le problème de la diffraction, par une ouverture dans un écran plan, ou un disque de dimension finie, dont les épaisseurs sont très petites.

2. - MODIFICATION DE LA THEORIE DE KIRCHHOFF POUR L'ONDE SCALAIRE.

Soit v_o (r) une onde incidente quelconque arrivant du côté négatif du plan $z = o$ $(z<o)$ et diffractée par une ouverture A dans un écran plan infini S, infiniment mince. Notre surface Σ est alors la réunion de A à S, $\Sigma = A \cup S$ et coïncide avec le plan total $z = o$. La fonction v_o (r) satisfait à l'équation d'onde de Helmholtz. On peut distinguer deux problèmes de diffraction, selon la valeur limite que la fonction d'onde, ou sa dérivée, prend sur la surface S, c'est-à-dire :

$$v(r) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial v(r)}{\partial z} = 0 \quad \text{sur S}$$

Premier cas I $\qquad v(r) = 0 \qquad$ sur S

Si $v(r) = 0$ sur S, l'écran S est un écran souple ; alors le champ total v^A (r) est donné par l'équation suivante :

$$(3.56a) \quad v_2^{\ A} = v_o(r, z) - (v_o(r, z) + u_1(r, -z), \qquad (z \leq o)$$

$$(3.56b) \quad v_2^{\ A} = u_1(r, z). \qquad (z \geq o)$$

La fonction u_1 est définie pour toutes les valeurs positives de Z et devra posséder les propriétés suivantes :

1) u_1 est solution de l'équation d'onde de Helmholtz,

2) $u_1 = 0$ sur S.

3) u_1 satisfait à la condition de rayonnement de Sommerfeld

4) $\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial v_0}{\partial z}$ sur A.

5) u_1 est fini dans presque tout l'espace,

6) le gradient ∇u_1 est quadratiquement intégrable sur un domaine d'espace, les arêtes de l'écran incluses.

Nous avons déjà dit (par. 9, chapitre II), que les quatre premières conditions (1 à 4) ne suffisent pas à déterminer u_1 univoquement, à cause de la singularité de u_1, sur l'arête de l'écran S. La condition (5) est nécessaire pour l'unicité de la solution, puisque la condition(6) découle de(5). Mais(6) est très restrictive, parce qu'on ne peut pas exiger l'intégrabilité quadratique de u_1, sur le domaine bidimensionnel de l'ouverture, mais on peut seulement demander l'intégrabilité absolue du gradient de u_1 sur A.

Deuxième cas II $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ sur S.

Dans ce cas, l'écran est un écran rigide, d'après la terminologie de l'acoustique. Le champ total est alors

(3.57a) $v_1^A(r) = v_0(r, z) + v_0(r, -z) + u_2(r, -z)$ $(z \leq o)$

(3.57b) $v_1^A(r) = u_2(r, z),$ $(z \geq o)$

où $u_2(r, z)$ est défini dans tout l'espace $z \geq o$ et satisfait aux mêmes conditions que u_1, (r, z) à cela près, que les conditions 2, et 4, sont remplacées par

(2a) $\frac{\partial u_2}{\partial z} = 0$ sur S

(4a) $u_2 = v_0$ sur A

La fonction u_1, s'annule comme $\rho^{\frac{1}{2}}$ sur l'arête de l'écran et ∇u_1, ∇u_2 deviennent infinis comme $\rho^{-\frac{1}{2}}$, quand $\rho \to O$ (Bouwkamp, Meixner, loc. cit.).

Pour le problème complémentaire de la diffraction par un disque, dont la surface S a la même forme que A, les deux problèmes aux valeurs limites sur S sont résolus par les mêmes fonctions u_1, et u_2 que dans le premier cas.

Pour un disque parfaitement souple, $u_2 = 0$ sur S. Nous avons :

(3.58) $v_1^D(r) = v_0(r, z) - u_2(r, \mp z),$ $(z \lessgtr o)$

Pour un disque parfaitement rigide, $\frac{\partial u_2}{\partial z} = 0$ sur S. On a

$$(3.59) \qquad v_2^D(r) = v_o(r, z) + u_1(r, \mp z). \qquad (z \lesseqgtr o)$$

Nous voyons que la diffraction par un disque souple est équivalent au problème de la diffraction par une ouverture complémentaire dans un écran parfaitement rigide ; et la diffraction par un disque parfaitement rigide se ramène au problème de la diffraction par une ouverture sur un écran parfaitement souple. Cette relation est connue comme le principe de Babinet. Le principe rigoureux de Babinet est contenu dans les relations suivantes :

$$(3.60) \qquad v_1^A \pm v_2^D = v_1^D \pm v_2^A = \mp v_o(r, \mp z) \qquad (z \lesseqgtr o)$$

Ceci est étudié par Bouwkamp (1941) et Sommerfeld, (voyez aussi Baker et Copson).

Mais, pour une ouverture ou un disque de forme arbitraire il est difficile de déterminer les fonctions u_1, u_2 sauf dans le cas où l'équation d'onde est séparable par rapport à un système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) et où la frontière de l'ouverture ou du disque est représentée par une équation ξ_i = constante (i = 1, 2, 3).

Les deux exemples déjà classiques, sont l'ouverture circulaire et elliptique (Bouwkamp, l. c., Kotani (1933) et le ruban ou la fente infinie (Morse et Rubenstein (1938).

Une bibliographie très détaillée est donnée par M. Bouwkamp dans son excellent article de 1954 (l. c.)

Dans ces problèmes, les fonctions u_1 et u_2 sont données par un développement en série de fonctions propres (sphéroïdales, Mathieu), mais les séries sont seulement convergentes pour $ka < 1$ où a est la plus grande dimension de l'ouverture, du disque ou du ruban. Les problèmes de la diffraction par une ouverture ou un disque circulaire, ainsi que par un ruban, ont aussi été résolus par l'application de diverses autres méthodes mathématiques (Bouwkamp, 1954).

3. - LES FORMULES DE LORD RAYLEIGH.

Considérons maintenant le cas, où $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ sur S, mais est arbitraire sur A. Soit $v = v_o$ sur A.

Le problème aux valeurs mixtes

$$(3.61) \qquad \frac{\partial v(r)}{\partial z} = 0, \qquad r \in S \qquad (z = o)$$

$$(3.62) \qquad v(r) = v_o(\rho) \qquad r \in A$$

est équivalent au problème II.

Nous considérons une onde incidente $v_o(r)$, engendrée par une source située dans l'espace à gauche du plan z = o, (z < o). D'après le principe rigoureux de Huygens (2.28), l'onde diffractée v (r) pour z > o est exprimée par la formule.

$$(3.63) \qquad v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_A \left(v_o(\rho) \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial v(\rho')}{\partial z'} \right) g_o(r/\rho') \, d\rho' + \frac{1}{4\pi}\int_S v(\rho) \frac{\partial}{\partial z'} g_o(r, / \rho') \, d\rho' \qquad (z > o)$$

D'autre part, si nous utilisons les formules (3.47) et (3.48) nous obtenons :

$$(3.64a) \qquad v_I(r) = \frac{1}{4\pi}\int_A v_o(\rho) \, g_I(r, \rho') \, d\rho' + \frac{1}{4\pi}\int_S v(\rho') \, g_I(r, \rho') \, d\rho' \qquad (z > o)$$

$$(3.64b) \qquad v_2(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_A \frac{\partial v(\rho')}{\partial z'} g_{II}(r, \rho') \, d\rho'$$

Les valeurs aux limites (3.61) et (3.62) sont satisfaites par (3.64a) et (3.64b) à cause de (3.46).

Les équations (3.64a) et (3.64b) sont des équations intégrales, que les valeurs aux limites v (ρ) sur S et $\frac{\partial v(\rho)}{\partial z}$ sur A doivent satisfaire.

D'autre part, l'équation intégrale (3.63) est plus compliquée, parce que v (ρ) et $\frac{\partial v(\rho)}{\partial z}$ doivent être satisfaits simultanément sur A et S respectivement.

Les équations intégrales (3.64a) et (3.64b) se réduisent à des intégrales ordinaires, si nous supposons que l'inconnue v (ρ) sur la face d'ombre de S (z = + O) est négligeable, ($v_o(\rho) \simeq O$) sur S + et $\frac{\partial v}{\partial z'} = \frac{\partial v_o}{\partial z'}$ sur A, c'est-à-dire, si les données de Kirchhoff sont satisfaites. Dans cette hypothèse, la condition aux limites $v = v_o(\rho)$ sur A est exacte, mais la condition aux limites sur S est fausse, puisque nous avons $v(\rho, +o) = 0$. D'autre part, dans (3.64b) $\frac{\partial v(\rho)}{\partial z} = \frac{\partial v_o(\rho)}{\partial z}$ sur A, et la condition (3.61) est satisfaite, mais elle est fausse sur A, ($v(\rho) = 0$).

Dans cette approximation de (3.63), nous avons la solution de Kirchhoff (3.7) :

$$(3.65) \qquad v_k(r) = \frac{1}{4\pi}\int_A \left(v_o(\rho) \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial v_o(\rho)}{\partial z'} \right) g_o(r/\rho') \, d\rho' \qquad (z > o)$$

et les équations(3.64a) (3.64b) se réduisent à

$$(3.66a) \qquad v_k^1(r) = \frac{1}{4\pi}\int_A v_o(\rho') \, g_I(r, \rho') \, d\rho' = v_o(r) - \frac{1}{4\pi}\int_S v_o(\rho') \, g_I(r, \rho) \, d\rho'$$

$$(3.66b) \qquad v_k^2(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_{A} \frac{\partial v_o(\rho)}{\partial z'} g_{II}(r, \rho') \, d\rho' = v_o(r) + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial v_o(\rho)}{\partial z'} g_{II}(r, \rho') \, d\rho'$$

Ces formules correspondent aux formules (3.10) et (3.11) du paragraphe 8. Pour z < o, on change les signes des intégrales.

La somme de (3.66a) et (3.66b) est égale à deux fois la solution de Kirchhoff,

$$(3.67a) \qquad v_k^1(r) + v_k^2(r) = \frac{1}{4\pi}\int_A \left(v_o(\rho) \, g_I - \frac{\partial v_o(\rho')}{\partial z'} g_{II} \right) d\rho' = 2\, v_k^A(r)$$

en accord avec la formule (3.10 - 3.11) donnée au paragraphe 8, chapitre II.

Dans l'espace à gauche du plan $z = 0$, $z < 0$, il faut ajouter l'onde réfléchie à (3.65a) $v_o\,(r - o)$ et $+ v_o\,(r, - o)$ à (3.66a) et il faut changer les signes $- \partial' + $ et $+ \partial'$ - dans les intégrales (3.47) et (3.48)

Cependant, si nous considérons les formules (3.66a) et (3.66b) nous déduisons pour v (r) les formules correspondantes(*) :

$$(3.68a) \qquad v_{1R}^{A} = \frac{1}{4\pi}\int_A v_o(\mathfrak{r}')\; g_I(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r}'$$

$$(3.68b) \qquad v_{2R}^{A} = -\frac{1}{4\pi}\int_A \frac{\partial v_o(\mathfrak{r}')}{\partial z'}\; g_{II}(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r}' \qquad (z \geq 0)$$

$$(3.69a) \qquad v_{1R}^{S} = v_o(r) - \frac{1}{4\pi}\int_S v_o(\mathfrak{r}')\; g_I(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r}'$$

$$(3.69b) \qquad v_{2R}^{S} = v_o(r) + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial v_o(\mathfrak{r}')}{\partial z'}\; g_{II}(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r}'$$

pour $z \geqslant 0$. Ces formules sont équivalentes à celles données par Bouwkamp (1954). Elles sont les mêmes que (3.66a) et (3.66b) données ci-dessus.

Les formules (3.68a) - (3.69b) sont connues comme les formules ou les solutions de Rayleigh. La théorie de la diffraction modifiée comme ci-dessus, est compatible avec les valeurs aux limites, parce qu'il suffit de supposer les valeurs limites pour v (r) (problème II) ou de $\frac{\partial v\,(r)}{\partial z}$ (problème I). En effet, toutes leurs valeurs limites existent, quand $z \to + 0$ sur S_+ ou sur A et sont reproduites exactement par les solutions (3.68a) à (3.69b) si le point (r) s'approche du plan $z = 0$ par valeurs positives de $z \cdot (z \to + 0)$. Il est facile de déduire les solutions v (r) du côté illuminé $z = - 0$. En effet, le prolongement de (3.68a) et (3.69b) reste valide pour $- z$ c'est-à-dire, si on remplace z par $- z$ dans (3.68b) et (3.69b). Au contraire, les formules (3.68a) (3.69a) prennent les formes suivantes, quand on change z en $- z$:

$$(3.70a) \qquad v_{2R}^{A}(r) = v_o(\mathfrak{r}, + z) - v_o(\mathfrak{r}, - z) - \frac{1}{4\pi}\int_A \frac{\partial v_o(\mathfrak{r}')}{\partial z'}\; g_{II}(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r}'$$

$$(3.70b) \qquad v_{1R}^{A} = v_o(\mathfrak{r}, z) + v_o(\mathfrak{r}, - z) + \frac{1}{4\pi}\int_A v_o(\mathfrak{r}')\; g_I(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r}'$$

pour $z < 0$, et $v_o(r \pm z) = v_o(r)$

Dans (3.70a) et (3.70b), $v_o(\mathfrak{r}, - z)$ est la valeur de $v_o(r)$ au point de réflexion $(\mathfrak{r}, - 0)$ sur le plan $z = 0$ et $v_o(\mathfrak{r}, + z) \neq v_o(\mathfrak{r}, - z)$ est égal à l'approximation d'ordre zéro du champ réfléchi, qui est l'onde géométrique.

Nous remarquons que la somme des solutions de Rayleigh (3.68a) - (3.69a) et aussi (3.68b) - (3.69b) est égale à deux fois les solutions de Kirchhoff correspondantes.

$$(3.72) \qquad 2\, v_K^{A}(r) = v_{1R}^{A}(r) + v_{2R}^{A}(r) \qquad (z > 0)$$

$$(3.73) \qquad 2\, v_K^{S}(r) = v_{1R}^{S}(r) + v_{2R}^{S}(r)$$

formules déjà obtenues (3.67a) et (3.67b). Mais d'après le principe de Babinet, on peut écrire :

(*)Dans les formules (3.69a - 3.69b) $v_{1R}^{S} \equiv v_1^{D}$, $v_{2R}^{S} \equiv v_2^{D}$ du paragraphe précédent.

$$(3.74) \qquad v_o(\mathfrak{r}) = v_{1R}^{A} + v_{1R}^{S} \qquad (z > o)$$

et

$$(3.75) \qquad 2v_o(\mathfrak{r}, + z) + v_o(\mathfrak{r}, - z) = v_{1R}^{A} + v_{1R}^{S} \qquad (z < o)$$

ou

$$(3.76) \qquad v_o = v_{2R}^{A} + v_{2R}^{S} \qquad (z > o)$$

$$2\, v_o(\mathfrak{r}, + z) - v_o(\mathfrak{r}, - z) = v_{2R}^{A} + v_{2R}^{S} \qquad (z < o)$$

Il faut souligner que les solutions de Rayleigh sont des solutions exactes des problèmes aux discontinuités, comme la solution de Kirchhoff. Mais, l'avantage de la théorie modifiée de Kirchhoff est, qu'on peut distinguer entre les deux problèmes principaux, caractérisés par leurs valeurs aux limites, formulés ci-dessus I : $v = O$ (écran souple) et II : $\frac{\partial v}{\partial z} = O$ (écran rigide).

Puisque la fonction de Green de l'espace libre est paire en z, sa dérivée $\frac{\partial g_o(r/r')}{\partial z}$ est impaire, et les fonctions $v_k^1(r)$ et $v_k^2(r)$, (3.66a) et (3.66b) sont équivalentes aux solutions de Rayleigh, (3.68a) - (3.69b) représentant la partie double, impaire et paire, de Kirchhoff $v_k^1(r)$, $(j = 1, 2)$ par rapport à z. Quand nous interpréterons ces fonctions dans la théorie de Rubinowicz, nous reconnaîtrons que $v_k^1(r)$ donne la partie impaire de l'intégrale de contour (3.40) de Rubinowicz et $v_k^2(r)$ la partie paire de cette intégrale.

Les intégrales (3.66a) - (3.66b) ont été utilisées par Meixner et Fritze (1949), pour calculer la diffraction par un écran rigide ou une ouverture circulaire pour une onde incidente plane.

Les résultats ont été comparés à ceux donnés par la théorie exacte. Les courbes, calculées par les auteurs déjà cités, sont en accord pour les grandes valeurs de ka, mais pas pour $ka < 1$

Diverses variations des formules (3.68a, b) et (3.69a, b) ont été employées, par beaucoup d'auteurs, particulièrement par Scheffers (1943), qui a utilisé l'application de la transformation de Fourier, pour calculer les franges de diffraction de Fraunhofer ; par Bremmer (1951) dans l'optique électronique Gaussienne, à partir de la formule (3.69b) ; par Luneburg (1944) pour les systèmes optiques en général.

Une formule plus générale pour calculer la fonction v (r) est obtenue, si on considère la formule (3.63) et la condition IV du premier cas, c'est-à-dire $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v_o}{\partial z}$ sur A, et $\frac{\partial v}{\partial z}$ inconnu sur S_+.

Alors, nous obtenons l'équation intégrodifférentielle :

$$(3.77) \qquad v(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_A \frac{\partial v_o(\mathfrak{r}')}{\partial z'}\; g_{II}(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r} - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial v_o(\mathfrak{r})}{\partial z'}\; g_{II}(r, \mathfrak{r}')\; d\mathfrak{r}'$$

où on peut remplacer v (r) par $v_2^{A}(r)$ du problème I.

Cette équation est analogue à l'équation (3.64a) pour les conditions aux valeurs limites mixtes (a) et (b), c'est-à-dire, pour les conditions suivantes :

(a) $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ sur A

(b) $v = 0$ sur S

Mais, comme $\frac{\partial v}{\partial z}$ ou $\frac{\partial v_2^A}{\partial z}$ est inconnu sur S, on prend pour la première approximation $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ sur S.

La formule (3.77) se réduit alors à la formule déjà donnée, si on fait $\frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{\partial v_o(\mathbf{r})}{\partial z}$ dans (3.64b) et égale à (3.69a). Dans ce cas, nous pourrons écire, $u_{\mathbf{r}} \simeq v_{2\,R}^{\;A}$

Pour le problème II, $v_1^A(r)$ est équivalent à $v_1(r)$ de la formule (3.64), si $v(r) = 0$ sur S et $\frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial z} = 0$ sur A, donc $u_{\mathbf{r}} \simeq v_{1\,R}^{\;A}(r)$

Alors, nous écrirons les relations suivantes :

$$(3.78a) \quad v_1^A(r) \simeq v_{1\,R}^{\;A}(r)$$

$$(3.78b) \quad v_2^A(r) \simeq v_{2\,R}^{\;A}(r) \qquad (z \lessgtr o,\ r \notin S)$$

c'est-à-dire, dans tout l'espace libre.

Maintenant, ces solutions sont analytiques et donnent les valeurs imperturbées exactes de $\frac{\partial v_{2\,R}^{\;A}}{\partial z}$ et $v_{1\,R}^{\;A}$ sur l'ouverture, mais les conditions aux limites sur l'écran S sont fausses. Cependant, il est plus important de faire une approximation exacte du champ sur l'ouverture, que sur l'écran ou au voisinage de l'écran, puisque si on met u_1, et $\frac{\partial u_{\mathbf{r}}}{\partial z}$ pour $v_o(\mathbf{r})$ et $\frac{\partial v_o}{\partial z}(\mathbf{r})$ sur l'ouverture, et $v(\mathbf{r}) = 0$ sur S, d'après les équations (3.64a) (3.64b) $u_{\mathbf{r}} \simeq v_{1\,R}^{\;A}$ et $v_2 \simeq v_{2\,R}^{\;A}$ pour Z positif. Alors, d'après la condition (V) des problèmes I et II, nous obtenons les relations suivantes :

$$(3.79) \quad \begin{aligned} v_2^A(r) &\simeq v_{1\,R}^{\;A}(r) \\ v_1^A(r) &\simeq v_{2\,R}^{\;A}(r) \end{aligned} \qquad (z > o)$$

$$(3.80) \quad \begin{aligned} v_2^A(r) &\simeq 2v_o - v_{1\,R}^{\;A} \\ v_1^A(r) &\simeq 2v_o - v_{2\,R}^{\;A} \end{aligned} \qquad (z < o)$$

Les solutions (3.79), (3.80) satisfont les conditions aux limites sur l'écran, mais non sur l'ouverture, parce que la solution ou sa dérivée normale est discontinue sur l'ouverture, donc, les solutions (3.79) (3.80) ne sont pas des fonctions analytiques par rapport à z.

Par conséquent, il est préférable d'utiliser la formule (3.78) que (3.79) et (3.80), quand on résoud approximativement un problème de diffraction.

Pour résoudre le problème complémentaire de la diffraction par un disque, on utilise le principe de Babinet. Les solutions correspondant à (3.78) pour le disque, prennent les formes :

$$(3.81a) \quad \begin{aligned} v_2^D(r) &\simeq v_{1\,R}^{\;S}(r) \\ v_1^D(r) &\simeq v_{2\,R}^{\;S}(r) \end{aligned} \qquad (z > o)$$

$$(3.81b) \quad \begin{aligned} v_2^D(r) &\simeq 2v_o(r) - v_{1\,R}^{\;S}(r) \\ v_1^D(r) &\simeq 2v_o(r) - v_{2\,R}^{\;S}(r) \end{aligned} \qquad (z < o)$$

où, sous forme explicite

$$(3.82a) \quad v_2^D(r) \simeq v_o \mp \frac{1}{4\pi}\int_S v_o(\mathbf{r}')\, g_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \qquad (z \lessgtr o)$$

$$(3.82b) \quad v_1^D(r) \simeq v_o \mp \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial v_o(\mathbf{r}')}{\partial z'}\, g_{II}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \qquad (z \lessgtr o)$$

Ces formules sont les mêmes que les formules (3.66a) et (3.66b).

4. - QUELQUES REMARQUES SUR LES THEORIES DE BRAUNBEK ET KELLER

L'analyse des diverses théories approximatives, exposées dans les paragraphes précédents, montre que nous sommes très loin de formuler une théorie générale de la diffraction pour les corps réels, tant dans le cas scalaire que dans le cas vectoriel.

C'est seulement pour les corps de forme très simple, que la théorie exacte est susceptible d'un traitement mathématique. Pour plusieurs problèmes, et surtout pour les problèmes pratiques, il faut avoir recours aux théories approximatives, qui ont eu de grands succès, par exemple la théorie de Kirchhoff, dans le domaine de l'optique instrumentale.

Une tentative pour améliorer les théories approximatives discutées ci-dessus, est d'introduire dans la deuxième intégrale de (3.77), à la place de $\frac{\partial v_o(\mathbf{r})}{\partial z}$ sur l'écran S, sa valeur exacte, calculée d'après la théorie de Sommerfeld pour un demi-plan, comme si l'écran possédait localement une arête rectiligne. Par exemple, si le rayon de courbure ρ du bord de l'ouverture n'est pas très petit, par rapport à la longueur d'onde $\rho \gg \lambda$, on considère le bord de l'écran comme une arête rectiligne, et au voisinage du point $\mathbf{r}$ sur l'arête, on évalue $\frac{\partial v_o(\mathbf{r})}{\partial z}$ Cette théorie a été développée par M. Braunbek (1950), qui a appliqué sa théorie à une ouverture et à un disque circulaires. Les calculs de distribution du champ sur l'ouverture sont en accord avec les valeurs exactes, calculées par Meixner et Fritze (loc. cit.). Pour une discussion de la théorie de Braunbek, nous renvoyons aux travaux de Bouwkamp (1953, 1954) et de Fritze (1957).

Une autre théorie approximative qui mérite d'être citée ici, est la théorie géométrique de la diffraction de M. Keller (1958), basée sur une idée de Luneburg. D'après lui, en chaque point de la limite de l'ombre géométrique sur un corps diffractant, le rayon lumineux primaire engendre des rayons secondaires, qui forment un cône.

L'axe du cône est la tangente à la limite de l'ombre géométrique, au point où arrive l'onde incidente. Cette conception n'est pas différente de notre interprétation (voir chapitre IX et aussi la deuxième thèse) du champ diffracté, obtenu par la méthode de la phase stationnaire (Chako 1953, 1965). Mais pour calculer le champ diffracté, Keller remplace la valeur du champ incident au point diffractant, par la valeur exacte et non par la valeur de l'onde incidente, comme dans la théorie de Kirchhoff. De plus, il fait l'hypothèse, qu'en chaque point de la surface du corps diffractant (convexe), il existe du côté de l'ombre une onde de surface (onde rampante) autour de la surface du corps, laquelle diffuse les rayons lumineux de l'optique géométrique aussi bien dans l'espace d'ombre, que dans l'espace illuminé directement par la source.

L'existence de l'onde rampante est vérifiée par les recherches de Franz et de ses collaborateurs (1952, 1954, 1957), basée sur la théorie exacte de la diffraction par une sphère et un cylindre et, en général, par les corps convexes (Fock, 1946, 1965), et par l'expérience de Limbach. Pour une analyse détaillée de cette théorie, nous renvoyons aux recherches originales de Keller et aux livres de Franz et Fock, cités dans notre bibliographie.

Ce problème est lié à l'étude de la propagation des ondes de surface, posé par Sommerfeld et depuis devenu la matière de nombreuses recherches, principalement pour la propagation d'ondes Hertzienne autour de la terre. Une analyse détaillée de ces problèmes peut être trouvée dans les études de Van Der Pol et Bremmer (1937-38), Kahan et Eckart (1949), Bremmer (1949, 1958) et particulièrement dans l'article sur la diffraction dans les derniers paragraphes de Handbuch der Physik, (1, c).

Pour terminer ce chapitre, nous remarquons que du point de vue de l'onde géométrique, nous pouvons expliquer que le défaut de la solution de Kirchhoff se trouve dans la première approximation de la solution de la valeur aux limites de l'équation d'onde, comme suit :

Considérons un front d'onde quelconque S, défini par la fonction caractéristique de Hamilton V = C. Lorsque l'ouverture a des dimensions finies, seule une partie du front d'onde S passe par l'ouverture et le reste, forme en quelque sorte une surface de sillage près de la frontière de l'ouverture comme le montre la figure ci-dessous, puisque le front d'onde S forme une surface continue et ne peut pas être coupé brusquement par l'arête de l'écran. Ceci est vrai même pour une longueur d'onde quelconque d'onde de la lumière. A une distance de plusieurs longueurs d'onde de l'écran, le front d'onde S satisfait l'équation de Hamilton pour les rayons et l'onde géométrique satisfait l'équation d'onde. Cependant, au voisinage de l'arête de l'écran, le front d'onde est tellement différent, que l'équation de Hamilton n'est plus satisfaite, même quand l'équation d'onde est satisfaite. Ainsi, la forme de l'onde géométrique de la solution de l'équation d'onde, ou, en général, la solution asymptotique en puissances de λ tombe en défaut dans ce voisinage de l'arête de l'écran, si on exige de la fonction de de phase de la solution asymptotique qu'elle satisfasse l'équation de Hamilton. Par conséquent on ne peut pas prendre la solution de Kirchhoff égale à la première approximation de la solution rigoureuse du problème des valeurs aux limites comme nous l'avons déjà dit dans les paragraphes précédents.

Cet argument est également valable pour la solution de Rubinowicz. En fait, la fonction de phase de l'onde géométrique doit dépendre de l'amplitude dans la partie du front d'onde au voisinage de l'arête de l'écran (bord de l'ouverture) comme nous le montrons au chapitre IV (Fig. 4a, 4b)

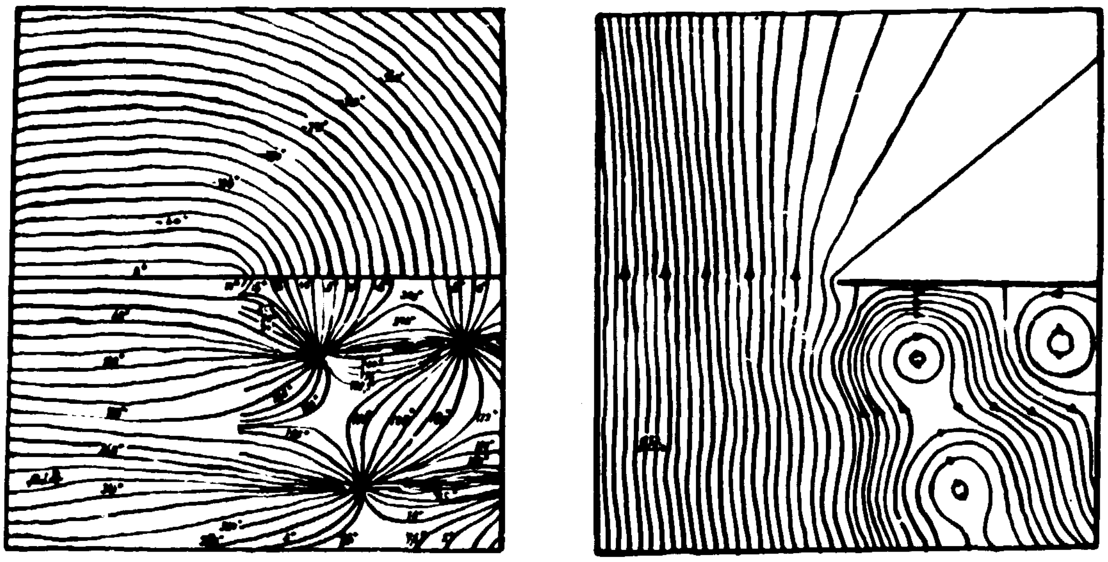
Cette brève discussion peut expliquer pourquoi les théories de Kirchhoff, Kottler, Rubinowicz et autres ne peuvent produire les termes principaux de la solution exacte et aussi que la modification par Braunbek et Keller donne une approximation meilleure que les autres théories.

La raison est qu'une introduction d'une distribution de courant au voisinage de l'arête de l'écran est nécessaire, pour expliquer la grande déformation du front d'onde au voisinage de l'écran. Mais cette distribution de courant doit être égale à celle calculée du problème exact, à savoir, la solution de Sommerfeld à proximité de l'arête.

Dans la théorie de Rubinowicz - Young les ondelettes ou ondes secondaires sont du type géométrique et ne peuvent pas expliquer la grande déformation du front d'onde émergeant à proximité de l'arête.

Comme conséquence, même pour des longueurs d'ondes très petites, la solution asymptotique (pour le champ, obtenue par la théorie de Kirchhoff, ses diverses modification et la méthode de Young, Rubinowicz et ses continuateurs inclues ne mènent pas à la solution asymptotique, dérivée de la théorie exacte. L'échec de ces théories, même la théorie de Braunbek montrent de ce qu'il n'est pas suffisant de prendre la distribution exacte de l'onde incidente au voisinage de l'arête de l'écran, mais il est nécessaire de considérer sur l'ouverture une distribution différente de l'onde incidente.

Nous reprendrons ce probleme dans le chapitre X.



Les courbes de phase constante (incidencé normal) La densité d'énergie (incidence normal)

(d'après Braunbek et Laukien)

Fig. 4a

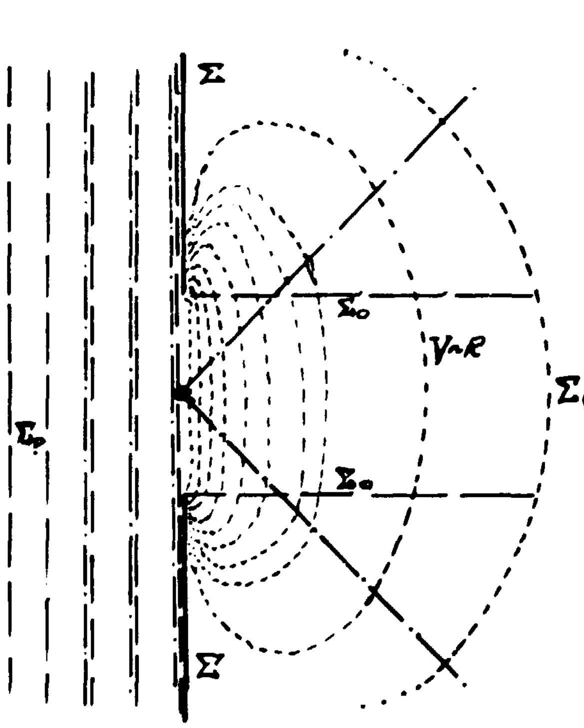


Fig. 4a

Onde incident plane $\Sigma \neq$ une surface d'onde

$V \neq$ satisfaisant l'Equation d'Hamilton

— — — — onde incident plane

—·—·—·— onde réfléchie plane

- - - - - - - - onde diffractant approximative (sphérique) $V \sim R$.

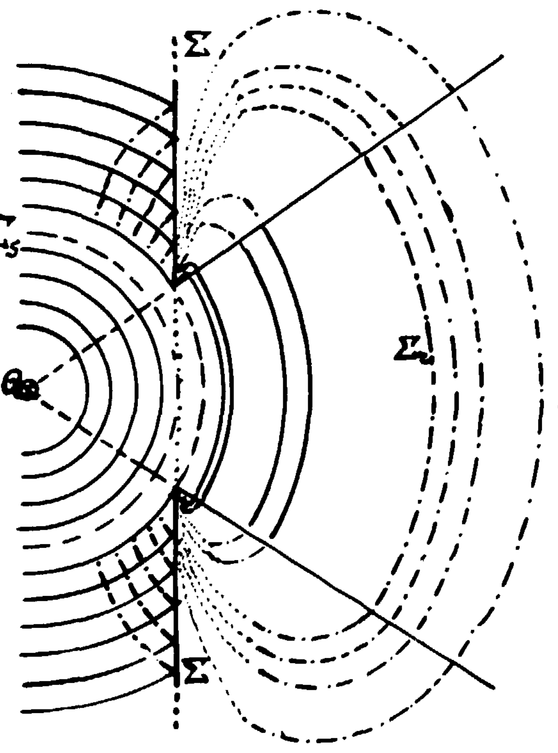


Fig. 4b

Onde incident sphérique

$\Sigma_R \sim V$ =constante, $R \simeq \infty$

———— onde incident sphérique

-·-·-·- onde réfléchie sphérique (approx.)

—·—·— onde diffractant sphérique (approx.) Σ_p

V - THEORIES VECTORIELLES APPROXIMATIVES

L'extension des formules précédentes aux champs vectoriels est obtenue d'une manière analogue au cas du champ scalaire. Les équations de base, à partir desquelles les solutions approximatives du problème de diffraction des champs vectoriels E (r) et H (r) peuvent être construites, sont données par les formules (2.48) et (2.49), ou (2.57) et (2.58) des paragraphes (7 et 8) du chapitre II, qui correspondent à (3.63) pour le champ scalaire. Celles-ci s'écrivent :

$$(3.83)\quad \beta\, E(r) = \frac{1}{4\pi}\nabla_\wedge \int_\Sigma \mathcal{J}(\mathbf{r}')\; g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r} + \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\nabla_\wedge\nabla_\wedge \int_\Sigma \hat{\mathfrak{J}}(\mathbf{r}')\; g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}$$

$$(3.84)\quad \beta\, H(r) = \frac{1}{4\pi}\nabla_\wedge \int_\Sigma \mathfrak{J}(\mathbf{r}')\; g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' - \frac{i}{4\pi\omega\mu}\nabla_\wedge\nabla_\wedge \int_\Sigma \mathfrak{J}'(\mathbf{r})\; g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'$$

où

$$(3.85)\qquad n_\wedge E(\mathbf{r});\ = \mathcal{J}(\mathbf{r})$$

$$n_\wedge H(\mathbf{r}) = \mathfrak{J}(\mathbf{r})$$

Si, nous introduisons le tenseur de Green de l'espace libre à la place de g_o $(r/\mathbf{r})$, (3.83) et (3.84) prennent les formes suivantes équations (2.57) (2.58) paragraphe 8, chapitre II :

$$(3.83)\quad \beta\, E(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ (n_\wedge E(\mathbf{r}')).\, \nabla_\wedge \Gamma(r, \mathbf{r}') - \frac{i}{\omega\varepsilon}(n_\wedge H(\mathbf{r}')).\, \Gamma(r, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}'$$

$$(3.84)\quad \beta\, H(r) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{ (n_\wedge H(\mathbf{r})).\, \nabla_\wedge \Gamma(r, \mathbf{r}') - \frac{i}{\omega\mu}(n_\wedge E(\mathbf{r}')).\, \Gamma(r, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}'$$

Les formules (3.83) (3.84) sont valables pour une surface fermée quelconque.

La formulation des problèmes I et II pour le cas vectoriel est :

Problème I

Soit A une ouverture dans un écran S, infiniment mince et conducteur parfait et la surface Σ = A U S. Trouver les champs électromagnétiques E et H, qui satisfont les conditions suivantes :

1) E, H sont des solutions des équations de Maxwell

$$\nabla_\wedge\, H - i\omega\varepsilon\, E = 0, \qquad \nabla_\wedge\, E + i\omega\mu H = 0$$

dans tout l'espace $(z \gtrless 0)$

2) E et H sont continus à la traversée de l'ouverture A.

a) $n_\wedge(E_+ - E_-) = 0$ sur A

b) $n_\wedge(H_+ - H_-) = 0$ ou $n_\wedge H = n_\wedge H^{inc}$ sur A

3) Sur S on a les conditions aux limites

a) $n_\wedge E = 0$ sur S,
b) $n_\wedge(n_\wedge H) = 0$ " S.

4) les conditions de rayonnement (11 - 11') et 13 - 13')

5) la condition sur l'arête (Bouwkamp, Meixmer).

Si les conditions 1 à 5 sont satisfaites par E et H, la solution du problème de diffraction est unique.

Ici, nous posons deux problèmes :

a) un problème de diffraction ou diffusion par un écran plan ou disque S infiniment mince dans l'espace libre,

b) un problème de diffraction par une ouverture A dans un écran plan S.

Soit Z = 0 le plan total, formé par la réunion de l'écran et de l'ouverture. La surface $\Sigma = A \cup S$ est donc le plan total Z = 0 .

Dans le problème (a), nous avons la condition aux limites $n \wedge E = 0$ sur S. La diffusion du champ sur S est symétrique, par rapport au plan Z = 0 .

Si $E_{\shortparallel}$, $H_{\shortparallel}$ représentant le champ diffracté, parallèle à S, et $E_{\perp}$, $H_{\perp}$ le champ normal à S, le champ total sera donné par l'expression :

$$
(3.85) \qquad \begin{aligned} E(r) &= E^{inc}(r) + E^{d}_{\shortparallel}(\mathbf{r}, +z) \pm E^{d}_{\perp}(\mathbf{r}, +z) \\ H(r) &= H^{inc}(r) \pm H^{d}_{\shortparallel}(\mathbf{r}, \pm z) + H^{d}_{\perp}(\mathbf{r}, \underline{+} z) \end{aligned} \qquad (z \gtrless o)
$$

quand E et H sont décomposés en une partie parallèle et une partie normale à S. Dans ce cas, nous avons les conditions :

$$
\text{(i)} \qquad E_{\perp}(\mathbf{r}) = H_{\shortparallel}(\mathbf{r}) = 0 \text{ sur A}
$$

$$
\text{(ii)} \qquad \left.\begin{aligned} & n \wedge (E_{+} - E_{-}) = 2\,(n \wedge E_{\perp}) + \neq 0 \\ & n \wedge (H_{+} - H_{-}) = 2\,(n \wedge H) + \end{aligned}\right\} \text{ sur S}
$$

où (ii) donne les valeurs de la discontinuité des champs sur S, sur A $n \wedge H$ $n \wedge H = 0$.

C'est-à-dire, l'ouverture A du plan Z = 0 est un conducteur magnétique parfait.

De plus, la composante normale de E et la composante tangentielle de H sont continues sur A, c'est-à-dire :

$$
\begin{aligned} (n.E) &= (n.\,E^{inc}) \\ (n \wedge E) &= (n \wedge H^{inc}) \end{aligned} \qquad (\mathbf{r} \in A)
$$

Dans le cas (b), nous avons les expressions suivantes pour les champs E et H, des deux côtés du plan Z = 0 .

$$
(3.86) \qquad \begin{aligned} E(r) &= E^{inc}(r) + E^{ref}(r) + E^{d}_{\shortparallel}(r, \mathbf{r}, -z) - E^{d}_{\perp}(r, \mathbf{r}, -z) \\ H(r) &= H^{inc}(r) + H^{ref}(r) - H^{d}_{\shortparallel}(r, \mathbf{r}, -z) + H^{d}_{\perp}(r, \mathbf{r}, -z) \end{aligned} \qquad (z < o)
$$

et

$$
(3.87) \qquad \begin{aligned} E(r) &= E^{d}_{\shortparallel}(r, \mathbf{r}, +z) + E^{d}_{\perp}(r, \mathbf{r}, +z) \\ H(r) &= -H^{d}_{\shortparallel}(r, \mathbf{r}, +z) + H^{d}_{\perp}(r, \mathbf{r}, +z) \end{aligned} \qquad (z > o)
$$

où l'onde réfléchie est exprimée à partir de E^{inc}, H^{inc} par :

$$
(3.88) \qquad \begin{aligned} E^{ref}(r) &= E^{inc}_{\perp}(r, -z) - E^{inc}_{\shortparallel}(r, -z) \\ H^{ref}(r) &= -H^{inc}_{\perp}(r, -z) + H^{inc}_{\shortparallel}(r, -z) \end{aligned}
$$

Nous avons aussi les conditions aux limites sur le plan total $Z = 0$,

$$(3.89) \qquad \begin{aligned} n \wedge (E^{inc} + E^{ref}) &= 0 \\ n \wedge (H^{inc} + H^{ref}) &= 0 \end{aligned} \qquad (z = o)$$

Dans l'ouverture, la composante normale de E et la composante tangentielle de H sont continues.

$$(3.90) \qquad \begin{aligned} (n.E) &= (n.E^{d}) = (n.E^{inc}) \\ (n \wedge H) &= (n \wedge H^{d}) = (n \wedge H^{inc}) \end{aligned} \qquad (\mathbf{r} \in A)$$

Problème de diffusion (disque)

Pour le problème de diffusion, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue sur l'écran. On peut interpréter cette discontinuité du champ magnétique par un courant superficiel, induit sur S par l'onde incidente,

$$(a) \qquad \hat{\mathcal{J}}(\mathbf{r}) = \eta \wedge (H_{+} - H-)$$

Alors, chaque élément de surface du disque S est le siège d'un rayonnement, comme nous l'avons vu dans le cas d'une onde scalaire (conception de Fresnel). Le champ total $E^{inc} + E^{d}$, $H^{inc} + H^{d}$ devra satisfaire à la condition aux limites sur l'écran.

Les champs E et H, donnés par (1) et (2) ou (1') (2'), deviennent d'après A et la condition 3a,

$$(3.91) \qquad \begin{aligned} E(r) &= E^{inc}(r) + \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \nabla \wedge \nabla \wedge \int_{\Sigma} \mathcal{J}(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r})\, d\mathbf{r}' \\ H(r) &= H^{inc}(r) - \frac{i}{4\pi\omega\mu} \nabla \wedge \int_{\Sigma} \mathcal{J}(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r})\, d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

Ces solutions satisfont les équations de Maxwell, les conditions 2a - 2b et la condition de rayonnement 4. La condition aux limites 3 est aussi satisfaite.

Il est facile de démontrer (3.91) parce que

$$(3.92) \qquad \lim_{z \to \pm 0} i(n \wedge \nabla \wedge \nabla \wedge \int \mathcal{J}(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r}')\, \hat{d}' = -(n \wedge E(\mathbf{r}), \ \mathbf{r} \in S$$

si la condition 5) est satisfaite.

Problème de diffraction

Dans le cas d'une ouverture A sur un écran infini S, nous avons, d'après la représentation (3.86) les formules suivantes pour E et H :

$$(3.93) \qquad \begin{aligned} E(r) &= \beta\, (E^{inc}(r) + E^{ref}(r)) \pm \frac{\nabla \wedge}{4\pi\omega\varepsilon} \int_A \mathcal{J}(c\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \\ H(r) &= \beta\, (H^{inc}(r) + H^{ref}(r)) \mp \frac{2i}{4\pi\omega\mu} \nabla \wedge \nabla \wedge \int_A \mathcal{J}(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r})\, d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

où $\beta = 1$ pour $z < o$ et $\beta = 0$ pour $z > o$.

Les solutions (3.91) (3.93) reproduisent les valeurs aux limites $n \wedge E = 0$ sur S et $n \wedge E = \mathcal{J}(\mathbf{r})$ sur A. De plus, elles satisfont 3) et la condition de continuité 2a), la condition de rayonnement et les équations de Maxwell.

En outre, la condition 2b) de continuité du champ H est obtenue par l'équation intégrale,

$$(3.94) \qquad \lim_{z \to \pm 0} 2i\, n \wedge (\nabla \wedge \nabla \wedge \int_A \mathcal{J}(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = (n \wedge H^{inc}), \ (\mathbf{r} \in A)$$

qui est une équation semblable à (2.57). Nous voyons le rôle complémentaire de A et de S.

Il est facile de montrer que la condition 2b) est satisfaite. D'après la forme symétrique de (A) et (B) pour les problèmes I et II, nous avons :

$$(n \wedge H) = (n \wedge H^{inc}) \qquad \text{sur } A$$

A partir de (3.84) nous avons :

$$(3.95) \qquad \lim_{z \to \pm 0} (n \wedge H) = \lim_{z \to \pm 0} (n \wedge H^{inc}) + \lim_{z \to \pm 0} \frac{i\nabla \wedge}{4\pi} \int_S \mathcal{J}(\mathbf{r}')\, g_o(r/\mathbf{r})\, d\mathbf{r}'$$

Mais la limite de l'intégrale s'annule, parce que d'après l'équation (2.53) du par. 7, chap. II, $(n \mathcal{J}(\mathbf{r}') = 0$ sur A, et la deuxième intégrale de (3.84) est égale à zéro, si $\mathbf{r} \in A$.

Le produit scalaire de η avec la première équation de Maxwell, donne :

$$n.(\nabla \wedge H) = -i\omega\varepsilon\,(n.E)$$

Mais $n.(\nabla \wedge H) = \nabla(n \wedge H) = \nabla(n \wedge H^{inc}) = -i\omega\varepsilon\,(n.E^{inc})$

E^{inc} satisfait l'équation de Maxwell.

Donc, à la limite $z \to \pm 0$, nous avons $(n.E) = (n.E^{inc})$ pour $r \in A$. A partir des équations (3.83) (3.84), nous considérons le problème suivant :

Soit $n \wedge E = 0$ sur l'écran S, conducteur métallique parfait. Alors (3.91) et (3.93) se réduisent à :

$$(3.96) \qquad \begin{aligned} E(r) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\int_A \left\{(n \wedge E).\nabla'_{\wedge}\Gamma - (n \wedge H).\Gamma\, d\mathbf{r}' - \int_S (n \wedge H).\Gamma\, d\mathbf{r}'\right\}\right. \\ H(r) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\int_A \left\{(n \wedge H).\nabla'_{\wedge}\Gamma - (n \wedge E).\Gamma\, d\mathbf{r}' + \int_S (n \wedge E).\Gamma\, d\mathbf{r}'\right\}\right. \end{aligned}$$

où Γ est le tenseur de Green de l'espace libre.

Ces équations contiennent les équations (3.91) et (3.93).

Si, on fait l'hypothèse que E et H sont égaux à E^{inc} et H^{inc} sur l'ouverture, nous écrivons :

$$(3.97) \qquad \begin{aligned} \bar{E}(r) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\int_A \left\{(n \wedge E^{inc}).\nabla'_{\wedge}\Gamma(r,\mathbf{r}') - (n' \wedge H^{inc}).\Gamma(r,\mathbf{r}')\right\} d\mathbf{r}' \right. \\ &\qquad \left. - \int_S (n \wedge H^{inc}).\Gamma(r,\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}')\right\} \\ \bar{H}(r) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\int_A \left\{(n \wedge H^{inc}).\nabla'_{\wedge}\Gamma(r,\mathbf{r}') - (n \wedge E^{inc}).\Gamma(r,\mathbf{r}')\right\} d\mathbf{r}' \right. \\ &\qquad \left. - \int_S (n \wedge E^{inc}(\mathbf{r}').\Gamma(r,\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'\right\} \end{aligned}$$

Les intégrales correspondent à la solution de Kirchhoff si la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique s'annule sur le côté de l'ombre de l'écran.

Introduisons E^1 et H^1, et E^2, H^2, définis par :

$$(3.98a) \qquad \begin{aligned} E^1(r) &= \frac{2}{4\pi}\int_A (n \wedge E).\nabla \wedge \Gamma\, d\mathbf{r}' - \frac{2}{4\pi}\int_S (n \wedge H)_{+}\,\Gamma\, d\mathbf{r}' \\ H^1(r) &= -\frac{2}{4\pi}\int_A (n \wedge E).\Gamma.\, d\mathbf{r}') \end{aligned}$$

(3.98b) $$E^2(r) = \frac{2}{4\pi}\int_A (n_\wedge H).\, \Gamma\, dr'$$

$$H^2(r) = \frac{2}{4\pi}\int_A (n_\wedge H).\, \nabla'_\wedge \Gamma\, dr' + \frac{2}{4\pi}\int_S (n_\wedge E)_+ .\, \nabla'_\wedge \Gamma\, dr'$$

Dans ce cas E^1, E^2, H^1, H^2 satisfont aux valeurs limites

$$(n_\wedge E) = n_\wedge E^{in} \text{ sur A et } (n_\wedge H) = O, \text{ sur S et}$$

(3.99a) $$(n_\wedge E) = (n_\wedge E^{inc}) \text{ sur A et } (n.H) = 0 \text{ sur S}$$

(3.99b) $$(n_\wedge H) = (n_\wedge H^{inc}) \text{ sur A et } (n.E) = 0 \text{ sur S}$$

Mais, $n_\wedge H$ est inconnu sur S et $n_\wedge E$ sur A.

L'addition de E^1 et E^2, et de H^1 et H^2 donne deux fois E et H.

Mais, si nous supposons que $n_\wedge H = 0$ sur S et si nous prenons,

(3.100a) $$E^1_R(r) = \frac{2}{4\pi}\int_A (n_\wedge E).\, \nabla'_\wedge \Gamma(r, r')\, dr'$$

$$H^1_R(r) = -\frac{2}{4\pi}\int_A (n_\wedge E).\, \Gamma(r, r')\, dr'$$

(3.100b) $$E^2(r) = -\frac{2}{4\pi}\int_A (n_\wedge H).\, \Gamma(r, r')\, dr'$$

$$H^2(r) = \frac{2}{4\pi}\int_A (n_\wedge H).\, \nabla'_\wedge \Gamma(r, r')\, dr$$

les sommes de E^1_R et E^2_R, et de H^1_R et H^2_R sont égales à $2E_k$ (r) et $2H_k$ (r) respectivement, qui sont les solutions de Kirchhoff, si on prend $H = H^{inc}$ et $E = E^{inc}$ sur A.

Les formules précédentes sont en accord avec les solutions données par Bouwkamp (1954) et Levine et Schwinger (1950). On peut écrire les formules (3.100a), (3.100b) sous une forme compacte, si on introduit les tenseurs de Green des demi-espaces Γ_I et Γ_{II}.

$$\Gamma_I(r, r') = \Gamma(r, r') - \Gamma(r, r'')\, \Upsilon \qquad (z, z' > o)$$

$$\Gamma_{II}(r, r') = \Gamma(r, r') + \Gamma(r, r'')\, \Upsilon$$

où

$$r'' = r' - 2\, e_3\, (e_3 .\, r')$$

$$\Upsilon = I - 2\, e_3\, e_3$$

Par suite, nous obtenons :

(3.101a) (a') $$E^1_R(r) = \frac{1}{4\pi}\int_A (n_\wedge E).\, \nabla'_\wedge \Gamma_I\, dr'$$

(b') $$H^1_R(r) = \frac{i\omega\mu}{4\pi}\int_A (n_\wedge E)\, \Gamma_{II}\, dr'$$

(3.101b) (a'') $$E^2_R(r) = \frac{i\omega\epsilon}{4\pi}\int_A (n_\wedge H).\, \Gamma_{II}\, dr'$$

(b'') $$H^2_R(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma (n_\wedge H).\, \nabla'_\wedge \Gamma_I\, dr'$$

formules équivalentes aux formules de Levine-Schwinger (1950).

Si E_R^i et H_R^i, i =(1,2) sont remplacés par $\frac{E^i}{\sqrt{\varepsilon}}$ et $\frac{H^i}{\sqrt{\mu}}$ les formules (3.101a) à (3.101b) deviennent les formules Levine-Schwinger.

Nous remarquons que les formules (3.100a) à (3.100b) et 3.101a) (3.101b) sont les formules analogues aux formules (3.68a) à (3.69b) pour les ondes scalaires.

Dans les problèmes pratiques de diffraction d'ondes électromagnétiques, on ne travaille guère avec les champs eux-mêmes, puisque la recherche de E et H, même dans le problème le plus simple (diffraction par une ouverture circulaire ou par un disque) est très compliquée et laborieuse. Beaucoup de problèmes de diffraction se simplifient par l'usage des potentiels vecteurs. Nous suggérons cette procédure dans notre formule (3.91) et (3.93).

Nous définirons alors le potentiel Hertzien $\pi(r)$, par la relation,

(3.102) $$\pi(r) = \frac{i}{4\pi}\int_S \mathfrak{f}(r')\,.\,g_o(r/r')\,dr'$$

et le potentiel de Fitzgerald $\pi^*(r)$

(3.103) $$\pi^*(r) = \frac{2i}{4\pi}\int_A \mathfrak{f}(r')\,g_o(r/r')\,dr'$$

A partir des équations (C) et (D), *les champs* E *et* H *sont exprimés, comme suit :*

a) pour le problème de la diffraction par un disque :

(3.104) $$\left.\begin{aligned} E(r) &= E^{inc}(r) + \frac{1}{\omega\varepsilon}\nabla_\wedge\nabla_\wedge\pi \\ H(r) &= E^{inc}(r) - \frac{i}{\omega\mu}\nabla_\wedge\pi \end{aligned}\right\}\ (z \gtrless o)$$

b) pour le problème de la diffraction par une ouverture :

(3.105) $$\left.\begin{aligned} E(r) &= \beta(E^{inc}(r) + E^{ref}(r) \pm i\,\nabla_\wedge\pi^* \\ H(r) &= \beta(H^{inc}(r) + H^{ref}(r) \mp \frac{i}{\omega\mu}\nabla_\wedge\nabla_\wedge\pi^* \end{aligned}\right\}\ (z \gtrless o)$$

où $\beta = 1$ pour $z < 0$ et $\beta = 0$ pour $z > 0$

CHAPITRE IV

LA THEORIE DIFFRACTIONNELLE DES ABERRATIONS

I - LA BASE DE LA THEORIE DE DIFFRACTION DES INSTRUMENTS OPTIQUES

Nous avons dit, dans le chapitre précédent, qu'une théorie de la diffraction, formulée comme un problème aux valeurs limites de l'équation d'onde scalaire, ou, des équations de Maxwell pour un système optique, est très difficile et compliquée à construire, parce que la fonction de Green est inconnue pour un tel système, même pour une lentille, formé de deux sections de surface, sphériques ou cylindriques. Alors, nous sommes obligés d'utiliser les théories approximatives, déjà développées aux chapitres précédents, c'est-à-dire, la théorie de Kirchhoff, ou, une modification de cette théorie, pour le champ scalaire, ou pour chaque composante rectangulaire du champ électromagnétique E et H.

La formulation rigoureuse du Principe de Huygens est donnée par l'intégrale :

$$v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \left(v(r') \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v(r')}{\partial n'}\right) g_0(r/r')\, dr' \qquad (4.1)$$

où $v(r)$ est une solution de l'équation d'onde scalaire de Helmholtz et g_0 est la fonction de Green d'espace libre. La surface Σ est régulière et fermée et n est la normale, dirigée vers l'intérieur de Σ. Le point r est un point intérieur de Σ.

Nous avons dit, que $v(r)$ et $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ sont en général inconnus sur Σ. Après Kirchhoff, rendrons $v(r)$ et $\frac{\partial v(r)}{\partial n}$ égales, respectivement aux valeurs d'onde incidente $v_0(r)$ et sa dérivée normale $\frac{\partial v_0(r)}{\partial n}$, sur la partie illuminée de Σ et égales à zéro sur la partie d'ombre. Alors l'intégrale (1) prend la forme :

$$v(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{A} \left(v_0(r') \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial v_0(r')}{\partial n'}\right) g_0(r/r')\, dr' \qquad (4.2)$$

qui donne la valeur du champ $v(r)$ diffractée par l'ouverture A.

La formule (4.2) est la formule bien connu de Kirchhoff, déjà obtenue (formule 3.10 du Chapitre III).

Dans l'application, on peut prendre comme surface fermée Σ, la réunion de A et de la partie de surface d'écran S du côté de l'ombre, et une surface Σ_0, étendue jusqu'à l'infini. La surface d'écran S est souvent un plan et la réunion de A et S forme un plan infini, divisant l'espace en deux domaines : l'espace incident, où la source et l'objet sont situés, et l'espace de diffraction ou de l'image. Ce plan est, par exemple, le plan $Z = 0$. Alors, le champ diffracté est, d'après l'hypothèse de Kirchhoff, donné par la formule (4.2).

Mais, dans presque tous les instruments d'optique, l'ouverture A correspond à la pupille d'entrée, ou la pupille de sortie, limité par le diaphragme S qu'on peut, en effet, considérer comme un écran infini. Dans ce cas, les formules (3.10) du chapitre III sont valables et on peut mettre, au lieu de (4.2), les formules suivantes :

$$v^1(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{A} v_0(r')\, g_I(r, r')\, dr' \qquad (4.3)$$

$$(z > 0)$$

et

$$v^2(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_{A} \frac{\partial v_0(r')}{\partial z}\, g_{II}(r, r')\, dr' \qquad (4.4)$$

où g_I et g_{II} sont les fonctions de Green du demi-espace. Alors, la somme $v^1 + v^2$ est égale à deux fois $v_k(r)$. Mais les formules (4.3) et (4.4), comme nous l'avons remarqué, sont compatibles, puisqu'elles prennent les valeurs exactes $v_o(r)$ et $\frac{\partial v_o(r)}{\partial z}$, données sur l'ouverture. Par conséquent, dans ce problème, il est mieux d'employer (4.3) ou (4.4) que la formule de Kirchhoff, pour calculer le champ diffracté, comme nous l'avons montré au chapitre III.

Pour les champs électromagnétiques, les formules (3.H 6a) et (3.H6b) prennetn la forme :

$$E_1^d(r) = -\frac{1}{2\pi ik} \nabla\wedge\nabla\wedge\int_A (n\wedge H^{inc})\, g_o(r/r')\, dr' \tag{4.5a}$$

$$H_1^d(= \frac{1}{2\pi} \nabla\wedge\int_A (n\wedge H^{inc})\, g_o(r/r')\, dr' \tag{4.5b}$$

$$E_2^d = \frac{1}{2\pi} \nabla\wedge\int_A (n\wedge E^{inc})\, g_o(r/r')\, dr' \tag{4.6a}$$

$$H_2^d = \frac{1}{2\pi ik} \nabla\wedge\nabla\wedge\int_A (n\wedge E^{inc})\, g_o(r/r')\, dr' \tag{4.6b}$$

Nous considérons (4.3) et (4.4) comme les équations fondamentales de la théorie de la diffraction des systèmes optiques, pour les ondes scalaires et (4.5a), (4.5b) pour les ondes électromagnétiques. Dans le chapitre précédent, nous avons écrit les équations ci-dessus, sous une autre forme, qui introduisait les fonctions et les tenseurs de Green de demi-espace, si $A \cup S$ forme un plan infini.

Nous remarquons, que les intégrales de (4.5a) (4.5b) sont très difficiles à évaluer, ni nous employons les coordonnées curvilignes. Cependant, si nous considérons les composantes cartésiennes de E, H, les formules précédentes prennent une forme très simple pour les composantes E_i, H_i ($i = 1, 2, 3$), parce que chaque composante satisfait une équation d'onde scalaire et les solutions sont données par (4.4) et (4.5), pourvu que E et H satisfassent les conditions $\nabla . E = 0$, $\nabla . H = 0$.

II - DIFFRACTION DES ONDES HOMOGENES

Comme chaque composante E et H satisfait l'équation de Helmotlz , les solutions prennent la même forme que (3.68a) et (3.68b) du chapitre III, pourvu que $\nabla . E = 0$, $\nabla . H = 0$. Alors nous avons :

$$E_{1x}^d = \frac{1}{4\pi}\int_A f_1(x'y')\, g_I(r/r')\, dA \tag{4.7}$$

$$E_{1y}^d = \frac{1}{4\pi}\int_A f_2(x'y')\, g_I(r/r')\, dA$$

$$E_{1z}^d = \frac{1}{4\pi}\int_A (f_1 + f_2)\, \frac{\partial}{\partial z}\, g_I(r/r')\, dA$$

où $f_1(x'y')$, $f_2(x'y')$ sont les valeurs des dérivées de E_{1x}^d et E_{1y}^d prises sur A. Les composantes du champ magnétique sont obtenues d'après les équations de Maxwell.

Les formules (4.7) satisfont les conditions aux limites $E_{1x}^d = E_{1y}^d = 0$ sur A. Mais si les dérivées de E_x et de E_y s'annulent sur A et si $E_x = h_1(x'y')$ et $E_y = h_2(x'y')$ sur A, alors au lieu de (4.7), nous obtenons :

$$E_{2x}^d = -\frac{1}{4\pi}\int_A h_1(x(y')\, g_{II}(r/r')\, dA \tag{4.8}$$

$$E_{2y}^d = -\frac{1}{4\pi}\int_A h_2(x'y')\, g_{II}(r/r')\, dA$$

$$E_{2z}^d = \frac{1}{4\pi}\int_A \left(h_1(x, y')\, \frac{\partial}{\partial x} + h_2(x'y')\, \frac{\partial}{\partial y}\right) g_{II}(r/r')\, dA$$

Les composantes H_{2x_i} sont obtenues d'après les équations de Maxwell.

Les fonctions de Green de demi-espace libre prennent la forme :

$$g_I = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1} = g_o(r/r', +z) - g_o(r/r', -z) \tag{4.8}$$

$$g_{II} = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr_1}}{r_1} = g_o(r/r', +z) + g_o(r/r', -z)$$

où

$$r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z + z_o)^2}$$

par conséquent, on tire :

$$g_I = 0, \qquad g_{II} = 2\frac{e^{ikr}}{r} \tag{4.10}$$

$$g_{II} = 0, \qquad g_I = 2\frac{e^{ikr}}{r} \tag{4.11}$$

(sur le plan $z = 0$)

où $r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + z^2}$

Alors au lieu de (4.7) et (4.8), nous obtenons :

$$E_{1x}^d = \frac{1}{2\pi}\int_A f_1(x'y')\, \frac{e^{ikr}}{r}\, dA \tag{4.12}$$

$$E_{1y}^d = \frac{1}{2\pi}\int_A f_2(x'y')\, \frac{e^{ikr}}{r}\, dA$$

$$E_{1z}^d = \frac{1}{2\pi}\int_A (f_1 + f_2)\, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dA$$

et

$$E_{2x}^d = -\frac{1}{2\pi}\int_A h_1(x'y')\, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dA \tag{4.13}$$

$$E_{2y}^d = -\frac{1}{2\pi}\int_A h_2(x'y')\, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dA$$

$$E_{2z}^d = -\frac{1}{2\pi}\int_A \left(h_2\, \frac{\partial}{\partial x'} + h_2\, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \frac{e^{ikr}}{r}\, dA$$

où $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$

On peut calculer les composantes de H d'après les équations de Maxwell. Mais d'après Hamilton, on peut représenter les fronts d'onde par la fonction caractéristique de première espèce $V(x_o, y_o, z_o ; x, y, z) = C$, que donne la distance du point $P_o(x_o, y_o, z_o)$ à $P(x, y, z)$. On a :

$$V(x_o, y_o, z_o ; x, y, z) = \text{Constante} = C \tag{4.14}$$

Si le point $P_o = (0, 0, z)$ est bien sur l'axe de révolution de l'instrument, V prend la forme :

$$V(0, 0, z_o, x, y, z) = C - nR \tag{4.15}$$

où $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est la distance de P, et C est la distance optique des points P_o, P_1. Si, sur ces fronts d'onde, les champs sont connus à l'approximation de l'optique géométrique, nous avons :

$$E^o_\infty \simeq \frac{E^o(\theta, \varphi)}{R} e^{ik(C-nr)} \qquad r = R \longrightarrow \infty \tag{4.16}$$

$$H^o_\infty \simeq \frac{H^o(\theta, \varphi)}{R} e^{ik(C-nr)}$$

sur le front d'ondes à l'espace d'image. Donc les formes asymptotiques des champs E, H sus-conduisent aux solutions de l'optique géométrique, sont de même forme que (2. 14) et (2. 14'). Soit $z = -z_1$ un plan dans l'espace image.

Les valeurs de E et H dans ce plan sont données par les champs géométriques :

$$\begin{aligned} E^o(x'y') &= E^o(\theta, \varphi) \frac{e^{ik(C-nR)}}{R} \\ H^o(x'y') &= H^o(\theta, \varphi) \frac{e^{ik(C-nR)}}{R} \end{aligned} \tag{4.17}$$

où $R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

Les champs E et H qui satisfont les conditions aux limites $E^o(x'y')$, $H^o(x'y')$ sur le plan $z = -z_1$ sont d'après (4. 13) :

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}(z + z_1) e^{ikC} \int_{A_{z_o}} E^o(x', y') \frac{e^{-ikn(R - r)}}{R} ikn \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{iknr}\right)^2 dx' dy' \tag{4.18a}$$

$$H(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}(z + z_1) e^{ikC} \int_{A_{z_o}} E^o(x', y') \frac{e^{-ikn(R - r)}}{R} ikn \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{iknr^2}\right) dx' dy' \tag{4.18b}$$

où $r^2 = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z_1 + z)^2}$ $\qquad R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$

Maintenant, nous exprimons (θ, φ) par :

$$\begin{aligned} x' &= z_1 \operatorname{tang}\theta \cos\varphi, \\ y' &= z_1 \operatorname{tang}\vartheta \sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Après un calcul simple, nous trouvons :

$$\frac{z_1}{R} \simeq \cos\varphi, \quad \frac{z_1}{r} \simeq \cos\theta \qquad (z_1 \longrightarrow \infty) \tag{4.20}$$

$$dx'\, dy' = z_1^2 \operatorname{tg}\theta \cos^2\theta \, d\theta \, d\varphi$$

et

$$r - R \sim -(x \sin\theta\cos\varphi + y \sin\theta\sin\varphi) + z\cos\theta. \tag{4.21}$$

Alors, les intégrales (4. 18a) et (4. 18b) prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= -\frac{ikn}{2\pi} e^{ikC} \int_S E^o(\theta, \varphi)\, e^{-ikn(x\sin\theta\cos\varphi + yx\sin\theta\sin\varphi \cdot z\cos\theta)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= -\frac{ikn}{2\pi} e^{ikC} \int_S E^o(p, q) e^{-ik(xp+yq+rz)} \frac{dp\, dq}{r^o(p, q)} \end{aligned} \tag{4.22a}$$

$$\begin{aligned} H(x,y,z) &= -\frac{ikn}{2\pi} e^{ikC} \int_S H^o(\theta, \varphi) e^{-ikn(x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi - z\cos\theta)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= -\frac{ikn}{2\pi} e^{ikC} \int_S H^o(\theta, \varphi) e^{-ik(xp+yq+rz)} \frac{dp\, dq}{r^o(p, q)} \end{aligned} \tag{4.22b}$$

où p, q, r^o sont les composantes du vecteur directeur -(optique) $\vec{s}_o$ normales aux fronts d'onde dans l'espace d'image et n est l'indice de réfraction. En plus, E^o, H^o satisfont sur le front d'onde, les équations de compatibilité dynamique :

$$\begin{aligned} (\nabla V_\wedge H^o) + n^2 E^o &= 0 \\ (\nabla V_\wedge E^o) - H^o &= 0 \end{aligned} \quad \Delta H + k^2 n^2 H = 0 \text{ ou } \begin{aligned} \nabla V \wedge E^o + n^2 H^o &= 0 \\ \nabla V \wedge H^o - E^o &= 0 \end{aligned} \quad \Delta E + k^2 n^2 E = 0 \tag{4.23}$$

Les champs $E^o(\theta, \varphi)$ et $H^o(\theta, \varphi)$ représentent les valeurs absolues des amplitudes de E et H à l'approximation de l'optique géométrique (ondes géométriques), c'est-à-dire :

$$E^o_\infty = \frac{E^o(\theta, \varphi)}{R} e^{ikV}$$

$$H^o_\infty = \frac{H^o(\theta, \varphi)}{R} e^{ikV}$$

donné sur un front d'onde $V(x, y, z) = C - nR_o$, R_o étant le rayon du front d'onde, et $\underline{E}^o_\infty$, $\underline{H}^o_\infty$ sont les valeurs aux limites des champs E et H à l'infini.

Une formule du type (4. 22a) ou (4. 22b) est connue comme la formule de Debye (1910). Elle satisfait l'équation d'onde et de valeur limite du champ d'onde :

$$u_\infty = u_o(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r \to \infty)$$

L'interprétation de la formule de Debye, est que la solution du type (4. 22a) (4. 22b) de l'équation d'onde est formée par une superposition d'ondes planes, propagées dans toutes les directions de l'espace d'image.

III - DIFFRACTION DES ONDES NON-HOMOGENES

Soit $P_o(x_o, y_o, z_o)$ la position d'une source dans l'espace de l'objet, et quand l'instrument d'optique est un système imparfait, il n'existe pas de point dans l'espace image conjugué de P_o. Dans ce cas, les rayons lumineux enveloppent une courbe, ou une surface la caustique.

Les fronts d'onde S sont déterminés par la fonction caractéristique de Hamilton.

$$V(x_o, y_o, z_o, x, y, z) = C \tag{4.24}$$

qui forment un ensemble de surfaces parallèles, c'est-à-dire, admettant les mêmes normales, qui sont les rayons.

Si on prolonge les rayons du côté de l'espace d'objet et construit les surfaces normales aux rayons virtuels, les surfaces ainsi construites, forment un système parallèle aux fronts d'onde virtuels, donné par l'équation :

(4.26) $V(r, r') = \text{Constante} = C$

Si, un élément de surface d'un front d'onde S_o est dS_o et ds en S, alors le rapport de la projection de dS_o à dS est donné par l'équation :

(4.27) $$\frac{dS}{dS_o} = \left|\frac{K}{K_o}\right|^{-1}$$

où K_o et K sont la courbure de Gauss de S_o et S. Les rayons passant par les frontières de S_o et S, forment une surface tubulaire et à chaque point de dS_o et dS, nous avons les rayons principaux R_1, R_2 et $R'_1 R'_2$ de courbure de $V = C_o$ et $V = C$, respectivement. Si $V = C_o$ est un front d'onde S_o, dans l'espace d'image, alors la courbure de Gauss de S_o est égale à :

(4.28) $$K_o = \frac{1}{R_1 R_2}$$

et si la distance optique de S_o à S le long des rayons est égale à λ, $V = C_o - n\lambda$, la courbure de Gauss de S est :

(4.29) $$K = \frac{1}{(R_1 + \lambda)(R_2 + \lambda)} = \frac{1}{R'_1 R'_2}$$

où R_1, R_2 sont les rayons principaux de courbure de S_o.

Soit les champs E^o, H^o sur S_o et E^o_v, H^o_v les valeurs des champs sur le front d'onde virtuel S. Nous trouvons les relations suivantes entre E^o_v, H^o_v et E^o, H^o :

(4.30) $$E^o_v = \sqrt{\left|\frac{K}{K_o}\right|}\; E^o(\theta, \varphi)$$

$$H^o_v = \sqrt{\left|\frac{K}{K_o}\right|}\; H^o(\theta, \varphi)$$

En conséquence, les champs géométriques (asymptotiques) prennent la forme :

(4.31) $$E_\infty = \sqrt{\left|\frac{K}{K_o}\right|}\; E^o(\theta, \varphi)\; e^{ik(C_o - n\lambda)}$$

$$H_\infty = \sqrt{\left|\frac{K}{K_o}\right|}\; H^o((\theta, \varphi)\; e^{ik(C - n\lambda)} \qquad (\lambda \to \infty)$$

et les solutions E_{r_o}, H_{z_o} dans un plan $z = -z_1$ qui satisfont les équations de Maxwell et des valeurs aux limites E_∞, H_∞ sont données par les intégrales suivantes :

(4.32a)
$$E_{z_1}(x,y,z) = -\left(\frac{z+z_1}{2\pi}\right) e^{ikC_o} \iint \sqrt{\left|\frac{K}{K_o}\right|}\; E^o(\theta, \varphi)\; e^{ikn(\lambda - r)}\; ikn\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{i k n r^2}\right) \frac{e^{ikr}}{r}\; dx'\, dy'$$

(4.32b)
$$H_{z_1}(x,y,z) = -\left(\frac{z+z_1}{2\pi}\right) e^{ikC_o} \iint \sqrt{\left|\frac{K}{K_o}\right|}\; H^o(\theta, \varphi)\; e^{ikn(\lambda - r)}\; ikn\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{i k n r^2}\right) \frac{e^{ikr}}{r}\; dx'\, dy'$$

et λ donne la distance du point (x', y') sur le plan $z = z_1$ au point correspondant (x_o, y_o, z_o) sur le front d'onde S_o prise le long du rayon.

Nous introduisons les cosinus directeurs optiques $(p, q, r^o) = \vec{s}$ normal à S_o au point (x_o, y_o, z_o). Alors, x', y' sont exprimés par :

$$
(4.33)\qquad \begin{aligned} x' &= x_o + \lambda p \\ y' &= y_o + \lambda q \\ z_1 &= z_o + \lambda r^o \end{aligned}
$$

donc

$$
(4.34)\qquad dx'\,dy' = -\frac{n}{r^o(p, q)} \left|\frac{Ko}{K}\right| dSo = -\frac{n}{r^o(p, q)} \left|\frac{K}{K_o}\right| dS
$$

D'après (4.33), r est donné par :

$$
(4.35)\qquad r = \sqrt{(x_o - x + \lambda p)^2 + (y_o - y + \lambda q)^2 + (z_o - z + \lambda r^o)^2}
$$

Si z_1 s'étend à l'infini, $\lambda \to \infty$ et on a :

$$
(4.36)\qquad \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left|\frac{K}{K_o}\right|} \to -\sqrt{|K_o|}\ , \qquad \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left|\frac{Ko}{K}\right|} \to -\sqrt{|K|}
$$

et comme

$$
\frac{z_1}{\lambda} \to \frac{n}{r^o(p, q)}\ , \qquad \frac{r}{\lambda} \to 1
$$

nous avons :

$$
(4.37)\qquad r - \lambda \sim (x' - x)\,p + (y' - y)\,q + (z_o - z')\,r^o = (\vec{r}_o - \vec{r}, \vec{s})
$$

Alors, si nous mettons $r - \lambda$ dans les intégrales (4.32a) et (4.32b), nous obtenons :

$$
(4.38a)\qquad E = -\frac{iK}{2\pi} e^{ikC_o} \int_{S_o} \sqrt{n^2\,|K_o|}\ E^o(p, q)\, e^{ik(\vec{r}_o - \vec{r}, \vec{s})}\, dS_o
$$

$$
(4.38b)\qquad H = -\frac{iK}{2\pi} e^{ikC_o} \int_{S_o} \sqrt{n^2\,|K_o|}\ H^o(p, q)\, e^{ik(\vec{r}_o - \vec{r}, \vec{s})}\, dS_o
$$

où après l'introduction de la fonction caractéristique d'Hamilton $W(x_o, y_o, z_o, p, q)$, les équations (4.38a) (4.38b) prennent la forme :

$$
(4.39a)\qquad E(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi}\int_{S_o} \sqrt{n^2\,|K_o|}\ E^o(p, q)\ e^{ik(W + \vec{r}, \vec{s})}\, dS_o
$$

$$
(4.39b)\qquad H(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi}\int_{S_o} \sqrt{n^2\,|K_o|}\ H^o(p, q)\ e^{ik(W + \vec{r}, \vec{s})}\, dS_o
$$

où $W(x_o, y_o, z_o ; p, q) = C_o - (\vec{r} . s)$

et

(4.39'a) $$E(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi}\int_S \sqrt{n^2 |K|}\, E^o(p, q)\, e^{ik\left[W + (\vec{r}.\vec{s})\right]}\, dS$$

(4.39'b) $$H(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi}\int_S \sqrt{n^2 |K|}\, H^o(p, q)\, e^{ik\left[W + (\vec{r}.\vec{s})\right]}\, dS$$

prise sur la surface d'onde quelconque S.

Les champs E, H, donnés par les intégrales (4.39a) (4.39b) ou (4.39'a) (4.39'b) donnent les solutions, au sens asymptotique de l'optique géométrique, des équations de Maxwell.

(4.40) $$\nabla_\wedge H + i\omega\varepsilon E = 0 \qquad (k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu)$$
$$\nabla_\wedge E + - i\omega\mu H = 0$$

où $\varepsilon = n^2$, $\mu = 1$, et satisfont les conditions aux limites à l'infini, correspondant à l'onde géométrique, parce que E^o, H^o satisfont les conditions de compatibilité dynamique sur un front d'onde quelconque S_o donné par (4.23). Les fonctions E, H représentant les champs électromagnétiques, au sens de l'optique géométrique, sur une surface S_o ou S d'un front d'onde quelconque, V = C qui satisfait l'équation de Hamilton de l'optique géométrique :

(4.41) $$(\nabla V)^2 = n^2$$

Les intégrales (4.39a) (4.39'b) sont connues comme les intégrales de Picht-Luneburg. On peut les considérer comme la base de la théorie de la diffraction des systèmes optiques.

Nous remarquons ici, que les intégrales de Picht-Luneburg se déduisent de la représentation intégrale de la solution générale d'équation d'onde, donnée par Whittaker (1902) :

(4.42) $$u(r) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x \sin u \cos v + q \sin u \sin v + z \cos u \,;\, uv)\, du\, dv$$

où f est une fonction arbitraire de (x sin u cos v + y sin u sin v + z cos v) et de u et v, c'est-à-dire, si on applique la procédure de Hansen-Stratton à (4.42).

Nous écrivons les intégrales (3.49a) (4.39'b) formes plus commode, souvent utilisées dans la littérature, en introduisant des coordonnées paramétriques, pour décrire la surface d'onde. Ces surfaces sont données par la fonction caractéristique de Hamilton.

Si, la direction d'un rayon de lumière est donnée par p, q, r^o, alors, le point d'intersection P_1 (x, y, z) = 0 (l'intersection du rayon avec le plan $z_1 = 0$) est donnée par l'expression ;

(4.43) $$x_1 = - W_p$$
$$y_1 = - W_q$$

A Ainsi, l'intersection du rayon avec une surface d'onde arbitraire S à un point P(x, y, z) sur S est donnée par les fonctions :

(4.44) $$x = - W_p + \lambda p$$
$$y = - W_q + \lambda q$$
$$z = \lambda r_o$$

où $r^o = \sqrt{n^2 - p^2 - q^2}$, et $\lambda = \lambda(p, q)$ est fonction de (p, q) seulement et connue, quand S est donné. En fait, λ est une mesure de la distance du point P_1 sur S_o au point P sur S. Les quantités (p, q, r^o) sont les mêmes que celles données plus haut et satisfont la relation $(\vec{s}.\vec{s}) = n^2$.

En fonction des paramètres (p, q), (4. 39a) deviennent:

(4.45) $$u(P) = -\frac{ik}{2\pi}\iint g(p.q)\, e^{ik\left[W + (\vec{r}.\vec{s})\right]}\, dp\, dq$$
$$D = p^2 + q^2 \leqslant n^2$$

où

(4.46) $$g(p,q) = \sqrt{n^2 |\Delta|}\,(u_o(p, q)\,.$$

Le symbole Δ dénote le discriminant de la seconde forme différentielle de S, à savoir $\Delta = LN - M^2$, avec L, M, N donnés par les expressions :

(4.47) $$nL = W_{pp} - \frac{p^2 + r_o^2}{n^2 r_o^2} Z$$

$$nM = W_{pq} - \frac{pq}{n^2 + r_o^2} Z \qquad (Z = pW_p + qW_q - W)$$

$$nN = W_{qq} - \frac{q^2 + r_o^2}{n^2 r_o^2} Z$$

Parce que la courbe de Gauss K est donnée par :

(4.48) $$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

et

(4.49) $$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dp\, dq$$

nous obtenons :

(4.50) $$\sqrt{|K|}\, dS = \sqrt{|LN - M^2|}\, dp\, dq$$

où l'expression $EG - F^2$, dénote le discriminant de la première forme quadratique de la surface S.

Introduisant un nouveau vecteur u_o^*, v_o est donné par

(4.51) $$u_o^*(p, q) = - \sqrt{|LN - M^2|\, n^2}\; u_o(p, q)$$

qui est constant le long des rayons à direction (p, q, r^o) dans l'espace d'image, et l'équation (4.45) prend la forme plus simple :

(4.52) $$u(P) = \frac{ik}{2\pi}\int_D u_o^*(p, q)\, e^{ik\left[W + (\vec{r}.\vec{s})\right]}\, dpdq$$

On peut écrire une formule analogue pour le vecteur du champ magnétique $v_o^*(p, q)$ et $v^*(P)$. L'intensité de l'onde dans l'espace d'image (onde réfractée) est proportionnelle à $|u_o^*|^2$ et $|v_o^*|^2$, comme suit :

(4.53) $$I = \frac{ne}{8\pi} r_o^2\, |u_o^*|^2 = \frac{e}{8\pi n} r_o^2\, |v_o^*|^2$$

Le domaine d'intégration D se trouve sur le plan p-q, enfermé par la courbe $p^2 + q^2 = n^2$. Le long du rayon, défini par la direction (p, q), g(p, q) reste constant dans l'espace d'image.

Nous avons mentionné que le champ sur l'ouverture de la pupille de sortie ou sur le front d'onde, est supposé une constante, la valeur du champ incident. Ceperdant, en calcul d'optique moderne, les lentilles sont recouvertes d'une couche de matière absorbante, et alors, la valeur réelle du champ sur l'ouverture de l'instrument ou le front d'onde sortie est donnée par l'expression :

(4.55) $$u_s(Q) = A(Q)\, u_o(Q)$$

où A(Q) représente la fonction d'absorption. Cette fonction est soit une fonction absorbante pure, qui réduit seulement la valeur de l'amplitude en $u_o(Q)$, par le facteur A(p, q), soit une fonction de phase pure, où l'amplitude reste la même, mais la phase sur l'ouverture varie, soit une fonction mixte, qui change l'amplitude et la phase du champ incident.

En termes mathématiques A(Q) ou A(p, q) sont réelles, imaginaires, ou fonction complexe de la position Q.

Nous écrivons (4.55) comme suit :

(4.56a) $$u_m(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})\, u_o(\mathbf{r})$$ (variation de l'amplitude)

(4.56b) $$u_n(\mathbf{r}) = u_o(\mathbf{r})\, e^{ikF(\mathbf{r})}$$ (variation de la phase)

(4.56c) $$u_m(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})\, e^{ikF(\mathbf{r})}\, u_o(\mathbf{r})$$ (variation de l'amplitude et de la phase)

L'introduction d'une fonction absorbante (couche de lentille) sert à réduire les réflections multiples, mais principalement à réduire l'intensité du maxima secondaire de la figure de diffraction et pour concentrer celui-ci dans le maximum central. Ainsi est réduite l'amélioration de contraste pour rendre meilleure la résolution. Le champ est alors :

(4.57) $$u(P) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_{D'} G(p, q)\, e^{ik\varphi(p, q\, ;\, P)}\, dp, dq$$

où la fonction d'amplitude G(p, q) et la fonction de phase $\varphi(p, q\, ;\, P)$ sont :

(4.58) $$G(p, q) = \sqrt{n^2\, |\Delta|}\quad u_o(p, q)\; A(p, q)$$

(4.59) $$\varphi(p, q\, ;\, P) = W + (\vec{r}, \vec{s}) + F(p, q)$$

L'intégrale (4.45) ou (4.57) nous donne toute information sur le champ d'image, en fait dans le plan d'image $z_1 = 0$, si $W = W(x, y, z\, ;\, p, q)$ avec x_1, y_1 situé sur ce plan. Si on varie z_1, on peut obtenir une distribution tri-dimensionnelle du champ ou de l'intensité dans l'espace image. En pratique, on déplace le plan image, parallèlement au plan initial $z_1 = 0$ et on fait le calcul de U(P), ou de l'intensité. Par conséquent, le travail principal est d'évaluer cette intégrale pour les expressions données des fonctions d'amplitude et de phase.

Il est facile de calculer E^o_∞ et H^o_∞, qui correspondent aux amplitudes des champs à l'infini. D'après les conditions de rayonnement (11-11) et (13-13') du paragraphe 11, chapitre II, les formes asymptotiques de E et H sont données par (14) et (14') du même chapitre. On écrit :

(4.60) $$E_\infty = \left\{ (\vec{s}_\wedge P(\vec{s}) + \vec{s}_\wedge\ (\vec{s}_\wedge\ M(\vec{s})) \right\} \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r \to \infty)$$

$$H_\infty = \left\{ \vec{s}_\wedge (\vec{s}_\wedge P(\vec{s})) - (\vec{s}_\wedge M(\vec{s})) \right\} \frac{e^{ikr}}{r}$$

où $\vec{s}$ est le vecteur normal au front d'onde S, défini par $V(r) = C\, r \to \infty$ et $P(\vec{s}), M(\vec{s})$ sont des vecteurs qui dépendent seulement de θ et φ - les angles polaires. Les caractères de $P(\vec{s})$ et $M(\vec{s})$ peuvent être exprimés pour chaque problème spécifique, c'est-à-dire qu'ils dépendent du mode de rayonnement ou d'excitation de la source et, en général, E_∞ et H_∞ sont complexes et représentent un rayonnement multipolaire. Par une application de la transformation de Fourier, on peut mettre la fonction de Green de l'espace libre, sous la forme :

(4.61) $$g_o(r/r') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} = \frac{i}{8\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ik\left[m_{\pm} (\vec{r} - \vec{r}')\right]} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma(\alpha, \beta)}$$

où $m_{\pm}$ (1) sont définis par les relations :

(4.62) $$m_+ = (m^o, \gamma(m^o)) = (\alpha, \beta, + \gamma) \qquad (z > 0)$$

$$m_- = (m^o, -\gamma(m^o)) = (\alpha, \beta, - \gamma) \qquad (z < 0)$$

$$m^o = (\alpha, \beta, 0)$$

et α , β sont les composantes du vecteur plan m^o, et $dm^o = d\alpha\, d\beta$. De plus $m_{\pm}^2 = 1$ et $\gamma(m^o)$ satisfont l'équation :

(4.63) $$m_{\pm}^2 = 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2(m^o)$$

donc

(4.64) $$\gamma(m^o) = \gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \qquad (m^o)^2 > 1$$

et

(4.65) $$\gamma(m^o) = \gamma(\alpha, \beta) = i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} \qquad (m^o)^2 < 1$$

où le domaine d'intégration de (4.61) est ($-\infty, \infty$). Nous écrivons aussi :

(4.66) $$\nabla (e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})}) = (ikm_{\pm})\, e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \qquad (z \gtrless 0)$$

De même façon, le tenseur de Green de l'espace libre est donné par l'intégrale :

(4.67) $$\Gamma(r; r') = \frac{i}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (m_{\pm}\, m_{\pm} - I)\, e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r} - \vec{r}')} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma(\alpha, \beta)}$$

Par conséquent, le vecteur de Hertz Π et de Fitzgerald Π^* prennent la forme suivante :

(4.68a) $$\Pi(r) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{j}(m^o)\, e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma(\alpha, \beta)}$$

(4.68b) $$\Pi^*(r) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{j}'(m^o)\, e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma(\alpha, \beta)}$$

---

(1) Ici $m_{\pm}$ sont équivalents au vecteur $\vec{s} = (p, q, r^o)$ et $\alpha = p$, $\beta = q$ $\gamma = + r^o$, si γ prend les valeurs réelles de 0 à 1.

où $\bar{j}(m_o)$, $\bar{j}'(m_o)$ sont les transformés de Fourier et :

$$\bar{j}(m_o) = \int_S j(\hat{r}') \, e^{-ik(m_o \cdot \vec{r}')} \, d\hat{r}' \qquad \hat{r} \in S \tag{4.69a}$$

$$\bar{j}'(m_o) = \int_S j'(\hat{r}') \, e^{-ik(m_o \cdot \vec{r}')} \, d\hat{r}' \qquad r \in A \tag{4.69b}$$

des densités superficielles électriques et magnétiques sur l'écran S et l'ouverture A, respectivement.

Alors les champs E et H s'écrivent :

$$E(r) = \beta E^{inc}(r) + \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} m_{\pm} \wedge (m_{\pm} \wedge \bar{j}(m_o)) \, e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \, \frac{d\alpha \, d\beta}{\gamma(\alpha, \beta)} \tag{4.70a}$$

$$H(r) = \beta H^{inc} - \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (m_{\pm} \wedge \bar{j}(m_o)) \, e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \, \frac{d\alpha \, d\beta}{\gamma(\alpha, \beta)} \tag{4.70b}$$

Si on décompose E et H en une partie parallèle et une partie normale à l'écran $(z = 0)$, et puisque $(n.\bar{j}) = 0$, $(n \wedge \bar{j}) = 0$, d'après (4.70a) et (4.70b), on obtient :

$$E(r) = E^{inc}(r) \pm \frac{1}{8\pi^2} \int_S \left\{ n\left[m_o \cdot \bar{j}(m_o)\right] \mp \frac{m_o\left[m_o \cdot \bar{j}(m_o)\right] - \bar{j}}{\gamma(\alpha, \beta)} \right\} e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \, d\alpha \, d\beta, \quad z \gtrless 0 \tag{4.71a}$$

$$H(r) = H^{inc}(r) \mp \frac{1}{8\pi^2} \int_S \left\{ (n \wedge \bar{j}) \mp \frac{n\left[m_o \cdot \bar{j}(m_o)\right]}{\gamma(\alpha \beta)} \right\} e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \, d\alpha \, d\beta, \quad z \gtrless 0 \tag{4.71b}$$

et

$$E(r) = \beta\left[E^{inc}(r) + E^{refl}(r)\right] - \frac{1}{4\pi^2} \int_A \left\{ \left[n \; \bar{j}'(m_o)\right] \pm \frac{n\left[m_o \wedge \bar{j}'(m_o)\right]}{\gamma(\alpha, \beta)} \right\} e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \, d\alpha \, d\beta, \quad z \gtrless 0 \tag{4.72a}$$

$$H(r) = \beta\left[H^{inc}(r) + H^{refl}(r)\right] - \frac{1}{4\pi^2} \int_A \left\{ n\left[m_o \wedge \bar{j}'(m_o)\right] \mp \frac{m_o\left[m_o \cdot \bar{j}'(m_o)\right] - \bar{j}'}{(d, \;)} \right\} e^{ik(m_{\pm} \cdot \vec{r})} \tag{4.72b}$$

$(z \gtrless 0)$

où $\beta = 0$, si $z > 0$, et $\beta = 1$, si $z < 0$.

Pour calculer les champs asymptotiques, E_{∞}, H_{∞}, quand $r \to \infty$, on écrit :

$$|\vec{r} - \hat{r}'| = r - (\hat{e}, \vec{r}') \tag{4.73}$$

$$g_o(r/\hat{r}') \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \, e^{-ik(\vec{e}, \hat{r}')} \tag{4.74}$$

où $\vec{e}$ (1) est le vecteur dans la direction du point r, $(\vec{r} = \vec{e}r, (\vec{e}, \vec{e}) = 1)$ et est normal au front d'onde S.

Les formules (4.71a, b) expriment les champs de diffraction par un disque S, et (4.72a, b) par une ouverture A.

---

(1) Nous remarquons que $\vec{e} = \vec{s}$ si l'indice de réfraction $n = 1$, $m^o = m_o$

Alors Π et Π^* prennent les formes suivantes :

(4.75a) $$\Pi(r) = \frac{i}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_S j(\vec{r}') e^{-ik(\vec{e}.\vec{r}')} d\vec{r}' = \frac{i}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \, \tilde{j}e$$

(4.75b) $$\Pi^*(r) = \frac{i}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_A \bar{j}'(\vec{r}') e^{-ik(\vec{e}.\vec{r}')} d\vec{r} = \frac{i}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \, j'(e)$$

quand $r \to \infty$. Donc, nous obtenons les expressions :

(4.76a) $$E_\infty = E_\infty^{inc} - \frac{i}{4\pi} (e_\wedge (e_\wedge j(e))) \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (z \gtrless 0)$$

(4.76b) $$H_\infty = H_\infty^{inc} + \frac{i}{4\pi} \cdot \left[(e_\wedge j(e)\right] \frac{e^{ikr}}{r}$$

et

(4.77a) $$E_\infty = \beta(E_\infty^{inc} + E_\infty^{refl}) \pm \frac{i}{2\pi} \left[e_\wedge j'(e)\right] \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (z \gtrless 0)$$

(4.77b) $$H_\infty = \beta\left\{H_\infty^{inc} + E_\infty^{refl}\right] \pm \frac{i}{2\pi} \left[e_\wedge j'(e)\right] \frac{e^{ikr}}{r}$$

quand $r \to \infty$ et $\beta = 0$, si $z > 0$, $\beta = 1$ pour $< z < 0$.

Les expressions (4.76a - 77a) et (4.76b-77b) de E_∞ et H_∞ sont les formes explicites de (E) et (H) du paragraphe 11, Chapitre II pour ce problème de diffraction par un disque, ou par une ouverture dans le plan $z = 0$.

En général, on peut développer $j(e)$ et $j'(e)$ en séries descendantes de k (séries asymptotiques) :

(4.78a) $$j(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_n(e)}{k^n} e^{-ik(\vec{e}.\vec{r})}$$

(4.78b) $$j'(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j'_n(e)}{k^n} e^{-ik(\vec{e}.\vec{r})}$$

Le premier terme $n = 0$ de la première série, donne un champ à l'infini, qui correspond à un dipôle électrique de moment $\int_D j(\vec{r}') d\vec{r}'$ et celui de la deuxième série, un dipôle magnétique de moment $\int_A j'(\vec{r}') d\vec{r}'$.

Les formules (4.71a) et (4.71b) sont équivalentes aux intégrales de Picht-Luneburg. Nous remarquons que :

(4.78) $$m_\pm (\vec{r} - \vec{n}\vec{r}') = (\vec{s}.\vec{r} - \vec{r}_o) = p(x - x_o) + q(y - y_o) + r^o(z - z_o)$$

et

(4.79) $$x' = x_o + \lambda p, \qquad y' = y_o + \lambda q, \qquad z' = z_o + \lambda r^o$$

donc

(4.80) $$m_+ (\vec{r} - \vec{n}\vec{r}') = W(x, y, z ; p, q) + (\vec{r}.\vec{s})$$

et

(4.81a) $$E_\infty^o = + \frac{i}{2\pi} \left[(e_\wedge j'(e)\right] \frac{e^{ik(m_\pm . \vec{r})}}{r} \qquad (z \gtrless 0)$$

$$H^o_\infty = \frac{i}{2\pi}\left[e_\wedge (e_\wedge j'(e))\right] e^{ik(m_{\pm}.\vec{r})}$$

diffraction par une ouverture et :

$$(4.82a) \qquad E^o = -\frac{i}{4\pi}\left[e_\wedge (e_\wedge j(e))\right] \frac{e^{ik(m_{\pm}.\vec{r})}}{r}$$

$$(z \gtrless 0)$$

$$(4.82b) \qquad H^o_\infty = -\frac{1}{2\pi}\left[e_\wedge\ j(e)\right] \frac{e^{ik(m_{\pm}.\vec{r})}}{r}$$

diffraction par un disque.

Le vecteur $e = e(p, q)$ satisfait $(e.e) = 1$. Il détermine la polarisation d'onde électromagnétique asymptotique, c'est-à-dire, la polarisation de E_∞, H_∞. De plus, il faut mettre $m_+ = s = (p, q, r^o)$ dans toutes les formules précédentes.

CHAPITRE V

ABERRATION GEOMETRIQUE ET ONDULATOIRE

I- ABERRATION D'OPTIQUE

Dans la théorie de la diffraction des instruments d'optique, la caractéristique "mixte" de Hamilton, W, joue un rôle essentiel. Quand W est connu, l'intégrant de (4.45) ou (4.52) est connu et le champ dans l'espace image peut être calculé par intégration. En général, on ne peut pas calculer W sous forme explicite, si le front d'onde qui sort de l'instrument optique, est déformé. Au lieu de prendre un front arbitraire S, sortie de l'instrument, nous prenons plutôt une surface de référence S_o, ordinairement une surface sphérique centrée sur le point de l'image de Gauss passant par le centre de l'ouverture (pupille de sortie). L'écart entre le front d'onde réel S et la surface de référence S_o, ou l'ouverture, s'appelle <u>aberration</u> et la fonction qui donne cette déviation, <u>la fonction d'aberration</u>.

Pour les petites aberrations, la caractéristique mixte de Hamilton est développée en une série de puissances (séries de Taylor), de certains paramètres, par rapport à la surface de référence S_o.

Puisque la plupart des instruments optiques sont symétriques par rapport à un axe, le développement de W en séries est fait, par rapport de certaines variables <u>intrinsèques</u>, appelées <u>invariants</u> optiques.

Pour un système de révolution, $W(x_o, y_o\ ; z_o = o, p, q)$ dépend seulement de trois invariants optiques :

(5.1) $$u_1 = x_o^2 + y^2, \qquad u_2 = p^2 + q^2, \qquad u_3 = x_o p + y_o q$$

et pour les systèmes d'optique électronique d'un autre invariant, $u_4 = x_o q - y_o p$. Alors le développement de W en u_i prend la forme.

(5.2) $$W_o = W_o + W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ldots$$

$$= W_o + \sum_{i=1}^{4} a_i u_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} u_i u_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,h=1}^{4} a_{ijk} u_i u_j u_k$$

où les constantes a_i, a_{ij}, a_{ijk}, etc... représentent les aberrations des premier, troisième, cinquième, etc.., ordre, d'optique géométrique et W_o est une constante indépendante des paramètres, qui correspond en effet au rayon de la surface de référence S_o.

Les deux premiers termes de (5.2) ne donnent aucun écart de l'onde S_o et si le point de Gauss de l'espace image est proprement choisi, le deuxième terme est simplement égal à a_3u_3 ou $a_3u_3 + a_4u_4$. Les autres quantités représentent la fonction d'aberration de l'instrument.

Pour un système de révolution, nous écrivons W sous la forme :

(5.3) $$W = \sum_{n=o}^{\infty} W_n$$

où W_n est un polynôme homogène en u_i ($i = 1, 2, 3$) pour les aberrations d'optique ordinaire et $i = (1, 2, 3, 4)$ pour celles d'optique électronique. Par rapport aux variables u_1, u_2, u_3 et u_4, W est un polynôme homogène de degré 2n :

(5.4) $$W_n = \frac{1}{n!} \sum_{ijk..n=1}^{3ou4} a_{ijk\ldots n}\, u_i u_j u_k \ldots u_n$$

Si on introduit les nouveaux paramètres σ, ρ, φ, définis par :

$$\sigma^2 = u_1^2, \qquad \rho^2 = u_2, \qquad \sigma\rho\cos\varphi = u_3 \tag{5.5}$$

(5.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= W_o + \sum b_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^m \cos^m \varphi \\ &= W_o + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=o}^{u} f_{nm}(\sigma)\,\rho^m \cos^m\varphi \end{aligned} \tag{5.6}$$

où l, n, m sont des nombres entiers n-ml0 et pairs. Les quantités b_{lnm}. sont les coefficients d'aberration de type et d'ordres divers selon les valeurs numériques de l, n et m. Par exemple :

$$\begin{aligned} W_1 &= a_1\sigma^2 + a_2\rho^2 + a_3\sigma\rho\cos\varphi \\ W_2 &= a_{11}\sigma^4 + a_{12}\sigma^2\rho^2 + a_{22}\rho^4 + a_{13}\sigma^3\rho\cos\varphi + a_{23}\sigma\rho^3\cos\varphi + a_{33}\sigma^2\rho^2\cos\varphi^2 \\ W_3 &= a_{111}\sigma^6 + a_{112}\sigma^4\rho^2 + a_{122}\sigma^2\rho^4 + a_{222}\rho^6 + a_{113}\sigma^5\rho\cos\varphi \\ &+ a_{123}\sigma^3\rho^3\cos\varphi + a_{133}\sigma^4\varphi^2\cos^2\varphi + a_{223}\sigma\rho^5\cos\varphi \\ &+ a_{233}\sigma^2\rho^4\cos^2\varphi + a_{333}\sigma^3\rho^3\cos^3\varphi \end{aligned} \tag{5.7}$$

où a_{ij} donne les coefficients d'aberrations du troisième ordre, quoique le terme a_{11} ne soit pas une aberration. Les a_{ijk} sont les aberrations du cinquième ordre, mais les coefficients a_{111}, a_{112} ne donnent pas d'aberrations.

Les coefficients a_{ij}, a_{ijk} etc... sont analogues à b_{lnm} dans (5.3), si $2l+n+m \leqslant 2p$, entier.

Une seule aberration générale est donnée par :

$$b_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n\cos^m\varphi \tag{5.8.}$$

où $n - m \geqslant 0$ pair

II- LES ABERRATIONS D'OPTIQUE ELECTRONIQUE

Dans un système d'optique électronique, W est développé différemment, parce qu'il dépend aussi de $u_4 = x_o q - y_o p$. Si l'instrument est un système de révolution, le champ électrostatique W est seulement une fonction des coordonnées $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, z, et le champ magnétique de révolution satisfait les relations.

$$xA_x + yA_y = 0 \qquad A_z = 0 \tag{5.9}$$

où $A = (A_x, A_y, A_z)$ est le potentiel vecteur, qui reste toujours tangent à un cercle $\rho^2 = x^2 + y^2$ sur chaque plan z = constant. Par suite, les composantes A_x, A_y sont exprimées par une fonction scalaire A_o.

$$A_x = -yA_o, \qquad A_y = xA_o, \qquad A_z = 0 \tag{5.10}$$

et $A_o = A_o(\rho, z)$ est une fonction de ρ et z.

Alors la fonction caractéristique W_e dépend des trois invariants :

$$v_1 = x^2 + y^2; \qquad v_2 = p^2 + q^2; \qquad v_3 = xq - yp \tag{5.11}$$

où x, y sont donnés par les équations d'Hamilton :

$$x = -\frac{\partial W_e}{\partial p}; \qquad y = -\frac{\partial W_e}{\partial q} \tag{5.12}$$

où $x = -\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi; \qquad y = -\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi$

où W_e est la fonction caractéristique mixte de Hamilton qui satisfait l'équation de Hamilton d'un système d'optique électronique (1).

Si on développe W_e comme

$$W_e = W_{eo} + W_{e1} + W_{e2} + \ldots\ldots. \tag{5.13}$$

où W_{eo} = constant (fonction de z seulement) et:

$$\begin{aligned} W_{e1} &= \sum_i^3 A_i v_i \\ W_{e2} &= \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^3 A_{ij} v_i v_k \\ W_{e3} &= \frac{1}{3!}\sum A_{ijk} v_i v_j v_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{en} &= \frac{1}{n!}\sum A_{ij\ldots n} v_i v_j \ldots\ldots\ldots v_n \end{aligned} \tag{5.14}$$

Les coefficients A_i, A_{ij}, etc.., dépendent des potentiels électriques et magnétiques, lesquels sont seulement des fonctions de z. Si V (ρ, z) et A_o (ρ, z) sont donnés, A_i, A_{ij}, etc..., seront connus.

Les quantités v_1, v_2, v_3 sont des fonctions de Z, mais à la première approximation (paramètre à l'intersection des rayons au plan $z = z_1$) v_3 est indépendante de z et v_1 et v_2 sont de la forme (1)

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_o^2 + y_o^2)\,H^2 + (p_o^2 + q_o^2)\quad h^2\,(x_o p_o + y_o q_o)\,Hh \\ v_2 &= (x_o^2 + y_o^2)\theta^2 + (p_o^2 + q_o^2)\quad \psi^2 + (x_o p_o + y_o q_o)\,\theta\psi \\ v_3 &= 2(x_o q_o - y_o p_o) \end{aligned} \tag{5.15}$$

où H, h, θ, et ψ sont des fonctions de z, qui satisfont la relation :

$$H\psi - h\vartheta = 1 \tag{5.16}$$

Les fonctions, h(z), ϑ(z) définissent le rayon (trajectoire) paraxial du corpuscule et H (z), ψ(z) le rayon de l'espace image. En première approximation les coordonnées x_1, y_1 dans le plan image $z = z_1$, sont exprimés en fonction de x_o, y_o du plan objet initial $z = z_o$, par les équations :

$$x_1 = x_o H(z_1) + p_o\,h(r_1) \tag{5.17}$$

et

$$y_1 = y_o H(z_1) + q_o\,h(r_1)$$

(1) L'équation de Hamilton est donnée dans plusieurs textes. Nous citons seulement ici : de Broglie (1950), Cotte (Annales de Physique 1938), Luneburg (1944) 1965, note supplémentaire I, Glaser (1952), Sturrock (1955), Picht (1963).

(2) Pour une analyse détaillée, voir Luneburg (l. c.).

$$(5.18) \qquad p = x_o \vartheta(z_1) \quad w + p_o \psi(z_1)$$

$$q = y_o \vartheta(z_1) + q_o \psi(z_1)$$

Par suite W_e dépend des quatre paramètres :

$$(5.19) \qquad \sigma^2 = x_o^2 + y_o^2 \ ; \quad \rho^2 = p_o^2 + q_o^2$$

$$\sigma \rho \cos \varphi = x_o{}^o p + y_o q_o \ ; \quad \sigma' \rho \sin \cdot \varphi = x_o q_o - y_o p_o$$

qui sont indépendants de la coordonnée z.[1]

Dans cette approximation de v_i, on obtient :

$$(5.20) \qquad \begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2 \rho^2 + \lambda_3 \sigma \rho \cos \varphi \\ v_2 &= \mu_1 \sigma^2 + \mu_2 \rho^2 + \mu_3 \sigma \rho \cos \varphi \\ v_3 &= \sigma' \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

où λ_i, μ_i $(i = 1,2,3)$ sont fonctions de z.

Alors, W_{e1}, W_{e2}, etc... sont données par les expressions suivantes :

$$(5.21) \qquad \begin{aligned} W_{e_1} &= W'_1 + A_4 \sigma' \rho \sin \varphi \\ W_{e_2} &= W'_2 + (A_{14} \sigma^2 \sigma' \rho + A_{24} \sigma' \rho^3) \sin \varphi \\ &\quad + A_{34} \sigma \sigma' \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + A_{44} \sigma'^2 \rho^2 \sin^2 \varphi \\ W_{e_3} &= W'_3 + (A_{114} \sigma^4 \sigma' \rho + A_{124} \sigma^2 \sigma' \rho^3 + A_{224} \sigma' \rho^2) \sin^2 \varphi \\ &\quad + (A_{134} \sigma^3 \sigma' \rho^2 + A_{124} \sigma \sigma' \rho^4) \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + (A_{144} \sigma^2 \sigma'^2 \rho^2 + A_{244} \sigma'^2 \rho^4) \sin^2 \varphi \\ &\quad + A_{334} \sigma^2 \sigma' \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + A_{344} \sigma \sigma'^2 \rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + A_{444} \sigma'^3 \rho^3 \sin^3 \varphi \,) \end{aligned}$$

où les développements de W'_1, W'_2, W'_3 ont la même forme que W_1, W_2, W_3 de l'optique géométrique (5.7), mais les coefficients $A = A_i$, $A = A_{ij}$, etc... sont des fonctions de z.

Les termes supplémentaires, donnés ci-dessus, sont les aberrations additionnelles, qui apparaissent dans les systèmes d'optique électronique. La forme explicite de chacun des coefficients d'aberration A_i, A_{ij}, etc..., est donnée dans les traités déjà cités. Les coefficients A_{ijk} ont été calculés par Chako d'après la procédure de Schwarschild, mais elles sont trop compliquées pour être utiles au calcul du champ d'image.

Le développement de W, ou de la fonction d'aberration présentés précédemment sont classiques.

(1) En fait σ' est égale à $\pm \sigma$, mais nous écrivons σ' ce qui permet de faire une comparaison avec les systèmes généraux de l'optique géométrique.

III - DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION D'ABERRATION EN POLYNOMES DE ZERNIKE

En 1934, dans son célèbre mémoire sur la théorie de la diffraction de la méthode de contraste de phase, Zernike introduisit un autre développement de la fonction d'aberration. Ce développement a plusieurs avantages sur le développement classique (5.6). Il remplaçait les $\cos^m \varphi$ par $\cos m\varphi$ (c'est-à-dire qu'il développait la fonction d'aberration en séries de Fourier en cosinus de l'angle φ, où le terme général est exprimé par :

(5.22) $$b_{lnm}\sigma^{2l+m} Z_n^m(\rho) \cos m\varphi$$

Les fonctions $Z_n^m(\rho)$ sont les polynômes de Zernike de degré n en ρ, et ils sont orthogonaux sur la surface d'un cercle de rayon un. Le développement de la fonction caractéristique W est alors :

$$W = W_o + \Sigma\Sigma b_{lnm}\sigma^{2l+m} Z_n^m(\rho) \cos m\varphi$$

(5.22) $$= W_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{2n,o}(\sigma)}{\sqrt{2}} Z_{2n}^o(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f_{nm}(\sigma)\, Z_n^m(\rho) \cos m\varphi$$

pour un système de révolution.

Les coefficients b_{lnm} ou $f_{nm}(\sigma)$ sont différents de b_{lnm} et $f_{nm}(\sigma)$ (5.6).

Pour un système d'optique électronique de révolution le développement de W est exprimé par une série générale de Fourier :

(5.23) $$W_e = W_{eo} + \Sigma b_{l,r,s,n}\sigma^{2l+r}\sigma'^{s}\rho^n \cos m\varphi$$
$$+\Sigma C_{lrsn}\sigma^{2l+r}\sigma'^{s}\rho^n \sin m\varphi$$

où l, r, s, n sont des nombres entiers, liés par les relations :

$s + r = m$ $\quad$ $n-m \geq 0$ pairs $\quad$ $2l+ r + s + n = 2N$

où 2 N est le degré du polynôme W dans les variables x_o, y_o, p_o, q_o. En introduisant les polynômes de Zernike, W s'écrit comme suit

(5.24) $$W_e = W'_{eo} + \Sigma C_{lrsn}\sigma^{2l+r}\sigma'^{s} Z_n^m(\rho) \cos m\varphi$$
$$+ \Sigma D_{lrsn}\sigma^{2l+r}\sigma'^{s} Z_n^m(\rho) \sin m\varphi$$

ou

$$W_e = W'_{eo} + \Sigma \frac{f_{2n,o}(\sigma,\sigma')}{\sqrt{2}} Z_{2n}^o(\rho)$$
$$+\Sigma\Sigma\left\{f_{lrsn}(\sigma,\sigma')\cos m\varphi + g_{lrsn}(\sigma,\sigma')\sin m\varphi\right\} Z_n^m(\rho)$$

Cette expression généralise les résultats de Nijboer (1953) et est valable pour un système de révolution d'optique électronique.

Nous remarquons que l'écart moyen entre la surface réelle S et la surface de référence S_o, s'annule en tenant compte de la propriété orthogonale des polynômes de Zernike. Nous avons :

(5.26) $$\int_o^1\int_o^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{2n}(\sigma)}{\sqrt{2}} Z_{2n}^o(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f_{nm}(\sigma)\, Z_n^m(\rho)\cos m\varphi\right\}\rho\, d\rho\, d\varphi = 0$$

tandis que le carré moyen de l'écart est différent de zéro. Il est égal à :

(5.27) $$\int_o^1\int_o^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{2n,o}(\sigma)}{\sqrt{2}} Z_{2n}^o(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f_{nm}(\sigma)\, Z_n^m(\rho)\cos m\varphi\right\}^2 \rho\, d\rho\, d\varphi = 0$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m} \frac{f^2_{nm}(\sigma)}{2n+2}$$

Pour un système d'optique électronique de révolution nous écrivons :

$$(5.28) \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n1}^{\infty} \frac{f_{2n,o} Z_{2n}^{o}(\rho)}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \left[f_{1rsn}(\sigma,\sigma') \cos m\varphi + g_{1rsn}(\sigma,\sigma') \sin m\varphi \right] Z_n^m(\rho) \right\} \rho d\rho d\varphi = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{2n,o} Z^o{}_{2n,o}(\rho)}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \left[f_{1rsn}(\sigma,\sigma') \cos m\varphi + g_{1rsn}(\sigma\sigma') \sin m\varphi \right] Z_n^m(\rho) \right\}^2 \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{f^2_{1rsn}(\sigma,\sigma') + g^2_{1rsn}(\sigma,\sigma')}{2n+2} \right]$$

Si D_o dénote la définition idéale d'un système sans aberration, alors les influences d'aberration produisent une diminution de la définition idéale, égale à (5. 25) pourvu que les aberrations soient très petites. Cela veut dire, que le développement de la phase en série de puissance de $Z_n^m(\rho)$ est limité au premier terme de Z_n^m, ou aux abberation $f_{nm}(\sigma)$. En ce cas, la définition est donnée par la formule :

$$(5.30) \quad D = D_o \left[1 - k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{f^2_{nm}(\sigma)}{\sqrt{2}} \right]$$

et

$$(5.31) \quad D_e = D_{eo} \left[1 - k^2 \left(\Sigma \frac{f^2{}_{1,r,s,n}(\sigma,\sigma') + g^2{}_{1,r,s,n}(\sigma,\sigma')}{2n+2} \right) \right]$$

Ainsi, chacune des aberrations contribue par un terme positif à détériorer la définition de l'image. Il n'y a pas un mélange d'aberrations de différents ordres, comme dans le cas où la fonction d'aberration est exprimée par le développement classique. Ici les aberrations sont compensées pour toutes les valuers de σ, contrairement à ce qui se passe dans le développement classique. C'est un grand avantage des polynômes de Zernike.

IV- SYSTEMES OPTIQUES NON-SYMETRIQUES

Dans certains instruments de l'optique ordinaire et surtout en optique électronique, il n'existe pas une symétrie ou un axe de révolution, si, par exemple le champ électrique ou magnétique est engendré par un système formé de plans conducteurs inclinés, ou par des pôles magnétiques de forme non-symétrique. En optique ordinaire, une lentille placée obliquement par rapport aux axes de coordonnées, détruit la symétrie du système.

S'il n'existe pas de symétrie ou d'axe de révolution, les deux formes de développement (méthode classique et méthode de Zernike-Nijboer) de la fonction de l'aberration, ne sont pas utiles. Il faut développer W en série de puissance de toutes les variables (x_o, y_o, p, q). Mais, parce que p et q sont des variables d'intégrations dans l'intégrale de diffraction, on peut grouper les termes en série de puissances de p et q. Alors on écrit :

$$(5.32) \quad W_a = W_o + W_{a1} + W_{a2} + W_{a3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + W_{an} + \ldots\ldots$$

où W_{an} est un polynôme homogène de degré n en x_o, y_o, p et q.

Nous obtenons le développement suivant de W_j:

$$W_a o = \text{constant}$$

$$W_{a1} = \sum_{i=1}^{4} a_i x_i$$

$$(5.33) \quad W_{a2} = \frac{1}{2!} \sum_{ij=1}^{4} a_{ij} x_i x_j$$

$$W_{a3} = \frac{1}{3!} \sum_{ijk=1}^{4} a_{ijk.} x_{i.} x_j x_k$$

....

$$W_{an} = \frac{1}{n!} \sum_{ij..n=}^{4} a_{ij...n} x_i x_j \ldots\ldots x_n$$

où $x_1 = x_o$, $x_2 = y_o$, $x_3 = p$, $x_4 = q$, et $a_{ij} = ajk$, etc...

Mais, parce que x_o, y_o sont fixes, on peut exprimer W sous la forme :

(5.34) $$W_a = W_{ao} + \sum_{n,\, m=1}^{\infty} f_{nm}(x_o, y_o)\, p^n q^m$$

Si p et q sont liés par les équations :

(5.35) $$p = \rho \cos \varphi \ , \qquad q = \rho \sin \varphi$$

alors,

$$W_{a1} = a_1 x_o + a_2 y_o + a_3 \rho \sigma \cos \varphi + a_4 \rho \sigma \sin \varphi$$

(5.36) $$W_{a2} = a_{11} x_o^2 + a_{12} x_o y_o + a_{22} y_o^2 + a_{13} x_o \rho \cos \varphi + a_{23} y_o \rho \cos \varphi + a_{14} x_o \rho \sin \varphi + a_{24} y_o \rho \sin \varphi + a_{33} \rho^2 \cos^2 \varphi + a_{34} \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + a_{44} \rho^2 \sin^2 \varphi$$

....

$$W_n = \left[x_o + y_o + p + q\right]^{*n}$$

où les coefficients de chaque monôme de $\left[x_o + y_o + p_o + q_o\right]^{*\, n}$ sont différents et sont symétriques par rapport aux indices, c'est-à-dire, $a_{ij} = a_{jk}$, etc... Les expressions explicites de W_{a3} et W_{a4} sont :

(5.37) $$W_{a3} = W'_3 + (a_{113} x_o^2 + a_{123} x_o y_o + a_{223} y_o^2) \rho \cos \varphi + (d_{114} x_o^2 + a_{124} x_o y_o + a_{224} y_o^2) \rho \sin \varphi + (a_{133} x_o + a_{223} y_o^2) \rho^2 \cos^2 \varphi + (a_{144} x_o + a_{244} y_o) \rho^2 \sin^2 \varphi + (a_{134} x_o + a_{234} y_o) \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + a_{333} \rho^3 \cos^3 \varphi + a_{444} \rho^3 \sin^3 \varphi + a_{334} \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + a_{344} \rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$W_{a4} = W'_4 + (a_{1113} x_o^3 + a_{1123} x_o^2 y_o + a_{1223} x_o y_o^2 + a_{2223} y_o^3) \rho \cos \varphi + (a_{1114} x_o^3 + a_{1124} x_o^2 y_o + a_{1224} x_o y_o^2 + a_{2224} y_o^3) \rho \sin \varphi + (a_{1133} x_o^2 + a_{1233} x_o y_o + a_{2233} y_o^2) \rho^2 \cos^2 \varphi + (a_{1144} x_o^2 + a_{1244} x_o y_o + a_{2244} y_o^2) \rho^2 \sin^2 \varphi$$

$$+ (a_{1134} x_o^2 + a_{1234} x_o y_o + a_{2234} y_o^2) \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi + (a_{1333} x_o + a_{2333} y_o^2) \rho^3 \cos^3\varphi$$

$$+ (a_{1444} x_o + a_{2444} y_o) \rho^3 \sin^3\varphi + (a_{1334} x_o + a_{2334} y_o) \rho^3 \cos^2\varphi \sin\varphi + a_{3333} \rho^4 \cos^4\varphi$$

$$+ (a_{1344} x_o + a_{2344} y_o) \rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi + a_{4444} \rho^4 \sin^4\varphi + a_{4443} \rho^2 \cos^3\varphi \sin\varphi$$

$$+ a_{4433} \rho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi + a_{3444} \rho^3 \cos^4\varphi \sin\varphi$$

où W'_3 et W'_4 sont des polynômes homogènes de degré trois et quatre seulement en x_o, y_o. Le résultat précédent montre qu'un système asymétrique peut se mettre sous la même forme que (5.23), c'est-à-dire, en série de Fourier de sinus et cosinus de φ, mais pas sous la forme classique.

Quand le système possède un axe de symétrie, par rapport à p ou q, les fonctions W_{an} sont beaucoup plus simples. Si, par exemple, le système est asymétrique par rapport à p, alors tous les termes qui contiennent les variables y_o, q et y_o q impaires s'annulent, les termes avec les coefficients a_{12}, a_{14}, a_{23}, a_{34}, etc., c'est-à-dire, tous les termes où la somme des incides est égale à un nombre impair. La même règle est valable pour deux plans de symétrie et, de plus, tous les polynômes de degré impair W_{a1}, W_{a3}, ... $W_{a2p+1} = 0$ (p = 1, 2, 3 ....).

Dans les polynômes W_2, W_4, ... W_{2n}, tous les termes dont la somme des indices est un nombre impair, s'annulent. Pour un axe de symétrie ceci est généralement la règle. Pour deux axes de symétrie W est invariant par rapport à toutes les coordonnées (x_o, y_o, p, q) et aux produits x_op et y_oq, mais pas par rapport aux x_oq et y_op, si la somme des indices est impaire.

L'intersection d'un rayon avec un plan dans l'espace image est donnée par l'équation (5.12).

(5.38)
$$x = + \frac{\partial W_a}{\partial \rho} \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial W_a}{\partial \varphi}$$
$$y = \frac{\partial W_a}{\partial \rho} \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\rho} \frac{\partial W_a}{\partial \varphi}$$

Les coefficients des aberrations géométriques dans divers types et ordres sont des coefficients de diverses puissances en q, cos φ, et sin φ, ou de p et q, si x et y sont développés en série de ces variables.

En éliminant φ de ces équations, nous obtenons :

(5.39) $f(x, y) = 0$

qui donne les courbes caractéristiques dans un plan image fixe $z = z_1$. Par exemple, si nous considérons le terme W_3 qui dépend de cos φ et sin φ, nous obtenons, après un calcul simple, l'équation d'un cercle.

(5.40) $$(x - (A + 2B \rho^2)^2 + (y + (C + 2D \rho^2)^2 = (B^2 + D^2) \rho^2$$

ou

$$A = a_{113} x_o^2 + a_{123} x_o y_o + a_{223} y_o^2$$

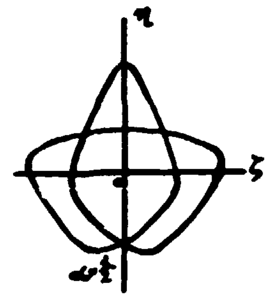
(5.41) $$B = a_{114} x_o^2 + a_{124} x_o y_o + a_{224} y_o^2$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{334}}{2} + 3 a_{333}\right)$$

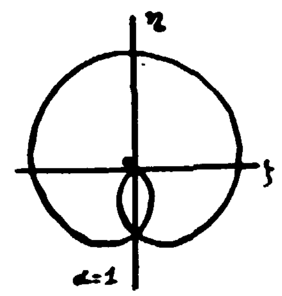
$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{344}}{2} + 3 a_{444}\right)$$

En effet, toutes les courbes caractéristiques sont des cercles si l'on considère seulement les termes de sinus et cosinus de l'angle φ dans le développement de W, c. à. d de sin φ et cos φ.

Evidemment, les courbes caractéristiques prennent des formes différentes, si on considère des combinaisons variées des aberrations. Les grandes lignes pour étudier ces courbes sont données par Steward, Nijboer, Carathéodory et l'auteur dans des travaux déjà cités (fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc...).



(a)
$\alpha = \frac{1}{2}$



(b)
$\alpha = 1$

fig. 1

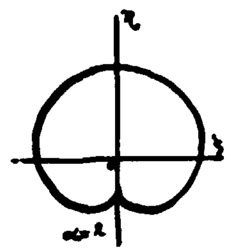


fig. 2
$\alpha = 2$

Coma primaire au dehors du point focal (Steward, 1926).
(1a, b, 2). d = distance entre pupille de sortie et le plan focal.

$$\sigma^2 d^2 = x_1^2 + y_1^2 = u_1 d^2 u_2 d^2 = p_1^2 + q_1^2,$$

$$u_2 d^2 = Y_1 y_1 + Z_1 z_1 = X_1 p_1 + Y_1 q_1$$

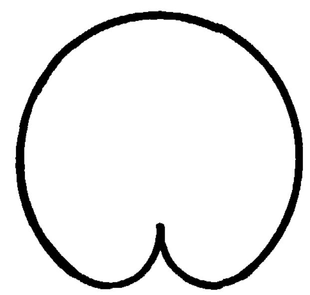


fig. 3

Effets de combinaisons des aberrations.
Courbe caractéristique :
$x_1 = a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta$
$y_1 = b_1 \sin\theta + b_2 \sin^2\theta$
($a_1 = 30$, $b_1 = 30$)
($a_2 = 15$, $b_2 = 16$)
(Chako, 1957).

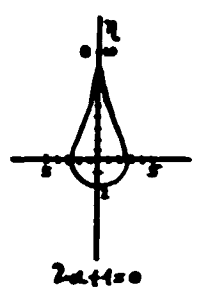


Fig. 4
$2\alpha + 1 = 0$

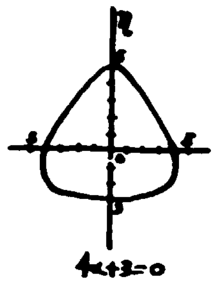


Fig. 5
$4\alpha + 3 = 0$

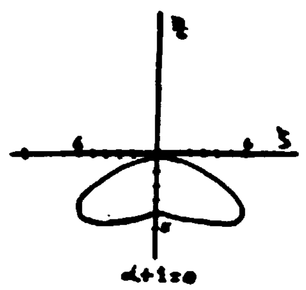


Fig. 6
$\alpha + 1 = 0$

Aberrations de troisième espèce (septième ordre). Combinaisons de coefficients. $c_{2223} = c_{10}$, $c_{1133} = c_{11}$, $c_{2233} = c_{12}$, $c_{133} = c_{13}$, $c_{11} = 4ac_{10}$, $\alpha = 3/8\ (c_{13} / c_{12})$.

Equation de courbe caractéristique : $\eta = \cos 4\varphi + 2(5 + 4\alpha)\cos 2\varphi + 12\alpha + 9$
$\xi = \sin 4\varphi + 2(1 + 4\alpha)\sin 2\varphi$

$4d^7 (Y' - y_1) = 2c_{10}\,\rho^4 y_1^3\,\eta$, $4d^7 (Z' - z_1) = 2c_{10}\,\rho^4 y_1\,\xi$ (Steward, 1926)

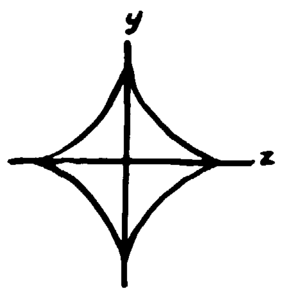


fig. 7

Courbe de déplacement d'astigmatisme secondaire $r^4 \cos 2\varphi$. (Nijboer, 1943)

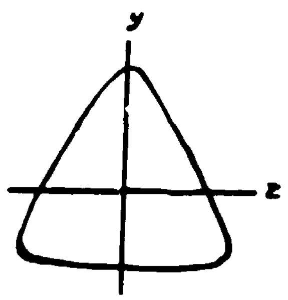


Fig. 8

Courbe de déplacement d'aberration de forme $r^5 \cos 3\varphi$. (Nijboer, 1943)

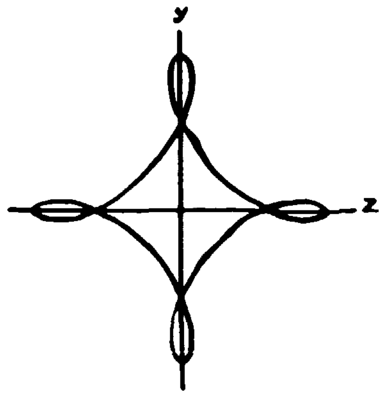


Fig. 9

Courbe de déplacement de troisième ordre d'astigmatisme $r^6 \cos 2\varphi$. (Nijboer, 1943)

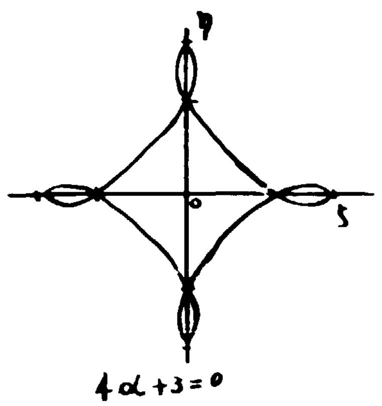


Fig. 10
$4\alpha + 3 = 0$

**Aberration de septième ordre en absence d'Ordres Inférieures. (Steward, 1926)
Combinaisons des aberrations**
$c_{2233} = c_{12}$, $c_{1333} = c_{13}$, $a = 3/8\ \dfrac{c_{13}}{c_{12}}$

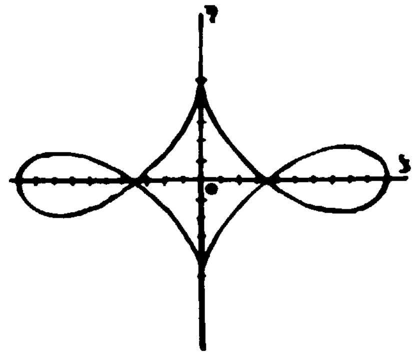


Fig. 11
$\alpha + 1 = 0$

(Steward)

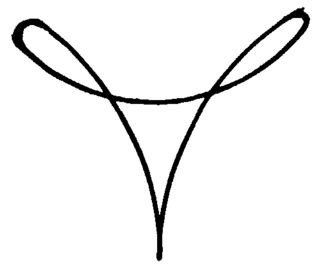


Fig. 12
$a = -28$, $b_1 = 16$
$a_2 = 18$ $b_2 = 8$

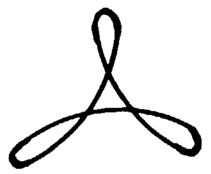


Fig. 13
$a_1 = -18$ $b_1 ; = 12$
$a_2 = 12$, $b_1 = 8$

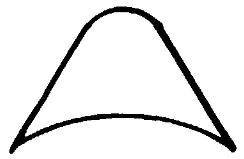


Fig. 14
$a_1 = -16$, $b_1 = 19$
$a_2 = 11$, $b_2 = 2$

Fig. 15
$a_1 = -18$, $b_1 = 19$
$a_2 = 6$, $b_2 = 15$

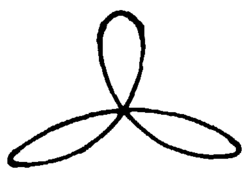


Fig. 16

$a_1 = -18, \; b_1 = 20$
$a_2 = 24, \; b_2 = 12$

Fig. 17

$a_1 = -18, \; b_1 = 12$
$a_2 = 18, \; b_2 = 6$

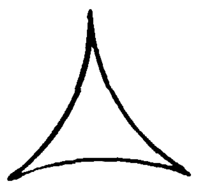


Fig. 18

$a_1 = -26, \; b_1 = 13$
$a_2 = 13, \; b_2 = 7$

(Fig. 3, 12, 13, 14, 15, 16, 17, Chako, 1957)

V - OBSERVATIONS RELATIVES AU DEVELOPPEMENT DES FONCTIONS D'ABERRATION

Le développement classique et celui de Zernike-Nijboer ne sont pas commodes pour évaluer l'intégrale de diffraction, même pour un cercle. Il est impossible d'évaluer l'intégrale si le domaine d'intégration est limité par une courbe simple, telle qu'un rectangle, un triangle ou une éllipse, parce qu'il est difficile de séparer l'intégrale double en un produit de deux intégrales simples. Quand le domaine d'intégration est d'une forme quelconque, il est possible, en certains cas, de construire les fonctions ou les polynômes orthogonaux sur le domaine d'intégration. Alors, nous utilisons ces polynômes pour développer la fonction d'aberration.

Soit D un domaine d'intégration, l'ouverture de la pupille de sortie.

Si $W_{n,m}$ (p, q), (n, m = 0, 1, 2, ...) sont les polynômes orthogonaux sur D, la fonction de Hamilton W peut être développée en séries de $W_{n,m}$ comme suit :

(5.42) $$W(x_o, y_o, z = z_o \,;\, p, q) = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m}(x_o, y_o, z_o)\, W_{n,m}(p, q)$$

Les quantités $C_{n,m}$ sont les nouveaux coefficients des aberrations de même que $f_{n,m}(\sigma, \sigma')$, $g_{n,m}(\sigma, \sigma')$ dans la théorie de Zernike-Nijboer. Cependant, $W_{n,m}$ sont, en général, d'un type où l'intégrale

(5.43) $$\int_D W_{n,m}\, W'_{n',m'}\, h(p, q)\, dpdq$$

s'annule, si $(n+m) \neq n' + m'$ et est différent de zéro, si $n+m = n'+m'$. La fonction h(p, q) est la fonction de poids de $W_{n,m}$. Donc, la propriété d'orthogonalité n'est pas très simple. Mais il est possible de trouver un polynôme $W'_{n,m}$ (p, q) adjoint de $W_{n,m}$, tel que (5.53) se réduise à une constante).

(5.44) $$\int_D W_{n,m}\, W'_{n',m'}\, h(p, q)\, dp\, dq = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n',\; m \neq m' \\ N_{n,m} & \text{si } n = n',\; m = m' \end{cases}$$

On dit que si $W_{n,m}$ satisfait la propriété (4), il est un polynôme biorthogonal à $W_{n',m'}$. D'après les propriétés des polynômes orthogonaux, l'écart moyen sur la surface d'intégration est zéro, mais le carré moyen de l'écart ne s'annule pas.

Par conséquent, la définition D est donnée par :

(5.45) $$D = D_o \left[1 - k^2 \sum_{n,m \geq 1} \frac{C^2_{n,m}(x_o, y_o, z_o)}{N_{n,m}} \right]$$

Une analyse des polynômes orthogonaux sur un triangle et une ellipse est présentée dans le Chapitre VIII.

CHAPITRE VI

EVALUATION DES INTEGRALES DE DIFFRACTION

I - SYSTEME DE REVOLUTION.

Dans cette section. nous décrivons les méthodes diverses d'évaluation de l'intégrale de diffraction (2.206) ou (2.209), lorsque la fonction caractéristique mixte, en fonction d'aberration, est remplacée par le développement classique (2.303) ou le développement (2.309) de Zernike-Nyboer. Il va sans dire, que l'intégrale de diffraction (2.201) est valable pour le cas de petites aberrations, parce que le développement de la fonction d'aberration entrant dans l'intégrale, en séries de puissance des variables, est valable. Pour le cas de grandes aberrations il faut utiliser un traitement différent. Nous en discuterons dans le chapitre IX.

En introduisant le développement classique de la fonction d'aberration dans l'intégrale de diffraction (4.45), on écrit :

$$(6.1) \qquad u(P) = -\frac{ik}{2\pi}\iint_D G(p,q)\, e^{ik\left[(\vec{r},\vec{s}) + \Sigma\Sigma b_{lnm}\sigma^{2l+m}\varrho^n \cos^n\varphi\right]} dp\, dq$$

où G (p, q) est donné par (4.46) et le domaine d'intégration est la pupille-de-sortie, définie par la relation $p^2 + q^2 \leq n^2$

Pour un système optique quelconque,

$$(6.2) \qquad u(P) = -\frac{ik}{2\pi}\iint_{D_o}\Big\{g(p,q)\, e^{ik\left[(\vec{r}.\vec{s}) + \Sigma_{l,r,s,n}\, b_{l,r,s,n}(x_o, g_o)\, \rho^n \cos^m\varphi\right]}$$
$$+ e^{ik \sum_{l,r,s,n} C_{l,r,s,n}(x_o\, y_o)\, \rho^n \sin^m\varphi}\Big\}\rho\, d\rho\, d\varphi$$

ou

$$(6.2') \qquad u(P) = -\frac{ih}{2\pi} e^{ikW_o} \iint_D g(p,q)\Big\{e^{ik\left[xp + yq + z\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}\right]}$$
$$+ e^{ik \sum_{n+m>1} fn,m\; p^n q^m}\Big\} dp\, dq$$

où G (p.q) est

$$G(p.q) = \sqrt{n^2\,|\Delta|}\; A(p,q)\, u_o\,(p,q)$$

La valeur explicite de $f_{n,m}$ est donnée par (5.36) - (5;37) pour $n + m \leqslant 8$.

Si nous introduisons les variables r, α, ρ, φ par

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\alpha, & p &= \varrho\cos\varphi, \\ y &= r\sin\alpha, & q &= \varrho\sin\varphi \end{aligned}$$

l'équation (6, 2') devient

$$(6.2'') \quad u(P) = A_0 \int_0^b \int_0^{2\pi} G(\varrho,\varphi) \; e^{ik\left[(r\varrho\cos(\varphi-\alpha) + z\sqrt{n^2-\varrho^2} + \sum_{l,n,m} \sigma^{2l+m} \varrho^n \cos^m\varphi\right]} \varrho d\varrho d\varphi$$

ou
$$u(P) = A_0 \int_0^b \int_0^{2\pi} g(\varrho,\varphi)\, e^{ik\left[r\varrho\cos(\varphi-\alpha) + z\sqrt{n^2-\varrho^2} + \sum_{n+m\geqslant 1} f_{n,m}(x_0,y_0)\,\rho^{n+m}\cos^n\varphi\,\sin^n\varrho\right]} \rho d\rho d\varphi$$

où $b = n\sin\vartheta$, ϑ étant l'angle maximum des rayons réfractés avec l'axe de l'instrument, et $A_0 = -\frac{ik}{2\pi} e^{ikw_0}$

Puisque dans la plupart des problèmes, le domaine au-delà de la pupille-de-sortie est homogène (espace libre), n est constant et pour simplifier on peut le poser égal à l'unité. Ceci n'est pas nécessairement valable en optique électronique.

La procédure ordinaire pour évaluer (6. 1) ou (6. 2") est de développer la somme dans l'exponentielle en séries de puissances ainsi que l'amplitude G (p, q) et puis d'intégrer terme à terme. Il est bien entendu, que l'expression obtenue pour u (P), est très compliquée, même si, seulement des aberrations de troisième ordre sont admises, spécialement, quand on a besoin de calculer les valeurs numériques de u (P). C'est la raison pour laquelle la plupart des auteurs ont limité leur analyse aux aberrations simples ou, au maximum, à deux de ces aberrations. Cela n'est pas étonnant, quand on considère les calculs formidables à faire, si le but est d'obtenir les valuers numériques de u (P).

Pour le moment, considérons la contribution, dûe à une seule aberration, par ailleurs arbitraire, du type (5. 8).

L'intégrale (6. 1) devient*

$$(6.4) \quad u(P) = -\frac{ik}{2\pi} e^{ikw_0} \iint G(p,q)\, e^{ik\left[xp+yq+z\sqrt{n^2-\varrho^2}+b_{lnm}\sigma^{2l+m}\varrho^n\cos^m\varphi\right]} \varrho d\varrho d\varphi$$

$$\text{où } (6.5) \quad u(P) = -\frac{ik}{2\pi} e^{ikw_0} \iint g(p,q)\; e^{ik\left[yp+qy+z\sqrt{n^2-p^2} + {}_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n\sin^m\varphi\right]} \rho d\rho d\varphi$$

Telle qu'elle est, l'intégrale n'est pas facile à évaluer.

En mettant :

$$x = r\cos\alpha, \qquad p = \rho\cos\varphi$$
$$y = r\sin\alpha, \qquad q = \rho\sin\varphi$$

et en introduisant ces expressions dans (6. 4), on obtient,

$$(6.6) \quad u(P) = A_0 \int_0^b \int_0^{2\pi} G(\varrho,\varphi)\, e^{ik\left[r\varrho\cos(\varphi-\alpha) + z\sqrt{n^2-\varrho^2} + b_{lnm}\sigma^{2l+m}\,{}^n\cos^m\varphi\right]} \varrho d\varrho d\varphi$$

où $b = \sin\vartheta$, $n = 1$, ϑ est l'angle maximum des rayons refractés avec l'axe de l'instrument. La constante A_0 représente la quantité hors de l'intégrale (6.4).

L'intégration, par rapport à φ, s'effectue facilement de plusieurs façons. Une manière est, d'exprimer, $\cos^m\varphi$ d'abord en angles multiples de φ, d'étendre le dernier terme de l'exponentielle en séries de puissance et d'intégrer terme après terme, par rapport à φ. L'autre manière consiste à développer le dernier terme, en séries de puissance et exprimer les puissances individuelles de $\cos^m\varphi$ en angles multiples de φ et enfin à intégrer terme à terme. Dans une troisième procédure on utilise le développement bien connu des exponentielles en séries de fonctions de Bessel, puis on fait l'intégration. Les avantages d'une méthode sur l'autre sont minimes. Ici, nous prenons la seconde

*Ici le facteur $\frac{1}{r_0(p,q)}$ est à omettre.

procédure.

En développant le dernier terme de l'exponentielle dans (6.5) nous écrivons :

$$(6.7) \qquad u(P) = A_0 \, \Sigma B_s \int_0^b Gj(\varrho) \, e^{ikz\sqrt{n^2-\varrho^2}} \varrho^{sn+1} d\varrho \int_0^{2\pi} e^{ik\varrho\cos(\varphi-\alpha)} \cos^{sm+j} \varphi d\varphi$$

où $B_s = (ikb_{1nm}\,\sigma^{21+m})^s \; \frac{1}{s!}$, la fonction d'amplitude G (p, q) peut se développer sous la forme :

$$(6.8) \qquad G(p,q) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(\varrho) \cos^j \varphi.$$

au lieu du développement habituel de Fourier.*

On fait cela par commodité, pour ne pas compliquer l'analyse ; ce n'est pas une restriction puisqu'on peut facilement faire les calculs, si, le développement de Fourier de G (p, q) est remplacé par le côté droit de (6.8).

L'intégrale, compte tenu de φ, est facile à évaluer.

On remplace les puissances de cos φ au moyen des cosinus des angles multiples de cos φ. Pour cette transformation on a la formule :

$$\cos^n = 2^{1-n}\Big\{\cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)\varphi +$$

$$(6.9a) \qquad + \frac{n!}{\frac{n}{2}!\,\frac{n}{2}!} \quad (n \text{ pair})$$

$$+ \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!} \cos\varphi \quad (n \text{ impair})$$

et (6.9b) $$\sin^n\varphi = (-1)^{\frac{n}{2}}\, 2^{1-n}\Big\{\cos n\varphi - \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)\varphi +$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha\Big\} + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2n} \quad (n \text{ pair})$$

$$\sin^n\varphi = (2i)^{1-n}\Big\{\sin n\varphi - \binom{n}{1}\sin(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\sin(n-4)\varphi +$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin\varphi, \quad (n \text{ impair})$$

Introduisant (6.9a) dans la seconde intégrale de (6.7) on obtient

$$C_S \int_0^{2\pi} e^{ikr\cos(\varphi-\alpha)} \Big[\cos(sm+j)\varphi + (sm+j)\cos(sm+j-2)\varphi + \frac{(sm+j)sm+j-2)}{2}\cos(sm+j-4)\varphi$$

$$(6.10) \qquad + \ldots + \frac{(sm+j)!}{(\frac{sm+j}{2})!\,(\frac{sm+j}{2})!}\Big] d\varphi \quad (n \text{ paire})$$

$$\text{ou} \quad + \frac{(sm+j)!}{(\frac{sm+j-1}{2})!\,(\frac{sm+j+1}{2})!} \cos\varphi\Big] d\varphi \quad (n \text{ impaire})$$

* $g(p,q) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{g_i(\rho)\cos^j\varphi + h_j(\rho)\sin_j\varphi\right\}$

Des relations bien connues

$$(6.11)\quad \int_0^{2\pi} e^{ikz\cos\varphi}\cos n\varphi \, d\varphi = 2\pi\, i^n J_n(kz)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ikz\cos\varphi}\sin n\varphi \, d\varphi = 0$$

l'intégrale (6.10) est donnée par :

$$(6.12)\quad \begin{aligned} 2\pi \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{s,j} \Big[& i^{sm+j}\cos(sm+j)\alpha\, J_{sm+j}(kr\varrho) + \\ & + (sm+j)\, i^{sm+j-2}\cos(sm+j-2)\alpha\, J_{sm+j-2}(kr\varrho) + \dots \\ & + \frac{(sm+j)!}{\left(\frac{sm+j}{2}\right)!\left(\frac{sm+j}{2}\right)!} J_o(kr\varrho)\Big], \quad \text{(si n est paire)} \\ & + \frac{(sm+j)}{\left(\frac{sm+j-1}{2}\right)!\left(\frac{sm+j+1}{2}\right)!}\, i\cos\alpha\, J_1(kr\varrho)\Big], \quad \text{si n est impaire} \end{aligned}$$

Ici, $C_{s,j} = 2^{1-sm+j} A_o B_s$.

Quand on introduit (6.12) dans (6.7) et, si on arrange de nouveau un peu la somme, on obtient :

$$u(P) = 2\pi A_o \sum_{j,s=0}^{\infty} C_{s,j} \frac{(ikb_{1nm}\sigma^{21+m})^s}{S!} \int_0^{\beta} e^{ikz\sqrt{n^2-\varrho^2}}\, G_j(\varrho).$$

$$(6.13)\quad \begin{aligned} \Big[& i^{sm+j}\cos(sm+j)\alpha\, J_{sm+j}(kr\varrho) + (sm+j)\, i^{sn+j-2}\cos(sm+j-2)\alpha\, J_{sm+j-2}(kr\varrho) \\ & + \left(\frac{(sm+j)(sm-1)}{2!}\right)\cos(sm+j-5)\, a\, J_{sm+j-4}(kr\ ) + \dots \\ & + \frac{(sm+j)}{\left(\frac{sm+j}{2}\right)!\left(\frac{sm+j}{2}\right)!} J_o(kr\varrho)\,\varrho\Big]\ sm+j\ d\varrho \quad \text{(even n)} \\ \text{ou}\quad & + \frac{(sm+j)!}{\left(\frac{sm+j-1}{2}\right)!\left(\frac{sm+j+1}{2}\right)!}\, i\cos\alpha\, J_1(kr\varrho)\,\varrho\Big]\ sm+1\ d\varrho\ . \quad \text{(odd n)} \end{aligned}$$

où $C_{s,j} = 2^{1-sm+j} B_s$.

L'intégration de (6.13) n'est pas si simple. On peut écrire un terme général de (6.13) comme :

$$(6.14)\quad \int_0^b e^{ikz\sqrt{n^2-\varrho^2}}\, G_j(\varrho)\, J_m(\varrho)\, \varrho^n\, d\varrho$$

Puisque $G_j(\varrho)$ dépend de la distribution nous supposons que sur l'ouverture de la pupille-de-sortie, l'intégrale peut s'évaluer si nous spécifions la fonction absorbante $G_j(p, q)$, p. ex.

$$(6.15)\quad G_j(\rho) = J_j(\rho)$$

ou d'une manière plus générale

$$(6.15a)\quad G_j(p,q) = \sum_j \left\{ A_j\, J_j(\beta\rho)\cos j\varphi + B_j\, J_j(\beta\rho)\sin j\varphi \right\}$$

L'intégrale (6.14) est de la forme :

$$(6.16)\quad \int_0^b e^{ikr\sqrt{n^2-\rho^2}}\, J_j(\rho)\, J_m(kr\rho)\, \rho^n\, d\rho. \qquad (\beta = 1)$$

Nous avons étudié les intégrales du type (6.16) dans réf. (1963) quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $b = n$. Celles-ci sont rencontrées dans la théorie exacte de la diffraction, par des ouvertures circulaires et des écrans circulaires (équation A.1). Si, on écrit :

$$(6.17)\quad \begin{aligned} I_{j,m,q} &= \int_0^{\infty} e^{\pm knz\sqrt{t^2-1}} \frac{J_j(nt)\, J_m(knrt)}{\sqrt{t^2-1}}\, t^q\, dt \\ &= \pm i \int_0^1 e^{\pm iknz\sqrt{1-t^2}} \frac{J_j(nt)\, J_m(knrt)}{\sqrt{1-t^2}}\, t^q\, dt \\ &\pm \int_1^{\infty} e^{\pm knz\sqrt{t^2-1}} \frac{J_j(nt)\, J_m(knrt)}{\sqrt{t^2-1}}\, t^q\, dt \\ &= \pm\, i\, C_{j,m,q} \pm D_{j,m,q} \end{aligned}$$

Alors, $C_{j,m,q}$ est donné par l'expression,

$$(6.18)\quad C_{j,m,q} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(m+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^j \left(\frac{knr}{2}\right)^m \Sigma(-1)^s \frac{\Gamma(s+\alpha)}{s!\,\Gamma(s+j+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^{2s} {}_2F_1(-s, -s-j, m+1\,; (kr)^2) \left[\frac{J_{s+a}(knz) + iH_{s+a}(knz)}{\left(\frac{knz}{2}\right)^{s+\alpha}}\right]$$

où $\alpha = s + \frac{j+m+q}{2}$ et $H_k(z)$ est la fonction de Struve de l'ordre k

Alors, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'intégrale (6.16) est égale à la dérivée de $C_{j,m,q}$ par rapport à knz comme suit :

$$(6.19)\quad J_{j,m,q}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\partial C_{j,m,q}}{\partial(knz)}$$

Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, on trouve par un calcul similaire à celui que l'on fait pour évaluer $C_{j,m,q}$ l'expression suivante :

$$(6.20)\quad \begin{aligned} J_{j,m,q}(\sin\theta) &= 2\sqrt{\pi}\,(\sin\theta)^{q+1} \left(\frac{n\sin\theta}{2}\right)^j \cdot \left(\frac{knr\sin\theta}{2}\right)^m \\ &\cdot \Sigma(-1)^s \frac{\left(\frac{n\sin\theta}{2}\right)^{2s}}{s\ (s+j+1)}\ {}_2F_1(-s, -s-j, m+1\,; (kr)^2) \\ &\cdot \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{iknz}{2}\right)^p (\sin\theta)^{2r}}{\Gamma(p/2+1)\, r!\, \Gamma(p/2-r+1)} \end{aligned}$$

qui, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, se réduit à (6.18).

L'expression (6.20) est une généralisation de tous les résultats obtenus par un grand nombre d'auteurs.

Bien qu'elle soit compliquée pour le calcul numérique de u (P), cependant, la série converge rapidement et un petit nombre de termes de (6.20) est nécessaire pour obtenir une bonne approximation du champ image u (P).

Dans la plupart des applications, faites jusqu'à présent, l'amplitude g (p, q) est supposée être indépendante de l'angle φ, c'est-à-dire, g (ρ) ; et on peut développer g (ρ) par des polynômes simples en ρ, ou bien, par les fonctions de Bessel, J_s (P)* (s = 1, 2, ... n), n'étant un petit nombre entier.

En plus, on suppose que le plan image est le plan de Gauss ; en ce cas z = 0. Avec toutes ces simplifications, l'intégrale (6.7) s'écrit :

$$(6.21) \qquad u(P) = -A_o \int_o^b J_o(\rho)\, e^{\left[ikr\rho \cos(\varphi-\alpha) + ikb_{imn}\ 21 + m\rho^n \cos^m\varphi\right]} d\rho\, d\varphi$$

L'intégration par rapport à φ, se fait comme précédemment, en faisant j = 0. Alors, au lieu de (6.13), on obtient :

$$(6.22) \qquad \begin{aligned} u(P) = 2\pi A_o \sum_{s=0}^{\infty} C_s \int_0^b J_n(\rho) \Big[& i^{sm} \cos(sm)\alpha\, J_{sm}(kr\rho) + \\ & + sm\, i^{sm-2} \cos(sm-2)\alpha\, J_{sm-2}(kr\rho) + \dots \\ & + \frac{(sm)!}{\left(\frac{sm}{2}\right)!\left(\frac{sm}{2}\right)!} J_o(kr\rho)\Big] \rho^{ns+1}\, d\rho, \qquad \text{(n paire)} \\ & + \frac{(sm)!}{\left(\frac{sm-1}{2}\right)!\left(\frac{sm+1}{2}\right)!} i \cos\alpha\, J_1(kr\rho)\Big] \rho^{sn+1}\, d\rho, \qquad \text{(n impaire)} \end{aligned}$$

Une intégrale typique de (6.22) est de la forme :

$$(6.23) \qquad V_{n,p,q} = \int_0^b J_n(\rho)\, J_p(kr\rho)\, \rho^q\, d\rho$$

Ce genre d'intégrales est bien connu. En effet, ce sont des cas spéciaux des intégrales, $C_{j,m,2}(z, \rho)$, mentionnées plus haut, obtenues par différentiation, par rapport à z et puis en laissant z tendre vers zéro.

Le résultat du calcul donne la formule suivante :

$$(6.24) \qquad V_{n,p,q} = \frac{\left(\frac{krn \sin\theta}{2}\right)^p \left(\frac{n \sin\theta}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} (n \sin\theta)^{q+1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{n \sin\theta}{2}\right)^{2s} {}_2F_1(-s, -s-p; n+1; (kr)^2)}{s!\, \Gamma(p+s+1)\Gamma(p+q+2s+1)}$$

* En fait, les arguments des fonctions de Bessel sont ($\beta_s \rho$), au lieu de ρ, où β_s sont les racines de $J_k(\beta_s) = 0$, c'est-à-dire on développe g (p, q) en séries de Fourier-Bessel et (6.20) est modifié en remplaçant n sin par (n sin ϑ β_s).

valable pour $k\rho < 1$. Pour $k\rho > 1$, une expression semblable est obtenue, en permutant n et q, et en remplaçant dans la somme n sin ϑ par k rn sin ϑ, et $(kr)^2$ par $(k\,r)^{-2}$.

Une autre forme pour $V_{n,p,q}$, peut-être plus convenable, est obtenue à partir de $C_{n,p,q}$, de (6.20) au moyen de la fonction confluente hypergéométrique, ${}_1F_2(\alpha, \beta, \gamma, z)$

$$V_{n,p,q} = \frac{1}{2} \left(\frac{krn \sin\theta}{2}\right)^p \left(\frac{n \sin\theta}{2}\right)^n (n \sin\theta)^{q+1}.$$

$$(6.25) \qquad \sum_{m=o}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma\left(m + \frac{p+n+q+1}{2}\right)\left(\frac{n \sin\theta}{2}\right)}{m!\ \Gamma(m+p+q+1)\Gamma\left(m + \frac{p+n+q-1}{2}\right)}.$$

$${}_1F_2\left(m + \frac{p+n+q-1}{2};\ m + \frac{p+n+q+1}{2},\ q+1; -(kr)^2\right).$$

On peut aussi exprimer $V_{n,p,q}$ par des produits de fonctions de Bessel, en employant (6.25) (propriétés des fonctions hypergéométriques confluentes). Dans le cas, p + q - n - 1 est un nombre pair, soit 2 K, K = 1, 2, ..., $V_{n,p,q}$ se réduit à une forme plus simple, à savoir :

$$(6.26) \qquad V_{n,p,q} = 2^q \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+1-m)\, m!} \left(\frac{2}{n \sin\theta}\right)^{m-q}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+m+1)}{s!} (krn \sin\theta)^s J_{s+p}(krn\,\theta)\, J_{s+m+n+1}(n \sin\theta).$$

Quand cela n'est pas le cas, la première somme n'est plus une somme finie en m.

Toutes ces formules sont valables si $k\,r < 1$; pour obtenir des formules valables pour $k\,r > 1$, il faudra permuter p et n dans les sommes et arguments des fonctions de Bessel. Dans les fonctions hypergéométriques, il faudra remplacer (k r) par $(k\,r)^{-1}$.

Une autre manière d'intégrer (6.73) consiste à écrire :

$$t^q J_p = t^s (t^{p+1} J_p) \quad \text{ou} \quad t^q J_n = t^s (t^{n+1} J_n), \ (s + n = q - 1)$$

et à intégrer par parties. Nous n'insisterons pas sur cette méthode qui paraît sans avantage sur les autres.

Une façon plus élégante et peut-être plus commode au moins, quand m est un nombre entier petit dans le terme d'aberration (aberration d'ordre bas), consiste à utiliser la première méthode de développement de $\cos^m \varphi$ aux angles multiples de φ puis à exprimer l'exponentielle de la partie d'aberration en séries de fonctions de Bessel, ainsi que le terme exp $(ik\rho \cos(\varphi - \alpha))$.

Cette procédure nous donne

$$(6.27a)\quad e^{ikr\rho\cos(\varphi-\alpha)} = \sum_{r=0}^{\infty} i^r J_r(kr\rho)\left[e^{ir(\varphi-\alpha)} + e^{-ir(\varphi-\alpha)}\right],$$

$$(6.27b)\quad e(kb_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n\cos m\varphi = \sum^{\infty} i^s J_s(kb_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n)\left[e^{ims\varphi} + e^{-ims\varphi}\right].$$

$$(6.27c)\quad e^{ikb_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n\sin nm\varphi} = \sum_{s=0}^{\infty} {}_{2s}J_{2s}(kb_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n)\cos 2sm\varphi$$

et

$$+ 2l\sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+1}(lb_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n)\sin(2s+1)m\varphi$$

$$(6.28a)\quad e^{iX\cos(\varphi-\alpha)} = \sum_{r=0}^{\infty} i^p J_p(X)\cos p^{(\varphi-\alpha)}$$

$$(6.28b)\quad e^{iY\cos m\varphi} = \sum_{r=0}^{\infty} i^r J_r(Y)\cos rm\varphi$$

$$(6.28c)\quad e^{\pm iZ\sin n\varphi} = J_o(Z) + 2\sum_{s=0}^{\infty} J_{2s}(Z)\cos 2sm\varphi \pm 2i\sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+1}(Z)\sin(2s+1)m\varphi$$

En multipliant ces expressions et en faisant l'intégration, par rapport à φ, on trouve, que le seul terme différent de zéro est $r = sm$. Sa valeur égale à $2\pi\cos sm\alpha$).

Ainsi l'intégrale (6.21) se réduit à :

$$(6.29)\quad u(p) = 2(2\pi)A_o\left[\int_0^b e^{ikz\sqrt{n^2-\rho^2}}\left\{(J_o(kr\rho)J_o(kb_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n) + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=1}^{\infty} 2\Sigma i^{s(m+1)}\cos m\, sm\alpha\, J_{sm}(kr\rho)\, J_s(b_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n)\psi/\iota\varphi\right\}\right].\rho\, d\rho$$

Cette intégrale n'est pas facile à évaluer, mais on peut développer les fonctions de Bessel $J_s(kb_{lnm}{}^{2l+m}\rho^n)$ en séries de puissance de leurs arguments et faire ensuite l'intégration, terme à terme.

Le terme général sera de la forme,

$$(6.30)\quad \int_0^b e^{ikz\sqrt{n^2-\rho^2}} J_p(kr\rho)\,\rho^{q+1}\,d\rho,\quad (q = 2kn),\quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Dans (6.29) nous supposons la fonction d'amplitude constante. Si, on prend $g(p, q) = J_s(\rho)$, alors (6.30) deviendra :

$$(6.31)\quad J_{s,p,q+1} = \int_0^b e^{ikz\sqrt{n^2-\rho^2}} J_s(\rho)\, J_p(kr\rho)\rho^{q+1}\, d\rho.$$

Celle-ci est du même genre que l'intégrale, que nous avons déjà évaluée. Si on fait l'étude du champ sur le plan image de Gauss, alors $z = o$, et (6.30) se réduit à $V_{s,p,q}$, traité plus haut avec $q \Rightarrow q+1$.

Il va sans dire, que les résultats obtenus par cette méthode mènent à l'expression qu'on a trouvée par les autres méthodes. Le but de cette méthode sera évident quand nous discuterons la théorie de Zernike-Nijboer et sa généralisation pour traiter les aberrations ; elle mène à une plus grande simplification dans le résultat final, que les autres procédés.

Ici, il faut dire, que les intégrales du type (6.30) sont des généralisations des fonctions de Lommel.

En effet, quand on limite le développement du terme exponentiel au second degré en p et si q = p, ou q = - p, p est un nombre entier ou non, l'intégrale (6.30) se réduit à une somme des fonctions de Lommel U_{p+1} et U_{p+2}, c'est-à-dire :

$$(6.32) \quad e^{iknz\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)} \frac{1}{2}\left(\frac{nr}{z}\right)^p \left[U_{p+1}(knz \sin^2\theta, knr \sin\theta) + \right.$$

$$\left. + iU_{p+2}(knz \sin^2\theta, knr \sin\theta)\right]$$

quand p = q.

J'ai mentionné ce résultat à plusieurs reprises (voyez réf. Chako, 1953, 1963).

2. - LE CHAMP IMAGE POUR LES GRANDES OUVERTURES.

Jusqu'à présent, nous avons traité le problème de la diffraction par un système optique sans tenir compte de la quantité $r^o = \sqrt{n^2 - p^2 - q^2}$, figurant dans l'intégrale (4.22a, b) du chapitre IV. Mais Mais ce terme est souvent important et on ne le peut pas ignorer. Le champ dans l'espace image prend alors la forme (4.45), chapitre IV.

$$(6.33) \quad u(P) = A_o \int_d G(p, q)\, e^{ik\left[W + (\vec{r}, s)\right]} \frac{dpdq}{r^o(p, q)}, \quad (r^o = \sqrt{n^2 - p^2 - q^2})$$

où G (p, q) est la distribution du champ sur l'ouverture D, satisfaisant la relation $p^2 + q^2 \leq n^2$.

Si, ρ, φ et r, α sont de nouvelles variables définies par :

$$(6.34) \quad \begin{array}{ll} p = \rho \cos\varphi, & x = r \cos\alpha, \\ q = \rho \sin\varphi. & y = r \sin\alpha, \end{array}$$

(6.33) devient:

$$(6.35)\; u(P) = A_o \int_0^b \int_0^{2\pi} G(\rho,\varphi) e^{ik\left[r\rho\cos(\varphi-\alpha) + z\sqrt{n^2 - \rho^2} + \Sigma b_{lnm}\sigma^{2l+m}\rho^n \cos^m\varphi\right]} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{n^2 - \rho^2}}$$

au lieu de (6.6).

D'après l'analyse du paragraphe précédent, nous obtenons une intégrale typique de la forme :

$$(6.36) \quad U_{j,m,q} = \int_0^b \frac{e^{ikz\sqrt{n^2 - \rho^2}}}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}} G_j(\rho)\, J_m(\rho)\, \rho^n\, d\rho, \quad (G_j(\rho) = J_j(\beta_s n\rho))$$

où $p^2 + q^2 = \rho^2$, dans l'expression (6.35) au lieu de l'intégrale (6.16).

Cette intégrale est équivalente à la partie finie de Ij, m, q (voyez 6.18), que nous avons dénotée par Cj, m, q.
Sa valeur explicite est égale à l'expression (2.416) si $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou b = 1.
Mais, si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, nous obtenons, comme dans le cas précédent, la formule :

$$u(P) = \frac{i\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(m+1)}\left(\frac{n\beta_s \sin\vartheta}{2}\right)^j \left(\frac{knr\sin\vartheta}{2}\right)^m \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\Gamma(q+m)}{q!\,\Gamma(q+j+1)} \left(\frac{n\beta_s \sin\vartheta}{2}\right)^{2q}$$

$$(6.37) \qquad {}_2F_1\left(-j, -q, -j, m+1; \left(\frac{knr\sin\vartheta}{2}\right)^2\right)\left[\frac{J_{q+m}(knz) + iH_{q+m}(knz)}{\left(\frac{knz}{2}\right)^{q+m}}\right]$$

qui est valable pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. La formule (6.37) généralise les résultats obtenus jusqu'à présent.

Il est évident que les formules qui suivent l'équation (6.17) sont des cas particuliers, obtenues de la même façon que l'intégrale (4.420) en remplaçant Vj, m, q, par

$$(6.38) \qquad U_{j,m,q} = \int_0^b J_j\,\frac{(\beta_s n\rho)\ J_m(krn\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\rho^q\,dq$$

Les intégrales du type (6.38) ont été étudiées par Bouwkamp (1950/51), Levine - Schwinger (1948-1951) et sont généralisées par l'auteur (1953, 1963).

Les intégrales sont des formes particulières de (6.36) du type de Bouwkamp-Levine - Schwinger, qui jouent un grand rôle dans la théorie exacte de la diffraction par des ouvertures et écrans circulaires.

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin dans notre analyse, puisqu'il n'y a aucune difficulté pour obtenir les valeurs d'intégrale (3) si $z = 0$, ou bien, si les aberrations s'annulent.

Cette brève analyse complète la discussion d'un système de révolution.

D'autre part, si nous considérons un seul terme d'aberration du type $D_{l,m,n}\,\sigma^{-2l+n}\rho^n \sin m\varphi$, l'évaluation de l'intégrale de diffraction est facile. En effet, si m est un nombre entier pair, $m = 2p$, $\sin 2p\varphi$, est exprimé par une somme de cosinus de $2p-2s$, $s=0,1,..p$, d'après la formule (6.96). Si m est impair, $m = 2p+1$, l'intégration par rapport à φ se fait facilement. Nous obtenons un cas particulier du résultat obtenu ci-dessous.

Au paragraphe suivant, nous traiterons les cas généraux de combinaisons d'aberrations.

3.- EVALUATION DE L'INTEGRALE DE LA DIFFRACTION POUR DES SYSTEMES NON-SYMETRIQUES.

Si un système optique ne possède aucun axe de symétrie, ou dans l'optique électronique d'un système de révolution, le développement de la fonction d'aberration ou fonction caractéristique de Hamilton W, est exprimé par une série de Fourier :

$$(6.39) \qquad W = W_o + \sum_{l,r,s,n,} \left\{ C_{l,r,s,n}\,\rho^n \cos m\varphi + D_{l,r,s,n}\,\rho^n \sin m\varphi \right\}$$

(voyez chapitre IV).

Le champ diffracté u (P) est alors :

$$u(P) = A_o \int_o^b \int_o^{2\pi} \left\{ G(\rho,\varphi)\, e^{ik\left[rn\rho\cos(\varphi-\alpha) + zn\sqrt{1-\rho^2}\right]}\right.$$

$$(6.40) \qquad \left. e^{ik\sum\left\{C_{l,r,s,n,}\,\rho^n \cos m\varphi + D_{l,r,s,n,}\,\rho^n \sin m\varphi\right]}\right\} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Pour intégrer (6.40), nous développons les exponentielles en séries :

$$e^{ix\cos(\varphi-\alpha)} = \sum_{p=o}^{\infty} \varepsilon_p\, i^p\, J_p(X)\cos p(\varphi-\alpha)$$

$$(6.41) \qquad e^{iY\cos m\varphi} = \sum_{r=o}^{\infty} \varepsilon_r\, i^r\, J_r(Y)\cos rm\varphi$$

$$e^{iZ\sin r\varphi} = J_o(Z) + 2\sum_{r=1}^{\infty} J_{2r}(Z)\cos 2rn\varphi + 2i\sum_{q=o}^{\infty} J_{2r+1}(Z)\sin(2r+1)n\varphi$$

où $X = knr\rho$, $\quad Y = (k\sum C_{lrsn}\,\rho^n)$, $\quad Z = (k\sum D_{lrsn}\rho^n)$.

Nous considérons simplement un seul terme de chacune de deux séries. L'intégrale (6.40) s'écrit :

$$u(P) = A_o \int_o^b \int_o^{2\pi} G(\rho,\varphi)\left\{ e^{ik\left[nr\rho\cos(\varphi-\alpha) + z\sqrt{n^2-\rho^2}\right]}\right.$$

$$(6.42) \qquad \left. e^{ik(f\,pm\,\rho^p \cos m\varphi + g_{q,n}\,\rho^q \sin n\varphi)}\right\} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{n^2-\rho^2}}$$

où $A_o = -\frac{ikn}{2\pi}\,e^{ikW_o}$

L'intégration par rapport à φ est effectuée comme dans les paragraphes précédents. Seulement, il faut distinguer entre les termes pairs et impairs en $\sin n\varphi$.

Alors les termes qui sont différents de zéro, satisfont aux conditions suivantes :

$$(6.43) \qquad \begin{array}{ll} p = rm \pm 2sn & (r,s) = (0, 1, 2, \ldots) \\ p = rm \pm (2s+1)\,n & \end{array}$$

Les contributions de ces termes à l'intégrale sont égales à :

$$(6.44) \qquad \left.\begin{array}{ll} \beta\pi\,\varepsilon_p\varepsilon_r\varepsilon_s\, i^{p+r}\,(\mp)\left\{\cos(rm \mp 2sn)\alpha\right\} & (\beta = 2,\ p = r = s = o) \\ \beta\pi\,\varepsilon_p\varepsilon_r\varepsilon_s\, i^{p+r+1}\,\sin(rm \pm (2s+1)\,n)\alpha, & (\beta = 1,\ p, r, s \neq o) \end{array}\right\}$$

où $\varepsilon_j = 1$ si r ou $p = 0$, $\quad$ et $\varepsilon_j = 2$ si $r \neq 0$, $p \neq 0$.

Alors nous obtenons pour la valeur de u(P) l'expression :

$$u(P) = \beta \pi A_o \Big[\Big\{ \sum_{p = rm \pm 2sn} \sum_{r=o} \sum_{s=o} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_r \mathcal{E}_s \, i^{p+r+s} (\mp) \cos (rm+2sn)\alpha \cdot \Big\}$$

$$\text{(6.45)} \qquad \int_o^b f(z,\rho)\, J_p(X)\, J_r(Y)\, J_{2s}(Z)\, \rho\, d\rho$$

$$+ \sum_{p = rm \pm (2s+1)n} \sum_{r=o} \sum_{s=o} (-1)^{p+r+1} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_r \mathcal{E}_s \, i^{p+r+s+1} \sin(rm \pm (2s+1)n)\alpha \cdot$$

$$\int_o^b f(z,\rho)\, J_p(X)\, J_r(Y)\, J_{2s+1}(Z)\, \rho\, d\rho \Big]$$

ou

$$\mathcal{E}_p = 2, \text{ si } p = r = s = 0, \text{ et } \mathcal{E}_p = 1, \text{ si } p = s \text{ et } r \neq 0.$$

$$\mathcal{E}_j = 1, \text{ si } j = 0 \text{ et } \mathcal{E}_j = 2 \text{ si } j \neq 0.$$

et

$$f(\rho, z) = \frac{e^{iknz\sqrt{1-\rho^2}}}{\sqrt{1-\rho^2}} \, G(\rho)$$

Dans le cas de développement classique (5.11) ou de développement de Nijboer (5.12) les quantités X, Y et Z sont prises égales à :

$$\text{(6.46)} \qquad X = knr\rho \,, \quad Y = kC_{1,r,s,p}\, \rho^p \,, \quad Z = kD_{1,r,s,q}\, \rho^q \quad (r + s = m \text{ ou } n),$$

et dans le développement de Zernike-Nijboer

$$\text{(6.47)} \qquad X = knq\rho \,, \quad Y = kf_{pm}\, Z_p^m(\rho), \quad Z = kg_{q,n}\, Z_q^n(\rho).$$

Sous cette forme, l'évaluation de l'intégrale (6.45) n'est pas possible. Mais comme les coefficients d'aberration $kC_{1,r,s,p}$ et $kD_{1,r,s,q}$ étant plus petits par rapport à la longueur d'onde, nous pouvons développer les fonctions de Bessel $J_r(kC_{1,r,s,p}\rho^p)$, $J_{2s}(kD_{1,r,s,q}\rho^q)$, etc en séries de puissances de ces coefficients. Alors, jusqu'au degré r + 6 de $kC_{1,r,s,m,}$ et 2s + 6 de $kD_{1,r,s,n}$ nous obtenons pour u(P) l'expression suivante :

$$\text{(6.48)} \quad u(P) = \beta A_o \pi \sum_{p=rm+2sn}^{\infty} (\mp) \sum_{r=o} \sum_{s=o} i^{p+r+s} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_r \mathcal{E}_s (\mp) \cos(rm+2sn)\alpha \int_o^b f(\rho,z)\, J_p(X) \Big\{ \frac{Y^r \, Z^{2s}}{2^{r+2s} r!\,(2s)!}$$

$$- \frac{1}{2^{r+2s+2}} \Big[\frac{Y^{r+2} Z^{2s}}{(r+1)!\,(2s)!} + \frac{Y^r Z^{2s+2}}{r!\,(2s+1)!} \Big] + \frac{1}{2^{r+2s+4}} \Big[\frac{Y^{r+4} Z^{2s}}{2!\,(r+2)!\,(2s)!} + \frac{Y^{r+2} Z^{2s+2}}{(r+1)!\,(2s+1)!} + \frac{Y^r Z^{2s+4}}{2!\,r!\,(2s+2)!} \Big]$$

$$- \frac{1}{2^{r+2s+6}} \Big[\frac{Y^{r+6} Z^{2s}}{3!\,(r+3)!\,(2s)} + \frac{Y^{r+4} Z^{2s+2}}{2!\,(r+2)!\,(2s+1)!} + \frac{Y^{r+2} Z^{2s+4}}{2!\,(r+1)!\,(2s+2)!} + \frac{Y^r Z^{2s+6}}{3!\,r!\,(2s+3)!} \Big] + \dots \Big\} \rho\, d\rho$$

$$- A_o \pi \sum_{p=rm\pm(2s+1)n} \sum_{r=o} \sum_{s=o} i^{p+r+s+1} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_r \mathcal{E}_s \sin(rm+(2s+1)\alpha \int_o^b f(\rho,z)\, J_p(X) \Big\{ \frac{Y^r \, Z^{2s+1}}{2^{r+2d+1}\, r!\,(2s+1)!}$$

$$- \frac{1}{2^{r+2s+3}} \Big[\frac{Y^{r+2} Z^{2s+1}}{(r+1)\,(2s+1)!} + \frac{Y^r Z^{2s+3}}{r!\,(2s+2)!} + \Big] \frac{1}{2^{r+2s+5}} \Big[\frac{Y^{r+4} Z^{2s+1}}{2!\,(r+2)!\,(2s+1)!} + \frac{Y^{r+2} Z^{2s+3}}{(r+1)!\,(2s+2)!} + \frac{Y^r Z^{2s+5}}{2!\,r!\,(2s+3)!}$$

$$- \frac{1}{2^{r+2s+7}} \Big[\frac{Y^{r+6} Z^{2s+1}}{3!\,(r+3)!\,(2s+1)!} + \frac{Y^{r+4} Z^{2s+3}}{2!\,(r+2)!\,(2s+2)!} + \frac{Y^{r+2} Z^{2s+5}}{2!\,(r+1)!\,(2s+3)} + \frac{Y^r Z^{2s+7}}{3!\,r!\,(2s+4)!} + \dots \Big\} \rho\, d\rho$$

Une intégrale typique de (6.48) est de la forme :

(6.49) $$I_{\mu\nu} = C_o \int_0^b G(\rho)\, e^{iknz\sqrt{1-\rho^2}}\, J_\mu(knr^2\rho)\, \rho^{\nu+1} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

- (6.49) où $\mu = rn + 2sn$, ou $rn + (2s+1)\,n$ et $\nu = rp+2sq+2k+2l$

$(k = 0, 1, 2, \ldots.)$ $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ et la constante

C est égale à

$$n^\nu C_o = (k\, f_{p,m})^{rm+2k}\, (kg_{q,n})^{(2s+1)\,n+2l}$$

Si $g(\rho)$ est une constante cette intégrale est équivalente à (6.16) si $J_j(\rho) = 1$.
Sa valeur est alors :

(6.50) $$I_{\mu\nu} = C_o\, \frac{1}{2} \sum_{j=0} \frac{(iknz)^j}{j!}\, \Gamma\frac{j+1}{2} \left(\frac{knr}{2}\right)^\mu$$
$$\left\{ {}_1F_2 \left(\frac{\mu+\nu+r}{2},\ \mu+1\ ;\ \frac{j+\mu+\nu+1}{2}\ -\left(\frac{knr}{2}\right)^2\right)\right\}$$

Si la fonction d'amplitude $G(\rho)$ est représentée par une fonction de Bessel, $J_\alpha(\beta,\rho)$ l'intégrale est équivalente à l'intégrale (6.16) dont la valeur est exprimée par l'expression (6.18)

Bien entendu, la valeur du champ image donnée par (7.45) deviendra trop complexe pour le calcul numérique. Cependant dans les cas particuliers que nous rencontrons dans la pratique, il suffit de limiter les indices μ, ν à de petits nombres ; alors le calcul n'est pas trop laborieux ainsi que nous le montrerons dans le chapitre suivant.

Le cas particulier où l'aberration $C_{l,r,s,p}$ est obtenue quand on prend m = 0 dans notre formule et la fonction J_r de Bessel égale à 1. On a l'indice p = 2sn dans les termes en cosinus de l'angle φ et $\rho = (2s+1)n$ dans les termes en sinus de φ. Alors u (P) est donné par la formule :

(6;46') $$\begin{aligned} u(P) = \beta\pi A_o \Bigg\{ & \sum_{s=o} \cos 2s\sin\alpha \int_o^b f(z,\rho)\, J_{2sm}(knr\rho). \\ & J_{2s}(k\, D_{1,n,m}\, \rho^n)\ \rho\, d\rho \\ & + i \sum_{s=o} \sin (2s+1)\, n\alpha \int_o^b f(z,\rho)\, J_{(2s+1)m}(knr\rho). \\ & J_{(2s+1)}(k\, D_{1,n,m}\rho^n)\ \rho\, d\rho \Bigg\} \end{aligned}$$

Une intégrale typique de (6.46') est,

$$\int_o^b e^{iknz\sqrt{1-\rho^2}}\, J_\mu(knr\rho)\, J_\nu(k\, D_{enm}\, \rho^n)\, G(\rho) \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

où $$f(\rho, z) = \frac{e^{iknz\sqrt{1-\rho^2}}}{n\sqrt{1-\rho^2}}\, G(\rho)$$

Cette intégrale est difficile à évaluer, mais si la fonction de Bessel $J_{\nu}(kd_{1enm}\rho^n)$ est développée en série de ρ^n et si $G(\rho) = \sum_j J_j(n\beta s\rho)$, chaque intégrale de la série est du type des intégrales de Bouwkamp - Levine - Schwinger.

A notre connaissance les formules (6.45) et (6.46) généralisent les résultats obtenus jusqu'à présent, même si elles sont trop compliquées pour être utiles dans le calcul du champ de l'image u (P), si p, r, s et $D_{1,n,m}$ ne sont pas petits. S'il s'agit de plus de deux aberrations, dans un système optique, elles sont pratiquement inutiles.

Nous avons pris les limites de φ de 0 à 2π

Si, l'ouverture D est le demi ou le quart d'un cercle, l'évaluation de l'intégrale de diffraction par rapport à φ ne donne aucune difficulté, parce que les relations entre p, r, s sont simples. Mais si l'ouverture correspond à un secteur d'un cercle, les relations entre p, r, s deviennent assez compliquées et l'intégration par rapport à ρ est difficile.

Nous avons déjà calculé le champ u (P) en présence d'une seule aberration, où $g_{q,n} = 0$. D'ailleurs $f_{p,m} = 0$. L'aberration exprimée par $g_{q,n}$ est présente dans un système optique. Ce cas comme le cas précédent est un cas particulier du résultat obtenu ci-dessus.

Pour obtenir la formule qui exprime le champ u (P), il est seulement nécessaire de faire Y = 0 dans la formule (7.45) et (6.48). La fonction de Bessel $J_r(Y) = 1$, alors on a :

$$\begin{aligned} u(P) = A_o\, 2\pi \int_o^b f(r,\rho) \Big\{ & J_o(knr\rho)\, J_o(kg_{n,m}\rho^n) + \\ & + 2 \sum_{p=2sn} \sum_{s=1} i^p \frac{\cos 2sn\alpha}{2} J_{2sn}(knr\rho)\, J_{2s}(kg_{n,m}\rho^n) \\ & + 2 \sum_{p=(2s+1)n} \sum_{s=0} i^{p+1} \frac{\sin(2s+1)n\alpha}{2} J_{(2s+1)n}(knr\rho) \\ & \cdot J_{2s+1}(kg_{n,m}\rho^n) \Big\} \rho\, d\rho \end{aligned} \tag{6.51}$$

où

$$\begin{aligned} u(P) = 2\pi A_o \Big\{ \int_o^b & f(z,\rho) \Big\{ J_o(knr\rho) \Big[1 - \frac{(kg_{n,m})^2}{2^2} + \frac{(kg_{n,m})^4}{2^2 4^2} - \frac{(kg_{n,m})^6}{2^2\, 4^2\, 6^2} \\ & + \ldots\ldots \Big] + 2 \sum_{p=2sn} \sum_{s=1} i^p \frac{\cos 2sn\alpha}{2} J_{2s\alpha}(knr\rho) \\ & \cdot \Big[\frac{(kg_{n,m})^{2s}}{2^{2s}\,(2s)!} - \frac{(kg_{n,m})^{2s+2}}{2^{2s+2}\,(2s+1)!} + \frac{(kg_{n,m})^{2s+4}}{2^{2s+4}\, 2!(2s+2)!} \\ & - \frac{(kg_{n,m})^{2s+6}}{2^{2s+6}\, 3!(2s+3)!} + \ldots\ldots \Big] + \\ & + 2 \sum_{p=(2s+1)n} \sum_{s=0} i^{p+1} \frac{\sin(2s+1)n\alpha}{2} J_{(2s+1)n} \Big[\frac{(kg_{n,m})^{2s+1}}{2^{2s+1}\,(2s+1)!} \end{aligned} \tag{6.52}$$

$$- \frac{(kg_{n,m})^{2s+3}}{2^{2s+3}\,(2s+2)!} + \frac{(kg_{n,m})^{2s+4}}{2^{2s+4}\,2!(2s+3)!} - \frac{(kg_{n,m})^{2s+6}}{2^{2s+6}\,3!(2s+4)!} + \cdots \Big] \Big\} \rho\, d\rho$$

Il est plus commode d'ordonner chaque terme de (6.52) selon les puissances de $kg_{n,m}$ et d'écrire u (P) sous la forme d'une série :

$$(6.53) \qquad u\,(P) = 2\pi A_o \sum_{j=0}^{\infty} (kg_{n,m})^j \; U_j\,(P)$$

Les quantités U_j (P) jusqu'à j = 6 sont comme suit :

$$u_o = \int_0^b f\,(z,\rho)\; J_o\,(a\rho)\; \rho\, d\rho$$

$$u_1 = i^{N+1} \int_0^b (f\,(z,\rho)\; J_n\,(a\rho)\, \rho^n)\; \rho\, d\rho$$

$$u_2 = \frac{1}{4} \int_0^b f\,(z,\rho) \left[-\frac{J_0\,(a\rho)}{2} + \cos 2n\,\alpha\, J_{2n}\,(a\rho) \right] \rho^{2n+4}\; \rho\, d\rho$$

$$u_3 = \int_0^b f\,(z,\rho) \left[\frac{i^{n+1}}{2^4} \cos n\alpha\, J_n\,(a\rho) + \frac{i^{3\,(n+1)}}{2^2\;3!} \right] \rho^{3n}\; \rho\, d\rho$$

$$(6.54) \qquad u_4 = \int_0^b f\,(z,\rho)\; \frac{J_o\,(a\rho)}{2^6} - \frac{\cos 2\,n\alpha}{2^4\;3!} J_{2n}\,(a\rho)$$

$$+ \frac{\cos 4n\alpha}{2^4\;4!} J_{4n}\,(a\rho) \Big] \rho^{4n}\; \rho d\rho$$

$$u_5 = \int_0^b f\,(z,\rho) \left[i^{n+1} \frac{\cos n\alpha}{2^5\;2!\;3!} J_n\,(a,\rho) - i^{3\,(n+1)} \frac{\cos 3n\alpha}{2^5\;4!} J_{3n}\,(a\rho) \right.$$

$$\left. + i^{5\,(n+1)} \frac{\cos 5n\alpha}{2^5\;5!} J_{5n}\,(a\rho) \right] \rho^{5n}\; \rho\, d\rho$$

$$u_6 = \int_0^b f\,(z,\rho)\; - \frac{J_o\,(a\rho)}{2^6\;3!\;3!} + \frac{\cos 2\,n\alpha}{2^6\;2!\;4!} J_{2n}\,(a\rho)$$

$$- \frac{\cos 4n\alpha}{2^6\;5!} J_{4n}\,(a\rho) + \frac{\cos 6n\alpha}{2^6\;6!} J_{6n}\,(a\rho) \Big] \rho^{6n}\; \rho\, d\rho$$

où a = knr

Nous noterons que chaque intégrale de u_j est équivalente à l'intégrale (6.49) si g (ρ) est une constante, et égale à (6.16) si g (ρ) = J_j ($\beta\rho$). c. à d.

$$\int_o^{b=i} e^{iknz\sqrt{1-\rho^2}}\; J_\rho\,(k\,q\,r\,\rho)\,\rho\; \frac{q^{+1}\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

On peut employer (6.52) dans les problèmes du même genre pour les systèmes optiques de révolution. Dans ce cas les invariantes optiques sont :

$$\sigma^2 = x_0^2 + y_0^2, \ \rho^2 = p^2 + q^2, \quad \sigma \rho \sin\varphi = x_0 q - y_0 p.$$

Remarquons ici, qu'on peut exécuter notre analyse d'un seul terme d'aberration, également pour une somme d'aberrations (6.48).

Cependant, même si on inclut seulement deux aberrations d'ordre bas, les résultats seront évidemment très compliqués, sauf, quand les coefficients d'aberration sont très petits, c'est-à-dire quand le développement de l'exponentielle (fonction de phase) est limité à un très petit nombre de termes j par exemple à des termes quadratiques dans les coefficients d'aberration.

Il n'est pas étonnant, que Picht, Steward et d'autres aient limité leurs calculs à une seule des aberrations de troisième ordre.

Dans le cas où dans (6.39) est présente la seule aberration sphérique, les résultats sont bien simples, même quand on considère plusieurs ordres, comme nous le montrerons plus loin.

Encore, il faut dire qu'en notre discussion, nous avons considéré que la fonction d'amplitude était donnée par des fonctions de Bessel, avec ou sans dépendance de l'angle φ. Dans la plupart des cas on la prend constante sur l'ouverture (front d'onde, pupille-de-sortie). Quelques auteurs ont pris pour G (p,q) un polynôme simple, d'argument $(1 - \rho^2)$. En général, on peut développer G (p, q) en fonctions orthogonales sur l'intervalle $(< l < \rho < 1)$; si on ne suppose aucune dépendance angulaire, par exemple, les fonctions de Legendre. Cependant, il est plus commode pour le problème d'une ouverture circulaire (pupille-de-sortie), de développer G (p,q) en polynômes de Zernike, orthogonaux sur un cercle de rayon 1. Pour d'autres formes géométriques de la pupille-de-sortie (rectangulaire, triangulaire, elliptique, etc ..), les polynômes de Hermite - Didon, les polynômes Appel, et les polynômes elliptiques, sont des fonctions orthogonales respectives sur ces domaines.

La fonction d'aberration devra être développée de la même façon, en termes de ces fonctions.

Au chapitre VIII nous en donnons un bref développement.

CHAPITRE VII

LA THEORIE DIFFRACTIONNELLE DES ABERRATIONS DE ZERNIKE - NIJBOER

I - CLASSIFICATION DES ABERRATIONS DANS LA THEORIE DE ZERNIKE-NIJBOER

Un grand progrès a été apporté dans la manière de traiter la théorie de la diffraction des aberrations, quand Zernike introduisit une nouvelle forme de développement pour la fonction d'aberration. Jusqu'alors, la fonction d'aberration était développée dans la forme (5.6) du chapitre V, connue comme l'expansion classique. Ce type de développement de la fonction d'aberration, introduit dans l'intégrale de diffraction, menait à des difficultés d'obtention d'expressions utiles pour le champ image u(P) et les résultats, obtenus par Steward, Picht, Born* et d'autres, n'étaient pas satisfaisants pour obtenir une structure détaillée du champ image, ou la distribution de l'intensité dans un plan image. En effet, antérieurement au travail de Zernike et de ses élèves, on avait seulement un aperçu général de la distribution de l'intensité dans le champ d'image et uniquement pour les cas simples d'aberrations individuelles. Une structure détaillée de la distribution d'intensité est nécessaire pour comprendre les effets des aberrations sur la forme de l'image, particulièrement quand il s'agit de plus d'une espèce d'aberration. En conséquence, peu de progrès ont été faits dans le calcul de la structure de la distribution de l'intensité dans l'image, en tenant compte des aberrations, jusqu'à la publication de la thèse de Nijboer, qui utilise la nouvelle forme de développement de la fonction d'aberration, introduite par Zernike. Nous avons déjà mentionné cette forme de développement dans le chapitre V, et aussi fait allusion aux avantages qu'elle présente sur la forme classique, discutée au chapitre précédent.

Nous montrerons clairement ces avantages et comparerons dans ce chapitre l'analyse de la théorie Zernike - Nijboer, au traitement classique de la théorie des aberrations.

Et, pour être complet, nous discuterons brièvement un terme d'aberration géométrique de cette théorie au paragraphe 3. Supposons encore un système de symétrie de révolution optique, dans lequel la caractéristique mixte de Hamilton, ou la fonction d'aberration, dépend des invariants optiques u1,u2 et u3.

D'après Nijboer (1943), l'origine du système de coordonnées dans l'espace image est prise au point image d'un système optique parfait. Un des axes, p. e, l'axe z est choisi, de façon à coïncider avec le rayon principal, qui passe par le centre de la pupille-de-sortie. L'axe x est dans le plan contenant le rayon principal et l'axe du système. L'axe y est perpendiculaire à ce plan et dirigé vers la droite de l'axe du système. La distance de l'origine à l'axe du système est dénotée par σ. La distance de l'origine au centre de la pupille-de-sortie est dénotée par R. Alors, on construit une surface sphérique (front d'onde), ayant pour centre l'origine et passant par le centre de la pupille-de-sortie. Un point de cette surface sphérique, qu'on peut prendre comme une surface de référence So, est défini par les coordonnées cartésiennes (ξ , η) mesurées dans les plans xz et yz. Les coordonnées polaires (ρ , φ) d'un point quelconque sur So, sont définies par les relations :

$$(7.1) \qquad \xi = a \rho \cos\varphi \ , \ \eta = a \rho \sin\varphi ,$$

où a est le rayon du cercle découpé sur la surface So, ainsi que $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Nijboer prit cette région circulaire comme pupille-de-sortie. Mais, à cause de l'obliquité des rayons, cette région n'est pas symétrique par rapport à l'axe de l'instrument, si le point objet est loin de l'axe, la région illuminée (pupille-de-sortie) s'écartera un peu d'un cercle parfait. Pour les points objet, près de l'axe, l'écart entre l'ouverture de la pupille-de-sortie et un cercle, sera négligeable, et alors ρ varie de 0 à 1. A cause de cette limitation, on suppose $\sigma \ll R$.

* Pour une discussion et des courbes de distribution d'intensité dans l'image (structure), voyez la monographie de Steward (1928).

Le front d'onde réel venant d'un système optique, est déformé. L'écart entre le front d'onde réel S de la surface d'onde sphérique So, est faible pour des points objet près de l'axe du système et pour de petites imperfections de l'instrument optique. La distance optique entre S et So, prise le long d'un rayon, est définie comme aberration et la dépendance fonctionnelle sur les coordonnées donnant l'intersection de S et So, est appelée la fonction d'aberration, dénotée par V(P, Q), P et Q étant des points sur S et So, respectivement.

Si la distance de l'origine à Q est R, l'équation du front d'onde sphérique So est donné par :

(7.2) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2, \quad (Q = \xi, \eta, \zeta)$$

D'autre part, l'équation du front d'onde réel est :

(7.3) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \left\{ R^2 + V(\sigma, \xi, \eta) \right\}^2 = 0$$

qui, pour de petits écarts, se réduit à :

(7.4) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - R^2 - 2RV(\sigma, \zeta, \eta) = 0$$

Si (x, y, z) sont des coordonnées d'un point quelconque sur le rayon, alors, l'équation du rayon est approximativement*:

(7.5) $$\frac{x - \xi}{x - RV_\xi} = \frac{y - \eta}{y - RV_\eta} = \frac{z - \xi}{\zeta}, \quad \left(V_\xi = \frac{\partial V}{\partial \xi}\right),$$

pourvu que $V \ll R$. Les dénominateurs dans (7.5) sont, approximativement, les cosinus directeurs du rayon, passant par le point Q sur So. Avec cette approximation, l'intersection du rayon avec le plan $z = o$ est donnée par :

(7.6) $$x = RV_\xi, \quad y = RV_\eta,$$

ou en terme de (ϱ, φ)

(7.7) $$x = \frac{R}{a}\left(V_\rho(\sigma, \varrho, \varphi) \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varrho} V_\varphi(\sigma, \varrho, \varphi)\right)$$

$$y = \frac{R}{a}\left(V_\rho(\sigma, \varrho, \varphi) \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\varrho} V_\varphi(\sigma, \varrho, \varphi)\right)$$

La courbe d'intersection d'un plan image, avec un mince faisceau annulaire de rayons de la pupille-de-sortie, s'appelle courbe d'aberration, ou courbe caractéristique. Ces courbes ont été étudiées par un certain nombre d'auteurs, surtout pour les aberrations individuelles du troisième ordre. Nous renvoyons le lecteur à une oeuvre récente de Herzberger (1957).

Pour les aberrations d'ordre plus élevé, voir les travaux de Steward (1925), Carathéodory (1952) qui appellent celles-ci, les courbes de diffraction et par l'auteur (1953, 1957) qui utilisent des approches variées.

Nous avons déjà décrit le procédé classique qui développe la fonction d'aberration, avec trois invariants σ, ρ^2 et $\sigma\rho$, le terme général pour une seule aberration, étant écrit sous la forme (5.22). D'après Nijboer (1953), un terme général pour une seule aberration s'écrit :

(7.8) $$b'_{enm} \; \sigma^{2l+m} \rho^n \cos m\varphi$$

ce qui introduit une classification d'aberrations différente. L'ordre N pour un terme d'une aberration simple, dans la nouvelle théorie géométrique des aberrations, est donné par la relation :

*En coordonnées polaire (r, φ), $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

(7.9) $$N = 2l + m + n - 1$$

et le nombre d'aberrations d'ordre M est :

(7.10) $$M = \frac{1}{8}(N + 1)(N + 7)$$

Le tableau ci-dessous, emprunté à Nijboer, donne la liste du nombre d'aberrations, jusqu'au cinquième ordre.

Table 1

n \ m	0	1	2	3
		N = 1		
1		$\sigma\varrho\cos\varphi$ (011)		
2	ϱ^2 (020)			
		N = 2		
1		$\sigma^3\varrho\cos\varphi$ (111)		
2	$\sigma^2\varrho^2$ (120)		$\sigma^2\varrho^2\cos 2\varphi$ (022)	
3		$\sigma\rho^3\cos\varphi$ (031)		
4	ϱ^4 (040)			
n \ m	0	1	2	3
		N = 5		
1		$\sigma^5\varrho\cos\varphi$ (211)		
2	$\sigma^4\varrho^2$ (220)		$\sigma^4\varrho^2\cos 2\varphi$ (122)	
3		$\sigma^3\varrho^3\cos\varphi$ (131)		$\sigma^3\varrho^3\cos 3\varphi$ (033)
4	$\sigma^2\varrho^4$ (140)		$\sigma^4\varrho^2\cos 2\varphi$ (042)	
5		$\sigma\varrho^5\cos\varphi$ (051)		
6	ϱ^6 (060)			

Le nombre entre parenthèses, dénote les indices (l, n, m). Pour une discussion détaillée des différents ordres et des termes, nous renvoyons à l'étude de Nijboer.

Ainsi pour un système d'optique de symétrie de révolution, la fonction de développement d'aberrations est :

(7.11) $$V(\sigma, \varrho, \varphi) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sum_0^\infty b_{lnm}\, \sigma^{2l+m} \varrho^n \cos m\varphi \quad \text{(développement classique)}$$

(7.12) $$V(\sigma, \varrho, \varphi) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sum_0^\infty b_{lnm}\, \sigma^{2l+m} \varrho^n \cos m\varphi \quad \text{(développement de Nÿboer)}$$

II - DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION D'ABERRATION EN POLYNÔMES DE ZERNIKE

Bien qu'il y ait un avantage dans l'usage des fonctions d'aberration de Nijboer ; sur le développement classique pour le traitement des aberrations, comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, un progrès d'importance fut achevé, quand Zernike introduisait la nouvelle méthode de développement de la fonction d'aberration par une série de polynômes orthogonaux sur la surface d'un cercle de rayon 1. L'idée de développer la fonction d'aberration en fonctions orthogonales sur le domaine d'intégration, n'est pas seulement d'une grande importance théorique, mais aussi pratique, comme les études de Nijboer et des recherches d'autres continuateurs, l'ont montré. On connait le rôle important des fonctions orthogonales dans plusieurs domaines de physique, surtout en mécanique quantique, en particulier dans la théorie des perturbations ; quoiqu'il n'y ait pas une liaison directe entre la théorie des perturbations et la théorie de la diffraction qui s'exprime par une intégrale, on développe la phase de l'intégrant en fonctions orthogonales, même quand les aberrations sont très petites.

L'évaluation de l'intégrale de diffraction est alors, plus facile à faire, que par les méthodes données par Picht, Steward et d'autres, qui emploient le développement classique.

La théorie de Zernike - Nijboer, mène aussi à une première approximation, d'une expression extrêmement simple, de l'imperfection de la définition de l'image.

Les contributions des aberrations d'ordres divers à la définition de l'image, sont indépendantes les unes des autres. En dépit de plusieurs avantages de cette théorie, il y a des confusions sur l'applicabilité de la même méthode Zernike - Nijboer, au traitement de certains problèmes de diffraction de l'instrument d'optique, pour les pupilles circulaires. Quoique la théorie ait été développée pour les pupilles circulaires, l'idée du développement de la fonction d'aberration en fonctions orthogonales se généralise aux autres formes de la pupille-de-sortie. Nous affirmons ici, que la méthode Zernike - Nijboer est aussi valable pour développer l'amplitude de filtrage par fonctions orthogonales sur les domaines d'intégration de formes diverses. Cette méthode est supérieure au procédé classique, utilisé par Lommel, Steward, Picht et d'autres auteurs.

On peut alors, développer la fonction d'aberration V ou la caractéristique mixte de Hamilton W pour un système de révolution en série de polynômes de Zernike (5. 22, Chapitre V).

$$V(\sigma, \rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{2n0}(\sigma)}{\sqrt{2}} Z^{o}_{2\mu}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(\sigma) Z^{m}_{n}(\rho) \cos m\varphi \tag{7. a}$$

ou

$$V(\sigma, \rho, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} b_{lnm} \sigma^{2l+m} \rho^{n} \cos m\varphi \tag{7. b}$$

et pour les systèmes non-symétriques, nous prenons le développement (5. 22) ou (5. 23) du chapitre V. La différence entre (7. a) et (7. b) se trouve seulement dans les coefficients des aberrations fn, m blnm et b'lnm, qui n'entrent pas dans l'évaluation de l'intégrale de diffraction par rapport à l'angle φ. Cependant, il y a une grande différence en faisant l'intégration par rapport à l'angle φ. La constante d'aberration fnm est égale à une combinaison de coefficients b'lnm, blnm et des coefficients d'aberrations d'ordre inférieur.

La propriété d'orthogonalité des polynômes $Z^{m}_{n}(\rho)$ s'écrit :

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} Z^{m}_{n}(\rho) \cos m\varphi \, Z^{p}_{q}(\rho) \cos p\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq m, \ q \neq n \\ \dfrac{\varepsilon \pi}{2n+1} \text{ » } p = m, \ q = n \end{cases}$$

où $\varepsilon = 2$ si $m = 0$, et $\varepsilon = 1$ si $n \geqslant 1$.

Quand $m = 0$, les polynômes $Z^{o}_{n}(\rho)$ sont exprimés par les polynômes de Legendre :

$$Z^{o}_{2n}(\rho) = P_{n}(2\rho^{2} - 1)$$

Ci-dessous, nous présentons une liste de quelques propriétés importantes de $Z_n^m(\rho)$. Une liste complète de polynômes de Zernike se trouve dans la thèse de Nijober et dans notre appendice.

$$\int_0^1 Z_n^m(\rho)\, \rho^k \, d\rho = 0 \text{ pour } m < k < n$$

$$\int_0^1 Z_n^m(\rho)\, J_m(k\rho)\, \rho\, d\rho = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{J_{n+1}(k)}{k}$$

$$Z_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m+2}{2}} A(k)\, Z_{n-2k}^{m-2}(\rho), \quad (m \geqslant 2)$$

$$(n+1)\rho^k\, Z_n^m(\rho) = \left(\frac{n-m+2}{2}\right)\rho^{k-1}\, Z_{n+1}^{m-1}(\rho) + \left(\frac{n+m}{2}\right) Z_{n-1}^{m-1}(\rho)$$

$$(n+1)\rho^k\, Z_n^m(\rho) = \left(\frac{n+m+2}{2}\right)\rho^{k-1}\, Z_{n+1}^{m+1}(\rho) + \left(\frac{n-m}{2}\right) Z_{n-1}^{m+1}(\rho)$$

$$\frac{d}{d\rho} Z_n^m(\rho) = 2n\, Z_{n-1}^{m-1}(\rho) + 2(n-2)\, Z_{n-3}^{m-1}(\rho) + \ldots\ldots +$$

$$+ 2m\, Z_{m-1}^{m-1}(\rho) - \frac{m}{n} Z_n^m(\rho)$$

La constante A (k) a la valeur :

$$A(k) = (1)^{k+1}(n-2k+1)(m-1)\frac{\left(\frac{n+m-2k-2}{2}\right)!\,\left(\frac{n-m}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m-2k+2}{2}\right)!\,\left(\frac{n+m}{2}\right)!}$$

D'après ces formules, on peut exprimer les produits et les puissances diverses de $Z_r^s(\rho)$ en une somme linéaire de mêmes polynômes jusqu'à n = 16, m = 16, en utilisant la table ci-dessous.

TABLE II

$Z_0^0 = 1$	$Z_4^0 = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$
$Z_1^1 = \rho$	$Z_4^2 = 4\rho^4 - 3\rho^2$
$Z_2^0 = 2\rho^2 - 1$	$Z_4^4 = \rho^4$
$Z_2^2 = \rho^2$	$Z_5^1 = 10\rho^5 - 12\rho^3 + 2\rho$
$Z_3^1 = 3\rho^3 - 2\rho$	$Z_5^3 = 5\rho^5 - 4\rho^3$
$Z_3^3 = \rho^3$	$Z_5^5 = \rho^5$

$$Z_6^0 = 20\rho^3 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$$

$$Z_6^2 = 15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2$$

$$Z_6^4 = 6\rho^6 - 5\rho^4$$

$$Z_6^6 = \rho^6$$

$$Z_7^1 = 35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho$$

$$Z_7^3 = 21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3$$

$$Z_7^5 = 7\rho^7 - 6\rho^5$$

$$Z_7^7 = \rho^7$$

$$Z_8^0 = 70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1$$

$$Z_8^2 = 56\rho^8 - 105\rho^6 + 60\rho^4 - 10\rho^2$$

$$Z_8^4 = 28\rho^8 - 42\rho^6 + 15\rho^4$$

$$Z_8^6 = 8\rho^3 - 7\rho^6$$

$$Z_8^8 = \rho^8$$

$$Z_9^1 = 126\rho^9 - 230\rho^7 + 210\rho^5 - 60\rho^3 + 5\rho$$

$$Z_9^3 = 84\rho^9 - 168\rho^7 + 105\rho^5 - 20\rho^3$$

$$Z_9^5 = 36\rho^9 - 56\rho^7 + 21\rho^5$$

$$Z_9^7 = 9\rho^9 - 8\rho^7$$

$$Z_9^9 = \rho^9$$

$$Z_{10}^0 = 252\rho^{10} - 630\rho^8 + 560\rho^6 - 210\rho^4 + 30\rho^2 - 1$$

$$Z_{10}^2 = 210\rho^{10} - 504\rho^8 + 420\rho^6 - 140\rho^4 + 15\rho^2$$

$$Z_{10}^4 = 120\rho^{10} - 252\rho^8 + 168\rho^6 - 35\rho^4$$

$$Z_{10}^6 = 45\rho^{10} - 72\rho^8 + 28\rho^6$$

$$Z_{10}^8 = 10\rho^{10} - 9\rho^8$$

$$Z_{10}^{10} = \rho^{10}$$

$$Z_{11}^1 = 11.7.6.\ \rho^{11} - 20.9.7.\ \rho^9 + 20.9.7.\ \rho^7 - 10.8.7.\ \rho^5 + 15.7.\ \rho^3 + 6\rho$$

$$Z_{11}^3 = 30.11.\ \rho^{11} - 12.10.7.\ \rho^9 + 12.9.7.\ \rho^7 - 8.7.5.\ \rho^5 + 35\rho^3$$

$$Z_{11}^5 = 15.11.\ \rho^{11} - 40.9.\ \rho^9 + 9.7.4.\ \rho^7 - 5.6.\ \rho^5$$

$$Z_{11}^7 = 55\rho^{11} - 90\rho^9 + 36\rho^7$$

$$Z_{11}^9 = 11\rho^{11} - 10\rho^9$$

$$Z_{11}^{11} = \rho^{11}$$

$$Z_{12}^{o} = 12.11.7.\ \rho^{12} - 11.9.7.4.\ \rho^{10} + 10.9.7.5.\ \rho^{8} - 8.7.6.5.\ \rho^{6} + 7.5.4.3.\ \rho^{4} - 42\ \rho^{2} + 1$$

$$Z_{12}^{2} = 11.9.8.\ \rho^{12} - 21.11.10.\ \rho^{10} + 9.8.7.5.\ \rho^{8} - 9.7.5.4.\ \rho^{6} + 8.7.5.\ \rho^{4} - 21\ \rho^{2}$$

$$Z_{12}^{4} = 11.9.5.\ \rho^{12} - 12.11.10\ \rho^{10} + 9.7.5.4.\ \rho^{8} - 9.8.7.\ \rho^{6} - 70\ \rho^{4}$$

$$Z_{12}^{6} = 220\ \rho^{12} - 11.9.5.\ \rho^{10} + 9.8.5.\ \rho^{8} - 84\ \rho^{6}$$

$$Z_{12}^{8} = 66\ \rho^{12} - 110\ \rho^{10} + 45\ \rho^{8}$$

$$Z_{12}^{10} = 12\ \rho^{12} - 11\ \rho^{10}$$

$$Z_{12}^{12} = \rho^{12}$$

$$Z_{13}^{1} = 13.12.11\ \rho^{13} - 11.9.8.7.\ \rho^{11} + 11.10.9.7.\ \rho^{9} - 10^{2}.7.6.\ \rho^{7} + 9.7.5.4.\ \rho^{5} - 7.6.4.\ \rho^{3} + 7\ \rho$$

$$Z_{13}^{3} = 13.11.10.3.\ \rho^{11} - 13.11.9.\ \rho^{13} + 11.10.7.6.\ \rho^{9} - 10.9.7.4.\ \rho^{7} + 10.9.7.\ \rho^{5} - 8.7.\ \rho^{7}$$

$$Z_{13}^{7} = 13.11.5.\ \rho^{13} - 20.11.9.\ \rho^{11} + 20.11.9.\ \rho^{9} - 12.10.7.\ \rho^{7} + 14.9.\ \rho^{5}$$

$$Z_{13}^{9} = 26.11.\ \rho^{13} - 11.10.6.\ \rho^{11} + 11.9.5.\ \rho^{9} - 12.10.\ \rho^{7}$$

$$Z_{13}^{11} = 13.\ \rho^{13} - 12\ \rho^{11}$$

$$Z_{13}^{13} = \rho^{13}$$

$$Z_{14}^{o} = 22.13.12.\ \rho^{14} - 13.12.11.7.\ \rho^{12} + 14.12.11.9.\ \rho^{10} - 11.11.10.7.\ \rho^{8} + 12.10.7.5.\ \rho^{6}$$
$$+ 12.9.7.\ \rho^{4} + 8.7.\ \rho^{2} - 1$$

$$Z_{14}^{2} = 12.13.11.\ \rho^{14} - 13.12.11.6.\ \rho^{12} + 14.11.10.9.\ \rho^{10} - 14.11.10.6.\ \rho^{8} + 10.9.7.5.\ \rho^{6}$$
$$+ 9.8.7.\ \rho^{4} + 28\ \rho^{2}$$

$$Z_{14}^{4} = 14.13.12.\ \rho^{14} - 13.11.9.5.\ \rho^{12} + 11.10.9.8.\ \rho^{10} - 11.10.7.6.\ \rho^{8} + 14.10.9.\ \rho^{6} - 14.9.\ \rho^{4}$$

$$Z_{14}^{6} = 13.11.7.\ \rho^{14} - 20.13.11.\ \rho^{12} + 30.11.9.\ \rho^{10} - 12.11.10\ \rho^{8} + 210\ \rho^{6}$$

$$Z_{14}^{8} = 28.13.\ \rho^{14} - 13.11.6.\ \rho^{12} + 11.10.6.\ \rho^{10} - 15.11.\ \rho^{8}$$

$$Z_{14}^{10} = 81\ \rho^{14} - 13.12.\ \rho^{12} + 66\ \rho^{10}$$

$$Z_{14}^{10} = 14\ \rho^{14} - 13\ \rho^{12}$$

$$Z_{14}^{14} = \rho^{14}$$

$$Z_{15}^{1} = 13.11.9.5.\ \rho^{15} - 14.13.12.11.\ \rho^{13} + 13.11.9.7.4.\ \rho^{11} - 11.9.8.7.6.\ \rho^{9} + 15.11.10.7.\ \rho^{7} + 10.9.7.4.\ \rho^{5} + 28.9.\ \rho^{3} - 8\rho$$

$$Z_{15}^{3} = 13.11.7.5.\ \rho^{15} - 14.13.11.9.\ \rho^{13} + 18.13.11.10.\ \rho^{11} - 14.12.11.10.\ \rho^{9} + 11.10.9.7.\ \rho^{7} - 7.8.5.3.\ \rho^{5} + 84\ \rho^{3}$$

$$Z_{15}^{5} = 21.13.11.\ \rho^{15} - 13.11.10.7.\ \rho^{13} + 13.11.10.9.\ \rho^{11} - 13.11.10.9.\ \rho^{9} + 11.10.9.8.\ \rho^{7} - 21.11.10.\ \rho^{5}$$

$$Z_{15}^{7} = 15.17.7.\ \rho^{15} - 22.14.13.\ \rho^{13} + 33.13.10.\ \rho^{11} + 22.10.9.\ \rho^{7}$$

$$Z_{15}^{9} = 35.13.\ \rho^{15} - 13.12.7.\ \rho^{13} + 13.11.6.\ \rho^{11} + 22.10.\ \rho^{9}$$

$$Z_{15}^{11} = 105\ \rho^{15} - 182\ \rho^{13} + 78\ \rho^{11}$$

$$Z_{15}^{13} = 15\ \rho^{15} - 14\ \rho^{13}$$

$$Z_{15}^{15} = \rho^{15}$$

$$Z_{16}^{0} = 13.11.10.9.\ \rho^{16} - 13.11.10.9.4.\ \rho^{14} - 12.11.10.9.7.\ \rho^{10} + 11.10.9.7.5.\ \rho^{8} - 12.11.10.7.\ \rho^{6} + 14.10.9.\ \rho^{4} - 72\ \rho^{2} + 1$$

$$Z_{16}^{2} = 13.11.10.8.\ \rho^{16} - 35.13.11.9.\ \rho^{14} + 14.13.9.4.\ \rho^{12} + 13.11.10.7.6.\ \rho^{10} - 11.9.8.7.5.\ \rho^{8} + 11.10.9.7.\ \rho^{6} - 12.10.7.\ \rho^{4}$$

$$Z_{16}^{4} = 13.11.8.7.\ \rho^{16} - 13.11.7.6.5.\ \rho^{14} + 13.11.9.7.5.\ \rho^{12} + 36\ \rho^{2} - 20.13.11.10.\ \rho^{10} + 14.11.10.9.\ \rho^{8} - 11.9.7.4.\ \rho^{6} + 210\ \rho^{4}$$

$$Z_{16}^{6} = 24.13.12.\ \rho^{16} - 15.13.11.7.\ \rho^{14} + 14.13.11.10.\ \rho^{12} - 13.11.10.9.\ \rho^{10} + 130.12.11.\ \rho^{8} - 11.7.6.\ \rho^{6}$$

$$Z_{16}^{8} = 120.13.7.\ \rho^{16} - 30.14.13.\ \rho^{14} + 13.11.7.6.\ \rho^{12} + 20.13.11.\ \rho^{10} - 45.11.\ \rho^{8}$$

$$Z_{16}^{10} = 140.14.\ \rho^{16} - 15.13.7.\ \rho^{14} + 14.13.6.\ \rho^{12} - 22.13.\ \rho^{10}$$

$$Z_{16}^{12} = 120\ \rho^{16} - 210\ \rho^{16} - 210\ \rho^{12}$$

$$Z_{16}^{14} = 16\ \rho^{16} - 15\ \rho^{14}$$

$$Z_{16}^{16} = \rho^{16}$$

Nous avons vu que les ordres d'aberrations sont définis par le nombre N, donné au moyen des nombres l, n et m, apparaissant comme des exposants dans le terme général pour une seule aberration.

L'espèce d'aberrations est indiquée en termes de n et m, comme on l'a montré dans la table I, leur nombre étant donné par (7.10). On peut aussi tirer ce nombre du développement de la caractéristique mixte W donnée en équation (5.2), c'est-à-dire, par le nombre des combinaisons des indices des coefficients aij, aijk, etc... où i, j, k, etc... varient de 1 à 3. En fait, les termes indépendants de u_2 et u_3 ne sont pas considérés comme aberrations, alors le nombre M devient égal aux combinaisons obtenues par permutation des indices i, j et k, pour (1, 2, 3), moins 1. Par exemple, le nombre des coefficients indépendants aij est donné par :

$$M = \frac{3\,(3+1)}{2} - 1 = 5$$

puisque nous avons supposé $a_{ij} = a_{ji}$. De même façon, le nombre d'espèces diverses d'aberrations pour la somme des coefficients a_{ijk} est égale à 9. En général, le nombre M d'espèces d'aberration indépendante d'ordre 2n - 1 (n = nombre d'indices aparaissant dans $a_{ijk\ldots n)}$, est donné par l'expression :

$$M = \frac{3\,(3+1)\,(3+2)\ldots\ldots(3+n-1)}{n} - 1$$

Ceci est en accord avec la formule de Nijboer (7.10).

Par exemple, le nombre de coefficients indépendants est, par rapport à (a_{ijk}), égale à 9. Ici n = 3 et l'ordre N = 6-1 = 5. La table I montre que, pour N = 5, il y a 9 espèces d'aberrations différentes.

Naturellement, on a supposé les coefficients équivalents pour toute permutation d'indices, c'est-à-dire $a_{112} = a_{211} = a_{121}$, etc..., ce qu'on peut voir, si les valeurs u_1, u_2 et u_3 sont remplacées par leurs valeurs respectives σ^2, ρ^2 et $\sigma\,\rho\cos\varphi$. Cependant, il ne faut pas confondre les coefficients a_{ij}, a_{ijk} et les coefficients b_{lmn} du développement classique ou du développement de Nijboer pour la fonction d'aberration.

III - INTEGRALES DE DIFFRACTION

Le point de départ, en discutant la théorie de diffraction des aberrations, est l'intégrale de Kirchhoff, ordinairement mise sous la forme :

$$(7,13) \qquad u(P) = u(x,\ y,\ z) = \frac{ika^2 e^{ikRo}}{2\pi R_o} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik(s+V(\sigma,\varrho,\varphi))}}{s}\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi ,$$

où a est le rayon de la pupille-de-sortie, Ro est le rayon du front d'onde sphérique centré au point conjugué de Gauss du point objet et passant par le centre de la pupille-de-sortie ; s est la distance d'un point du front d'onde So à un point de l'espace image (point conjugué de l'objet), à savoir :

$$(7,14) \qquad s^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2$$

Les coordonnées de Q sont (ζ, η, ξ). Dans les coordonnées polaires, définis par (7.1) et x et y par (7.6) s a la forme :

$$(7,15) \qquad s = \left[R_o^2 + r^2 - 2ar\,\varrho\cos(\varphi - a) + z^2 + 2zR_c\ \frac{a^2 r^2 z}{R_o}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Supposons l'ouverture de la pupille-de-sortie très petite en comparaison du rayon du front d'onde de référence So, ($a < Ro$); le dernier terme du côté droit de (7.15) est développable en série. En se limitant aux termes de second degré dans ($a\rho$), s se réduit à :

$$s = \left(R_1^2 - \frac{a^2\rho^2 z}{R_o} - 2ar\rho\cos(\varphi - a)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.16)$$

ou

$$R_1^2 = (R_o + r)^2 + z^2$$

En introduisant de nouvelles quantités sans dimension p et q définies par :

$$p = \frac{a^2}{2R_oR_1} z \qquad q = \frac{a}{R_1} r \qquad (7.17)$$

et en limitant le développement de la racine carrée aux termes linéaires, s est donné approximativement par :

$$s \simeq R_1 - p\rho^2 - q\rho\cos(\varphi - a) \qquad (7.18)$$

et (7.17) se réduit à :

$$u(P) = B_o \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\left[p\rho^2 + q\rho\cos(\varphi - \alpha) - V(\sigma, \rho, \varphi)\right]} \rho d\rho d\varphi$$

$$B_o = \frac{ika^2 e^{ik(R_o - R_1)}}{2\pi R_o R_1} \qquad (7.19)$$

Dans l'équation (7.19) l'amplitude du champ incident est prise comme une constante sur So ou la pupille-de-sortie, et, il est commode de la prendre égale à un.

IV - EVALUATION DU CHAMP IMAGE POUR UNE SEULE ABERRATION

Quand on interprète correctement la fonction caractéristique mixte de Hamilton W, dans le développement par rapport aux invariants optique, nous avons montré au chapitre IV que la représentation intégrale de la fonction d'image u(P) donnée par l'intégrale (7.13) est équivalente aux intégrales (4.45) ou (4.52).

Maintenant, quand on introduit le développement de Zernike - Nijboer pour la fonction d'aberration $V(\sigma, \rho, \varphi)$ en (7.19), elle devient:

$$u(P) = u(r, a, z) = B_o \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\left[p\rho^2 + q\rho\cos(\varphi - a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{2n0}(\sigma)}{\sqrt{2}} Z_{2n}^0(\rho) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(\sigma) Z_n^m \cos m\varphi\right]} \rho d\rho d\varphi \qquad (7.20)$$

Le problème principal, à présent, est l'intégration de (7.20), supposant que le coefficient d'aberration est petit. Nous discuterons plusieurs cas, analogues à ceux que nous avons discutés au chapitre VI et nous démontrerons leur équivalence aux cas ci-dessus.

IV a) - Cas Spécial - Sans Aberrations

Dans ce cas, l'intégrale (7.20) se réduit à :

$$(7.21) \qquad V_{o,1} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\left[p\varrho^2 + q\varrho \cos(\varphi - \sigma)\right.} \varrho d\varrho d\varphi$$

L'intégration par rapport à φ, se réduit à et $J_0(kq\varrho)$ et $V_{o,1}$ sont égaux à :

$$(7.22) \qquad V_{o,1} = \int_0^1 e^{ikp\varrho^2} J_0(kq\varrho)\varrho d\varrho$$

Si p est petit, l'exponentielle peut être développée en série et le terme général sera de forme :

$$(7.23) \qquad I_{o,1} = \int_0^1 J_o(kq\varrho)\, \varrho^{2n+1} d\varrho$$

Cette intégrale est un cas spécial de (6.23) où m = o, p = o et q = 2n + 1. Cette intégrale est bien connue.

Sa valeur est :

$$(7.24) \qquad Io,1 = \frac{1}{2}\ {}_1F_2\left(n+1\,;\,1,\ n+2\,;\,-\left(\frac{kq}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=o}^{\infty} (-1)^m \binom{n}{m} \Gamma(m+1)\left(\frac{2}{kq}\right)^{m+1} J_{n+1}(kq)$$

Alors, (7.21) représente le champ image hors du plan focal $p \neq o$ d'un système optique sans aberration et $V(\sigma, \rho, \varphi) = o$ est :

$$(7.25) \qquad u(P) = u(p,\ q,\ \alpha) = \frac{1}{2} B_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ip)^n}{n!}$$

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \binom{n}{m} \Gamma(m+1)\left(\frac{2}{kq}\right)^{m+1} J_{m+1}(kq)$$

Un résultat plus simple a été obtenu par Nijboer en remplaçant $p\rho^2 = \frac{1}{2} p(2\rho^2 - 1)$ et en développant l'exponentielle $e^{ikp\rho^2}$ sous la forme :

$$(7.26) \qquad e^{ikp\varrho^2} = \left(\left(\frac{\pi}{kp}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{kp}{2}\right) Z_{2n}^{o}(\rho)$$

compte tenu de la relation (7B). En introduisant ce développement dans (7.21) et après avoir fait l'intégration angulaire et en utilisant la propriété (7F), il obtenait la formule :

$$(7.27) \qquad u(P) = 2\pi B_o\, e^{i\frac{kp}{2}} \left(\frac{\pi}{kp}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=o}^{\infty} (2n+1)\, i^{n} J_{n+1/2}\left(\frac{kp}{2}\right) \frac{J_{2n+1}(kq)}{kq}$$

Il est important de noter que les résultats ci-dessus sont valables pour de petites valeurs de kp. Si kp est grand, il faut intégrer par parties, prenant pour $u = J_o(kq\rho)$ et $dv = \frac{1}{2ikp} e^{ikp\rho^2} \rho d\rho$. De cette façon, on obtient une série descendante en p, ou kp, ce qui est, en un certain sens, une série asymptotique en p.*

* Cette méthode fut utilisée extensivement par Boivin (1961) et traite les aberrations sphériques d'ordre arbitraire.

Si u et v sont interchangés, on obtient les résultats donnés dans l'équation (7.25). Lommel a été le premier à obtenir les résultats de (7.25).

Lorsque (7.19) ou (7.20) est une fonction paire de p, la figure de diffraction sera symétrique, par rapport au plan focal $p = 0$.

V - EVALUATION DU CHAMP IMAGE EN PRESENCE D'UNE SEULE ABERRATION

Si un système optique ne possède qu'une seule aberration, par ailleurs arbitraire, la fonction d'aberration peut s'écrire sous la forme :

(7.28) $$V(\sigma, \rho, \varphi) = b_{lmn}\sigma^{2l+m} Z_n^m(\rho)\cos m\varphi = c_{lmn} Z_n^m(\rho)\cos m\varphi \quad (b_{lmn}\sigma^{2l+m} = c_{lmn})$$

En introduisant cette expression pour $V(\sigma, \rho, \varphi)$, l'intégrale de diffraction (7.20) est :

(7.29) $$u(P) = u(p, q, a) = B_o \int_0^1\int_0^{2\pi} e^{ik\left[p\rho^2 + kq\rho\cos(\varphi - \alpha) - c_{lnm} Z_n^m(\rho)\cos m\varphi\right]}\rho d\rho d\varphi$$

Nous avons déjà parlé de l'intégration de cette intégrale, par rapport à φ, dans le chapitre VI, en posant $s = 1$. Mais, ici nous avons $Z_n^m(\rho)$, au lieu de ρ^n. Alors, la procédure décrite mène à des expressions compliquées, puisque Z_n^m est un polynôme de degré pair et impair dans ρ, dépendant des valeurs paires ou impaires de n et m, prises simultanément et de degré supérieur n. Nous suivons la méthode de développement relative aux relations (6.41).

Par conséquent, nous écrivons les exponentielles sous la forme :

(7.30) $$e^{ikq\rho\cos(\varphi - \alpha)} = \sum_{r=0}^{\infty} i^r J_r(kq\rho)\left[e^{ir(\varphi-\alpha)} + e^{-ir(\varphi-\alpha)}\right]$$

$$e^{-ikc_{lnm}Z_n^m(\rho)\cos m\varphi} = \sum_{r=0}^{\infty} i^s J_s(kc_{lmn}Z_n^m(\rho))\left[e^{ism(\varphi-\alpha)} + e^{-ism(\varphi-\alpha)}\right]$$

En multipliant les deux séries, en intégrant par rapport à φ, nous trouverons, comme dans le cas du paragraphe 4, formule (6.22), l'expression suivante pour u(P) ·

(7.31) $$u(P) = 2\pi B_0 \int_0^1 e^{ikp\rho^2}\left\{J_o(kq\rho) J_o\left[kc_{lnm}Z_n^m(\rho)\right] + 2\sum_{s=1}^{\infty} i^{s(m+1)}\right.$$

$$\left.\cos sm\alpha \; J_{sm}(kq\rho) J_s\left[kc_{lnm}Z_n^m(\rho)\right]\right\}\rho d\rho$$

D'abord, considérons le cas où $p = 0$, c'est-à-dire, calculons le champ dans le plan focal. En ce cas, l'intégrale typique de (7.31) s'écrit :

(7.32) $$V_{s,sm,l} = \int_0^1 J_{sm}(kq\rho) J_s\left[kc_{lnm} Z_n^m(\rho)\right] \rho d\rho$$

L'évaluation de (7.32) peut être faite en développant d'abord la fonction de Bessel $J_s(kCenmZ_n^m(\rho))$, par rapport à ρ, puis en intégrant terme à terme, compte tenu des propriétés des polynômes de Zernike. Autrement dit, on exprime les produits des polynômes de Zernike comme des combinaisons linéaires de $Z_s^r(\rho)$ en utilisant les relations (7A - 7F).

Quand on classe, selon les degrés d'aberration, on obtient pour u(P) l'expression suivante :

(7.33) $$u(P) = u(p = 0, q, \alpha) = 2\pi B_o \int_0^1 \left\{ J_o(kq\rho)\rho d\rho \right. +$$

$$+ i^{m+1}\cos m\alpha\,(kc_{lnm})\, J_m(kq\rho) Z_n^m(\rho)\rho d\rho +$$

$$+ \left(\frac{kc_{lnm}}{2}\right)^2\left[i^2 J_o(kq\rho) + 2i^{2m}\cos 2m\alpha \; J_{2m}(kq\rho)\right] Z_n^m(\rho)\rho d\rho +$$

$$+ \left(\frac{kc_{lnm}}{2}\right)^3\left[2i^{(m+3)}\frac{\cos m\alpha}{2!} J_m(kq\ ) + \right.$$

$$+ \left.\frac{i^{2m}\cos 3m\alpha}{3!} J_{3m}(kq\rho)\right] (Z_n^m(\rho)\rho d\rho +$$

$$+ \left(\frac{kc_{lnm}}{2}\right)^4\left[2i^4\frac{1}{2!\,2} J_o(kq\rho) + \frac{i^{2m}\cos 2m\alpha}{3!} J_{2m}(kq\rho) + \right.$$

$$+ \left.\frac{i^{4m}\cos 4m\alpha}{4!} J_{4m}(kq\rho)\right] (Z_n^m(\rho)^4\rho d\rho)\Big\} + \text{des ordres supérieurs}$$

$$\text{à} \quad (kc_{lnm})\Big\}.$$

L'intégration se fait avec l'aide des relations (7.A - 7F).

Pour appliquer la formule (7C), on se sert des expansions (AC1 - AC14) pour les puissances diverses de $Z_n^m(\rho)$. Après l'intégration, on obtient :

(7.34) $$u(p = o, q, a) = 2\pi B_o \frac{2}{kq}\left\{J_1(kq) + i^{m+1}\cos m\alpha\,(kc_{lnm})\, i^{n-m} J_{n+}(kq) + \right.$$

$$+ \left(\frac{kc_{lmn}}{2}\right)^2\left(i^2(A_oJ_1(kq) - A_2J_3(kq) + \ldots + i^{2n}A_{2n}J_{2n+1}(kq) + \right.$$

$$+ i^{2m}\cos 2m\alpha B_{2m}J_{2m+1}(kq) + i^2 B_{2m+2}J_{2m+3}(kq) + \ldots +$$

$$+ \left. i^{2n}B_{2n}J_{2n+1}(kq)\right) +$$

$$+ \left(\frac{kC_{lnm}}{2}\right)^3 2i^{m+3}\left(\frac{\cos m\alpha}{2!}C_mJ_{m+1}(kq) + i^2C_{m+2}J_{m+3}(kq) + \ldots + i^{3n-m}C_{3n}J_{3n+1}(kq) + \right.$$

$$+ i^{2m}\frac{\cos 3m\alpha}{3} D_{3m}J_{3m+1}(kq) + i^2 D_{3m+2}J_{3m+3}(kq) +$$

$$+ \left. i^{3(n-m)} D_{3n}J_{3n+1}(kq)\right) +$$

$$+ \left(\frac{kC_{lnm}}{2}\right)^4 2i^4\left[\frac{1}{2!\,2!}(E_oJ_1(kq) + i^2E_2J_3(kq) + \ldots + i^{4n}E_{4n}J_{4n+1}(kq)) + \frac{i^{2m}\cos 2m\alpha}{3!}(F_{2m}J_{2m+1}(kq) + \right.$$

$$+ i^2 F_{2m+2}J_{2m+3}(kq) + \ldots + i^{4n-2m}F_{4n}J_{4n+1}(kq) +$$

$$+ \frac{i^{4m}\cos 4m\alpha}{4!}(G_{4m}J_{4m+1}(kQ) + i^2 G_{4m+2}J_{4m+3}(kq) + \ldots +$$

$$+ i^{\ldots n-m)}G_{4n}J_{4n+1}(kq)\Big] + \text{etc. (degrés supérieurs en } (kc_{lnm})\Big\}$$

Une expression similaire a été obtenue par Nijboer (1942), mais notre groupement suit la classification des divers termes de (kc_{lnm}). Les coefficients A_k, B_k, C_k, ..., G_k se trouvent facilement dans la table II, si on prend les indices m et n petits. Si on voulait obtenir une formule générale pour ces coefficients, elles sont trop compliquées pour être utiles.

Pour des buts pratiques, m et n sont des entiers petits (au plus 3 ou 4), et alors, les coefficients sont calculables avec la table II, sans difficulté. En même temps, le développement jusqu'au quatrième degré des coefficients d'aberration suffit, si ceux-ci sont petits, ce qui est le cas en pratique.

Pour de grandes aberrations $(kc_{lnm}) >> 1$, l'intégration asymptotique est préférable. Nous en parlerons brièvement dans le chapitre IX.

Le cas où le point d'observation n'est pas focal, $p \neq 0$ est plus compliqué. La présence du terme $\exp(ik\rho p^2)$ nous donne un autre produit de termes Z^o_{2k} $(p = 0, 1, 2...)$ donné par l'expression (7.30). Alors u(p, q, a) prend la forme :

(7.35)
$$u(p, q, \alpha) = 2\pi B_0 e^{\frac{ikp}{2}} \left(\frac{\pi}{kp}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \Bigg\{ (2r+1) i^r J_{r+\frac{1}{2}} \left(\frac{kp}{2}\right)$$
$$Z^o_{2r}(\rho) \Big[J_o(kq\rho) J_o(kc_{lnm}) Z^m_n(\rho)) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} i^{s(m+1)} \cos sm\alpha \, J_{sm}(kq\rho) J_s(kc_{lnm} Z^m_n(\rho)\Big]\Bigg\} \rho d\rho$$

Les intégrales dans (7.35) sont évaluées de la même façon que dans le cas p = 0. Au lieu de $Z^m_n(\rho)$ entrant dans les termes divers de l'intégrant de (7.35), on obtient maintenant :

$$\left[(Z^m_n(\rho))^s Z^o_{2r}(\rho)\right] \quad , \quad s = 0, 1, 2 ..., \qquad r = 0, 1, 2 ....$$

Pour s = 0, le terme principal $J_1(kq\rho)$ est remplacé par $J_{2r+1}(kq\rho)$ et on fait la sommation sur r. Cette somme est sans terme d'aberration. Le terme suivant qui contient la première puissance dans l'aberration kc_{lnm} devient une somme de termes de la forme :

(7.36)
$$i^{n-m+2r} A_{n+2r-2p} J_{n+2r-2p+1}(kp),$$

où les coefficients $A_{n+2r-2p}$ sont obtenus à partie du développement :

(7.37)
$$Z^m_n(\rho) Z^o_{2r} = \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} A_{n+2r-2p} Z^m_{n+2r-2p}(\rho), \quad (p = 0, ..., \frac{n-m}{2} + r)$$

Alors, dans le second terme de (7.34) J_{n+1} devra être remplacé par la somme (7.36) multipliée par i^{m-n} et cela sommé sur r. Avec cette méthode, nous trouvons pour le champ image hors du plan focal $p \neq 0$, l'expression :

(7.38)
$$u(p, q, a) = 2\pi B_o e^{\frac{ikp}{2}} \frac{2}{kq} \Bigg\{\Big((2r+1) i^r J_{r+1/2} \left(\frac{kq}{2}\right)\Big) +$$
$$+ i^{m+1} \cos m\alpha \quad kc_{lnm}) (i^{n-m+2r} A_{n+2r-2p} J_{n+2r-2p+1}(kq)) +$$

$$+ \left(\frac{kc_{lnm}}{2}\right)^2 i^2 \Big[i^{2p} A_{2p} i^{2k} A'_{2n+2r-2k} J_{2n+2r-2k+1}(kq)) +$$
$$+ i^{2m} \cos 2m\alpha \, i^{2p} B_{2m+2p} i^{2k} B'_{2m+2k} J_{2n+2r-2p-2k+1}(kq)\Big] +$$
$$+ \left(\frac{kc_{lnm}}{2}\right)^3 \Big[2 i^{m+3} \frac{\cos m\alpha}{2!} (i^{2p} C'_{m+2p} i^{2k} C_{m+2k} J_{3n+2r-2p-2k+1}(kq))$$
$$+ i^{2m} \frac{\cos 3m\alpha}{3} (i^{2p} D_{3m} i^{2k} D'_{2m+2k} J_{3n+2r-2p-2k+1}(kq))\Big] +$$
$$+ \left(\frac{kc_{lnm}}{2}\right)^4 \Big[2 i^4 \frac{1}{2!\,2!} i^{2p} E'_{2p} i^{2k} E_{2k} J_{4n+2r-2p-2k+1}(kq) +$$
$$+ \frac{i^{2m} \cos 2m\alpha}{3} i^{2p} F_{2m+2p} i^{2k} F'_{2m+2k} J_{2n+2r-2p-2k+1}(kq) +$$
$$+ \frac{i^{4M} \cos 4m\alpha}{4!} i^{2p} G_{4m+2q} i^{2k} G'_{4m+2k} J_{2m+2r-2p-2k+1}(kq)\Big] + \text{etc...., etc...}$$

Les coefficients A'_j, B'_j, etc... C'_j sont analogues à ceux de la formule (7.34) et on peut trouver E'_{2r+2k} de la même façon d'après la relation :

(7.39)
$$Z^{2\sigma}_{2\tau}(\rho) Z_{2r}(\rho) = \sum_{k=0}^{\tau+r-\sigma} E_{2\tau+2k} Z^{2\sigma}_{2\tau+2r-2k}(\rho)$$

Si les indices sont petits, ce qui est le cas pour la plupart, sinon tous les cas pratiques, on les calcule directement de la table II.

Une autre méthode pour évaluer U(p, q, α) est de développer $\exp(ik p\rho^2)$ en séries de puissances, de remplacer $\rho^2 = Z^2_2(\rho)$..., $\rho^{2k} = Z^{2k}_{2k}(\rho)$ dans le développement et d'utiliser des relations analogues à (7.37) ou (7.39), avant d'intégrer par rapport à ρ. Cependant cette méthode n'a aucun avantage sur la précédente.

D'après cette analyse, on remarque une grande simplification dans le résultat final par rapport aux méthodes plus anciennes, fondées sur le développement classique de la fonction d'aberration, notamment, les aberrations ordinaires du troisième ordre ou d'ordre plus élevé. Outre cet avantage, la théorie de Zernike - Nijboer indique les propriétés de symétrie de la figure de diffraction, ainsi que la compensation des aberrations d'ordre inférieur que donne la meilleure définition de l'image, à cause de l'orthogonalité des polynômes de Zernike, pourvu que les aberrations soient petites.

VI- GENERALISATION DES FORMULES DE NIJBOER

Les développements précédents sont valables pour un système optique de révolution. Pour étudier le champ de diffraction d'un système asymptotique ou d'un système de révolution de l'optique électronique, la fonction d'aberration ou la fonction caractéristique de Hamilton est maintenant donnée par :

$$W = W_o + \Sigma f_{n,m} Z^m_n(\rho) \cos m\varphi + \Sigma g_{n,m} Z^m_n(\rho) \sin m\varphi$$

(voir chapitre V)

L'intégrale de diffraction s'écrit, alors comme suit :

(7.40) $$u(P) = A_o \int_0^b \int_0^{2\pi} e^{ikn\left[r \rho \cos(\varphi - \alpha) + z\sqrt{1-\rho^2}\right]}$$
$$\left[e^{ik} \sum_{n,m} (f_{n,m} Z_n^m(\rho) \cos m\varphi + g_{n,m} Z_n^m(\rho) \sin m\varphi \right] \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Pour ne pas compliquer le calcul, nous considérons seulement une aberration de chaque espèce :

$$f_{p,m} Z_p^m(\rho) \cos m\varphi, \qquad g_{q,n} Z_q^m(\rho) \sin n\varphi$$

L'intégrale (7.40) se réduit à ·

(7.41) $$u(P) = A_o \int_0^b \int_0^{2\pi} e^{ikn(r \rho \cos(\varphi - \alpha) + z\sqrt{1-\rho^2})}$$
$$\left[e^{ik(f_{p,m} Z_p^m(\rho) \cos m\varphi + g_{q,n} Z_q^n(\rho) \sin m\varphi)} \right] \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

La différence entre (7.41) et l'intégrale (6.40) du dernier paragraphe VI est dans les arguments de fonction de Bessel J_μ et J_ν, c'est-à-dire, si nous remplaçons ρ^p par $Z_p^m(\rho)$ et ρ^q, par $Z_q^n(\rho)$ les deux intégrales seront équivalentes.

Par conséquent, l'intégrale par rapport à φ réduit les conditions (6.43) et (6.44) du paragraphe 2, chapitre VI, et nous obtenons la même formule que (6.45) en remplaçant ρ^p par $Z_q^n(\rho)$ et ρ^q par $Z_q^n(\rho)$, respectivement dans les fonctions J_μ et J_ν (Formule 6.47). Donc le champ d'image u(P) est :

(7.42) $$u(P) = 2\pi A_o \left\{ 2 \sum_{p = rm \pm 2sn} \sum_{r=0} \sum_{s=0} \frac{e_p l_r}{4} i^{p+r} \cos(pm \pm 2sn)\alpha \right.$$
$$\int_0^b f(z, \rho) \, J_p(X) \, J_r(Y) \, J_{2s}(Z) \, \rho \, d\rho$$
$$+ 2i \sum_{p = rm + (2s+1)n} \sum_{r=0} \sum_{s=0} \frac{e_p l_r}{4} i^{p+r+2} \sin(pm \pm (2s+1)n)\alpha$$
$$\int_0^b f(z,\rho) \text{ à } J_p(X) \, J_r(Y) \, J_{2s}(Z) \, \rho \, d\rho$$

ce qui généralise la formule de Nÿboer.

L'intégrale par rapport à ρ est conduite de la même façon qu'auparavant en développant les fonctions de Bessel en séries de polynômes de Zernike. Si, les aberrations $f_{p,m}$, $g_{q,n}$ sont petites par rapport à la longueur d'onde $f_{p,m} < \lambda$, $g_{q,n} < \lambda$, il faut seulement prendre quelques termes des séries, jusqu'au troisième ou quatrième ordre d'aberrations, pour obtenir une bonne approximation du champ de diffraction.

Mais le champ dépend aussi des combinaisons des aberrations, ce qui n'est pas le cas pour un système optique de révolution. Donc, dans l'optique électronique, le champ dépend aussi du produit $(f_{p,m})^r \cdot (g_{q,n})^s$, $r + s \geq 1$.

Un cas spécial de (7.60) se présente quand les aberrations $f_{p,m} = 0$. L'intégrale (7.60) est simplifiée, et, comme nous l'avons montré, elle est équivalente à l'intégrale (6.51) du chapitre VI. Alors, le champ u(P) est donné par la formule :

$$(7.43) \qquad u(P) = 2\pi A_o \Big\{ 2 \sum_{p=2s} \sum_{s=0} \frac{e_p}{2} i^p \cos 2sn\alpha \int_0^b f(z,\rho)\, J_p(X)\, J_{2s}(Z) \cdot \rho\, d\rho$$

$$+ 2i \sum_{p=2s+1} \sum_{s=0} \frac{e_p}{2} i^{p+2} \sin(2s+1)\alpha \int_0^b f(z,\rho) \cdot J_p(X)\, J_{2s+1}(Z)\, \rho\, d\rho$$

L'intégration par rapport à ρ est faite de la même façon que dans le paragraphe 2, chapitre VI ; on développe les fonctions de Bessel en séries de $kg_{n,m}$. Nous obtenons les intégrales suivantes pour les valeurs s = 0, 1, 2, 3.

$$s = 0 \qquad 2\pi A_o \int_0^b f(z,\rho) \Big\{ \Big[J_o(a\rho)\, 1 - \frac{(\lambda Z_n^m)^2}{2^2} + \frac{(Z_n^m)^4}{2^2 4^2} - \frac{(\lambda Z_n^m)^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots\dots\Big] + 2i\, i^{m+2} \sin m\alpha\, J_m(a\rho) \Big[\frac{(\lambda Z_n^m)}{2} - \frac{(\lambda Z_n^m)^3}{2^3 2!} + \frac{(\lambda Z_n^m)^5}{2^5 2^n 3!} + \dots\Big] \Big\} \rho\, d\rho$$

$$s = 1 \qquad 2\pi A_o \int_0^b f(z,\rho) \Big\{ \Big[i^{2m+2} \cos 2m\alpha\, J_{2m}(a\rho) \Big[\frac{(\lambda Z_n^m)^2}{2^2 2!} - \frac{(\lambda Z_n^m)^4}{2^4 3!} + \frac{(\lambda Z_n^m)^6}{2^4 2!\, 4!} \dots\Big] + 2i\, i^{3m+2b} \sin 3m\alpha\, J_{3m}(a\rho) \Big[\frac{(\lambda Z_n^m)^3}{2^3 3!} - \frac{(\lambda Z_n^m)^5}{2^5 4!} + \dots\Big] \Big\} \rho\, d\rho$$

$$s = 2 \qquad 2\pi A_o \int_0^b f(z,\rho) \Big\{ \Big[2\, i^{4m+2} \cos 4m\alpha\; J_{4m}(a\rho) \Big[\frac{(\lambda Z_n^m)^4}{2^4 4!} - \frac{(\lambda Z_n^m)^6}{2^6 5!} + \dots\Big] + 2i\, i^{5m+2} \sin 5m\alpha\; J_{5m}(a\rho) \Big[\frac{(\lambda Z_n^m)^5}{2^5 . 5!} \dots\dots\Big] \Big\} \rho\, d\rho$$

$$s = 3 \qquad 2\pi A_o \int_0^b f(z,\rho) \Big\{ 2\, i^{6m+2} \cos 6m\alpha\, J_{6m}(a\rho)\, \frac{(\lambda Z_n^m)^6}{2^6 . 6!} \dots\dots \Big] + \dots\dots\dots \Big\} \rho\, d\rho$$

où $\quad a = knr\,; \qquad \lambda = k\, g_{n,m} \quad +$

Comme nous avons fait auparavant, nous développons u(P) en série de puissance d'aberration $kg_{n,m}$, (7.45) $$u(P) = 2\ A_o \sum_{j=0}^{\infty} (k\ g_{n,m})^j\ u_j(P)$$

où les $u_j(P)$ prennent les mêmes formes qu'au paragraphe 2 du chapitre VI. D'après (7.44), un calcul simple donne des fonctions u_j pour j jusqu'à 6, les expressions suivantes :

(7.46) $$u_o = 2\pi A \int_0^b f(z,\rho)\, J_o(a\rho)\ \rho\, d\rho$$

$$u_1 = 2\pi\, i\, A_o\ i^{m+2} \sin m\alpha \int_0^b f(z,\rho)\, J_1(a\rho)\, Z_n^m(\rho)\ \rho\, d\rho$$

$$u_2 = 2\pi A_o \int_0^b f(z,\rho) \left[-\frac{J_o(a\rho)}{2^2} + i^{2m+2} \frac{\cos 2m\alpha}{2^2} \right. (Z_n^m(\rho))^2\ \rho\, d\rho$$

$$u_3 = 2\pi i A_o \int_0^b f(z,\rho) \left[i^{m+2} \frac{\sin m\alpha}{2^3} J_1(a,\rho) - i^{3m+2} \frac{\sin 3m\alpha}{2^2\ 3!} \right.$$

$$\left. .\ J_{3n}(a\rho) \right] \ (Z_n^m(\ \ ))^3 \rho\ \ d\rho$$

$$u_4 = 2\pi A_o \int_0^b f(z,\rho) \left[\frac{J_o(a\rho)}{2^3\ 4!} + i^{2m+2} \frac{\cos 2m\alpha}{2^3\ 3!} J_{2m}(a\rho) \right.$$

$$\left. + i^2 \frac{\cos 4m\alpha}{2^3\ 4!} J_{4n}(a\rho) \right] \left[Z_n^m(\rho) \right]^4 \rho\, d\rho$$

$$u_5 = 2\pi\, i\, A_o \int_0^b f(z,\rho) \left[i^{m+2} \frac{\sin m\alpha}{2^5 2!\ 3!} J_1(a\rho) \right.$$

$$- 2\, i^{3m+2} \frac{\sin 3m\alpha}{2^5 2.4!} J_{3m}(a\rho)$$

$$\left. + i^{5m+2} \frac{\sin 5m\alpha}{2^5\ 5!.} J_{5n}(a\rho) \right] \left[Z_n^m(\rho) \right]^5 \rho\, d\rho$$

$$u_6 = 2\pi A_o \int_0^b f(z,\rho) \left[-\frac{1}{2^2 4^2 6^2} J_o(a\rho) \right.$$

$$+ i^2 \frac{\cos 2m\alpha}{2^5\ 4!} J_{2m}(a\rho) - i^2 \frac{\cos 4m\alpha}{2^5\ 5!} J_{4m}(a\rho)$$

$$\left. + i^{(2m+1)} \frac{\cos 6m\alpha}{2^5\ 6!} J_{6m}(a\rho) \right] \ (Z_n^m(\rho))^6\ \rho\, d\rho$$

On voit que chaque intégrale de u_j est du type :

(7.47) $$V_{\mu,\ n,\ m,\ \nu} = \int_0^b f(z,\rho)\, J_\mu(knr\rho) \left[Z_n^m(\rho) \right]^\nu \rho\, d\rho$$

Cependant, la présence du facteur $f(z,\rho)$ dans l'intégrale mène une grande difficulté pour l'intégration. Mais si nous faisons $f(z,\rho)$ égale à :

(7.48) $$f(z,\rho) = e^{iknz} \sqrt{1-\rho^2} = e^{iknz} (1 - \rho^2/2) + \ldots$$

$V_{\mu, n, m \nu}$ se réduit à une intégrale plus simple.

$$u_{\mu, n, m, \nu} = e^{iknz} \int_0^b e^{-\frac{iknz}{2} \rho^2} J_{\mu} (knr\rho) \left[Z_n^m(\rho) \right]^{\nu} \rho d\rho$$

qui est équivalente l'intégrale de Nijboer

En principe il est possible d'intégrer $u_{\mu, n, m, \nu}$ quand $\left[Z_n^m(\rho) \right]^{\nu}$ est développé en une série linéaire de $Z_r^s(\rho)$ et l'exponentielle en une série en $Z_{2p}^o(\rho)$. Les calculs sont très pénibles si n, m, ν sont assez grands, donc, il n'y a pas avantage à utiliser les fonctions de Zernike. En fait, il vaut mieux utiliser la méthode du chapitre VI pour calculer le champ u(P) quand l'aberration $g_{n, m}$ est d'ordre élevé, c'est-à-dire, quand n, m, ν sont des nombres plus grands que 4, parce que l'avantage de l'emploi des polynômes de Zernike sur la méthode du chapitre VI est perdu.

C'est seulement dans les cas où n, m et ν sont des entiers limités jusqu'à 3 ou 4, que le calcul de u(P) deviendra plus facile, comme nous avons fait ci-dessus.

Comme illustration, soit $n = 3$, $m = 1$ et supposons que $f(z, \rho)$ soit une constante. De plus $b = 1$. L'aberration est exprimée par un seul terme de forme $k\, g_{3,1}\, Z_3^1(\rho) \sin \varphi$.

Alors, avec l'aide de la table II, un calcul simple donne les valeurs suivantes de u_j :

$$u_o = 2\pi A_o \int_0^1 J_o(a\rho)\, \rho d\rho \tag{7.49}$$

$$u_1 = -i \frac{\sin \alpha}{a\rho} J_4(a\rho)$$

$$u_2 = \frac{1}{8\,a\rho} \left[J_1(a\rho) - \frac{1}{5} J_3(a\rho) + J_5(a\rho) - \frac{9}{5} J_7(a\rho) \right] - \frac{i \cos 2\alpha}{5\,(a\rho)} \left\{ J_3(a\rho) + J_5(a\rho) \right\}$$

$$u_3 = \frac{1}{1180} \frac{i \sin \alpha}{a\rho} \left\{ i4\, J_2(a\rho) - 88\, J_4(a\rho) + 27\, J_o(ar) - 36\, J_8(ar) + 45\, J_{10}(a\rho) \right\} - \frac{3 \sin 3\alpha}{a\rho} \left\{ \frac{6}{105} J_4(a\rho) - \frac{1}{80} J_o(a\rho) + \frac{1}{112} J_{10}(a\rho) \right\}$$

Les valeurs de u_4, u_5, etc ... sont trop longues pour êtres indiquées ici

Plus loin, nous avons évalué u(P) pour le cas correspondant où l'aberration est donnée par $k f_{3,1} Z_3^1(\rho) \cos \varphi$.

Si l'ouverture D est la moitié où le quart d'un cercle, l'évaluation de l'intégrale de diffraction par rapport à φ ne donne aucune difficulté, parce que les relations entre p, r, s sont simples. Mais si l'ouverture correspond à un secteur d'un cercle, les relations entre p, r, s deviennent assez compliquées et l'intégration par rapport à ρ est difficile, parce que les indices prennent des valeurs fractionnelles. Il vaut mieux utiliser la méthode du chapitre VI. Dans ces cas, on peut employer avec avantage les fonctions de Gegenbauer.

Dans les paragraphes suivants, nous étudions quelques cas spéciaux, d'une importance considérable dans les applications. Les mesures de distribution de la lumière montrent un très bon accord avec les courbes calculées tant pour les régions optiques que pour les régions hyperfréquences.

Puis, nous donnerons quelques courbes théoriques et expérimentales, publiées par plusieurs auteurs.

Avec l'aide de la table II, il n'est pas difficile de calculer u(P) pour les autres aberrations des formes $k\, g_{n,m} Z_n^m(\rho) \sin m\varphi$, $k\, f_{n,m} Z_n^m(\rho) \cos m\varphi$ ou une combinaison de $k\, f_{n,m} Z_n^m(\rho) \cos m\varphi$ et $k\, g_{n,m} Z_n^m(\rho) \sin m\varphi$ quand n, m et ν sont petits, mais nous n'en traiterons pas.

Comme dans le paragraphe 4. du chapitre VI, nous pouvons évaluer le champ u(P), si deux ou plusieurs aberrations sont présentes dans un système optique, en remplaçant le paramètre Y par sa valeur $kf_{p,m} Z_n^m(\rho)$ dans la formule (6.48) et en développant les produits et puissances des polynômes de Zernike en séries linéaires de tels polynômes. Mais les calculs sont très pénibles, si les entiers p, q, m et n sont élevés. Il est mieux d'utiliser les formules du chapitre précédent. Cependant, si on limite les indices à 3 ou 4, la méthode de Nijboer donne un calcul très facile pour l'intégration par rapport à ρ ; mais, si nous ajoutons la fonction $f(\rho, z)$ dans l'intégrale de diffraction - cas de grande ouverture - le procédé de Zernike - Nijboer n'est pas valable, parce qu'il est très difficile de développer la fonction $f(\rho, z)$ en séries de polynômes de Zernike. Dans ce cas, on peut utiliser les fonctions $G_{m,\, m+2n+3/2,\, m+n+1/2}(\rho, a)$ étudiées dans le chapitre VIII. Ceci généralise les polynômes de Zernike, et comme nous avons remarqué, l'intégration par rapport à ρ est facile à faire. Nous donnons quelques propriétés de cette fonction dans le formulaire mathématique .

VII - ABERRATIONS SPECIALES

Nous proposons, maintenant, de traiter les cas m = 1, m = 2 et une combinaison des deux. Puisqu'il faut que n - m représente un nombre pair, nous écrivons pour m = 1, n = 3, 5, 7 ... etc..., et pour m = 2, n = 2, 4 .... etc.... Alors, les aberrations sont de la forme :

	m = 1	m = 2
	(a) $kc_{131}\, Z_3^1(\rho) \cos\varphi$	$kc_{122}\, Z_2^2(\rho) \cos 2\varphi$
(7.50)	(b) $kc_{151}\, Z_5^1(\rho) \cos\varphi$	$kc_{142}\, Z_4^2(\rho) \cos 2\varphi$
	(c) $kc_{171}\, Z_7^1(\rho) \cos\varphi$	$kc_{162}\, Z_6^2(\rho) \cos 2\varphi$
	etc ...,	etc...,

Dans la première colonne (a) représente le coma primaire, (b) le coma secondaire, ou coma du cinquième ordre, (c) le coma tertiaire, ou coma du septième ordre, etc...

Dans la seconde colonne, il y a : (a) astigmatisme primaire, (b) astigmatisme secondaire, ou astigmatisme de cinquième ordre, (c) astigmatisme tertiaire, etc...

Comme déjà mentionné, en pratique n est limité à 3, 4, 5.

1 - Coma Primaire

En parlant de l'effet du coma primaire sur la figure de diffraction, nous prendrons d'abord le cas où p = 0, c'est-à-dire, où la figure est située dans le plan focal. Alors, la fonction d'aberration est donnée par :

$$V(\sigma, \rho, \varphi) = b_{131}\ \sigma^{21+1}\ Z_3^1 \cos\varphi = c_{131}\ Z_3^1(\rho) \cos\varphi = c_{131}(3\rho^3 - 2\rho)\cos\varphi \tag{7.57}$$

La fonction d'image prend alors la forme :

$$u(0, q, a) = A_o \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ikq\cos(\varphi - \alpha) - ikc_{131}\ Z_2^1(\rho)\cos\varphi}\ \rho d\rho d\varphi \tag{7.52}$$

Si maintenant, nous faisons dans la formule générale (7.38) m = 1, n = 3, la formule pour u(o, q) donne la distribution du champ dans le plan de Gauss :

$$\begin{aligned} u(0, q, a) = 2\pi B_o \frac{2}{kq} \Big\{ & J_1(kq) - kc_{131} \cos\alpha\ J_4(kq) + \\ & + \left(\frac{kc_{131}}{2}\right)^2 \Big[\frac{1}{4} J_1(kq) - \frac{1}{20} J_3(kq) + \frac{1}{4} J_5(kq) - \frac{9}{20} J_7(kq) - \\ & - 2\cos 2\alpha\ \frac{2}{5} J_3(kq) + \frac{3}{5} J_5(kq)\Big] + \\ & + \left(\frac{kc_{131}}{2}\right)^3 \Big[\cos\alpha\ \frac{1}{15} J_2(kq) - \frac{44}{105} J_4(kq) + \frac{9}{70} J_6(kq) - \\ & - \frac{6}{35} J_8(kq) + \frac{3}{14} J_{10}(kq) - \cos 3\alpha\ \frac{8}{35} J_4(kq) - \frac{9}{20} J_6(kq) - \frac{9}{28} J_{10}(kq)\Big] \\ & + \text{4ème degré en } kc_{131} + \Big\} \end{aligned} \tag{7.53}$$

d'après le calcul des coefficents Aj, Bj, etc..., de la table II.

Cette formule a déjà été donnée par Nijboer sous une forme différente. De plus, il a évalué la distribution d'intensité pour c_{131} = k avec notre notation et les courbes équi-photes, ou équi-lumineuses. Les courbes d'égale intensité, théoriques et expérimentales, pour les micro-ondes, ont été données par Bachynski et Bekefi (1955, 1957). Les courbes expérimentales sont en trés bon accord avec les courbes calculées d'aprés les formules théoriques (voir figures 1, 2, 3).

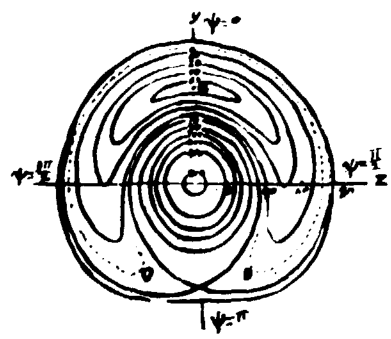


Fig. 1

Lignes de niveaux d'intensité (théorique) de coma primaire dans le plan de Gauss $c_{3,1}$ = 1 (d'après Nijboer

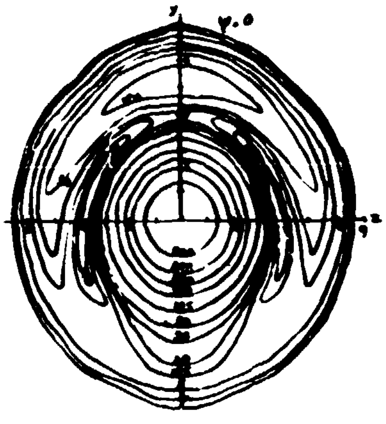


Fig. 2

Lignes de niveaux expérimentales d'intensité hyperfréquences dans le plan de Gauss pour une lentille diélectrique avec $c_{3,1} = 1.25$ et une faible astigmatisme $kf_{3,1} = 0.37$ (d'après Bachynski et Bekefi).

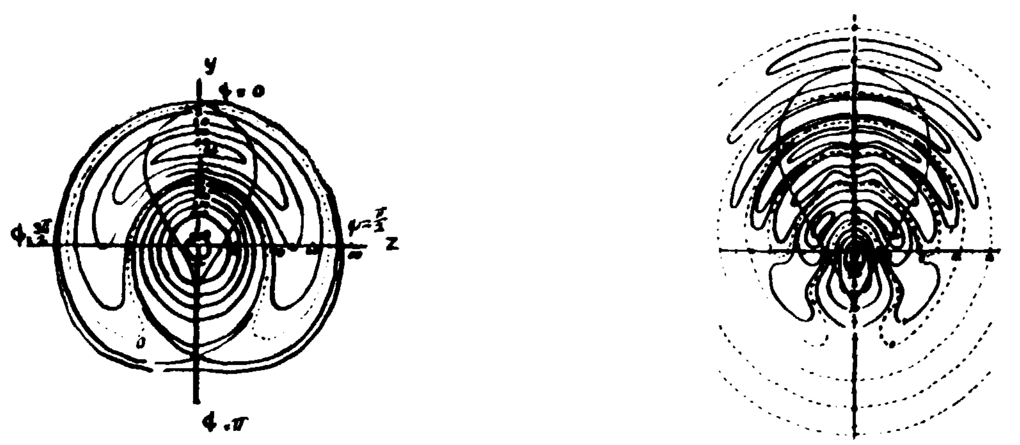
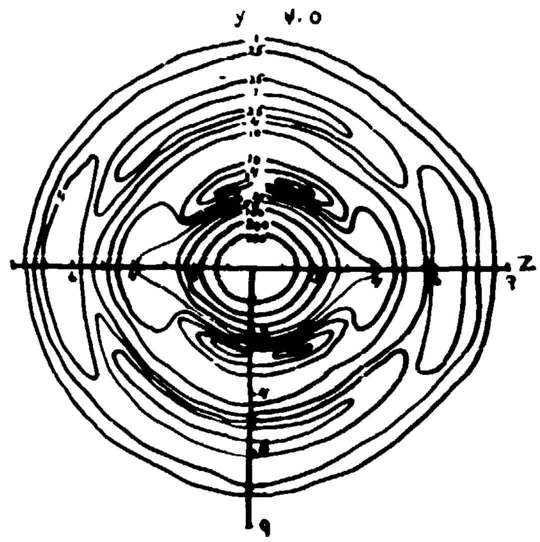


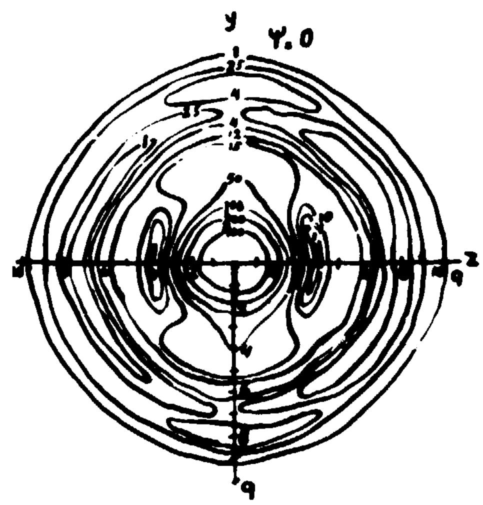
Fig. 3

Isophotes dans le plan de Gauss (coma primaire $f_{31} = 1$. Définition de Strehl D = 0, 879 (Nijboer , 1947).

Isophotes dans le plan de Gauss (coma primaire) $f_{31} = 3$. Définition de Strehl D = 0; 306 (Nienhmis et Nijboer , 1949).



Lignes de niveaux d'intensité (théorique) dans un plan à travers la ligne focale (horizontale) en présence d'un astigmatisme primaire $f_{2,2} = 1$ (d'après Nijboer).



Lignes de niveaux expérimentales dans le plan de Gauss pour $f_{2,2} = 1$ (d'après Bekefi et Bachynski).

2 - Coma Secondaire

Pour calculer le champ d'image u(o, q, α), quand l'aberration est donnée par (7. b), il faut simplement faire $m = 1$ et $n = 5$ dans la formule générale. Le résultat est le suivant :

$$(7.54)\qquad u(o,q,\alpha) = 2\pi B_o \frac{2}{kq}\Bigg\{\Big[J_1(kq) - kc_{151}\cos\alpha\, J_3(kq) + \left(\frac{kc_{151}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}J_1(kq) - \frac{1}{7}J_3(kq) + \frac{4}{21}J_5(kq) - \frac{4}{45}J_5(kq) + \frac{1}{7}J_7(kq) - \frac{100}{252}J_{11}(kq) - \cos 2\alpha\left(\frac{9}{35}J_3(kq) + \frac{4}{15}J_7(kq) - \frac{10}{21}J_{11}(kq)\right)\right)\Big] + \text{troisième degré en } kc_{151} + \text{etc.}\ldots,\ \text{etc.}\ldots\Bigg\}$$

Ce résultat est nouveau et je ne connais aucune observation expérimentale, montrant les courbes de distribution de l'intensité dans ce cas. Comme, dans la pratique, cette erreur reste faible, l'expansion (7. 54) suffit à donner un aperçu de la distribution d'intensité. Il n'est pas difficile d'obtenir l'approximation suivante (le troisième terme dans l'aberration). Comme la formule devient très compliquée pour n grand, nous nous permettrons de ne pas donner la formule explicite pour le coma tertiaire.

3 - Astigmatisme Primaire dans le Plan Central

Dans ce cas, la fonction d'aberration est donnée par l'expression (7. 40a) de la seconde colonne. La fonction d'image, dans le plan central $p = 0$, s'écrit :

$$(7.55)\qquad u(0,q,\alpha) = B_o \int_0^1\int_0^{2\pi} e^{ik\left[q\rho\cos(\varphi-\alpha) - c_{122} Z_2^2(\rho)\cos 2\varphi\right]}\, \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Comme on peut développer l'exponentielle par rapport à ρ , ou bien en polynômes de Zernike, le développement en ρ pour ce terme d'aberration est semblable à (7. 29), quand on fait $m = z$, $n = z$, $z = o$. L'expression de U(o, q, α) est alors donnée par :

$$(7.56)\qquad u(o,q,\alpha) = 2\pi B_o \sum_{n=0}^{\infty} \cos 2n\alpha \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(kc_{122})^r}{2^{r-1}\, r!}\binom{r}{\frac{r-n}{2}} \int_0^1 J_{2n}(kq\rho)\,\rho^{2r+1}\, d\rho$$

Cette intégrale est semblable à (6. 31), quand on fait $p = 2n$, $r = 2r$, et $z = o$. Sa valeur est :

$$(7.57)\qquad \int_0^1 J_{2n}(kq\rho)\,\rho^{2n+1}\, d\rho = \frac{\Gamma(n+r+1)}{2^{2n+1}\,\Gamma(2n+1)\,\Gamma(n+r+2)} \cdot {}_1F_2\left((n+r+1\,;\, n+r+2,\ 2n+1\,;\, -\left(\frac{kq}{2}\right)^2\right)$$

Alors (7. 56) s'écrit :

$$(7.58)\qquad u(o,q,\alpha) = 2\pi B_o \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\alpha \sum_{r=s}^{\infty} \frac{\beta^r \binom{r}{\frac{r-n}{2}}\ {}_1F_2\left(n+r+1\,;\, n+r+2,\ 2n+1\,;\, -\left(\frac{kq}{2}\right)^2\right)}{2^{r+2n}\, r!\ \Gamma(2n+1)\,\Gamma(n+r+2)}$$

où $s = n$, $n+2$, $n+4$ ...... et $\varepsilon = 1$ pour $n = 0$, ou sinon $\varepsilon = 2$, $n \neq 0$, et $\beta = kc_{127}$

D'autres développements de (7. 56) sont donnés dans la référence (Nijboer 1942, 1947).

Les séries que nous venons de donner, convergent rapidement pour β petit, de l'ordre de la longueur d'onde.

D'autre part, si on introduit les polynômes de Zernike qui interviennent en ce cas sous forme de puissance, facilement exprimables sous forme linéaire de $Z_{2p}^{2q}(\rho)$, p, q = 1, 2. . . . , nous trouvons grâce à la table II.

(7. 59)
$$Z_2^2 = \frac{1}{2} Z_2^0 + \frac{1}{2} Z_0^0$$

$$\left(Z_2^2\right)^2 = \frac{1}{6} Z_4^0 + \frac{1}{3} Z_2^0 + \frac{1}{6} Z_0^0$$

$$= \frac{1}{4} Z_4^2 + \frac{3}{4} Z_2^2$$

$$\left(Z_2^2\right)^2 = \frac{1}{15} Z_6^2 + \frac{1}{3} Z_4^2 + \frac{3}{5} Z_2^2$$

$$= \frac{1}{6} Z_6^4 + \frac{1}{5} Z_4^4$$

$$\left(Z_2^2\right)^4 = \frac{1}{70} Z_8^0 + \frac{1}{10} Z_6^0 + \frac{2}{7} Z_4^0 + \frac{2}{5} Z_2^0 + \frac{1}{5} Z_0^0$$

$$= \frac{1}{56} Z_8^2 + \frac{1}{8} Z_6^2 + \frac{5}{14} Z_6^2 + \frac{6}{7} Z_2^2$$

$$= \frac{1}{28} Z_8^4 + \frac{1}{4} Z_6^4 + \frac{5}{7} Z_4^4$$

En limitant l'expression de $U(o, q, \alpha)$ aux termes de quatrième degré dans l'aberration U_{122}, nous trouvons pour $U(o, q, \ )$:

(7. 60)
$$u(o, q, \alpha) = 2\pi B_c \frac{2}{kq} \Big\{ J_1(kq) + ikc_{122} \cos 2\alpha \, J_3(kq) +$$

$$- \left(\frac{kc_{122}}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{3} J_1(kq) - \frac{1}{2} J_3(kq) + \frac{1}{6} J_5(kq) + \cos 4\alpha \, J_5(kq)\right] -$$

$$- i\left(\frac{kc_{122}}{2}\right)^3 \Big[\cos 2\alpha \left(\frac{3}{5} J_3(kq) - \frac{1}{3} J_5(kq) + \frac{1}{15} J_7(kq)\right) + \frac{1}{3} \cos 6\alpha \, J_7(kq) +$$

$$+ \left(\frac{kc_{122}}{2}\right)^4 \Big[\Big(\frac{1}{4} \Big(\frac{1}{5} J_1(kq) - \frac{2}{5} J_3(kq) + \frac{2}{7} J_3(kq) - \frac{1}{10} J_7(kq) + \frac{1}{70} J_9(kq)\Big]$$

$$+ \frac{1}{2!} \cos 4\alpha \left(\left(\frac{5}{5} J_5(kq) - \frac{1}{4} J_7(kq) + \frac{1}{28} J_9(kq)\right) + \left(\frac{1}{4!} \cos 8\alpha \, J_9(kq)\right)\right)\Big\}$$

formule déjà obtenue par Nijboer dans son importante thèse, où l'on trouvera une discussion détaillée.

4 - Astigmatisme Primaire dans un Plan Focal

Dans notre discussion, nous avons supposé, que le plan d'observation était le plan, appelé plan central, défini en faisant $p = 0$. D'autre part, si on déplace le plan d'observation dans la direction p, d'une quantité $c_{122} = p$, ou $c_{122} = -p$, l'aberration géométrique ordinaire, ou courbe caractéristique, se réduit à une ligne horizontale ou verticale, dépendant du signe de p, c'est-à-dire, du déplacement positif ou négatif du plan d'observation. Ces plans sont appelés, respectivement, plans focaux secondaires et primaires.

Dans le cas général, où $p \neq 0$, le champ d'image est donné par l'intégrale (7.29), ou on fait $m = 2$.

(7.61) $$u(p, q, \alpha) = B_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i\left[kp\rho^2 + q\rho\cos(\varphi - \alpha) - c_{122} Z_2^2(\rho)\cos 2\varphi\right]} \rho d\rho d\varphi$$

Après avoir fait l'intégration par rapport à φ, nous écrivons :

(7.62) $$u(p, q, \alpha) = 2\pi B_0 \int_0^1 e^{ikp\rho^2} \left\{ J_0(kq\rho) + 2ikc_{122}\cos 2\alpha\, Z_2^2(\rho)\, J_2(kq\rho) + \right.$$
$$+ i^2\left(\frac{kc_{122}}{2}\right)^2 \left([Z_2^2(\rho)]^2 J_0(kq\rho) + \cos 4\alpha J_4(kq\rho) \right) +$$
$$\left. + i\left(\frac{kc_{132}}{8}\right)^3 \left(\frac{\cos 2\alpha}{2!} J_2(kq\rho) + \frac{\cos 6\alpha}{3!} J_6(kq\rho) \left[Z_2^2(\rho)\right]^3 \right) + (kc_{122})^4 \ldots \right\} \rho d\rho$$

Si on prend les puissances de $Z_2^2(\rho)$ en accord avec le schéma (7A - 7F), en utilisant l'expansion (7.30) pour $\exp(ikp\rho^2)$ et en se servant des relations (7A - 7F), on déduit pour $U(p, q, \alpha)$, les expressions suivantes :

(7.63) $$u(p, q, \alpha) = 2\pi B_0 e^{\frac{ikp}{2}} \frac{4\pi}{k^2 q^2 p} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n J_{n+1/2}\left(\frac{kp}{2}\right)$$
$$\cdot \left\{ \left[J_{2n+1}(kq) + ikc_{122}\cos 2\alpha \left(\frac{n-1}{n(2n+1)} J_{2n-1}(kq) - \frac{1}{2} J_{2n+1}(kq) + \frac{n+2}{n(2n+1)} J_{2n+3}(kq) \right) + \right. \right.$$
$$-\left(\frac{kc_{122}}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{2(2n+1)(2n-1)} J_{2n-3}(kq) - \frac{n}{2n+1} J_{2n-1}(kq) + \right.$$
$$+ \frac{3n^2+3n-2}{(2n+3)(2n-1)} J_{2n+1}(kq) - \frac{n+1}{2n+1} J_{2n-1}(kq) + \frac{(n+2)(n+1)}{n(2n+3)\,2n+1)} J_{2n+5}(kq) +$$
$$+ \cos 4\alpha \left[\frac{(n-2)(n-3)}{n(2n+1)(2n-1)}^{++} J_{2n-3}(kq) - \frac{n-2}{2n+1}^{++} J_{2n-1}(kq) + \right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{3(n+2)(n-1)}{(2n+3)(2n-1)}^{+} J_{2n+1}(kq) - \frac{n+3}{2n+1}^{+} J_{2n+3}(kq) + \frac{(n+4)(n+3)}{2(2n+3)(2n+1)} J_{2n+5}(kq) \right) \right] + \ldots \right\}$$

où la sommation de $\overset{+}{J}_i(kq)$ commence par $n = 1$ et pour $\overset{++}{J}_i(kq)$ commence par $n = 2$. Cette formule a été également donnée par Nijboer (1942), pour $p = c_{122}$, elle donne l'expression du champ d'image dans le plan focal secondaire et pour $p = -c_{122}$, celle du champ d'image dans le plan focal primaire. Il faut noter, que l'expression mentionnée est un cas particulier de notre équation (6.3), donnée dans le chapitre VI.

5 - Astigmatisme Secondaire dans le Plan Central

Nous nous proposons de discuter brièvement l'évaluation du champ d'image en présence de l'astigmatisme du cinquième ordre (astigmatisme secondaire), quand $p = 0$. L'aberration est donnée par l'équation (7.40b) de la seconde colonne :

(7.64) $$kc_{142}\, Z_4^2(\rho) \cos 2\varphi$$

Le champ $U(o, q, \alpha)$ que le plan focal, déduit de l'équation générale (7.29), est donné par :

(7.65) $$u(o, q, \alpha) = 2\pi B_0 \int_0^1 \left\{ J_0(kq\rho)\, J_0(kc_{142} Z_4^2(\rho)) + \right.$$
$$\left. 2 \sum_{s=0}^{\infty} i^{3s} \cos 2\alpha\, J_{2s}(kq\rho)\, J_s(kq_{142} Z_4^2(\rho)) \right\} \rho d\rho$$

En développant les fonctions de Bessel contenant l'aberration, jusqu'à des termes du troisième ordre, dans les coefficients d'aberration, et en nous servant des relations de App. C, nous obtenons, après intégration, le résultat suivant :

(7.66) $$u(o, q, \alpha) = 2\pi B_0 \frac{1}{kq} \left\{ J_1(kq) - i\cos 2\alpha (kc_{142}) J_5(kq) \right.$$
$$-\left(\frac{kc_{142}}{2}\right)^2 \left[\frac{8}{35} J_9(kq) + \frac{2}{5} J_7(kq) + \frac{1}{14} J_5(kq) + \frac{1}{10} J_3(kq) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5} J_1(kq) - \cos 2\alpha \frac{4}{7} J_9(kq) + \frac{20}{21} J_5(kq) \right] -$$
$$-\left(\frac{kc142}{2}\right)^3 2i\cos 2\alpha \left[\frac{8}{99} J_{13}(kq) + \frac{64}{315} J_{11}(kq) + \frac{93}{770} J_9(kq) + \right.$$
$$+ \frac{143}{990} J_7(kq) + \frac{353}{696} J_5(kq) + \frac{601}{2691} J_3(kq) -$$
$$\left.\left. - \frac{1}{3!} \frac{16}{55} J_{13}(kq) + \frac{9}{22} J_9(kq) + \frac{3}{10} J_7(kq) \right] + \ldots\ldots \right\}$$

En pratique, on essaye de rendre ce genre d'aberration très petite, afin que le développement donné plus haut, reste peu important devant la contribution du champ d'image, due à l'erreur d'astigmatisme primaire, donnée par la formule (7.60), quand $p = 0$. Cependant, dans les quelques cas où l'inclinaison (l'obliquité) serait moyenne ou grande, les erreurs astigmatiques secondaires deviendraient considérables et on ne pourrait plus du tout les négliger, dans l'étude d'une combinaison des erreurs primaires et secondaires.

Il peut être d'un certain intérêt d'obtenir le champ d'image, hors du plan focal central, c'est-à-dire, la fonction $U(p, q, \alpha)$.

Dans ce cas, l'intégrant dans (7.55) est multiplié par $\exp(i\,k\,p\,\rho^2)$, ou les séries correspondantes (6.21, 7.30).

L'évaluation formelle de l'intégrale, représentant $U(p, q, \alpha)$ n'est pas difficile, mais à cause de calculs laborieux, nous avons limité le résultat au second ordre dans la fonction d'aberration. L'expression finale est :

(7.67) $$U(p, q, \alpha) = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n \left\{ (-1)^n J_{2n+1}(kq) + \frac{kc_{147}}{2} i^3 \cos 2\alpha \sum_{r=-2}^{2} (-1)^{n+r-1} \right.$$

$$C_{3-r}\, J'_{2n+2r+1}(kq) + \left(\frac{kc_{142}}{2}\right)^2 \sum_{r=-4}^{4} (-1)^{n+r+1} \left\{ \alpha B_{5-r} + A_{5-r} \right\} J_{2n+2r+1}(kq) \Big\}$$

où $\alpha = \frac{\cos 4\alpha}{3}$, et A_j, B_j, et C_j sont données dans l'appendice D.

Cette formule peut s'interpréter aussi comme représentant le champ d'image d'un système sans aberration sur un plan non focal, mais auquel on a ajouté une variation d'amplitude incidente sur la pupille-de-sortie, donnée par la fonction $G(\rho, \varphi)$:

$$G(\rho, \varphi) = \cos(kc_{142}\, Z_4^2(\rho) \cos 2\varphi) - i \sin(kc_{142} Z_4^2(\rho) \sin 2\varphi) \tag{7.67}$$

en limitant l'expansion des cosinus et sinus aux termes de second degré au coefficient d'aberration c_{142}.

Ceci est un exemple d'introduction d'une variation d'amplitude et de phase (filtrage) dans l'amplitude ou de fonction d'onde incidente sur la pupille-de-sortie qui dépend de ρ et φ dans un système optique sans aberration.

Cet exemple montre que les polynômes de Zernike peuvent être utilisés avantageusement pour les problèmes dans lesquels une distribution de champ donné, prise sur la pupille-de-sortie, s'exprime en fonction desdits polynômes, pourvu que les aberrations soient faibles. Mais si une seule aberration devient grande, l'évaluation de l'intégrale de diffraction peut se faire en intégrant par parties, ce qui est facile pour l'aberration de sphéricité dans le système optique. De plus, il faut souligner qu'en développant la fonction de phase et aussi la fonction de l'amplitude en polynômes de Zernike, et en général, en fonctions orthogonales sur le domaine d'intégration (trou, ouverture, pupille-de-sortie, front d'onde), l'évaluation de l'intégrale de diffraction est plus facile à mener, spécialement dans le cas de faibles aberrations, que par les méthodes plus anciennes de Steward (1925), Born (1932, 1933) et leurs continuateurs. De plus, l'utilisation des fonctions orthogonales donne une interprétation nette de l'effet de chaque aberration dans la figure de diffraction. Si l'intégrale de diffraction se réduit à une intégrale simple, comme dans le cas de l'aberration de sphéricité, ou bien dans quelques cas où le domaine d'intégration est circulaire, on peut encore appliquer la méthode d'intégration par parties, pour obtenir une série descendante, par rapport au coefficient d'aberration (Chako 1961). Ou bien on peut, plus généralement, se servir de la méthode de la phase stationnaire pour évaluer l'intégrale de diffraction dans les cas où l'amplitude et la phase sont deux fonctions très générales.

Le point de vue soutenu par quelques auteurs, que la méthode de Zernike - Nÿboer ne peut s'appliquer dans un certain nombre de cas importants, par exemple, l'ouverture circulaire de rayon variable (quand on fait varier le rayon de la pupille-de-sortie), l'introduction d'une fonction de filtrage ou le calcul du maximum d'énergie dans un domaine limité sur le plan d'image, etc..., est incorrect. Les difficultés mathématiques rencontrées sont d'un genre général et non dues à la façon de développer les fonctions d'amplitude et de phase, figurant dans l'intégrale de diffraction en fonctions orthogonales sur la pupille-de-sortie, ou bien sur la surface du front d'onde émergeant.

Dans le seul cas où une aberration de sphéricité est présente dans un système optique et où en plus, la fonction de filtrage est une fonction paire de la coordonnée radiale ρ de la pupille-de-sortie, il est possible et préférable d'utiliser la méthode de Lommel - Steward, plutôt que celle de Zernike - Nijboer. Il faut souligner encore que cette méthode de Lommel - Steward n'est applicable qu'à des domaines circulaires, parce que l'intégrale de diffraction se réduit à une intégrale simple, par rapport à la coordonnée radiale ρ.

D'autre part, souvent, les avantages d'utilisation des fonctions orthogonales sur la pupille-de-sortie, ou sur la surface d'un front d'onde, émergeant d'un instrument optique, sont beaucoup plus grands que ceux des autres procédés, y compris la méthode de Lommel - Steward et de leurs continuateurs.

Pour les grandes aberrations, les difficultés d'évaluation de l'intégrale double de diffraction ne se résolvent pas en utilisant le procédé Steward (l'intégration par parties), tandis qu'au moyen de la méthode de la phase stationnaire, dont nous parlerons en chapitre IX, il est possible d'éviter ces difficultés.

CHAPITRE VIII

GENERALISATION DES POLYNOMES DE ZERNIKE

I - GENERALISATION DE DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION D'ABERRATION

Précédemment nous avons traité de la théorie de la diffraction d'après la formulation de Zernike-Nijboer. La théorie utilisant les polynômes de Zernike s'applique à des ouvertures circulaires de rayon normalisé à l'unité. Si les ouvertures ne sont pas circulaires, les méthodes des chapitres précédents ne sont plus valables.

Quand dans un problème, l'ouverture est limitée par une frontière non-circulaire, de forme géométrique simple, par exemple, de forme triangulaire ou elliptique, il est nécessaire d'étendre la formulation de Zernike-Nijboer.

Nous développons ici une théorie de la diffraction d'aberration pour une ouverture non-circulaire; une telle formulation est possible s'il existe des polynômes orthogonaux sur le domaine d'intégration.

Soit D un domaine limité par une courbe Γ. Si p, q sont les coordonnées sur D, on peut exprimer Γ par l'équation $f(p, q) = 0$.

Soit $W_{m,n}$ (u, v) un ensemble de polynômes de degré $m + n$ en u et v, orthogonaux sur le domaine D. Alors, nous développons la fonction caractéristique d'Hamilton W en une série de ces polynômes.

$$W = W_{oo} + \sum_{m+n\geq 1}^{\infty} A_{m,n}\,(p, q) \tag{8.1}$$

où W_{oo} est une constante et où les $A_{m,n}$ sont indépendantes de p,q, mais dépendent de x_o et y_o.

D'aprés notre hypothèse, la première propriété de $W_{m,n}$ est l'orthogonalité:

$$\text{(8.a)} \quad \iint_D W_{m,n}(p,q)\, W_{r,s}(p,q)\, h(p,q)\, dp\, dq = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq r,\ n \neq s \\ N_{m,n} & \text{si } m = r,\ n = s \end{cases}$$

La fonction h (p,q) est le poids de $W_{m,n}$ où $N_{m,n}$ est une constante, la constante de normalisation. En général, la propriété d'orthogonalité (8.a) n'est pas satisfaite, mais souvent $W_{m,n}$ satisfait la relation suivante :

$$\text{(8.b)} \quad \int_D W_{m,n}\, W_{r,s}\, h(p,q)\, dp\, dq \begin{cases} = 0 & \text{si } m + r \neq s + n \\ \neq 0 & \text{si } m + r = s + n \end{cases}$$

Si (8.b) est satisfait par les polynômes $W_{m,n}$ cette seule propriété ne nous permet pas de calculer chaque $A_{m,n}$ dans le développement (8.1). Cependant, pour quelques domaines D (triangle, éllipse, cercle) les polynômes $W_{m,n}$ satisfont une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre dans les variables p, q avec des coefficients dépendants de p et q.

Pour calculer $A_{m,n}$ nous construirons l'équation adjointe de $W_{m,n}$. Soit $W'_{m,n}$ une solution de l'équation adjointe de $W_{m,n}$. Alors les polynômes $W_{m,n}$ et le polynôme adjoint $W'_{m,n}$ satisfont une relation :

$$(8.c) \qquad \int W_{m,n} W'_{r,s} h(p,q)\, dp\, dq = 0 \quad \text{si } m \neq r,\ n \neq s$$
$$= N_{m,n} \quad \text{si } m = r,\ n = s$$

Les polynômes $W'_{m,n}$ adjoints aux polynômes $W_{m,n}$ sont connus pour un certain nombre de domaines à deux dimensions. L'existence de $W_{m,n}$ et $W'_{m,n}$ dépend de la propriété de séparation de l'équation de Laplace à quatre dimensions, dont deux variables sont séparables.

Si l'orthogonalité (8. c) est vraie, on dit que $W_{m,n}$, $W'_{m,n}$ forment un ensemble de polynômes bi-orthogonaux.

Alors, les coefficients du développement (8. 1) sont obtenus facilement, comme pour les polynômes orthogonaux ordinaires. En multipliant (8. 1) par $W'_{r,s}$ et en intégrant nous obtenons :

$$(8.d) \qquad \int_D W(x_o, y_o, p, q)\, W'_{r,s}(p,q)\, dp\, dq = \int \sum_{m,n}^{\infty} A_{m,n} \int_D W'_{m,n} W'_{r,s} h\, dp\, dq$$
$$= A_{r,s} N_{r,s}$$

et

$$(8.e) \qquad A_{r,s} = \frac{1}{N_{r,s}} \int_D W_{r,s} W'_{r,s}(p,q)\, dp\, dq$$

Evidemment les applications des polynômes bi-orthogonaux sont limitées dans la théorie de la diffraction d'aberration, aux formes d'ouvertures les plus simples, parce que les calculs pour obtenir le champ image , sont extrêmement complexes.

II - POLYNOMES ORTHOGONAUX SUR UN CERCLE - POLYNOMES DE HERMITE-DIDON

Nous discutons des polynômes de Hermite-Didon, parce qu'ils sont très utiles pour étudier les systèmes optiques asymétriques.

Après les polynômes de Zernike, ceux de Hermite-Didon sont les plus simples polynômes orthogonaux sur un cercle. Les mathématiciens les ont intensivement étudiés (1).

On peut construire les polynômes orthogonaux $P_{n,m}$ sur un cercle, à partir des puissances de x et y c'est-à-dire, des monômes de degré en n x et y :

$$x^n,\ x^{n-1}y,\ x^{n-2}y^2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ x^{n-m}y^m$$

suivant la méthode de Schmidt, tel que :

$$(8.1) \qquad \frac{\partial^n P_{n,m}}{\partial^{n-m} x\, \partial y^m} = 1 \qquad \begin{pmatrix} n = 0,1,2\ldots\ldots \\ m = 0,1,2,\ldots\ldots,n \end{pmatrix}$$

(1) Nous citons seulement les ouvrages principaux. Ch. Hermite, Oeuvres vol. II (1908), Gauthier-Villars, Paris; Didon M. F. Thèse (1867), Paris; Kampé de Fériet J. Thèse (1915) Paris; Appell P. et Kampé de Fériet J. (1926); Bateman H. (1954) vol. II, 1954.

est une condition de normalisation. Mais cette condition seule ne suffit pas pour déterminer $P_{n,m}$. d'autres conditions sont nécessaires et en plus, il faut exiger que le carré de $P_{n,m}$, intégré sur le domaine D, soit minimum :

(8.2) $$I_{n,m} = \int_C P^2_{n,m} \, dx\, dy = \min.$$

et en même temps (8.1) devra être satisfait.

Par une autre approche, on définit $U_{n,m}$ par une fonction génératrice comme Hermite l'a fait, de la même façon que nous construisons les polinômes de Legendre.

On définit $U_{n,m}$ par la relation :

(8.3) $$\left[(1 - ax - by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum a^n b^m U_{n,m}(x,y) \quad n,m = 0$$

Les polynômes $U_{n,m}$ sont cependant exprimés par une formule du type de Rodrigues :

(8.4) $$U_{n,m} = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m}(n!)(m!)} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \, \partial y^m} (1 - x^2 - y^2)^{n+m}$$

Les propriétés d'orthogonalité de $U_{n,m}$ sont les suivantes:

(8.5) $$\int_C U_{n,m} U_{p,q} \, dx\, dy = 0 \quad \text{si } n + m \neq p + q$$
$$\neq 0 \quad \text{si } n + m = p + q$$

D'après la relation (8.5), $U_{n,m}$ ne possède pas la propriété d'orthogonalité ordinaire. Mais,on peut construire les polynômes adjoints $V_{n,m}$, défini par :

(8.6) $$\left[1 - 2ax - 2\,bx + a^2 + b^2\right]^{-1} = \sum a^n b^m V_{n,m}(x,y)$$

tels que:

(8.7) $$\int_C U_{n,m} V_{p,q} \, dx\, dy = 0 \quad \text{si } p \neq n, \; q \neq m$$
$$= \frac{\pi}{n+m+1} \frac{(n+m)!}{n!\, m!} \quad \text{si } p = n, \; q = m$$

Alors on peut développer une fonction F (x,y) en polynômes $U_{n,m}$' ou $V_{n,m}$:

(8.8) $$F(x,y) = \sum A_{n,m} V_{n,m} = \sum B_{n,m} U_{n,m}$$

D'aprés (8.8) les coefficients $A_{n,m}$ sont obtenus par l'expression suivante:

(8.9) $$A_{n,m} = \frac{m!\; n!\; (n+m+1)}{\pi\,(n+m)!} \int_C F(x,y)\, U_{n,m} \, dx\, dy$$

$$= \frac{(n+m+1)\, n!\; m!}{\pi\,(n+m)} \int_C F(x,y)\, V_{n,m} \, dx\, dy$$

La table (A) ci-dessous donne les valeurs explicites de $U_{n,m}$ et $V_{n,m}$, jusqu'à $m + n = 4$. Pour les valeurs $m + n > 4$, voyez la thèse de Tramm (1908) (1).

TABLE A

u	m	$U_{n,m}$			$V_{n,m}$
0	0	1	0	0	1
1	0	x	1	0	$2x$
0	1	y	0	1	$2y$
2	0				
2	0	$\frac{1}{2}(3x^2 + y^2 - 1)$			$4x^2 - 1$
1	1	$2xy$			$8xy$
0	2	$\frac{1}{2}(x^2 + 3y^2 - 1)$			$4y^2 - 1$
3	0	$\frac{x}{2}(5x^2 + 3y^2 - 3)$			$4x(2x^2 - 1)$
2	1	$\frac{3}{2}y(3x^2 + y^2 - 1)$			$4y(6x^2 - 1)$
1	2	$\frac{3}{2}x(x^2 + 3y^2 - 1)$			$4x(6y^2 - 1)$
0	3	$\frac{y}{2}(3x^2 + 5y^2 - 3)$			$4y(2y^2 - 1)$
1	0	$\frac{1}{8}(35x^4 + 30x^2 + 3y^4 - 30x^2 - 6y^2 + 3)$			$16x^4 - 12y^2 + 1$
3	1	$2xy(5x^2 + 3y^2 - 3)$			$8xy(8x^2 - 3)$
2	2	$\frac{3}{4}(5x^4 + 5y^4 + 18x^2y^2 - 6x^2 - 6y^2 + 1)$			$2(48x^2y^2 - 6x^2 - 6y^2 + 1)$
1	3	$2xy(3x^2 + 5y^2 - 3)$			$8xy(8y^2 - 3)$
0	4	$\frac{1}{8}(3x^4 + 35y^4 + 30x^2y^2 - 6x^2 - 30y^2 + 3)$			$16y^4 - 12y^2 + 1$

Il est facile d'obtenir les équations différentielles de $U_{n,m}$ et $V_{n,m}$. Nous obtenons les équations suivantes : (2)

$$(8.10) \quad (1-x^2)\,V_{xy} - 2xyV_{xy} + (1-y^2)\,V_{xy} - 3(xV_x + yV_y) + (n+m)(n+m+2)\,V = 0$$

$$(1-x^2)\,U_{xy} - 2xy\,U_{xy} + (1-y^2)\,U_{xy} - 3(xU_x + yU_y) + (n+m)(n+m+2)\,U = 0$$

(1) Les polynômes donnés par Tramm sont à un facteur constant près, les mêmes que dans notre table, pris du livre d'Appell et Kampé de Fériet (1926).

(2) Appel et Kampé de Fériet, Didon.

Les solutions de ces équations, qui sont des polynômes en x et y, sont exprimées par les fonctions hypergéométriques ${}_3F_2$ de deux variables (x, y).

$$(8.11)\qquad U_{n,m} = \frac{(-1)^{\frac{n+m}{2}}(n+m)!}{(\frac{n}{2})!\,(\frac{m}{2})!}\ {}_3F_2\left(\frac{n+m+2}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\ ;\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ ;\ x^2\ ;\ y^2\right)$$

(n, m) pairs)

$$= \frac{(-1)^{\frac{n+m+1}{2}}\,(\frac{n+m+1}{2})!}{(\frac{n-1}{2})!\,(\frac{m}{2})!}\ 2x\,{}_3F_2\left(\frac{n+m+3}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{-m}{2}\ ;\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\ ;\ x^2, y^2\right)$$

(n impair, m pair)

$$= \frac{(-1)^{\frac{n+m-1}{2}}\,(\frac{n+m+1}{2})!}{(\frac{n}{2})!\,(\frac{m-1}{2})!\ a}\qquad 2y\,{}_3F_2\left(\frac{n+m+3}{2}), \frac{n}{2}, \frac{1-m}{2}\ ;\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\ ;\ x^2y^2\right)$$

(n pair, m impair)

$$= \frac{(-1)^{\frac{n+m+2}{2}}\,(n+m+2)!}{(\frac{n-1}{2})!\,(\frac{m-1}{2})!}\quad 4xy\,{}_3F_2\left(\frac{n+m+4}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1-m}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ ;\ x^2y^2\right)$$

(n, m impairs)

Les équations (8.11) sont symétriques par rapport à n et m, donc $U_{n,m}$ et $V_{n,m}$ sont des solutions de (8.10). Didon a montré qu'on peut écrire (8.10) sous la forme :

$$(8.12)\qquad (1-x^2)\,V_{xy} - xy\,V_{xy} - (m+3)\,xV_x + m\,yV_y + n\,(n+m+2)\,V = 0$$

$$(1-y^2)\,V_{yy} - xyV_{xy} - (n+3)\,yV_y + m\,xV_x + m\,(n+m+2)\,V = 0$$

Pour obtenir les équations satisfaites par $U_{n,m}$, nous remplaçons n et m pa**r** - (n + 1) et - (m + 1), respectivement. Ainsi, on peut déduire les relations de récurrence entre les polynômes de divers indices. On a :

$$(8.13)\qquad x(V_{n,m})_x - (V_{n-1,m})_x = n\,V_{n,m}$$

$$(V_{n-1,m})_y = (V_{n,m-1})_x$$

et

$$y(V_{n,m})_x - (V_{n,m-1})_y = (m+1)\,V_{n-1,m+1})$$

$$(8.14)\qquad (n+m+1)\,V_{n-1,m} = (V_{n,m})_x - x(V_{n-1,m})_x - y(V_{n,m-1})$$

Une relation importante entre $V_{n,m}$ et $U_{n,m}$ est :

$$(8.15)\qquad V_{n,m} = \sum_{n=m} A_{n-2k,\,m+2k}\ U_{n-2k,\,m+2k}$$

où

$$(8.16) \qquad A_{n-2k,m+2k} = \sum_{r=\alpha}^{r=\beta} (-1)^k \frac{(n+m+1)\,(n-2k)!\,(m+2k)!}{(2r+1)\,(r+k)!\,(r-k)!\,(n-k-r)!\,(m+k-r)!}$$

Dans la somme on prend $\alpha = k$, si $k > 0$ et $\alpha = -k$, si $k < 0$. Ainsi α est toujours égal à $|k|$. Pour β on a le choix. D'abord, si $n < m$, et $k > 0$, $\beta = -k$, si $k < 0$, $\alpha = n-k$, ou $m+k$, suivant la valeur de $|2k| \leq m - n$. Si $n = m$, $\beta = n-k$, $k \geq 0$ et dans le cas contraire $\beta = m + k$.

Enfin soit $n > m$. Alors, si $k < 0$, $\beta = n + k$ et au cas contraire on prend $\beta = n - k$ ou $m + k$ suivant que $|2k| \gtrless n - m$.

La formule (8.16) est analogue à la formule que donne le développement d'un polynôme de Zernike d'ordre élevé en fonction de mêmes polynômes d'ordre inférieur.

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, parce qu'on peut exprimer $U_{n,m}$, $V_{n,m}$ en polynômes de Zernike :

$$(8.17) \qquad U_{n,m} = \sum_{n,m\geq o}^{p,q} \left[A_{p,q}\, Z_p^q(\rho) \cos q\varphi + B_{p,q}\, Z_p^q(\rho)\right] \sin q\varphi)$$

$$V_{n,m} = \sum_{n,m=o}^{p,q} \left[C_{p,q}\, Z_p^q(\rho) \cos q\varphi + D_{p,q}\, Z_p^q(\rho)\right] \sin q\varphi)$$

quand on introduit les coordonnées polaires ρ, φ, liées par $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. Les coefficients $A_{p,q} \ldots D_{p,q}$ dépendent de (x_o, y_o).

Les formules (8.17) sont analogues au développement de la fonction caractéristique W quand les systèmes optiques ne possèdent pas de symétrie par rapport à un axe.

Pour cette raison, il n'est plus nécessaire d'utiliser les polynômes de Hermite-Didon dans la théorie de la diffraction des aberrations. Cependant, ces polynômes jouent un rôle très important dans quelques problèmes de la théorie des vibrations de plaques anisotropes(1)

III- POLYNÔMES ORTHOGONAUX SUR UN TRIANGLE

Les polynômes orthogonaux sur un triangle on été étudiés pour la première fois par Appell (1882, 1926). Il introduisit ce genre de polynômes comme des cas limites des fonctions hypergéom - triques à deux variables. Ces polynômes sont du type des polynômes de Jacobi. En fait, ce sont des polynômes à deux variables qui généralisent les polynômes de Jacobi.

Soit les trois sommets d'un triangle en (0,0), (0,1) et (1,0). Les équations des trois côtés du triangle sont :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 1 - x - y = 0$$

Alors on peut définir un polynôme de degré 2 n par :

$$(8.18) \qquad P_{n,m} = x^{n-m}\, y^m\, (x + y - 1)^n, \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ m = 0, 1, 2, \ldots\ldots n \end{pmatrix}$$

(1) Le déplacement $u(x,y)$ d'une plaque mince d'un cristal piezoélectrique est exprimé par deux équations analogues aux équations satisfaites par $U_{n,m}$, et $V_{n,m}$.

Soit $T_{n,m}$ un polynôme défini par :

(8.19) $$T_{n,m} = \frac{\partial n}{\partial x^{n-m} \partial y^{m}} P_{n,m}$$

$$= n\,! \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n+2+s} (n-m+2)\,!\,(m+s)\,!}{(r\,!)^2 (s\,!)^2 (n-r-s)\,!} \; x^r \; y^s$$

nous obtenons l'orthogonalité de $T_{n,m}$ sur le triangle :

(8.20) $$\int_T T_{n,m} \, T_{n,q} \; dx \, dy = \frac{(n!)^2 (2n-m-q)\,!\,(m+q)\,!}{(2n+2)\,!}$$

$$= A^{(n)}_{m,q} \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots. \\ m, q = 0, 1 \ldots.. n \end{pmatrix}$$

Mais la propriété d'orthogonalité ne nous permet pas d'obtenir les coefficients de développement d'une fonction en $T_{n,m}$.

Comme pour les polynômes de Hermite - Didon, nous pouvons construire un ensemble de polynômes $T'_{n,m}$, adjoint de $T_{n,m}$. On peut exprimer $T'_{n,m}$ comme somme de $T_{n,m}$, comme suit

(8.21) $$T^{o}_{n,m} = \sum_{r=0}^{M} B^{(n)}_{m,r} \; T_{n,r}$$

tel que :

(8.22) $$\int_T T^{o}_{n,m} \; T_{n,q} \; dx \, dy = 0 \qquad \text{si } m \neq q$$
$$= C^{(n)}_{m,q} \qquad \text{si } m = q$$

La table ci-dessous donne les polynômes $T^{o}_{n,m}$

TABLE B

n	m	$T^{o}_{n,m}$
0	0	1
1	0	$2x + y - 1$
1	1	$3y - 1$
2	0	$6x^2 + 6xy + y^2 - 6x - 6y + 1$
2	1	$10xy + 5y^2 - 2x - 2y + 1$
2	2	$10y^2 - 8y + 1$
3	0	$20x^3 + 7y^3 + 12xy^2 - 30x^2 - 3y^2 - 24xy + 12x + 3y - 1$
3	1	$7y^3 + 42x^2y + 42xy^2 - 6x^2 - 48xy - 15y^2 + 3x + 9y - 1$
3	2	$21y^3 + 42xy^2 - 24xy - 33y^2 + 2x + 13y - 1$
3	3	$35y^3 - 45y^2 + 15y - 1$

où

(8.23) $$C^n_{m,q} = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{q} B^{(n)}_{m,r} \; B^{(n)}_{q,s} \; A^n_{r,s}$$

Nous obtenons alors une relation analogue à celle de $U_{n,m}$, $V_{n,m}$ où les éléments de matrice $(B^{(n)}_{m,q})$ prennent la forme triangulaire. Parce que $A^{(n)}_{m,q}$ est une matrice symétrique, par rapport à m et q, il est possible de diagonaliser $C^n_{m,q}$. On trouve que si, $B^n_{m,q}$ est exprimé par (1) :

(8.24) $$B^n_{m,q} = (-1)^{m+q} \binom{m}{q} \binom{2n-m+1}{q}$$

alors $T^o_{n,m}$ se développe sous la forme :

(8.25) $$T^o_{n,m} = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m+r} \binom{m}{r} \binom{2n-m+1}{r} \; T_{n,r}$$

$$(n = 0, 1, \ldots\ldots), \qquad m = (0, 1, \ldots\ldots, n)$$

et

(8.26) $$\int_T T_{n,m} \, T_{p,q} \, dx \, dy = 0 \qquad \text{si} \quad |n-p| + |m-q| > 0$$

$$= \frac{1}{(2n+2)\,(2n-2m+1)} \qquad \text{si } n = p, \quad m = q$$

IV - POLYNOMES ORTHOGONAUX SUR UNE ELLIPSE

Dans la diffraction par un système optique asymétrique, une ouverture circulaire est changée en une ellipse à cause de l'erreur de déformation, quand l'objet est très loin de l'axe du système, ou la distance de l'objet à l'axe du système est plus grande que le rayon de la sphère de référence $\sigma = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} = R_o$ (voyez chapitre V). Dans ce cas, on ne peut pas utiliser les polynômes de Zernike dans le développement de la fonction d'aberration, parce que l'orthogonalité des polynômes Z^m_n (p) n'est plus valable. Alors, il faut employer les polynômes orthogonaux sur un domaine elliptique.

Les polynômes elliptiques sont obtenus des polynômes de Hermite-Didon par une transformation linéaire des coordonnées x et y :

(8.27) $$x = a_1 u + a_2 v + a_3 = f(u,v)$$

$$y = b_1 u + b_2 v + b_3 = g(u,v)$$

où a, b, ..., f, sont des constantes.

Dans un article (1953, 1959), nous avons donné les équations différentielles que ces types de polynômes satisfont et aussi la règle pour obtenir les polynômes.

Soit $E_{n,m}(x,y)$ un polynôme elliptique, où les demi-axes sont a, b. Alors, on peut exprimer $E_{n,m}(x,y)$ par le moyen de $U_{n,m}$ ou de $V_{n,m}$, comme suit :

(8.28) $$E_{n,m}(x,y) = U_{n,m}(ax, by)$$

(8.29) $$E'_{n,m}(x,y) = V_{n,m}(ax, by)$$

(1) Gröbner, 1948.

De la table (A) nous obtenons les tables suivantes pour $E_{n,m}$ et $E'_{n,m}$.

TABLE C

n	m	$E_{n,m}$	$E'_{n,m}$
0	0	1	1
1	0	ax	$2\,ax$
0	1	by	$2\,by$
2	0	$\frac{1}{2}(3a^2x^2+b^2y^2-1)$	$4\,a^2x^2-1$
1	1	$2\,ab\,xy$	$8\,ab\,xy$
0	2	$\frac{1}{2}(a^2x^2+3b^2y^2-1)$	$4\,b^2y^2-1$
3	0	$\frac{ax}{2}(5a^2x^2+3b^2y^2-3)$	$4ax\,(2a^2x^2-1)$
2	1	$\frac{3}{2}\,by\,(3a^2x^2+b^2y^2-1)$	$4by\,(6a^2x^2-1)$
1	2	$\frac{3}{2}\,ax\,(a^2y^2+3b^2y^2-1)$	$4ax\,(6b^2\,y-1)$
0	3	$\frac{bx}{2}(3a^2x^2+5b^2y^2-3)$	$4by\,(2b^2y^2-1)$
4	0	$\frac{1}{8}(35a^4x^4+3b^4y^4-30a^2b^2x^2y^2-30a^2x^2-6b^2y^2+3)$	$16a^4x^4-12a^2x^2+1$
3	1	$2\,ab\,xy\,(5a^2+x^2+3b^2y^2-3)$	$8\,ab\,xy\,(8a^2x^2-3)$
2	2	$\frac{3}{4}(5a^4x^4+5b^4y^4+18a^2b^2x^2y^2-6a^2x^2-6b^2y^2+1)$	$2\,(48a^2b^2x^2y^2-6a^2x^2-6b^2y^2-1)$
1	3	$3\,abxy\,(3a^2x^2+b^2y^2-3)$	$8abxy\,(8b^2y^2-3)$
0	4	$\frac{1}{8}(3a^4x^4+35b^4y^4+30a^2b^2x^2y^2-6a^2x^2-30b^2y^2+3)$	$16\,b^4y^4-12b^2y^2+1$

TABLE D

n	m	$E_{n,m}(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi)$
0	0	1
1	0	$a\rho\cos\varphi$
0	1	$a\rho\sin\varphi$
2	0	$\frac{1}{2}\left[(\frac{3}{2}a^2+b^2)\rho^2-1\right]+\frac{1}{2}(\frac{3}{2}a^2-b^2)\rho^2\cos^2\varphi$
1	1	$ab\,\rho^2\sin^2\varphi$
0	2	$\frac{1}{2}\left[(a^2+\frac{3}{2}b^2)\rho^2-1\right]+\frac{1}{2}(a^2-\frac{3}{2}ab^2)\rho^2\cos^2\varphi$
3	0	$\frac{3}{8}a\rho\left[(5a^2+b^2)\rho^2-4\right]\cos\varphi+\frac{3}{8}a\rho^3(5a^2-b^2)\cos^3\varphi$
2	1	$\frac{9}{8}b\rho\left[(a^2+b^2)\rho^2-\frac{4}{3}\rho\right]\sin\varphi+\frac{3}{8}b\rho^3(3a^2-b^2)\sin^3\varphi$
2	2	$\frac{9}{8}a\rho\left[(a^2+b^2)\rho^2-\frac{4}{3}\rho\right]\cos\varphi+\frac{3}{8}a\rho^3(a^2-3b^2)\cos^3\varphi$
0	3	$\frac{3}{8}b\rho\left[(a^2+5b^2)\rho^2-4\right]\sin\varphi+\frac{3}{8}b\rho^3(5b^2-a^2)\cos^3\varphi$

si $m + q$ est pair $n = 0, 1, \ldots\ldots$, et $m, q = 0, 1, 2, \ldots n$.

Cependant la propriété orthogonale de $P_{n,m}$ est très compliquée, mais on peut construire un ensemble de polynômes $P'_{n,m}$ qui sont exprimés par une forme linéaire de $P_{n,m}$, comme nous avons fait pour les polynômes $V_{n,m}$ et $T_{n,m}$ (formule (8. 15) ou (8. 25). On écrit :

(8. 32a) $$P'_{n,2m} = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m+r} \binom{m}{r} \frac{(2m-1)!!\,(2n-2m+1)!!}{(2r-1)!!\,(2n-2m-2r-1)!!} P_{n,2r} \quad (m=0,1,\ldots \left[\tfrac{n}{2}\right])$$

(8. 32b) $$P'_{n,2m+1} = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m+r} \binom{m}{r} \frac{(2m+1)!!\,(2n-2m-1)!!}{(2r+1)!!\,(2n-2m-2-1)!!} P_{n,2r+1} \quad (m=(0,1,\ldots \left[\tfrac{n-1}{2}\right])$$

Alors les propriétés orthogonales de $P_{n,m}$ prennent la forme :

(8. 33) $$\int_C \left[P'_{n,m} P'_{p,q}\, dx\, dy = 0 \qquad \text{si } |n-p| + |m-q| > 0\right.$$

$$\int_C \left[P'_{n,2m}\right]^2 dx\, dy = \frac{2^{n+m}(2m)!\,(2n-2m+1)!!\,\pi}{(n-m)!\,(2n-4m-1)(n+1)}, \quad (m = 0,1,\ldots \left[\tfrac{n}{2}\right])$$

$$\int_C \left[P'_{n,2m+1}\right]^2 dx\, dy = \frac{2^{n+m}(2m+1)!\,(2n-2m-1)!!\,\pi}{(n-m)!\,(2n-4m-1)(n+1)}, \quad (m = 0,1,\ldots\ldots \left[\tfrac{n-1}{2}\right])$$

Ainsi, $P'_{n,m}$ joue le même rôle pour $P_{n,m}$ que $V_{n,m}$ pour les $U_{n,m}$ ou $T^{o}_{n,m}$. On peut facilement calculer les coefficients de développement d'une fonction quelconque $F(x,y)$ en $P'_{n,m}$.

Dans la table (E) nous avons indiqué les polynômes $P_{n,m}$ et les polynômes $P'_{n,m}$ ou $(n, m = 0, 1, 2, 3, 4)$.

TABLE E

n	m	$P_{n,m}$
0	0	1
1	0	$2x$
1	0	$2y$
2	0	$2(3x^2 + y^2 - 1)$
2	1	$4xy$
2	2	$2(x^2 + 3y^2 - 1)$
3	0	$4(5x^3 + 3xy^2 - 3x)$
3	1	$4(x^3y + y^3 - y)$
3	2	$4(x^3 + 3xy^2 - x)$
3	3	$4(3x^2y + 5y^2 - 3y)$
4	0	$2(35x^4 + 3y^4 + 5x^2y^2 - 15x^2 - 6y^2 + 3)$
4	1	$8(5x^3y + 3xy^3 - 3xy)$
4	2	$4(5x^4 + 5y^4 + 6x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 1)$
P_4	3	$8(5x^3y + 5xy^3 - 3xy)$
P_4	4	$2(3x^4 + 35y^4 + 15x^2y^2 - 6x^2 - 15y^2 + 3)$

n	m	$P'_{n,m}$
0	0	1
1	0	$2x$
1	1	$2y$
2	0	$2(3x^2 + y^2 - 1)$
2	1	$4xy$
2	2	$4(4y^2 - 1)$
3	0	$4(5x^3 + 3xy^2 - 3y)$
3	1	$4(3x^2y + y^3 - y)$
3	2	$8(6xy^2 - x)$
3	3	$24(2y^3 - y)$
4	0	$P_{4\,0}$
4	1	$9\,P_{4\,1}$
4	2	$7\,P_{4\,0} + 15\,P_{4\,2}$
4	3	$-3\,P_{4\,1} + P_{4\,3}$
4	4	$10\,P_{4\,0} - 15\,P_{4\,2}$

n	m	$E'_{n,m}(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)$
0	0	1
1	0	$2a\rho\cos\varphi$
0	1	$2b\rho\sin\varphi$
2	0	$2a^2\rho^2 - 1 + 2a^2\rho^2\cos^2\varphi$
1	1	$4ab\rho^2\sin 2\varphi$
0	2	$2b^2\rho - 1 - 2b^2\rho^2\cos 2\varphi$
3	0	$2a\rho(3a^2\rho^2 - 2)\cos\varphi + 2a^3\rho^3\cos^3\varphi$
2	1	$2b\rho(3a^2\rho^2 - 2)\sin\varphi + 6a^2b\rho^3\sin^3\varphi$
1	2	$2a\rho(3b^2\rho^2 - 2)\cos\varphi + 6ab^2\rho^3\cos^3\varphi$
0	3	$2b\rho(3b^2\rho^2 - 2)\sin\varphi - 2b^3\rho^3\sin^3\varphi$

On peut aussi définir les polynômes orthogonaux sur un cercle de rayon a = 1, comme suit :[1]

(8.30) $$P_{n,m} = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial x^{n-m}\,\partial y^m}(x^2+y^2-1)^n \qquad \begin{array}{l}(n = 0,1,2,\ldots\ldots)\\(m = 0,1,2,\ldots\ldots,n)\end{array}$$

(1) Voyez Gröbner (1948).

Les polynômes sont les mêmes que les $P_{n,m}$ de la table (A) sauf pour les constantes numériques multipliant le polynôme. La propriété orthogonale de $P_{n,m}$ est :

$$(8.31) \qquad \int_C P_{n,m} P_{n,q} \, dx \, dy = 0 \quad \text{si } m + q \text{ (impair)}$$
$$= \frac{(2n - (m+q))! \, (m+q)! \, \pi}{(n - \frac{m+q}{2})! \, (\frac{m+q}{2})! \, (n+1)!}$$

Les polynômes elliptiques correspondants à $P'_{n,m}$ sont donnés par la table suivante :

n	m	$E'_{n,m}(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi)$
0	0	1
1	0	$2a\rho\cos\varphi$
1	1	$2b\rho\sin\varphi$
2	0	$(3a^2+b^2)\rho^2 - 2 + (3a^2-b^2)\rho^2\cos^2\varphi$
2	1	$2ab\sin^2\varphi$
2	2	$4(2b^2\rho^2-1) - 8b^2\rho^2\cos^2\varphi$
3	0	$3a\rho\left[(5a^2+b^2)\rho^2 - 4\rho\right]\cos\varphi + a\rho^3(5a^2-3b^2)\cos^3\varphi$
3	1	$b\rho\left[(3b^2-3a^2)\rho^2 - 4\rho\right]\sin\varphi + 3b\rho^3(a^2+\frac{1}{3}b^2)\sin^3\varphi$
3	2	$4a\rho(3b^2\rho^2-2)\cos\varphi - \frac{1}{2}ab^2\rho^3\cos^3\varphi$
3	3	$12\left[b\rho(3b^2\rho^2-2)\sin\varphi - b^3\rho^3\sin^3\varphi\right]$

Après cette étude préliminaire de polynômes orthogonaux sur un cercle, triangle ou ellipse, nous pouvons développer la fonction de Hamilton ou la phase d'intégrale de diffraction en séries de polynômes, de la même façon que Nijboer l'a fait pour les polynômes de Zernike.

Par conséquent on peut écrire :

$$(8.34) \qquad W = \Sigma A_{n,m} V_{n,m} = \Sigma A'_{n,m} P'_{n,m}(x,y)$$

où

$$(8.35) \qquad \varphi(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m} V_{n,m} = \sum_{n,m=0}^{\infty} A'_{n,m} P'_{n,m}$$

si la pupille de sortie est circulaire ;

$$(8.36) \qquad W = \sum_{n,m=0}^{\infty} B_{n,m} T'_{n,m}(x,y)$$

si la pupille de sortie est triangulaire ;

$$(8.37) \qquad W = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m} E'_{n,m}(x,y) = \sum_{n,m} D_{n,m} P'_{n,m}(ax, by)$$

si la pupille de sortie est une ellipse.

En remplaçant (8.35) (8.36) et (8.37) dans la phase de l'intégrale de diffraction, nous obtenons :

$$(8.38) \qquad U = A_0 \int_C e^{ik\left[\sum_{n=0} \sum_{m=0} A'_{n,m}(x_0, y_0 \,;\, x', y', z') P'_{n,m}(x,y)\right]} dx\,dy$$

$$(8.39) \qquad U = A_0 \int_C e^{ik\left[\sum_{n=0} \sum_{m=0} B_{n,m} T'_{n,m}(x,y)\right]} dx\,dy$$

$$(8.40) \qquad U = A_0 \int_E e^{ik\left[\sum_{n=0} \sum_{m=0} C_{n,m} E'_{n,m}(x,y)\right]} dx\,dy$$

respectivement pour un domaine de forme circulaire, triangulaire ou elliptique.

En pratique, l'évaluation de (8.38) à (8.40) est difficile. L'intégration deviendra maniable seulement au voisinage du point focal ou de l'image de Gauss.

Dans ce cas, on peut développer les exponentielles en séries et pour les petites valeurs de n, m, il est possible d'après les tables (A) - (E) d'évaluer les intégrales.

Mais il faut noter que, du point de vue pratique, la distribution du champ au voisinage du point focal ou de l'image de Gauss n'est pas très importante. Mais dans quelques problèmes il est intéressant de connaître la distribution du champ près du point focal ou près de l'image de Gauss. Cependant, ces polynômes prennent de l'importance dans d'autres domaines de la physique mathématique et surtout dans la théorie de vibrations de plaques élastiques asymétriques.

5 - GENERALISATION DES POLYNÔMES DE ZERNIKE

Finalement nous considérons quelques fonctions qu'on peut employer dans l'étude de la diffraction. Ce sont les polynômes hypergéométriques dont nous nous sommes servis pour résoudre le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par une ouverture ou écran circulaire (1959, 1963). Si la fonction $J_{\alpha,\beta,\gamma}$ est définie par l'intégrale :

$$(8.41) \qquad J_{\alpha,\beta,\gamma}(\rho, a) = \int_0^{\infty} J_m(\rho t)\, J_\beta(a t)\, t^{2\gamma - \beta -}\, dt$$

alors pour les valeurs de $\alpha = m, \beta$, $\gamma = m + \nu + \frac{1}{2}$,

$g_{m,\beta\, m+\nu+\frac{1}{2}} \equiv J_{m,\beta,\, m+\nu+\frac{1}{2}}$ est exprimé par les expressions suivantes*:

$$(8.42) \qquad g_{m,\beta,\, m+\nu+\frac{1}{2}}(\rho, a) = \frac{1}{a} \left(\frac{2}{a}\right)^{2\nu+m+1-\beta} \left(\frac{\rho}{a}\right)^m \frac{1}{\Gamma(\beta - m - \nu)\,\Gamma(m+1+\nu-\beta)}$$
$$\cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+m+\nu+1-\beta)\,\Gamma(r+m+\nu+1)}{r!\,\Gamma(r+m+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2r}$$

valable pour $0 < \rho < a$ et :

$$(8.43) \qquad g_{m,\beta,\, m+\nu+\frac{1}{2}}(\rho, a) = \frac{\cos(\nu+\frac{1}{2})\pi}{2\pi} \left(\frac{2}{\rho}\right)^{m+2v+2} \left(\frac{a}{2}\right)^{\beta}$$
$$\cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\nu+1)\,\Gamma(r+m+\nu+1)}{r!\,\Gamma(m+\beta+1)} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2r}$$

valable pour $a < \rho < \infty$

La fonction $g_{m,\beta,m+\nu+\frac{1}{2}}$ est une fonction discontinue(**) en ρ et pour certaines valeurs de β, ν elle deviendra singulière au bord de l'ouverture $\rho = a$, de forme $(1 - \frac{\rho^2}{a^2})^{-1/2}$ ou bien s'annule. Mais pour certaines valeurs de β et ν, $g_{m,\beta,\, m+\nu+\frac{1}{2}}$ s'annule quand $\rho \geq a$.

Supposons que $\nu = n$, $(n = 0, 1, \ldots.)$

Alors d'après (8.42) et (8.43) nous avons :

$$(8.44a) \qquad g_{m,\beta,\, m+n+\frac{1}{2}}(\rho, a) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{2n+m+1-\beta} \left(\frac{\rho}{2}\right)^m \frac{1}{\Gamma(\beta-n-m)\,\Gamma(1+m-n-\beta)}$$

(*) Cette formule est égale à :

$$g_{m,\beta,\, m+\nu+1/2}(\rho, a) = \frac{1}{a}\left(\frac{2}{a}\right)^{m+2\nu+1-\beta} \left(\frac{\rho}{a}\right)^m \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{m!\,\Gamma(\beta-m-\nu)}\ {}_2F_1(m+\nu+1,\, m+\nu+1-\beta\,;\, m+1\,;\, \rho^2/a^2)$$
$$= \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{2}{a}\right)^{m+2\nu+1-\beta} \left(\frac{\rho}{a}\right)^m \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{m!\,\Gamma(\beta-m-\nu)} \left(1 - \rho^2/a^2\right)^{\beta-m-2\nu-1}\ {}_2F_1(-\nu,\, \beta-\nu\,;\, m+1\,;\, \rho^2/a^2)$$

(**) La discontinuité est à $\rho = a$.

si $\quad o \leq \rho < a$, et

$$= 0 \qquad \text{si } a < \rho < \infty$$

(8.44b) $\quad g_{m,\beta,m+n+1/2}(\rho,a) = \frac{1}{a}\left(\frac{2}{a}\right)^{m+2n+1-\beta} \frac{1}{\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)^{m+2n+1-\beta}} \frac{\Gamma(2n+m+1-\beta)}{\Gamma(\beta-n-m)\Gamma(m+n+1-\beta)}$ si $\rho \to a$

et si $\beta = m+2n+1$, nous obtenons :

(8.44c) $\quad g_{m,m+2n+1,m+n+1/2}(\rho,a) = \frac{1}{a}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\Gamma(r+m+n+1)}{r!\,\Gamma(r+m+1)\Gamma(n+1-r)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n}, \; \rho < a$

lequel est un polynôme de degré $2n$ en ρ/a.

Supposons que $\beta = 2n+m+1/2$. Dans ce cas, nous obtenons :

(8.45) $\quad g_{n,m+2n+1/2,m,n+1/2}(\rho,a) = \frac{1}{a}\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}} \quad (-1)^n \quad (\rho \to a)$

donc $g \to \infty$ au bord de l'ouverture, et $g \to o$ si $\beta = m+2n+3/2$.

Mais, si $\beta = p+m+1$, $p = (1,2,3,\ldots)$ $p > n$ nous obtenons les polynômes hypergéométriques $g_{m,m+p+n+1,m+n+\frac{1}{2}}$ orthogonaux sur l'ouverture circulaire avec la fonction de poids $\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)^{2(p-n)}$
Il suffit de noter que les polynômes de Zernike sont exprimés par la fonction $J_{\alpha,\beta,\gamma}$ comme suit :

(8.46) $\quad Z_n^m(\rho) = (-1)^{\frac{n-m+2}{2}} \; g_{m,n+1,\frac{m+n+1}{2}}(\rho, a=1) \quad 0 < \rho < a = 1$

où le poids $h(\rho,a) = \rho$. Aussi on peut écrite par l'intégrale :

(8.47) $\quad g_n^m(\rho,a) = Z_n^m(\rho, a=1) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \int_0^\infty J_m(\rho t)\, J_{n+1}(t)\, dt$

où $\quad n - m = 2p \quad (p = 0,1,2,\ldots\ldots)$

Si on multiplie (8.47) par $\rho J_m(\rho r)$, nous obtenons immédiatement :

(8.48) $\quad \int_0^1 J_m(\rho r)\, Z_n^m(\rho)\rho\, d\rho = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{J_{n+r}(r)}{r}$

formule déjà donnée par Nijboer (1942).

Il y a une relation entre notre fonction $g_{\alpha,\beta,\gamma}$ et les polynômes de Jacobi. Soit $f_n(\alpha,\gamma,z)$ un polynôme de Jacobi, défini par la fonction hypergéométrique de Gauss.

(8.49) $\quad f_n(\alpha,\gamma,z) = {}_2F_1(\alpha+n, -n; \gamma; z) \qquad (-1 \leq z \leq 1)$

où $\gamma > 0$, $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots,-n+1$. Mais alors f_n est exprimé en terme de $g_{m,\beta,m+n+1/2}(\rho)$ comme suit :

(8.50) $\quad f_n(\alpha,\gamma,z) = \frac{2^{\gamma-\alpha}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(\alpha+n+1-\gamma)}{\Gamma(m+n+1)} (1-z)^{\alpha-\gamma}\, g_{\gamma-1,\alpha+2n,\gamma+n-1/2}(\sqrt{z})$

En mettant $\beta - n = m+n+1$), nous obtenons la relation suivante entre les polynômes de Jacobi et et $g_{m,m+n+n+1,m+n+1/2}(\rho,a)$.

$$(8.51a)\quad g_{m,m+n+n+1,\,m+n+1/2}(\rho,a) = \frac{1}{a}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m \cdot \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)\,(m+1)}\, f_n\left(m+n+1,\, m+1\,;\, \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

$$(8.51b)\quad g_{m,m+2n+3/2,\,m+n+1/2}(\rho,a) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+3/2)}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)^{1/2} {}_2F_1\left(-n, n+m+3/2\,;\, m+1\,;\, \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

$$= \sqrt{2a}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-m} \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(m+n+1)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}}\, f_n\left(m+3/2, m+1\, \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

D'après les propriétés orthogonales des polynômes de Jacobi, nous déduirons les propriétés orthogonales de notre fonction.

$$(8.52)\quad \int_0^a g_{m,\beta,m+n+1/2}(\rho,a)\, g_{m,\beta,m+p+1/2}(\rho,a)\left[1-\frac{\rho^2}{a^2}\right]^{m+n+p+1-\beta} \rho\, d\rho$$

$$= 0 \qquad \text{si } p \neq n$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{4}{a^2}\right)^{\beta-m-2n-1} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+n+1)}{\beta\Gamma(\beta-n)\,\Gamma(\beta-m-n)} = 1 \quad \text{si } p = n$$

Alors les polynômes définis par :

$$(8.53)\quad K_{m,\beta,n}(\rho,a) = \frac{1}{N}\, g_{m,\beta,m+n+1/2}(\rho,a)\left[1-\frac{\rho^2}{a^2}\right]^{\frac{m+2n+1-\beta}{2}}$$

forment un ensemble de fonctions orthogonales sur un cercle de rayon a, ou bien d'unité si a = 1 :

$$(8.54)\quad \frac{1}{N^2}\int_0^{(a,1)} K_{m,\beta,n}(\rho,a)\, K_{m,\rho,n}(\rho,a)\, \rho d\rho \;\begin{array}{ll} = 0 & \text{si } p \neq n \\ = 1 & \text{si } p = n \end{array}$$

où N est la constante de normalisation ;

$$(8.55)\quad N^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{4}{a^2}\right)^{\beta-m-2n-1} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+n+1)}{\beta\Gamma(\beta-n)\,\Gamma(\beta-m-n)}$$

Comme cas particulier nous prenons $\beta = m+2n+1$ alors $K_{m,n}(\rho,a)$ deviendra :

$$(8.56)\quad K_{m,n}(\rho,a) = \frac{1}{a\sqrt{m+2n+1}}\, g_{m,m+2n+1,\,m+n+1/2}(\rho,a)$$

et

$$(8.57)\quad \int_0^a K_{m,n}(\rho,a)\, K_{m,p}(\rho,a)\, \rho d \;\begin{array}{ll} = 0 & p \neq n \\ = 1 & p = n \end{array}$$

En conséquence de (8.57) on a :

$$(8.58)\quad \int_0^a g_{m,m+2n+1,\,m+n+1/2}(\rho,a)\, g_{m,m+2p+1,\,m+p+1/2}(\rho,a)\,\rho d\rho \;\begin{array}{ll} = 0 & \text{si } p \neq n \\ = \frac{1}{a^2(m+2n+1)} & \text{si } p = n \end{array}$$

Il n'est pas très difficile de déduire les propriétés suivantes :

$$(8.59A)\quad \int_0^a g_{m,\beta,m+n+1/2}(t,a)\; J_m(\rho t)\; t\,dt = \quad 2n+m-\beta \quad J_\beta(\rho a)$$

et comme cas particulier, $\beta = 2n+m$, nous obtenons :

$$(8.59B)\quad \int_0^a g_{m,m+2n,\,m+n+1/2}(\rho,a)\; J_m(\rho t)\; t\,dt = J_{2n+m}(a\rho)$$

et si $\beta = m+2n+1$

$$(8.60)\quad \int_0^a g_{m,m+2n+1,\,n+m+1/2}(a\,t)\; J_m(\rho t)\; t\,dt = \frac{J_{m+2n+1}(\rho a)}{(a\ )}$$

En plus si $m+2n = p$ et $a = 1$, la formule (8.60) se réduit à :

$$(8.61)\quad \int_0^1 g_{m,p+1,\,\frac{m+m+1}{2}}(t)\; J_m(\rho t)\; t\,dt = \frac{J_{p+1}(\rho)}{\rho}$$

qui correspond à la formule de Nijboer.

Donc nous pouvons définir les polynômes de Zernike, de façon :

$$(8.62)\quad Z_n^m(\rho) = (-1)^{\frac{n-m}{2}}\; g_{m,p+1,\,\frac{p+m+1}{2}}$$

qui est équivalente à la formule (8.46).

De la formule (8.41) nous pouvons déduire un certain nombre de formules intéressantes, parce que $g_{m,\beta,m+n+1/2}(\rho a)$ est exprimé par l'intégrale :

$$(8.63)\quad g_{m,\beta,n+\nu+1/2}(\rho a) = \int_0^\infty J_m(\rho t)\; J_\beta(at)\; t^{2n+m+1-\beta}\,dt$$

Si nous remplaçons la fonction $J_\beta(at)\,t^{n+m-\beta}$ par l'expression équivalente (8.59), on arrive à la relation importante :

$$(8.64)\quad g_{m,\beta,m+\nu+1/2}(\rho a) = \int_0^\infty J_m(\rho t)\,dt \int_0^a g_{m,\beta,m+\nu+1/2}(ua)\; J_m(mt)\; u\,du$$

Cette dernière relation ressemble à la transformation de Fourier-Bessel :

$$(8.65)\quad F(\rho) = \int_0^\infty J_m(\ \ t)\; t\,dt \int_0^\infty u\,f(u)\; J_m(ut)\,du$$

Nous remarquons que les fonctions $g_{\alpha,\beta,\gamma}(\rho a)$ sont les généralisations des polynômes de Zernike et Jacobi. Les polynômes obtenus pour les valeurs particulières de α, β, γ, généralisent les polynômes de Zernike sur un cercle de rayons quelconques a.

Nous concluerons ce chapitre en remarquant qu'ont peut utiliser ces polynômes à la place des polynômes de Zernike, pour étudier la théorie de la diffraction d'aberrations.

Il n'est pas difficle de construire aussi les polynômes annulaires d'après les fonctions $g_{\alpha,\beta,\gamma}$. Ceux-ci ont été considérés par Steel (1954).

Enfin, on peut exprimer $g_{m,m+2n+3/2,\,m+n+1/2}$ par les polynômes de Legendre du type :

$$(8.66)\quad g_{m,m+2n+3/2,\,m+n+1+2}(\rho a) = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{\Gamma}{2a}}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+3/2)}\; P_{m+2n+1}^m\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}\right)$$

$$\text{si } 0 \leq \rho < a$$

$$= 0 \qquad \text{si } \rho > a$$

Les fonctions $g_{m,m+2n+3/2,m+n+1/2}(\rho,a)$ jouent un rôle principal dans la théorie exacte de la diffraction par une ouverture ou disque circulaire.

Pour la dérivation de la formule (8.66), voir notre article (1963).

CHAPITRE IX

LA THEORIE DIFFRACTIONNELLE DES GRANDES ABERRATIONS

I - EVALUATION DES INTEGRALES D'ABERRATION

Jusqu'à présent, nous avons étudié le problème de diffraction pour des aberrations plus petites que la longueur d'onde. Mais, si la déformation du front d'onde réelle S, à la sortie de l'instrument optique, est grande, par rapport à la surface d'onde idéale (la surface sphérique S_o), alors les méthodes du chapitre VI et VII ne sont pas valables, parce que les séries convergent très lentement, ou deviennent semi-divergentes. Si les aberrations sont beaucoup plus grandes que la longueur d'onde, il est nécessaire d'évaluer l'intégrale de diffraction par d'autres méthodes. Une méthode applicable dans ce cas, est la méthode de la phase stationnaire, ou la méthode du col, qui est à peu près équivalente.

Aujourd'hui, l'extension de la méthode de la phase stationnaire aux intégrales doubles ou multiples est bien établie, grâce aux travaux de plusieurs auteurs. Il n'est pas nécessaire de donner une analyse détaillée de cette méthode, on peut trouver un traitement complet et historique dans notre deuxième thèse.

Dans la théorie de la phase stationnaire, les contributions principales de l'intégrale de diffraction :

$$U(r) = v(x, y, r) = \frac{ika^2 e^{ikRo}}{2\pi Ro} \int_D \frac{e^{-ik\left[s + V(\rho, \varphi)\right]}}{s} ds \tag{9.1}$$

$$= -\frac{ik}{2\pi} A_o \int_D g(x, y)\, e^{ik\varphi(x, y)}\, dx\, dy$$

quand k est un grand nombre, sont dues aux points du domaine d'intégration D, où la phase est stationnaire et où l'amplitude cesse d'être bornée. Ceux-ci sont les points critiques de l'intégrale. Les points critiques satisfont les conditions suivantes :

(a) $\varphi_x = 0, \quad \varphi_y = 0, \qquad (x, y : \in D)$

(b) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} = 0, \qquad (X = x(s), \ y = y(s) \quad (x, y : \in \partial D = \Gamma)$

(c) $g(x, y) \to \infty$ (non-bornée) à $(x \to x_o, \ y \to y_o) : \in D + \partial D)$

(d) $g(x, y)$ est une fonction discontinue dans D ou ∂D

Soit (x_i, y_i) un point stationnaire à l'intérieur de D et, de plus, $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ différent de de zéro, si $x \to x_i$, $y \to y_i$. Alors, comme nous le montrons dans notre deuxième thèse, la contribution principale à l'intégrale (A) est donné par la formule :

$$U_1^{(1)}(k) = -\frac{ik}{2\pi}\left[2\pi i\, \varepsilon\, g(x_i, y_i\ \frac{e^{ik\ (x_i, y_i)}}{k\sqrt{|\phi_{20}\,\phi_{02} - \phi_{11}^2|}}\right] \tag{9.2}$$

où $\varepsilon = 1$, si les rayons de courbure R_1, R_2 sont positifs au point x_i, y_i ; $\varepsilon = -1$, s'ils sont négatifs et $\varepsilon = -i$, si $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ ou $R_1 < 0$, $R_2 > 0$.

La deuxième approximation de la contribution principale est :

(9.3) $$U_1^{(2)}(k) = U_1^{(2,0)}(k) + U_1^{(0,2)}(k)$$

ou

$$U_1^{(2,0)}(k) = -\frac{2\pi e^{ik\phi(x_i, y_i)}}{k^2 (a_{2,0})^{\frac{3}{2}} \sqrt{b_{0,2}}} \left[g_{20} + g_{10}(2d_{10} + e_{10}) + 2g_{00} d_{10} e_{10}\right],$$

$$U_1^{(0,2)}(k) = -\frac{2\pi e^{ik\phi(x_i, y_i)}}{k^2 (a_{2,0})^{\frac{1}{2}} (b_{0,2})^{\frac{3}{2}}} \left[g_{02} + g_{01}(d_{01} + 2e_{01}) + 2g_{00} d_{01} e_{01}\right].$$

$$\bar{\phi}_{20} = \alpha^2 \phi_{20} + 2\alpha\gamma\phi_{11} + \gamma^2 \phi_{02}$$

$$\bar{\phi}_{02} = \beta^2 \phi_{20} + 2\beta\delta\phi_{11} + \delta^2 \phi_{02}$$

et α, β, γ, et δ sont des constantes de transformations.

$$x - x_i = \alpha u + \beta v$$
$$y - y_i = \gamma u + \delta v$$

liées par les conditions

$$\alpha\beta\phi_{20} + \gamma\delta\phi_{02} + \phi_{11}(\alpha\delta + \beta\gamma) = 0$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

Les coefficients g_{20}, g_{10}, etc... sont donnés dans notre deuxième thèse. L'approximation (9.2) n'est pas très importante dans les applications.

Nous avons seulement écrit les deux premiers termes du développement asymptotique des séries qui sont les plus importants dans les applications. La série asymptotique complète est donnée dans la deuxième thèse.*

Si les points critiques (x_s, y_s) sont situés sur la frontière de D, le premier terme de la contribution principale de l'intégrale s'écrit :

(9.4) $$U_1^{(1)}(k) = -\frac{ik}{2\pi}\sqrt{(2\pi)}\, e^{3\pi i/4}\, g(x,y)\, e^{ik\phi(x,y)}\, k^{-\frac{3}{2}} x \left[\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_{yy}\phi_x^2 - \frac{1}{\rho}(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

où ρ est le rayon de courbure de la courbe bordant le domaine D.

La série complète est donnée à la deuxième thèse.*

Cependant, si un point (φ_s, y_s) sur la frontière de D, satisfait la condition (a), l'intégrale donne une contribution dont le premier terme est :

(9.5) $$U_1^{(1)}(k) = -\frac{ik}{2\pi}\, i\pi\, g(x_s, y_s)\, \frac{e^{ik\phi(x_s, y_s)}}{2k\sqrt{(\phi_{20}\phi_{02})}},\quad \varphi_{02}\,\varphi_{20} = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}(x, y \in \partial D)$$

* Nous remarquons ici que la série complète généralise les résultats obtenus par M. Rubinowicz et son élève.

qui est la moitié de (9.2).

Si un point critique se trouve sur la caustique du front d'onde, il faut que $\varphi(x, y)$ satisfasse les conditions :

(9.6) $$\phi_x = 0, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 0,$$

$$\varphi_{xx} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \varphi_{yy} \neq 0.$$

Soit (x_c, y_c) un point critique du type caustique.

On trouve que le premier terme de la contribution principale de l'intégrale est égale à :

(9.7) $$U_1^{(1)}(k) = \sqrt{(8\pi)}\, e^{i\pi/4}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) g(x_i, y_i)\, \frac{e^{ik\phi(x_i,y_i)}}{k^{\frac{5}{6}}\phi_{20}\,(9\,\phi_{03})^{\frac{1}{3}}}.$$

où

$$\varphi_{20} = \varphi_{xx}(x_c, y_c) \qquad \varphi_{03} = \varphi_{yyy}(x_c, y_c)$$

Pour les contributions d'autres points critiques à l'intégrale (9.1), voyez notre thèse.

Pour des cas spéciaux, l'onde incidente s'exprime sous la forme :

(9.8) $$U^{inc} = A(r)\,\epsilon^{ikV}$$

où V est la caractéristique de Hamilton, qui satisfait l'équation (9.9):

(9.9) $$(\nabla V)^2 = k^2$$

et

(9.10) $$g_o(r/r') = \frac{e^{iks}}{s}$$

la quantité s est la distance d'un point sur D au point d'observation. Les contributions des points critiques du type ci-dessus, sont données par Petykiewicz (1965), Fabianski (1964, 1965) et Miyamoto, et Wolf (1962).

Ces auteurs ont fondé leurs études sur la théorie de Young - Rubinowicz, formulée par Maggi et Rubinowicz. Mais notre évaluation de l'intégrale double de diffraction correspondant à la formulation de Fresnel - Kirchhoff, est plus commode, et plus générale, parce que dans la théorie de Young - Rubinowicz, il faut évaluer les contributions des points critiques, situés sur l'intérieur de D. Ces contributions donnent l'onde géométrique de Rubinowicz, qui équivaut au premier terme (9.2) de la contribution principale, due aux points stationnaires à l'intérieur de D. Les autres termes de la série asymptotique dépendent de la longueur d'onde λ . Par conséquent, ces termes donnent une contribution additionnelle, même quand leurs valeurs sont très petites, et on peut expliquer leur effet sur l'image de diffraction comme une interférence de diverses zones de Fresnel, comme Van Kampen et l'auteur l'ont remarqué dans leurs publications.

Pour mettre en accord les résultats de l'école de Rubinowicz et de Wolf et ses colloborateurs, il est nécessaire que l'évaluation de la partie géométrique (les contributions des points critiques sur l'intérieur de D), soit faite de la manière que nous avons établi dans la deuxième thèse. Alors, les deux méthodes (la théorie de Fresnel - Kirchhoff, exprimée par l'intégrale double et la théorie formulée par Rubinowicz et Miyomoto - Wolf) donnent un résultat équivalent dans le cas des grandes aberrations. Il faut souligner ce point de vue, pour rendre les deux théories équivalentes, parce qu'il existe une différence entre les auteurs qui suivent la théorie de Fresnel - Kirchhoff et ceux qui donnent leur adhésion à celle de Young - Rubinowicz.

Alors, il faut être prudent pour interpréter les résultats, obtenus par la théorie de Young - Rubinowicz, parce que cette théorie est basée sur l'intégrale de Kirchhoff.

II - APPLICATION A LA VITESSE DE GROUPE

Récemment, une application intéressante de la méthode de la phase stationnaire, a été donnée par M. Lighthill (1965), pour étudier la signification de la vitesse de groupe dans la propagation en milieu anisotrope et inhomogène.

Supposons, une équation d'onde exprimée par l'équation aux dérivées partielles

(9.11) $$P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}, -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right) U(x_i, t) = e^{-2\pi i \omega_0 t} f(x_i), \quad (i = 1, 2, 3)$$

où l'opérateur P est un polynôme quelconque des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t}$. La fonction de source $f(x_i)$, de fréquence fixe ω_0, est définie dans un domaine D fini de l'espace et s'annule au dehors de D.

Ici nous cherchons la forme de la solution $u(x_i, t)$ à grande distance du domaine D.

Pour obtenir une solution unique, il faudra que U satisfasse la condition de rayonnement, c'est-à-dire, $t \sim \infty$.

Alors, si nous exprimons $f(x_i)$ par une superposition d'ondes planes,

(9.12) $$f(r) = f(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{k})\, e^{2\pi i(\vec{r}, \vec{k})}\, d\vec{k},$$

et $$(d\vec{k} = dk_1\, dk_2\, dk_3)$$

(9.13) $$U_\varepsilon(r) = U_\varepsilon(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\vec{k})\, e^{2\pi i(\vec{r}, \vec{k})}\, d\vec{k}$$

où $u = \exp\left[2\pi i(\varepsilon - \omega_0)t\right] U_\varepsilon$.

L'équation (9.11) devient :

(9.14) $$P = (\vec{k}, \omega_0 + i\varepsilon)\, g\varepsilon = F$$

La constante ε est ajoutée à la solution u pour obtenir un accroissement continu de l'intensité de source, de zéro quand $t = -\infty$, jusqu'à la valeur actuelle au temps t.

Pour déterminer

(9.15) $$U_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon$$

dans une direction $m = (\vartheta, \varphi)$, nous faisons une rotation de coordonnées, telle que la direction m coïncide avec l'axe de x_1. Par conséquent, u_ε est exprimée par l'intégrale :

(9.16) $$U_\varepsilon = \iint_{-\infty}^{\infty} dk_2\, dk_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\vec{k})}{P(\vec{k}, \omega_0 + i\varepsilon)}\, e^{ik_1 \cdot x_1}\, dk_1$$

Parce que $F(\vec{k})$ est régulière, les singularités de la dernière intégrale sont des zéros de $P(\vec{k}, \omega_0 + i\varepsilon)$. Pour cela, nous devons considérer les valeurs réelles de k_1, fonctions de k_2, k_3, $\omega_0 + i\varepsilon$, qui annulent P, parce que, si k_i est complexe, nous avons une propagation amortie et $U_\varepsilon \to 0$ quand $x_1 \to \infty$.

L'intégration par rapport à k_1 donne :

$$(9.17) \qquad \frac{2\pi i \; F(k_1, k_2, k_3)}{-\dfrac{\partial P(k_1, k_2, k_3, \omega_o)}{\partial k_1}} \quad \text{si} \quad \frac{\partial \omega(k_1, k_2, k_3)}{\partial k_1} > 0$$

où $\omega = \omega_o + i\,\varepsilon$. $\qquad$ si $\dfrac{\partial \omega}{\partial k_1} \leq 0$

Alors, la valeur asymptotique de $U_o = \lim\limits_{\varepsilon \to o} U_\varepsilon$ est :

$$(9.18) \qquad U_o \simeq 2\pi i \int_\Sigma \frac{F(k_1, k_2, k_3)}{\dfrac{\partial P(k_1, k_2, k_3 ; \omega_o)}{\partial k_1}} \, e^{2\pi i (k_1 \; x_1)} \, dk_2 \, dk_3$$

$$(k_1 = k_1 (k_2, k_3 ; \omega_o)$$

La surface Σ est la surface de l'onde réciproque, transformée de Fourier, de la surface $x_1 = x_1(x_2, x_3)$, qui définit les ondes de fréquence $\omega = \omega_o$, sur lesquelles $\frac{\partial \omega}{\partial k_1} > o$.

L'intégrale (9.18) est de la forme (9.1) où la phase $\varphi(x, y)$ correspond à $k_1 (k_2, k_3 ; \omega_o)$et $g(x, y)$ à $\dfrac{F(k)}{\dfrac{\partial P(\vec{k} ; \omega_o)}{\partial k_1}}$

Alors, comme dans le paragraphe (9.1), le premier terme de la contribution principale de U_o est égale à :

$$(9.19) \qquad U_o \simeq 2\pi i \sum_{r=1}^{N} \frac{F(k^r_\alpha) \exp\left[2\pi i(k_1^2 \, x_1 + k_2^r \, x_2 + k_3^r \, x_3) + i\,\vartheta^r\right]}{R \,|\nabla_k \; P|_{\,k^r = k^r_\alpha} \; |k_o^r|^{\;1/2}} \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

où ∇_k représente le gradient par rapport à k et k_o^r est la courbure de Gauss. La phase ϑ^r prend les valeurs :

$\theta^r = 0$	si $k_o^r > 0$	si Σ convexe le long m +
$\theta r = \pi$	si " " "	si Σ convexe " " m +
$\theta^r = \frac{\pi}{2}$	si $k^r < 0$	si la direction m est possible à m +
$\theta = \frac{\pi}{2}$	si " " "	" " " " " anti " " "

Alors, la solution asymptotique, le long d'un rayon m (ϑ, φ) est :

$$(9.20) \qquad U \sim e^{-2\pi i \,\omega_o \; t} \; U_o$$

Telles est la formule obtenue par Lighthill.

Pour d'autres applications de la méthode de la phase stationnaire à la propagation des ondes magnéto-hydrodynamiques, nous citons le mémoire de Lighthill (1960).

Le cas uni dimensionnel a été traité par Cotte (1952, 1955) et Lighthill (1965).

Nous remarquons que l'intégrale (9.18) est d'une forme particulière, dont nous avons parlé dans notre mémoire (1959). Dans ce mémoire, nous avons étendu la méthode de Poincaré et Picard, pour évaluer les intégrales des formes rationnelles et algébriques à deux variables complexes. Pour une application d'un type plus général, nous référons à notre mémoire (1965).

CHAPITRE X

DIFFRACTION D'ONDES CORPUSCULAIRES

I - EQUATIONS FONDAMENTALES

La base de l'optique ondulatoire non-relativiste des corpuscules est l'équation de Schrödinger, et pour les corpuscules relativistes, l'équation de Dirac. Pour formuler une théorie de la diffraction des ondes corpusculaires des systèmes d'optique électronique, il nous faut trouver une formule, correspondant à celle de Kirchoff, pour les ondes corpusculaires. L'équation de Schrödinger est de la même forme que l'équation d'onde scalaire de la lumière, avec la différence, que dans les systèmes d'optique électronique, on utilise les champs électriques et magnétiques locaux, et dans certains systèmes, les champs sinusoïdaux. Donc, le problème de la diffraction des ondes corpusculaires est beaucoup plus difficile que le problème d'optique ondulatoire. Ce problème est équivalent au problème de diffraction des ondes lumineuses, les lentilles étant construites en verre non-homogène et anisotrope, c'est-à-dire l'indice de réfraction n est variable et représenté par une fonction tensorielle. Dans ce cas n dépend non seulement des coordonnées, mais aussi des directions. Une théorie de la diffraction des systèmes optiques non-homogènes et anisotropes est très difficile à formuler. Même pour une théorie approximative, les difficultés mathématiques sont presques insurmontables. La propagation d'ondes corpusculaires dans un champ électromagnétiqu statique est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$(10.1) \qquad \Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - V - \frac{e^2}{2m}A^2\right)\psi + \frac{4\pi ie}{h}(A\nabla\psi) = 0$$

où E - V est l'énergie cinétique des particules et A est le potentiel vecteur. Soit φ, le potentiel électrique, normalisé de façon qu'il s'annule pour la vitesse zéro de la particule et v_o la vitesse de la particule dont l'espace du champ libre, alors, on peut écrire :

$$(10.2) \qquad E - V = e\varphi = \frac{m}{2}v^2$$

et

$$(10.3) \qquad \frac{m}{2}v_o^2 = e\,U$$

L'indice de réfraction "isotrope" n et k le nombre d'onde, sont liés par les équations suivantes :

$$(10.4) \qquad n = \frac{V}{v_o} = \sqrt{\frac{\varphi}{U}}$$

$$(10.5) \qquad k_o = \frac{2\pi}{\lambda o} = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2\,meU}$$

En tenant compte de (10.2) - (10.5), l'équation (10.1) prend la forme :

$$(10.6) \qquad \Delta\psi + k_o^2\left(n^2 - \frac{e^2}{m^2 v_o^2}A^2\right)\psi + \frac{2i\,k_o\,e}{m\,v_o}(A\,\nabla\psi) = 0$$

Maintenant, nous considérons une solution de (10.6) ayant la forme d'une onde géométrique :

$$(10.7) \qquad \psi = B(r)\; e^{ik_o S(r)}$$

Après un calcul simple, nous obtenons l'équation suivante, satisfaite par $B_{(r)}$ et $S_{(r)}$:

$$(10.8) \qquad B\left[n^2 - (\nabla S + \frac{e}{mv_o} A)^2\right] + \frac{i}{k_o} (B\Delta S + 2 (\nabla S + \frac{e}{mv_o} A) \nabla B + \frac{\Delta B}{k^2} = 0$$

En séparant la partie réelle et imaginaire de (10.8), nous obtenons :

$$(10.9) \qquad n^2 - (\nabla S + \frac{e}{mv_o} A)^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\Delta B}{B} = 0$$

$$(10.10) \qquad B\Delta S + 2 (\nabla S + \frac{e}{2mv_o} A) \nabla B = 0$$

Si la longueur d'onde de Broglie λ_o est très petite, de telle façon, que le troisième terme de (10.8) est plus petit que les autres :

$$(10.11) \qquad \left|\frac{\Delta B}{B}\right| \ll \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \qquad \lambda = \frac{\lambda_o}{n}$$

alors en première approximation (10.9) se réduit à:

$$(10.12) \qquad n^2 - (\nabla S + \frac{e}{mv_o} A)^2 = 0$$

et la fonction de phase S satisfait l'équation différentielle non-linéaire

$$(10.13) \qquad (\nabla S)^2 + \frac{2e}{mv_o} (B \nabla S) = n^2 - \frac{e^2}{mv_o^2} A^2$$

La solution de cette équation donne la phase de la solution d'onde géométrique (10.7). Une fois S connu, l'amplitude B est obtenue en résolvant l'équation (10.10). Comme dans l'optique ondulatoire :

$$S = C$$

donne les fronts d'onde des corpuscules indépendants de l'amplitude si la condition (9.13) est satisfaite.

Dans le cas où (10.9) n'est pas valable, ou pour les domaines où l'amplitude change rapidement il faut calculer la fonction de phase et l'amplitude d'après les équations simultanées (10.9) - (10.10).

II- FORMULE DE KIRCHHOFF

Nous savons par la théorie des équations aux dérivées partielles, d'ordre quelconque, que si u et v sont des fonctions satisfaisants, les équations :

$$(10.14) \qquad L(u) = 0$$

$$L^*(v) = 0$$

où L est un opérateur différentiel et L^* un adjoint de L, l'application de la théorie de Green donne :

$$(10.15) \qquad \int_K \left\{ v\, L(u) - u\, L^*(v) \right\} dr' = \int_V (\vec{\nabla}.\vec{P})\, dr' = \int_\Sigma \vec{P}(u,v)\, d\Gamma'$$

où $\vec{P}$ est une forme bilinéaire de u et v, et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre n-1 si (10.14) est d'ordre n. La fonction P est déterminée si les opérateurs sont connus.

Alors, soit L l'opérateur qui entre dans l'équation de Schrödinger :

$$(10.16) \qquad L = \Delta + k_o^2 \left(n^2 - \frac{e^2}{mv_o} A^2\right) + \frac{2\ ik_o\ e}{mv_o} (A\ V)$$

Si nous prenons pour L^* l'opérateur suivant :

$$(10.17) \qquad L^* = \Delta^2 + k_o^2 \left(n^2 - \frac{e^2}{mv_o} A^2\right) - \frac{2\ ik_o\ e}{mv_o} (\nabla)A$$

alors la fonction $\vec{P}$ est égale à :

$$(10.18) \qquad \vec{P} = \frac{2\pi h}{i} \left\{ \frac{2\pi h}{i} (v\ \nabla u - u\ \nabla v) + 2\ eA\ uv \right\}$$

et si à l'intérieur de la surface Σ, il n'existe pas de source, l'intégrale (10.15) donne :

$$(10.19) \qquad \int_\Sigma \frac{2\pi h}{i} (v\ \nabla u - u\nabla v) + 2e\ A\ uv \Big\}\ n\ dS$$

où la normale est dirigée vers l'extérieur de Σ.

Comme dans les chapitres II et III, nous supposons la surface Σ un plan, donné par $z = 0$, où la fonction $u(x, y, z=0)$ est connue. On prend la surface fermée comme la réunion de la surface plane A et de la surface de la demi-sphère S_R de rayon R.

Un point sur A est désigné par $(x_o, y_o, 0)$.

Soit $u = g(r/r')$ la fonction de Green, qui est une solution de l'équation singulière en P_1,

$$(10.20) \qquad L^* g = 0$$

Soit $P_1\ (x_1, y_1, z_1) = r_1$ un point presque à l'infini. Nous prenons une solution v ainsi que :

$$(10.21) \qquad u = g(r/r') \text{ et } v = \Psi$$

Donc nous écrivons :

$$(10.22) \qquad \nabla v\ d\mathfrak{f}' = - \frac{\partial \Psi}{\partial z_o}\ dx_o\ dy_o$$

$$(10.23) \qquad \nabla\ g\ d\mathfrak{f}' = - \frac{\partial g}{\partial z}\ dx_o\ dy_o \qquad \mathfrak{f} \in E \cup S = A \qquad (z = o)$$

la dérivée est prise dans la direction négative de z et

$$(10.23) \qquad \nabla v.\ d\mathfrak{f}' = - \frac{\partial \Psi}{\partial r}\ r^2\ d\Omega$$

$$(10.24) \qquad \nabla g.\ d\mathfrak{f}' = - \frac{\partial g}{\partial r}\ r^2\ d\Omega, \qquad \mathfrak{f} \in S \cup E = A^*$$

où $\gamma = \varphi$

*sphère Sp de centre r_1.

Maintenant une substitution de (10.22) (10.25) à (10.19) donne :

$$\int_E \left\{ (g \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z}) + \frac{4\pi ie}{h} A_z\, g \right\} \varphi dx_o\, dy_o$$

(10.26) $$+ \int_{S\rho} (g \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial r}) + \frac{4\pi ie}{h} A_r\, g)\varphi r^2\, d\Omega\rho$$

$$= \int_\Sigma \left\{ (g \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial g}{\partial R}) + \frac{4\pi ie}{h} A_R\, g \right\} \varphi R^2\, d\Omega_R, \quad R \in S_R = \Sigma'$$

La condition que l'intégrale sur Σ' s'annule, si $R \to 0$, comme $\frac{1}{R}$, et que $\varphi \to \varphi_\infty$ = une constante, et si (10.27) $\psi \simeq \frac{1}{R}\ {}_o(\vartheta,\varphi)e^{ik\,R}$ $g(r/r') \simeq \frac{1}{R} U_o(\vartheta,\varphi)e^{ik\,R}$ représentent les ondes sphériques à l'infini comme dans l'optique ondulatoire où :

(10.28) $$k^2 = \frac{8\pi^2\, em_o}{h^2} \varphi_\infty$$

L'intégrale sur la sphère S_p est calculée de la même façon qu'au chapitre III. Sa valeur est égale à -4π (r), en supposant g singulière comme $\frac{1}{r}$.

Donc nous écrivons :

(10.29) $$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_A \left\{ (g \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial g}{\partial z}) + \frac{4\pi ie}{h} A_z\, \varphi\, g) dx_o\, dy_o\right.$$

qui est la formule de Kirchhoff d'optique ondulatoire.

III- DERIVATION DU CHAMP IMAGE

Mais comme en optique ondulatoire, nous introduisons les fonctions de Green des demi-espaces g_I et g_{II}, ainsi que :

(10.30) $$g_I = 0 \text{ ou } g_{II} = 0 \quad \text{sur } A \cup E$$

Alors la formule précédente devient:.

(10.31) $$\psi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_A \psi(r')\,(1 - \frac{4\pi ie}{h} A_z)\, g_I\, dx_o\, dy_o$$

où (10.32) $$g_I = g_a(r/r') - g_b(r/r')$$

(10.33) $$g_{II} = g_a(r/r') + g_b(r/r')$$

pour g_I, nous prenons la forme :

(10.34) $$g_a = a_o(r,r')\ \frac{2\pi i}{eh} S(r,r')$$

où A_o et S satisfont aux équations :

(10.35) $$(\nabla S + eA)^2 - 4 e^2 m_o^2 \varphi^2 + \frac{k^2}{4\pi}\ \frac{\nabla.\nabla A_o}{a_o} = 0$$

(10.36) $$\nabla \left[a_o^2\, (\nabla S + eA) \right] = 0$$

Dans la première approximation, on néglige le troisième terme en (10.35), donc :

(10.37) $$(\nabla S + eA)^2 - p^2 = 0$$

où $$p^2 = k^2 = \frac{\pi^2\, em_o}{k^2} \varphi_\infty$$

La solution de (10.37) exprimée par l'intégrale :

(10.38) $$S(r,r') = \int_{r'}^{r} \left[(m_o v\, d\vec{s}) - eA)(\vec{dr}) \right]$$

où S est la distance mesurée le long du rayon et $\vec{r} = \vec{t}\, ds$, $\vec{t}$ est le vecteur porté par la tangente au rayon.

Dans la première approximation, on peut écrire S (r, r') au voisinage de P = r,[1].

(10.39) $$S(r,r') = -(m_o v_1 r + e(\vec{A}.\vec{r_1}))$$

quand les points P_1, P de la trajectoire sont voisins et que la courbure de la trajectoire est négligée et $\vec{r}$ est le vecteur de longueur r du point P_1 au point P. A cette approximation :

(10.40) $$\nabla S = -m_o\, v_1 \frac{\vec{r}}{r} - e\, A_1$$

et

(10.41) $$\nabla.\ (a_o\, mv_1 \frac{\vec{r}}{r}) = 0$$

sauf pour z = 0 , donc

(10.42) $$a_o \sim \frac{C_o}{r}$$

parce que

(10.43) $$a_o^2\, \frac{\vec{r}}{r} = \frac{C_o^2}{r^2} = -C_o^2\, V\, (\frac{1}{r})$$

et

(10.44) $$\Delta v = 0 \text{ et } v \sim \frac{1}{r}$$

Pour cette approximation de la solution (10.35) le troisième terme de (10.35) s'annule,[2] donc, au voisinage de P_1, la fonction g_a en (10.34) est :

(10.45) $$g_a(P_1,P) = \frac{1}{4\pi r} \exp(\frac{2\pi i}{h}\ (mv_1 r) + e(A.r)) \simeq \frac{a_o}{r} \exp \frac{2\pi i}{h}\ S$$

La formule (10.45) représente le premier terme de la série asymptotique en r, et aussi en S;

(10.46) $$g_a = \frac{1}{4\pi r}\ (a_o + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \ldots)\ e^{\frac{2\pi i}{h}(S_o + \frac{S_1}{h} + \ldots)}$$

(1) Ici nous avons fait l'hypothèse, qu'au voisinage du point P, la source du courant est radiale.

(2) On demande que $\frac{\nabla\cdot\nabla a_o}{a_o}\, r2\, d\Omega$ est bien nulle ou effectivement c'est réalisé.

La fonction g_b est de la même forme que g_a[1]

$$(10.47)\qquad g_b(P_1, P) = -\bar{a}_o e^{\frac{2\pi i \bar{S}}{h}}$$

aux voisinages du plan A. Donc :

$$(10.48)\qquad g_I = a_o e^{\frac{2\pi i}{h} S_o} - \bar{a}_o e^{\frac{2\pi i \bar{S}_o}{h}}$$

et, si $g_I = 0$ sur A, il faut que nous prenions :

$$(10.49)\qquad a_o(x_o, y_o) = \bar{a}_o(x_o, y_o)$$

$$(10.50)\qquad S_o(x_o, y_o) = \bar{S}(x_o, y_o) \qquad (x_o, y_o \in A)$$

La fonction $\bar{S}$ satisfait aussi une équation de Hamilton

$$(10.51)\qquad (\nabla \bar{S} + e A_z)^2 = m_o^2 v_o^2$$

et sur A, on obtient :

$$(10.52)\qquad \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} + e A_z\right)_A = \pm \sqrt{m_o^2 v_o^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} + e A_z\right)_A^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} + e A_y\right)_A^2}$$

$$= \pm \left(\frac{\partial S}{\partial z} + e A_z\right)_A. \qquad (z = 0)$$

où $(---)_A$ dénote les valeurs sur le plan $z = 0$.[2]

Avec l'aide de (10.52), on trouve :

$$(10.53)\qquad \left(\frac{\partial g_I}{\partial z}\right)_A = -\frac{2\pi i}{h}\left(\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial z}\right)_A a_o e^{\frac{2\pi i}{h} S}$$

donc :

$$(10.54)\qquad \psi(P_1) = -\frac{2\pi i}{h}\int_A \left(e A_o + \frac{\partial S}{\partial z}\right) a_o e^{\frac{-2\pi i}{h} S(P_1 P_o)} dx_o\, dy_o$$

$$= \frac{1}{2R}\int_A \psi_o(P_A) \frac{\partial g_I}{\partial z} dx_o\, d dy_o$$

où $S(P_1 P_o)$ est calculé de :

$$(10.55)\qquad S(P_1, P_o) = \int_{P_o}^{P} \left[mv - e(A, S)\right] ds$$

Si nous remplaçons P_1 par P et comme $S(P_1, P_o) = -S(P_o P_1)$ la valeur de $\psi(P)$ est exprimée par la formule suivante :

$$(10.56)\qquad \psi(P) = -\frac{1}{2h}\int_A \left\{\left(e A_o - \frac{\partial S}{\partial z}\right)_A U(P_o)\, e^{\frac{2\pi i}{h} S(P_o P)}\right\} dx_o\, dy_o$$

(1) g_b doit être régulière pour $z = z_o$ et satisfait la même équation aux dérivées partielles que g_a, telle que pour $z = z_o$ $g_I = g_a - g_b = o$. Il n'est pas assuré que g_b soit régulière pour $z > z_o$ pour le microscope électronique.

(2) Il faut écarter le signe + afin que (10.50) soit satisfait.

IV - EQUATIONS DE TRANSPORT D'ONDES CORPUSCULAIRES

Supposons Ω_o une sphère au voisinage de P. Un élément de Ω_o, $d\,\Omega_o$, forme une cône qui coupe le plan A d'élément $dA = dx_o\, dy_o$. Alors si la vitesse des particules sur $d\,\Omega_o$ est v et en dA est v_o, nous avons la relation suivante entre $d\,\Omega_o$ et dA,

$$(10.57)\qquad a_o^2\,(P_o)\; v_o\; dA = a_o^2\,(P)\; v r^2\; d\,\Omega_o$$

où $da_o^2\,(P_o)\,v_o$ est la densité du courant au point P_o sur a et $a_o^2\,(P)\,v$ point sur $d\,\Omega_o'$ qui traduit la conservation du flux des corpuscules ou de la probabilité de la densité du courant. Alors, on trouve :

$$(10.58)\qquad a_o^2\,(P_o) = \frac{1}{(4\pi)^2}\;\frac{v}{v_o}\;\frac{d\,\Omega_o}{dA}$$

Si $s = (p, q, r^o)$ sont les cosinus directeurs de la vitesse v à P et p_o, q_o, r_o^o de v_o en P_o, nous écrivons :

$$(10.59)\qquad d\,\Omega = \frac{dp\;dq}{r^o\,(p,q)} = \frac{1}{r^o\,(p,q)}\;\frac{\partial(p,q)}{\partial(p_o q_o)}\;dA$$

et comme $v_o = v_z$

$$(10.60)\qquad a_o^2\,(P_o) = \frac{1}{4\pi^2}\;\frac{(mv)^2}{(mv_z)\;(mv_o)}\;\frac{\partial(p,q)}{\partial(p_o q_o)}$$

Mais, $mv.\,\vec{s} = \nabla s + eA$ et $\vec{s} = (p, q, r^o)$

Par suite :

$$(10.61)\qquad a_o\,(P_o) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\begin{vmatrix} S_{xx_o} & S_{xy_o} \\ S_{yx_o} & S_{yy_o}\end{vmatrix}}{\left(\frac{\partial S}{\partial z} + e\,A_z\right)\left(-\frac{\partial S}{\partial z} + e\,A_{z=z_o}\right)}\right]^{1/2}$$

Si nous apportons (10.61) dans la formule (10.56) la fonction d'onde corpusculaire prend la forme:

$$(10.62a)\qquad \psi(P) = \frac{1}{4\pi h}\;\int_A \hat{A}\;\psi_o(P_o)\left|\frac{\left(eA_z - \frac{\partial S}{\partial z}\right)_{zo}}{\left(eA_z + \frac{\partial S}{\partial z}\right)_z}\right|^{1/2}\begin{bmatrix} S_{xx_o} & S_{xy_o} \\ S_{yx_o} & S_{yy_o}\end{bmatrix}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}S}\,dx_o\;dy_o$$

La formule (10.62) est valable seulement pour le champ de diffraction paraxial, parce que la fonction S donne la solution paraxialle de l'équation de Hamilton (10.51).

Souvent, il est nécessaire, de prendre S et a_o comme des solutions d'équations (10.35) et (10.36) où l'équation :

$$(10.63)\qquad \nabla a\,(\nabla s + e\,A) + \frac{a_o}{2}\,\Delta\,S = -\frac{h}{4\pi}\,\Delta\,a_o$$

Il est possible de résoudre cette équation d'une manière exacte. Mais on peut remplacer la solution approximative (10.61) pour a_o, par une série asymptotique en h :

$$(10.64)\qquad a_o = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n$$

où a_n dépend seulement de $r = (x, y, z)$.

Si nous remplaçons la série (10.64) dans (10.34), nous obtenons un système d'équations linéaires non-homogènes, pour chaque a_n. Si S satisfait l'équation de Hamilton, la première équation est :

$$\nabla\,(a_o^2\,\nabla S + eA) = 0 \tag{10.65}$$

qui détermine la fonction a_o. Les autres équations déterminent les quantités a_n.

Celles-ci [1] sont :

$$\nabla\left(a_n\,(\nabla S + eA)\right) + \frac{1}{2}\,a_n\,\Delta S = \frac{1}{2i}\,\Delta a_{n-1} \tag{10.66}$$

Mais, comme div A = 0, (10.65) prend la forme :

$$a_o^2\,\Delta S + 2\,a_o m_o\,\vec{v}\,\nabla a_o = 0 \tag{10.67}$$

Si, nous introduisons s comme la variable le long des rayons corpusculaires, $v\,\nabla a_o = v\,\frac{da_o}{ds}$, l'intégrale de (10.65) est :

$$a_o = C_o e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\Delta S}{m_o v}\,ds} = C_o e^{-\frac{1}{2}\int_{P_1}^{P} \frac{\Delta S(p_1,p)}{|\nabla S + eA|}\,ds} \tag{10.68}$$

C_o est une constante. Les a_n satisfont les équations suivantes :

$$\frac{da_n}{ds} + a_n\,\frac{\Delta S}{2mv} = \frac{\Delta a_{n-1}}{2imv} \tag{10.69}$$

Si les solutions $a_o, a_1, \ldots\ldots a_{n-1}$, s'annulent, quand $P \to P_1$, a_n est donné par l'intégrale :

$$a_n = -\frac{i}{2m_o}\,a_o\int_{P_1}^{P} \frac{\Delta a_{n-1}}{a_o v}\,ds \tag{10.70}$$

Si nous ajoutons la valeur de v donnée par (10.40) ou (10.51) :

$$v = \left|\nabla S\,(P_1, P\,(x(s), y\,(s), z\,(s)\,)\,) + e\,A\,(P_1 P\,(x(s); y(s), z(s)\right|$$

Les formules (10.68) et (10.70) deviennent :

$$a_o(P_1, P)(s)) = C_o e^{+\frac{1}{2}\int_{P_1}^{P(s)} \frac{\Delta S(P_1, P\,(s)}{|\nabla S + eA|}\,ds} \tag{10.68'}$$

et

$$a_n = -\frac{i}{2}\,a_o\int_{P_1}^{P(s)} \frac{\Delta a_{n-1}(P_1\;P\,(s)\,)}{a_o|\nabla S + eA|}\,ds \tag{10.70'}$$

(1) Nous identifions (10.66) comme les équations de transport de l'amplitude d'onde corpusculaire, qui sont équivalentes aux équations de l'optique ondulatoire.

Les résultats ci-dessus sont de même forme que dans la théorie des ondes lumineuses où les amplitudes a_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfont les mêmes types d'équations de transport que (10.69). Du point de vue théorique il n'y a aucune différence entre (10.69) et les équations correspondantes de l'optique ondulatoire comme nous l'avons montré dans nos recherches (1963, p. 624; 1964 p. 157 et 422). En fait, nous avons étudié le cas plus général pour un milieu non-homogène et anisotrope.

La détermination de l'amplitude principale a_o s'effectue comme précédemment. On peut prendre a_o égale à l'expression (10.61). Les amplitudes secondaires a_n, $(n = 1, 2, \ldots.)$, sont obtenues d'après la formule (10.70) ou (10.70').

Quand la série (10.64) est introduite dans la formule (10.62a), celle ci prend la forme:

$$\Psi\,(P) = \frac{1}{4\pi h}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n \int_A \Psi_o(r)\,a_n e^{\frac{2\pi i\;S}{h}}\,dx_o\,dy_o \tag{10.71}$$

Au cas où (10.13) n'est pas satisfait, c'est-à-dire dans la région où l'amplitude de l'onde varie très rapidement sur une distance égale à la longueur d'onde λ, ce qui se produit au voisinage de l'arête de l'écran, la solution de l'équation d'onde ne peut être exprimée, ni par une onde géométrique de la forme (10.7), ni par une série asymptotique de la forme :

$$\Psi \simeq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^j a_j\,e^{ik\;S(r)} \qquad \left(k = \frac{2\pi}{h}\right) \tag{10.13'}$$

Dans (10.13') la phase S (r) satisfait l'équation caractéristique de Hamilton et les amplitudes a_j des équations de transport. Au voisinage des arêtes, il ne faut pas mettre le dernier terme de (10.11), donc, on ne peut pas obtenir pour le terme principal de la série (10.13') l'équation d'Hamilton, à partir de laquelle S(r) est calculée. Il faut résoudre les deux équations (10.11) (10.12) simultanément.

Cela veut dire, que la phase S (r) de la solution d'onde géométrique, ne peut pas représenter un front d'onde.

En fait S (r) dépendra de la fonction d'amplitude a_o (r) ou a_j (r). Donc, on ne peut plus remplacer S(r) et l'amplitude a_j (r) par (10.13') dans l'intégrale de diffraction (10.62a) ou (10.71)

Ainsi, Ψ (P) exprimé par (10.62a), représente la solution géométrique ou asymptotique du champ de diffraction et non pas la solution d'un problème de valeur aux limites. Cet état est semblable au problème de l'optique ondulatoire, que nous avons discuté au chapitre III.

Nous pouvons considérer cette formule comme la base de la théorie de la diffraction des corpuscules par un système d'optique électronique.

V - DIFFRACTION D'ONDES NON-HOMOGENES

Dans plusieurs applications le potentiel électrique est maintenu constant et le potentiel vecteur A = 0 au dehors du plan de la pupille de sortie dans l'espace de l'image. Pour ces valeurs des potentiels, l'indice de réfraction se réduit à une constante et l'équation de Schrödinger devient une équation d'onde scalaire.

$$\Delta\varphi + k_o^2\,u = 0, \qquad k_o^2 = \frac{2\,m_o e\,\varphi_o}{h} \tag{10.72}$$

où $\varphi = \varphi_i$ la valeur du potentiel φ au dehors du plan $z = z_p$, de la pupille de sortie.

Comme dans l'optique ondulatoire, les fronts d'onde associés à la fonction de Green dans l'espace d'image correspondent à ceux de l'optique géométrique représentés par :

$$S = \text{Constante} \tag{10.73}$$

et ceci est déterminée par :

$$(10.74) \qquad S = \int_{z_p}^{z} F \, dz$$

où

$$(10.75) \qquad F = \sqrt{\frac{\varphi_o}{U}} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \qquad \left(x' = \frac{dx}{dz}, \quad y' = \frac{dx}{dz}\right)$$

Les rayons des corpuscules sont normaux aux fronts d'onde, ou surfaces des ondes S = constante. Les cosinus directeurs α, β, γ, sont donnés par :

$$(10.76) \qquad \alpha = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}, \qquad \beta = \frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}$$

Alors soit (ξ, η, ζ) les coordonnées d'un point sur la surface d'onde. Comme au chapitre IV, elles sont des fonctions de (α, β) et la solution de (10.72) est exprimée par l'intégrale de Debye (équation 4.22, IV)*.

$$(10.77) \qquad \psi = \frac{k_1}{2\pi i} \int_{\Sigma} g(\alpha, \beta) \, e^{ik_1 \, (\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\gamma} \frac{d\alpha \, d\beta}{\gamma(\alpha, \beta)}$$

où $g(\alpha, \beta)$ est en général une fonction quelconque de α, β. L'intégration est prise sur toutes les valeurs de α et β correspondants à l'ouverture angulaire du faisceau des rayons qui convergent en un point de l'espace image.

Pour déterminer $g(\alpha, \beta)$ nous supposons que de chaque élément de l'objet dA_o, un faisceau de corpuscules sort avec une distribution de vitesses connues et avec les amplitudes, où la densité (nombre des corpuscules) dépendent de α, β, γ. Soit la distribution qui caractérise un tel faisceau à côté de l'objet représenté par une fonction $D(x_o, y_o, \alpha_o, \beta_o, U)$, où $(x_o, y_o, \alpha_o, \beta_o)$ sont les coordonnées et cosinus directeurs des rayons sortis du point (x_o, y_o, z_o) de l'objet et où U représente la vitesse des corpuscules. Si dN, est le nombre de corpuscules sortis de l'élément $dA_o = dx_o \, dy_o$ et compris dans l'angle solide $d\Omega_o$ dans le temp t et t + dt, avec les vitesses comprises entre U_o et $U_o + dU_o$, on a la relation suivante :

$$(10.78) \qquad \frac{dN}{dt} = D \; dA_o \; d\Omega_o \; dU_o$$

Si α_c, β_o, γ_o indiquent les cosinus directeurs de $d\Omega_o$, et la projection de $d\Omega_o$ dans l'espace d'image est $d\Omega$, nous obtenons la relation entre la fonction $g(\alpha, \beta)$ et la fonction de distribution de la forme :

$$(10.79) \qquad g^2(\alpha, \beta) \; d\Omega = \frac{2\pi \, m_o}{hk_1} \; D \; d\Omega_o$$

ou

$$(10.80) \qquad g(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2\pi \, m_o}{hk_1} \; D \; \frac{d\Omega_o}{d\Omega}}$$

* Parce que l'indice de refraction n = F, on peut écrire (10.77) sous la forme $\psi(r) = \frac{iE_o}{hc} \iint \left[n(\vec{r}, \vec{s}) \; A(\alpha, \beta) \exp\left(-\frac{2\pi i E_o}{hc} \int_{\Sigma R}^{\Sigma r} \vec{n} \, d\vec{s}\right] d\Omega\right.$ ou Σ_R est la surface de référence, V - Et = Constant, et Σ_r^{Ω} corresponde à la surface (front d'onde) passé par le point (r). Picht (1956).

Parce que, le front d'onde sur la pupille de sortie est donné par la fonction caractéristique de Hamilton[*]

(10.81) $$V(x_o y_o, x_s, y_s) = \sqrt{\frac{U}{\varphi_o}} \int_{z_o}^{z_s} F \, dz$$

où F est égale à :

(10.82) $$F = n\sqrt{1+x'^2+y'^2} - \frac{e}{mv_o}(x'A_n + y'A_y + A_z)$$

pour les corpuscules non relativistes.

et

(10.83) $$F = \frac{1}{mc_o}\sqrt{2\,em_o\varphi\,(1+\varepsilon\varphi)}\sqrt{(1+x'^2+y'^2)} - \frac{e}{mc}(x'A_x + y'A_y + A_z)$$

pour les corpuscules relativistes. Ici, nous considérons seulement le cas non relativistes.

Les cosinus directeurs α_s, β_s, γ_s[**] sont exprimées dans l'espace d'image, en terme de $V(x_o, y_o, x_s, y_s)$ par :

(10.84) $$\alpha_s = \frac{\partial V}{\partial x_s}, \quad \beta_s = \frac{\partial V}{\partial y_s}, \quad \gamma_s = -\frac{\partial V}{\partial z_s}$$

Alors, comme $d\Omega_o$ et $d\Omega$ sont égaux à :

(10.85) $$d\Omega_o = \frac{d\alpha_o \cdot d\beta_o}{\gamma'_o(\alpha_o', \beta_o)} \qquad d\Omega_s = \frac{d\alpha_s \, d\beta_s}{\gamma_s(\alpha_s, \beta_s)}$$

(10.86) $$g(\alpha_s, \beta_s)\, d\Omega_s = \sqrt{\frac{2\pi \, m_o}{hk_1} D \, d\Omega_o \, d\Omega_s} = \sqrt{\frac{2\pi m_o}{hk_1} D\Delta_o\Delta_1} \, dx_s \, dy_s$$

où (10.87) $$\Delta_o(x_s, y_s) = \begin{vmatrix} V_{x_o x_s} & V_{x_o y_s} \\ V_{y_o x_s} & V_{y_o y_s} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n_o^2 - p_o^2 - q_o^2}}$$

$$\Delta_1(x_s, y_s) = \begin{vmatrix} V_{x_o x_s} & V_{x_o y_s} \\ V_{y_o x_s} & V_{y_o y_s} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n_s^2 - p_s^2 - q_s^2}}$$

où n_o et n_1 correspondent à l'indice de réfraction, au plan d'objet et de la pupille de sortie respectivement, et p_o, q_o, r_o^o, et p_s, q_s, r_s^o sont les cosinus directeurs d'optique électronique ou les composantes de quantité de mouvement dans le plan de l'objet et dans le plan de la pupille de sortie.

* La fonction V est la même que S de paragraphes précédents.

**Les quantités α_s, β_s et γ_s représentant les cosinus directeurs de rayons sortant de la pupille de sortie du côté de l'espace de l'image.

Si on remplace (10.86) et (10.87) dans la formule (10.77) en tenant compte de (10.84) ; la formule s'écrit :

(10.88) $$\psi = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{2\pi m_o}{h\, k_1}}\int_{A_s}\sqrt{D(x,y\,;\,x_b y_b, U)\,\Delta_o \Delta_1}\, e^{iKS\,(x,y;x_s y_s)}\, dx_b dy_b)$$

où (10.89) $$S(x,y\,;x_s,y_s) = (x-x_s)\,\alpha_1 + (y-y_s)\,\beta_1 + (z-z_s)\,\gamma_1 - So$$

La quantité So mesure la distance optique entre le point d'aberration (x,y,z) et un point quelconque sur la pupille de sortie (x_s, y_s, z_s).

La formule prend la forme bien connue dans l'optique ondulatoire si nous remplaçons S ou la caractèristique de Hamilton V par la caractèristique mixte de Hamilton W liées par l'équation :

(10.90) $$W = x_s\,\alpha_1 + y_s\,\beta_1 + z_b\,\gamma_1 - V$$

Alors (10.77) devient :

(10.91) $$\psi(r) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{2\pi\, i\, m_o}{h\, k_1}}\iint_{A_s}\sqrt{\Delta D}\; e^{ik\left[(\vec{r}.\vec{s}) + W\right]}\, d\alpha_1 \quad d\beta_1$$

où $$\Delta = \frac{1}{\gamma_o \gamma_1}\;\frac{\partial(\alpha_o, \beta_o)}{\partial(\alpha_1, \beta_1)}$$

Cette formule est analogue à (4.52) de l'optique ondulatoire.

L'intégration de (10.91) est faite de la même façon qu'aux chapitres VI et VII en développant la fonction caractéristique d'Hamilton V ou W en série classique ou en série de Nÿboer (6.11), (6.12), ou en polynôme de Zernike

Dans le chapitre V nous avons remarqué que pour un système de révolution les potentiels φ et A dépendent seulement de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et z. Dans l'espace limité par le plan d'objet et le plan de la pupille de sortie, on développe φ et A en séries de forme :

(10.92) $$\varphi(\rho, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)}\; f^{2r}(z)\; \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2r}$$

et

(10.93) $$a(\rho, z) = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(r-1)}\; g^{2r}(r)\; \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2r}$$

où le vecteur est :

(10.94) $$a(\rho, z) = \left[-\, y\, A(\rho, z), '\, x\, A(\rho, z),\;\; 0\right]$$

Si nous substituons (10.92) et (10.93) dans (10.82) ou (10.83) et en dévelôppant F en série de puissance des trois invariants $v_1 = x^2 + y^2$, $v_2 = x'^2 + y'^2$, $v_3 = xy' - yx'$, et $F = F_0 + F_2 + F_4 + \ldots$, alors, après l'intégration de (10.74) nous exprimons V ou W ou S en séries de v_1, v_2, v_3.

(10.95) $$S = S_o + \Sigma A_i v_i + \frac{1}{2!}\,\Sigma A_{ij} v_i v_j + \ldots.$$

et

(10.96) $$W = W_o + \Sigma B_i v_i + \frac{1}{2!}\,\Sigma B_{ij}\, v_i v_j + \ldots.$$

Les coefficients A_i, A_{ij}, B_i, B_{ij}, sont fonctions de z.

Parce que au dehors du plan de la pupille de sortie $\varphi = \varphi_i$ = constant et $A = 0$, la fonction caractéristique $v(x_o, z_o; x, y, z)$ est exprimée par :

$$(10.97) \qquad V(x_o, y_o, z_o; x, y, z) = \int_{z_o}^{z_s} F \, dZ + \int_{z_s}^{z} F_o \, dZ$$

$$= n_i V^s(x_o, y_o, z_o; x_s, y_s, z_s) + n_i = n_i V_1 = \text{constant}$$

Alors exprimons les coordonnées ξ, η, ζ par les équations :

$$(10.98) \qquad \xi = x_s + (V_1 - V^s) V^s_{x_s}$$

$$\eta = y_s + (V_1 - V^s) V^s_{y_s}$$

$$\zeta = z_s + (V_1 - V^s) \sqrt{1 - V^{s\,2}_{x_s} - V^{s\,2}_{y_s}}$$

$$(10.99) \qquad \alpha_s = V^s_{x_s}, \quad \beta_s = V^s_{y_s} \quad \gamma_s = \sqrt{1 - \alpha_s^2 - \beta_s^2}$$

Soit Σ_R une front d'onde presque sphérique, très loin du plan $Z = Z_s$ et de rayon $R \to \infty$. Si ξ', η', ζ', sont les coordonnées d'un point sur Σ_R et si $P(x, y, z)$ sont les coordonnées d'un point d'observation dans l'espace d'image, la distance $r = |r - r'|$ entre le point $P(r)$ et un point quelconque $P(\xi, \eta, \zeta,)$ de surface d'intégration est :

$$(10.100 \qquad r^2 = (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2 + (\zeta' - z)^2$$

Mais comme

$$(10.101) \qquad \xi' = \xi + R\alpha_i, \quad \eta' = \eta R \beta_i \quad \zeta' = \zeta + R\gamma_i$$

$\alpha_i \simeq \alpha_s$, etc., alors, d'après le raisonnement du paragraphe 2, chapitre IV, nous obtenons :

$$(10.102) \qquad r \sim R + (\xi - x)\alpha_i + (\eta - y)\beta_i + (\zeta - z)\gamma_i$$

quand $R = \infty$

Le champ $\psi(P)$ est égal à :

$$(10.103) \qquad \psi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(\psi(\mathfrak{k}) \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial \psi(P)}{\partial n'} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \, d\mathfrak{P}$$

ce qui est la formule de Kirchhoff .

Nous avons remarqué dans le chapitre V, que pour un système d'optique électronique de révolution, la phase de l'intégrale de diffraction V dépend de quatre invariants.

Alors, on peut développer la phase V de l'intégrale en puissance de ces invariants.

$$(10.104) \qquad V = V_o + V_2 + V_4 + \ldots\ldots.$$

où $\quad V_o = x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1$

(10.105) $$V_2 = \sum_{i=1}^{4} A_i u_i$$

$$V_4 = \sum_{i,j,=1}^{4} A_{ij} u_i u_j$$

Les coefficients A_i, A_{ij}, etc., sont les coefficients d'aberration de l'optique électronique. Les valeurs sont :

(10.106)
$$A_1 = A_2 = A_4 = A_{11} = 0, \quad A_3 = \beta \quad A_{44} = 0$$
$$A_{12} = \bar{D} \qquad A_{22} = \bar{B} \qquad A_{14} = \bar{e}$$
$$A_{13} = \bar{E} \qquad A_{23} = \bar{F} \qquad A_{24} = \bar{f}$$
$$A_{33} = \bar{C} \qquad A_{34} = \bar{c}$$

et pour la caractéristique mixte W :

(10.107)
$$A'_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varphi_o}}{\sqrt{\varphi_1}} \qquad A'_2 = 0 \qquad A'_3 = \beta \qquad A'_4 = 0$$
$$A'_{11} = \frac{1}{4}\bar{A} \qquad A'_{12} = \frac{1}{2}\bar{b} \qquad A'_{22} = \frac{1}{4}\bar{B} \qquad A'_{33} = \bar{c}$$
$$A'_{13} = \bar{E} \qquad A'_{23} = \bar{F} \qquad A_{33} = \bar{C}$$
$$A'_{14} = \bar{e}$$
$$A'_{24} = \bar{f}$$
$$A'_{34} = \bar{c}$$
$$A'_{44} = \bar{0}$$

où

(10.108)
$$\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{\phi_1}}(A + 4\mu E + 2\mu^2(2C + D + 4\mu^3 F + \mu^4 B)$$
$$\bar{B} = \beta^4 \phi_1^{3/4} B \qquad \bar{f} = \beta^3 \frac{\phi_1}{\phi_o^{3/2}} f$$
$$\bar{C} = \beta^2 \frac{\sqrt{\phi_1}}{\phi_o}(C + 2\mu E + \mu^2 B) \qquad \bar{c} = \beta^2 \frac{\sqrt{\phi_1}}{\phi_o}(c + 2\mu f)$$
$$\bar{D} = \beta^2 \frac{\sqrt{\phi_1}}{\phi_o}(D + 2\mu F + \mu^2 B) \qquad \bar{e} = \frac{\beta}{\sqrt{\phi_o}}(e + \mu c + \mu^2 f)$$
$$\bar{E} = \beta \frac{1}{\sqrt{\phi_o}}(E + \mu(2C + D) + 3\mu^2 F + \mu^3 B)$$
$$\bar{F} = \beta^3 \frac{1}{(\phi_o)^{3/2}}(F + \mu B)$$

μ est une constante égale à $\frac{\beta}{f_o}$, et f_o est la distance focale du côté de l'objet et β est la agrandissement de l'objet. Les valeurs de $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, ... etc, sont données dans l'œuvre de Cotte, (1938), Glaser (1952, 1956), Luneberg (1944, 1965). Elles dépendent de z_o et z_1. Les trois aberrations $\bar{f}$, $\bar{c}$, et $\bar{e}$ sont dûes au champ magnétique. Cependant, si le champ magnétique s'annule, les aberrations seront de même type que dans l'optique ordinaire.

L'évaluation du champ de diffraction dans l'optique électronique est accomplie de la même façon qu'aux chapitres VI et VII, en développant V ou W en série de forme classique ou en polynôme de Zernike, comme dans le cas du système non-symétrique (paragraphe 2, chapitre V). D'autre part, pour les grandes aberrations, l'application de la méthode de la phase stationnaire, exposée dans le chapitre VIII, est valable pour calculer le champ image. Le champ ψ dépend des coordonnées de l'objet et aussi de ψ_o.

VI - DENSITE DU COURANT DANS UN PLAN IMAGE

Soit la distribution de vitesse des corpuscules du faisceau comprises entre $U_o - \Delta U_o$ et $U_o\ \Delta U_o$. Alors, la densité du courant à travers un plan est donnée par l'expression :

$$J_z = \frac{h}{2mv_o} \int_{U_o-\Delta U_o}^{U_o+\Delta U_o} (\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi}{\partial z}) \, dZ \tag{10.109}$$

Dans les microscopes électroniques de grande magnification et ainsi de très petite ouverture, $\gamma_i = 1$ et on peut remplacer (10.109) par :

$$J_z = v_o \int_{U_o - \Delta U_o}^{U_o + \Delta U_o} |\psi|^2 \, dU_o \tag{10.110}$$

où $v_o = \frac{hk_j}{2\pi m_o i}$ correspond à la vitesse des corpuscules dans l'espace image, c'est-à-dire, que le courant J_z est égale au produit de la densité des corpuscules et de ses vitesses moyennes dans la la direction z.

Si dans chaque point de l'objet le rayonnement est incohérent, la densité totale du courant sera égale à la somme des contributions de tous les points du plan de l'objet,

$$J_z = \int_{A_o} J_z \, dA_o = \frac{hk_i}{2\pi i m_o} \int_{U - \Delta U}^{U_o + \Delta U_o} dU_o \int_A (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z}) \, dx_o \, dy_o \tag{10.111}$$

où ψ est donné par (10.91).

Cependant si le rayonnement est cohérent, la fonction ψ sera égale à la somme des amplitudes ψ_i, contribution de chaque point de l'objet (x_{oi}, y_{oi}) à ψ au point (r) et puis on prendra le carré de cette somme $(\Sigma\psi_i)^2$ pour construire la densité du courant. Dans ce cas il est seulement nécessaire de déterminer la valeur de ψ_s sur la surface de la pupille de sortie et après qu'on ait fait l'intégration sur cette surface, cette valeur de ψ (r) sera donnée par l'intégrale (10.103).

Alors, si les constantes d'aberration sont petites, nous utilisons les méthodes des chapitres VI et VII pour évaluer le champ d'image u(r) donné par l'intégrale (10.71) ou (10.88). Il n'y a aucune différence de forme mathématique entre l'intégrale représentant le champ d'optique ondulatoire et l'intégrale du champ d'optique électronique. Seulement les constantes d'aberrations sont différentes dans les deux théories.

Si les aberrations sont grandes, la méthode de la phase stationnaire développée dans le chapitre VIII est applicable, et les formules obtenues sont valables pour traiter la théorie de la diffraction des ondes corpusculaires.

Ainsi, quand les aberrations sont ou petites ou grandes, les méthodes développées dans les chapitres VI et VII et IX permettent de calculer le champ d'image. Le problème non résolu ici est celui d'aberrations comprises entre une longueur d'onde et quelques longueurs d'onde de la lumière ou du corpuscule ; dans ce cas on doit avoir recours aux calculateurs électroniques.

FORMULAIRE MATHEMATIQUE

APPENDICE

A1 - CERTAINES INTEGRALES DE DIFFRACTION

Dans les chapitres VI et VII, nous utilisons l'intégrale du type

$$\text{(A. 1)} \quad I_{\alpha,\beta,\sigma} = i\int_0^1 e^{-iz\sqrt{1-t^2}} \frac{J_\alpha(\rho t)\ J_\beta(at)}{\sqrt{1-t^2}} t^{2\sigma-\alpha-\beta} dt - \int_1^\infty e^{-z\sqrt{t^2-1}} \frac{J_\alpha(\rho t)\ J_\beta(at)}{\sqrt{t^2-1}} t^{2\sigma-\alpha-\beta} dt,$$

pour évaluer le champ d'image.

On rencontre (A1) dans les problèmes de la diffraction d'onde scalaire ou électromagnétique par une ouverture circulaire dans un écran parfaitement conducteur, ou un disque circulaire. Pour certaines valeurs de α, β et σ (A1) est une solution d'équation d'onde scalaire de Helmholtz exprimée en coordonnées cylindriques (ρ, z), et elle satisfait les conditions aux limites $I_{\alpha,\beta,\sigma} = 0$ ou $(I_{\alpha,\beta,\sigma})_z = 0$ sur l'écran ou disque, la condition de rayonnement de Sommerfeld, et aussi la condition sur l'arête de Bouwkamp - Meixner (Chako, 1953, 1963).

Les intégrales de Bouwkamp - Levine - Schwinger

$$\text{(A. 2)} \qquad C_{\alpha,\beta,\gamma,\lambda}(\rho, a) = \int_0^\infty J_\alpha(at)\ J_\beta(at)\ (t^2-1)^\gamma\ t^{2\lambda}\ dt,$$

ou $\alpha = m + 1/2$, $\beta = n + 1/2$, $\gamma = \pm 1/2$, $2\sigma = -m - n$ sont les limites de (A1), si $z \to 0$ et $\rho = a$. La valeur de (A1) est :

$$\text{(A. 3)} \quad I_{\alpha,\beta,\sigma}(r=\rho, \rho, a) = i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\alpha-\sigma}\left(\frac{a}{2}\right)^{\beta} \sum_{0,0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^m \left(\frac{a}{2}\right)^n \Gamma\left(n+\sigma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\alpha+\frac{1}{2}-\sigma-n\right)}{m!\,n!\,\Pi(m+\alpha+1)\ \Gamma(m+\beta+1)\ \Gamma(\alpha+1_2-\sigma-n)},$$
$$H^{(2)}_{m+n+\sigma}(\rho)$$

où $H_\nu(z)$ est la fonction d'Hankel. Mais si les limites de (A1) sont (0, 1), alors on a :

$$\text{(A. 4)} \quad C_{\alpha,\beta,\sigma,\lambda}(\rho, a) = \int_0^1 J_\alpha(\rho t)\ J_\beta(at)\ (1-t^2)^\delta t^{\mp 2\lambda}\ dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^\alpha \left(\frac{a}{2}\right)^\beta \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\Gamma(n+p)}{n!\ \Gamma(n+\beta+1)\ \Gamma(n+p\mp\lambda+1)}$$
$${}_1F_2\left(n+p\ ;\ n+p\mp\lambda+1\ ,\ \alpha+1\ ;\ -\frac{\rho^2}{4}\right),$$

ou $p = \dfrac{\alpha+\beta+\delta\mp\lambda+1}{2}$. Plusieurs intégrales de diffraction sont exprimées par $C_{\alpha,\beta,\delta,\lambda}$.

On remarque que les fonctions de Lommel, de Struve et les fonctions Lambda, les polynômes de Jacobi et Zernike, sont obtenus comme des cas particuliers de l'intégrale (A1) et(A2). Par exemple :

(A.5) $$\lim_{z \to +0} \frac{\partial}{\partial z} I_{m,\beta,\sigma}(\rho, z, a) = J_o(\rho, a) = \pm\sqrt{\frac{k}{2a}} \int_o^{\infty} J_m(xu)\, J_{m+2n+3/2}(u)\, u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

et

(A.5') $$J_o(\rho, a) = \pm\sqrt{\frac{k}{2a}}\ \frac{\Gamma(n+1)}{2m\Gamma(m+n+3/2)}\ P^m_{m+2n+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right), \text{ si } 0 < \rho < a \quad (x = \frac{\rho}{a})$$

$$= 0 \text{ si } \rho > a$$

où $\alpha = m$, $\beta = m+2n+3/2$, $2\sigma = 2m+2n+1$, $\gamma = -\frac{1}{2}$. La fonction $J_o(\rho, a)$ est identique à $G_{m,\beta,m+2n+1}(\rho, a)$ du chapitre VIII.

Les propriétés de $G_{m,\beta,m+n+\frac{1}{2}}$ sont :[1]

(A.6) $$G_{m,\beta,m+n+\frac{1}{2}}(\rho, a) = J_o(\rho, a), \quad \text{si } (0<\rho< a)$$
$$= 0 \quad \text{si } (a<\rho<\infty)$$

et quand $\rho \to a$.

(A.7) $$G_{m,\beta,m+n+\frac{1}{2}}(\rho = a, a) = \frac{\cdot}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{m+2(n+1)-\beta} \frac{1}{\left(1-\frac{\gamma^2}{a^2}\right)^{m+2n+1-\beta}}\ \frac{\Gamma(m+2n+1-\beta)}{\Gamma(\beta-m-n)\Gamma(m+n+1-\beta)}$$

Si $\beta = m+2n+1/2$, on a :

(A.8) $$G_{m,m+2n+1/2,m+n+1/2}(a) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\ \lim_{\rho \to a} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2/a^2}}\ \frac{1}{\Gamma(n+3/2)} \to \infty \text{ si } \rho \text{ tend à } a.$$

si $\rho \to a$.

Les propriétés orthogonales de cette fonction sont :

(A.9a) $$\int_o^a G_{m,m+n+\nu+1,m+n+1/2}(\rho, a)\, g_{m,m+p+\nu+1/2,m+p+1/2}(\rho, a)\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{p+n}{2}-\nu} d\rho$$
$$= 0, \quad \text{si } p \neq n$$
$$= \frac{1}{4(m+n+\nu+1)}\left(\frac{2}{a}\right)^2 (n+1-\nu)\frac{\Gamma(m+\nu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+n+1)}, \quad \text{si } p = n.$$

(A.9b) $$(-1)^{\frac{n-m}{2}}\, G_{m,n+1,\frac{m+n+1}{2}}(\rho) = Z^m_n(\rho) \quad \text{(polynôme de Zernike)},$$

(A.9c) $$\int_o^a G_{m,\beta,m+n+1/2}(\rho, a)\, J_m(\rho t)\rho\, d\rho = t^{m+2n-\beta} J_\beta(at)$$

(A.9d) $$\int_o^{\infty} J_m(\rho t)t dt \int_o^a G_{m,\beta,m+\nu+1/2}(ut)\, J_m(ut)\, u du = G_{m,\beta,m+\nu+1/2}(\rho, a)$$

(propriété de Fourier Bessel).

La propriété (A.9a) est obtenue de (A.9c) et (A.5) si on échange l'intégration dans (A.9a).

(1) Dans le paragraphe V du chapitre VIII, le troisième indice λ de $g_{m,\beta,\lambda}(\rho, \alpha)$ est égale à β-m-2n-1.

B - FONCTIONS DE BESSEL ET STRUVE

(B.1) $$x^{\nu-\mu} J_\mu (ax) = \frac{a^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(\nu+2m)\,\Gamma(m+\nu)}{m!} J_{2m+\nu}(x)\ {}_1F_2(-m, m+\nu+1\ ; \nu+1\ ; a^2)$$

(B.2) $$J_\nu (ax)\, J_\mu (x) = \frac{a^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=o}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\ \ +2n} \frac{{}_1F_2(-m, -\ -m\ ;\ +1\ ;\ a^2)}{m!\ \ (\mu+m+1)}$$

(B.3) $$\frac{1}{2\pi} \int\!\!\int_{p^2+q^2 \leq 1} \cos(xp\cos\varphi + yq\sin\varphi)\,dp\,dq = \sum_{m=o}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x\sin\varphi}{2}\right)^{2m} \frac{J_{m+1}(x\cos\varphi)}{m!\ (x\cos\varphi)^{m+1}}$$

(B.4) $$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, J_{n-m}(y)$$

(B.5) $$J_\nu (ax)\, J_\mu (bx) = \left(\frac{a}{2}\right)^\nu \left(\frac{b}{2}\right)^\mu \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{p=o}^{\infty} (-1)\ \frac{p\ {}_2F_1(-p, -\nu-p\ ; \nu+1\ ;\ \frac{b^2}{a^2})}{p!\ \Gamma(p+\nu+1)}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}, \qquad (b^2 > a^2)$$

Les fonctions de Struve sont définies par l'intégrale ou la série suivante :

(B.6a) $$H_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_o^1 \sin\ zt\,(1-t^2)^{\nu-1_2}\ dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\nu+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\ {}_1F_2\left(1\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\nu+\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{z^2}{4}\right)$$

(B.6c) $$H_{n+1} - \frac{2n}{z} H_n + H_{n-1} = A_{n+1}\, z^n \qquad \left(A_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1/2)}\right)$$

(B.6d) $$2\frac{dH_n}{dz} + \frac{n}{z} H_n - H_{n-1} = 0$$

(B.6e) $$\frac{d}{dz}(z^n H_n) = z^n H_{n-1} \qquad \frac{d}{dz}(z^{-n} H_n) = A_{n+1} - z^{-n} H_{n+1}$$

(B.6f) $$\frac{d}{dz}\left[\sqrt{z}\, H_n(\sqrt{z})\right] = -\ \frac{n-1}{2}\ H_n(\sqrt{z})$$

(B.6g) $$\frac{d}{dz}\left[z^{-\frac{n}{2}}\ H_n(\sqrt{z}) - H_{n+1}(\sqrt{z})\right] = -\frac{1}{2} z^{-\frac{n+1}{2}}\ H_{n+1}(\sqrt{z})$$

(B.6h) $$\frac{d^m}{dz^m}\left[z^{\frac{m}{2}}\ H_n(\sqrt{z})\right] = \frac{1}{2^m}\ z^{\frac{n-m}{2}}\ H_{n-m}(\sqrt{z})$$

(B.6i) $$\int_o^Z z^n H_{n+1}(z)\,dz = A_{n+1}\, z - z^{-n} H_n(z)$$

(B.6j) $$\int_o^Z z^n H_{n-1}(z)\,dz = z^n H_n(z)$$

(B.6k) $$H_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(n+1/2)} \sum_{m=i}^{\infty} \frac{n+2m-1}{(2m-1)(2n+2m-1)} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(m)} J_{n+2m-1}(z)$$

(B.6l) $$C_n(z) = J_n(z) + i\, H_n(z) = A_{n-1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^1 e^{izt} (1-t^2)^{\frac{2n-1}{2}} dt$$

(B.6m) $$\int_0^{\infty} \frac{J_{n+m}(z)\, H_n(z)}{z} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, m(2n+m)} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \quad (n \neq 0)$$

$$= \frac{2}{\pi m^2}, \quad (n=0)$$

C - POLYNÔMES DE ZERNIKE

(C.1) $$Z_4^2 = \frac{2}{3} Z_4^o + 2\, Z_2^o + \frac{4}{3} Z_o^o$$

(C.2) $$(Z_4^2)^2 = \frac{8}{35} Z_8^o + \frac{3}{7} Z_6^o + \frac{1}{14} Z_4^o + \frac{1}{10} Z_2^o + \frac{1}{5} Z_o^o$$

$$= \frac{2}{7} Z_8^2 + \frac{2}{5} Z_6^2 - \frac{1}{28} Z_4^2 + \frac{7}{20} Z_2^2$$

$$= \frac{4}{7} Z_8^4 + \frac{3}{7} Z_4^4$$

(C.3) $$(Z_4^2)^3 = \frac{16}{231} Z_{12}^o + \frac{4}{21} Z_{10}^o + \frac{54}{355} Z_8^o + \frac{77}{60} Z_6^o + \frac{25}{84} Z_4^o + \frac{27}{140} Z_2^o + \frac{1}{140} Z$$

$$= \frac{8}{98} Z_{12}^2 + \frac{64}{315} Z_{10}^2 + \frac{93}{770} Z_8^2 + \frac{13}{90} Z_6^2 + \frac{23}{63} Z_4^2 + \frac{3}{35} Z_2^2$$

$$= \frac{64}{5.9.11} Z_{12}^4 + \frac{9}{2} Z_{10}^4 + \frac{339}{77} Z_8^4 + \frac{10249}{330} Z_6^4 + \frac{3695}{42} Z_4^4$$

$$= \frac{16}{55} Z_{12}^6 + \frac{9}{22} Z_8^6 + \frac{1963}{1210} Z_6^6$$

(C.4) $$(Z_5^1)^2 = \frac{10}{25} Z_{10}^o + \frac{1}{2} Z_8^o + \frac{4}{45} Z_6^o + \frac{4}{21} Z_4^o + \frac{1}{7} Z_2^o + \frac{1}{6} Z_o^o$$

$$= \frac{10}{21} Z_{10}^2 + \frac{4}{15} Z_8^2 + \frac{9}{35} Z_2^2$$

(C.5) $$(Z_3^1)^2 = \frac{9}{20} Z_6^o + \frac{1}{4} Z_4^o + \frac{1}{20} Z_2^o + \frac{1}{4} Z_o^o$$

$$= \frac{3}{5} Z_6^2 + \frac{2}{3} Z_2^2$$

(C.6) $$(Z_3^1)^3 = \frac{3}{14} Z_9^1 + \frac{6}{35} Z_7^1 + \frac{9}{70} Z_5^1 + \frac{44}{105} Z_3^1 + \frac{1}{15} Z_1^1$$

$$= \frac{9}{28} Z_9^3 + \frac{9}{20} Z_5^3 + \frac{8}{35} Z_3^3$$

(C.7) $$(Z_2^2)^4 = \frac{1}{70} Z_8^o + \frac{1}{10} Z_6^o + \frac{2}{7} Z_4^o + \frac{2}{5} Z_2^o + \frac{1}{5} Z_o^o$$

$$= \frac{1}{28} Z_8^4 + \frac{1}{4} Z_6^4 + \frac{5}{7} Z_4^4 + Z$$

$$= \frac{1}{8} Z_8^6 + \frac{7}{8} Z_6^6$$

(C.8) $$(Z_2^2)^3 = \frac{1}{15} Z_6^2 + \frac{1}{3} Z_4^2 + \frac{3}{5} Z_2^2$$

(C.9) $$Z_n^m = \frac{n-m+2}{2(n+1)} Z_{n+1}^{m-1} + \frac{n+m}{2(n+m)} Z_{n-1}^{m-1} = \frac{1}{2(n+1)} \left[(n+m+2) Z_{n+1}^{m+1} + (n-m) Z_{n-1}^{m+1} \right].$$

(C.10) $$\frac{d}{d\rho} Z_n^m = 2n Z_{n-1}^{m-1} + 2(n-2) Z_{n-3}^{m-1} + \ldots + 2m Z_{m-1}^{m-1} - \frac{m}{\rho} Z_n^m$$

(C.11) $$2(k+1) Z_{n+1}^{2k+1-n} = 2(n - (k-1)) Z_{n+1}^{2k-1-n} + 2k Z_{n-1}^{2k-1-n} + 2(k-n) Z_{n-1}^{2k-n+1}$$

(C.12) $$(k+1) Z_{n+1}^{n-2k+1} = (n-k+1) Z_{n+1}^{n-2k+1} + (k-n) Z_{n-1}^{n-2k-1} + k Z_{n-1}^{n-2k+1}$$

(C.13) $$\frac{1}{\rho} Z_n^m = \frac{2n}{n+m} Z_{n-1}^{m-1} - \frac{2(n-2)(n-m)}{(n+m)(n+m-2)} Z_{m-3}^{m-1} + \frac{2(n-4)(n-m)(n-m-2)}{(n+m)(n+m-2)(n+m-4)} Z_{n-5}^{m-1}$$

$$+ \ldots + (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{2m(n-m)(n-m-2)\ldots 2}{(n+m)(n+m-2)\ldots\ldots 2m} Z_{m-1}^{m-1}$$

$$= 2 \sum_{k=o}^{\frac{(n-m)}{2}} (-1)^k \frac{(n-2k) \prod^{k} (n-m-2k)}{\prod (n+m-2k)} Z_{n-2k-1}^{m-1}$$

APPENDICE D.

$$A_1 = \frac{(n+1)(n+2)(n+5)(n+7)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}$$

$$A_2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$A_3 = \frac{2(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\, 2 \left[\frac{3(n+2)^2 + 3(n+2) - 2}{2n+7} + \frac{3n^2 + 3n - 2}{2n-1} - \frac{11(2n+3)}{8} \right]$$

$$A_4 = \frac{4(n+1)}{(2n+1)^2} \left[\frac{3(n+1)^2 + 3(n+1) - 2}{2n+5} \quad \frac{(2n-5)(3n^2+3n-2)}{(2(2n-1)(2n+3)} - \frac{n^2}{2(2n-1)} \right] + \frac{n+1}{2n+1} \left[\frac{(n+2)^2}{(2n-1)^2(2n+5)} - \frac{3}{2} \right]$$

$$A_5 = \frac{1}{2n+1} \left[\frac{n^2(n-1)^2}{(2n-1)^2(2n-3)} + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{(2n+3)^2(2n+5)} - \frac{11n^2 - 13n + 4}{2n+3} - \frac{23n + 27n - 18}{2\,(2n-1)} \right]$$

$$A_6 = \frac{n}{(2n+1)(2n-3)} \left[\frac{3(n-1)^2 + 3(n-1) - 2}{2n+1} - \frac{(n-1)(n+1)}{2n-1} - \frac{3(2n-3)}{2} \right] - \frac{2n^2(4n+3)}{(2n+1)^2(2n+3)}$$

$$A_7 = \frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \left[\frac{3n^2 + 3n - 2}{2n-1} + \frac{2(n-2)}{2n-3} - \frac{11}{4} \right]$$

$$A_8 = \frac{n(n-1)(n-3)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}$$

$$A_9 = \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$$

$$B_1 = \frac{(n+1)(n+2)(n+5)(n+6)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}$$

$$B_2 = \frac{(n-2)(n+1)(n+5)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$B_3 = \frac{2(n+4)}{(2n+1)(2n+3)^2} \left[\frac{3(n+1)^2(n+2)}{2n+7} + \frac{(n+3)(3n^2+3n-2)}{2n-1} \right] + \frac{(n+1)(n-6)}{4(2n+1)(2n+3)}$$

$$B_4 = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{2n+5} + \frac{2(n+3)(3n^2+3n-2)}{2n-1} \right] - \frac{n-3}{(2n+5)} \frac{6n(n+1)}{2n+5} - \frac{(n-3)(n+2)}{2n-1}$$

$$B_5 = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \left[\frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \frac{1}{(2n-1)^2} \right] + \frac{12(n-1)(n+3)(3n^2+3n-2)}{(2n+3)^2(2n-1)^2}$$
$$+ \frac{1}{(2n-1)\,2n+1)(2n+3)} \left[2(n^2-1)(2n-1) + 2(n+2)(n+3)(2n+3) - \frac{9}{2}(2n+1)(3n^2+3n-2) \right]$$

$$B_6 = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \left[\frac{2(n-2)(3n^2+3n-2)}{2n+3} + \frac{n(n-1)(n+1)}{2n-3} \right] - \frac{3(n+8)}{2(2n+1)}$$
$$- \frac{n-2}{(2n+1)^2} \left[\frac{(n^2-1)}{2n+3} + \frac{3n^2 + 3n-2}{2n-1} \right]$$

$$B_7 = \frac{2(n-3)}{(2n+1)(2n-1)^2} \left[\frac{(n-2)(3n^2+3n-2)}{2n+3} + \frac{3n^2(n-1)}{2n-5} \right] - \frac{n\,(11n-51)}{4(2n-1)(2n+1)}$$

$$B_8 = \frac{n(n-4)(3n-1)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}$$

$$B_9 = \frac{n(n-1)(n-4)(n-5)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$$

$$C_1 = \frac{(n+1)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$C_2 = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \left[(n+3)^2 + \frac{n^2(n+1)}{n+1} \right] - \frac{(n+3)(n+2)}{2(2n+1)(n+1)}$$

$$C_3 = -\frac{3}{2n+1} \left[\frac{(n+2)^2}{2n+3} + \frac{(n-1)^2}{2n-1} - \frac{2n+1}{n^2} \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \left[(n-2)^2 + \frac{(n-1)(n+1)^2}{n} \right] - \frac{(n-1)(n-2)}{2n(2n+1)}$$

$$C_5 = \frac{n(n-2)}{(2n-1)(2n+1)}$$

BIBLIOGRAPHIE

Andrejewski, W. - 1952, Diss., Aachen; - 1953, Zeit. f. Angew. Phys., 3, p. 176.

Angelesco, A. - 1916, Thèse, Paris.

Appell, P. - 1882, J. de Math., 8, p. 173.

Appell, P. et Kampé de Feriet, J. - 1926, Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques - Polynômes d'Hermite. Gauthiers-Villars, Paris.

Bachynski, M. P. et Bekefi, G. - 1955, McGill Univ. Techn. Rept., N. 35, Montréal, Canada ;- 1956, Trans, A.P., IRE, (AP-4, N. 3), p. 412.

Baker, B. B. et Copson, E. T. - 1950, The Mathematical Theory of Huygen's Principle, 2eme Edit., Clarendon Press, Oxford.

Bateman, H. - 1953, Higher Transcendental Functions, II, Edit. A. Erdelyi. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York.

Bekefi, G. - Editeur - 1957, Studies in Microwave Optics, McGill Univ., Techn. Rept. N. 38.

Boivin, A. - 1965, Théorie et Calcul des Figures de Diffraction de Révolution. Edition, Université de Laval, Québec, Canada et Gauthiers-Villars, Paris - Thèse, Laval, 1960.

Born, M. - 1932, Naturwisstn., 20, p. 921. - 1933, Optik, J. Springer, Berlin.

Born, M. et Wolf, E. - 1959, Principles of Optics. Pergamon Press, Oxford, London.

Bouwkamp, J.C. - 1941, Thèse, Groningen; - 1946, Physica, 12, p. 467; 1949, Proc. Acad. Sci., Amsterdam, 52, p. 887; - 1950, ibid., 53, p. 654; - 1950, Phil. Res. Rept., 5, p. 401; Physica, 16, p. 1. - 1953, Diffraction Theory. A critique of some recent developments, N.Y.U. Techn. Rept. N° EM-50; - 1954, Diffraction Theory, Prog. in Physics, 17, p. 35, London.

Braunbek, W. - 1949, Ann. der Physik, 6, p. 53; - 1950, Zeit. f. Phys., 127, p. 381, 405; - 1954, ib., 138, p. 80; Trans. AP-4, p. 219 (1956).

Braunbek, W. et Laukien, G. - 1952, Optik, 9, p. 174.

de Broglie, L. - 1950, Optique Electronique et Corpusculaire. Hermann et Cie, Paris, Chapt. XI-XIII.

Bremmer, H. - 1949, Terrestial and Radio Waves. Elsevier, Amsterdam;- 1951, Physica, 17, p. 63; - 1952, ib., 18, p. 469; - 1958, Propagation of Electromagnetic Waves, Handbuch der Physik, XVI, J. Springer, Berlin.

Brinkman, H.C. et Zernike, F. - 1935, Proc. Nederl. Akad. Wetensch., 38, p. 161.

Buchal, R.N. et Kellel J.B. - 1960, Comm. Pure Appl. Math., 13, p. 85.

Caratheodory, C. - 1937, Geometrische Optik, J. Springer, Berlin; - 1955, Gesammelte Math. Schriften, II, München.

Chako, N. - 1953 (1959), Symp. on Microwave Optics, McGill Univ., Montreal, Canada - Bedford, Mass., Vol. I, p. 67 (1959); - 1957, Chalmers Trans., N° 191, Gothenburg, Sweden; - 1959, Praktika, Athen Acad., 34, p. 422; - 1963, Act. Phys. Pol., 24, p. 611, 629; - 1964, Prak., Athens Acad., 39, p. 442; - 1965, Act. Phys. Pol., 27, p. 157; - 1965, J. Inst. Math. Appl., 1, p. 372; - 1966, Thèse (2ème), Paris.

Cotte, M. - 1938, Ann. de Physique, 10, p. 333; - 1939, ib., 2, p. 351; - 1952, Symp. In Appls. of Comm. Theory, Butterworth Sci. Publs., London; - 1955, Rev. Gen. de Sciences, 62, p. 237,

Courant, R. et Hilbert, D. - 1962, Methods of Mathematical Physics, II, Interscience Publs, N.Y.

Debye, P. - 1909, Ann. d. Phys., 30, p. 755.

Deppermann, K. et Franz, W. - 1954, Ann. d. Phys., 14, p. 253.

Didon, F. - 1868, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 5, p. 229 = Thèse, Paris (1868).

Dossier, B. - 1954, Thèse, Paris.

Fabianski, B.Z. - 1963, Act. Phys. Pol., 24, p. 317; - 1964, Thèse, Varsovie.

Farnell, G.W. - 1957, Can. J. Physics, 35, p. 777.

Fischer, J. - 1923, Ann. d. Phys., 72, p. 353.

Fock, V. - 1948, Phil. Mag., 39, p. 149; - 1965, Diffraction Theory, Pergamon Press, London-Oxford.

Focke, J. - 1954, Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss., 101, p. 1; - 1956, Optica Acta, 3, p. 110, 161.

Françon, M. - 1948, Rev. d'Optique, 26, p. 369; 27, p. 157, 395, 761 = Thèse, Paris; - 1956, Interferences, Diffraction, et Polarisation. Handbuch der Physik, XXIV, J. Springer, Berlin.

Franz, W. - 1949, Zeit. f. Phys., 125, p. 565; - 1950, Phys. Soc., London, 63, p. 925; - 1957, Theorie der Beugung Elektromagnetischer Wellen, J. Springer, Berlin.

Franz, W. et Beckmann, D. - 1955, Trans. A.P.-4, IRE, p. 203.

Franz, W. et Deppermann, K. - 1952, Ann. d. Phys., 10, p. 361.

Franz, W. et Galle, R. - 1955, Zeit. f. Naturforschung, 10a, p. 37.

Fresnel, A. - 1816, Ann. de Chimie et Phys., I, p. 239, 332; - 1866, Œuvres Complètes, I, p. 89, 129, 171, 247, Imprimerie Impériale, Paris.

Glaser, W. - 1950, Sitz. Ost Akad. Wiss., 159, p. 297; - 1952, Grundlage der Elektronenoptik, J. Springer, Berlin; - 1956, Elektronen - und Ionenoptik, Handbuch der Physik, XXXIII, J. Springer, Berlin.

Glaser, W. et Braun, G. - 1954, Act. Phys. Austraica, 9, p. 41; - 1955, ibid. p. 267.

Glaser, W. et Schiske, P. - 1953, Ann. d. Phys., 12, p. 267.

Gröbner, W. - 1948, Monat. Math., 52, p. 38.

Hamel, G. - 1939, Integralgleichungen. J. Springer, Berlin.

Hamilton, William (Sir) - 1932, Mathematical Papers, I. Geometrical Optics. Editeur, Synge, L.A., Cambridge Univ. Press.

Hansen, W. W. - 1935, Phys. Rev., 47, p. 139; - 1936, Physica, 7, p. 460; - 1937, J. Appl. Phys., 8, p. 284.

Helmholtz, H. - 1859, J. de Grelle, 57, p. 7.

Hermite, Ch. - Oeuvres Complètes, II, p. 293, 301, 309, 313, 319, Gauthiers-Villars, Paris.

Herzberger, M. - 1957, Modern Geometrical Optics. Interscience Publs., N.Y.

Hönl, H. - 1952, Zeit. f. Phys., 131, p. 290.

Hönl, H. et Maue, A.W. - Zeit. f. Phys., 132, p. 569.

Hönl, H. Maue, A.W. et Westpfahl, K. - 1961, Theorie der Beugung. Handbuch der Physik, XXV 1, J. Springer, Berlin.

Hopkins, H.H. - 1951, Proc. R.S., London, 208, p. 263; - 1953, ibid, 217, p. 408; - 1955, ibid, 231, p. 91.

Huygens, Christian - 1690, Traité de la Lumière, Leyde. - 1920, Gauthiers-Villars, Paris, chapitre II.

Ignatowski, W. von - 1907, Ann. d. Phys., 23, p. 875; ibid, 25, p. 91; 91; 1925, ibid, 77, p. 589.

Imai, I. - 1954, Zeit. f. Phys., 137, p. 31

Ingarden, R.S. - Act. Phys. Pol., 14, p. 77.

Jessel, M. - 1962, Thèse, Paris.

Jones, D. S. - 1950, Quart. J. Mech., Oxford, 3, p. 420; - 1952, ibid, 5, p. 363; - 1952, Proc. Lond. Math. Soc., 2, p. 440; - 1953, Proc. Camb. Phil. Soc., 49, p. 668; - 1955, Phil. Trans. R.S., 247, p. 449; - 1963, ibid, 255, p. 34; - 1964, The Theory of Electromagnetism. Pergamon Press, London - Oxford.

Kampè de Feriet, J. - 1915, Thèse, Paris.

Kahan, Th. et Eckart, G. - 1949, J. de Phys. et Rad., 10, p. 333; - 1950, Ann. de Phys., 5, p. 641.

Kampen, N. van - 1948, Physica, 14, p. 575; - 1950, ibid, 16, p. 817; - 1958, ibid, 24, p. 437.

Karczewski, B. - 1961, J.O.S.A., 57, p. 1055; - 1963, Can. J. Phys., 41, p. 1623.

Keller, J.B. - 1953, Symp. Microwave Optics, McGill Univ., Montreal, Can., I.; - 1957, J. Appl. Phys., 28, p. 426; - 1958, Proc. Symp. Appl. Math., 8, p. 27.

Keller, J.B., Lewis, R.M., et Seckler, B.D. - 1957, J. Appl. Phys., 28, p. 570; - 1956, Comm. Pure Appl. Math., 9, p. 207.

Keller, J.B., et Levy, B. - 196[illegible] Proc. Int. Conf. Elect. Scatt., p. 3. Pergamon Press, London - Oxford.

Keller, R. - 1960, Optik, 17, p. 611 - 641.

Kirchhoff, G. - 1891, Vorlesungen über Mathematische Physik, II, chapt. II, Teubner, Leipzig.

Kline, M. - 1951, Comm. Pure Appl. Math., 4, p. 225; - 1955, ibid, 8, p. 595.

Kline, M. et Kay, I. - 1965, Electromagnetic Theory and Geometrical Optics, Interscience Publs., N.Y.

Kotani, M. - 1933, Proc. Phys. Math. Soc., Japan, 15, p. 30.

Kottler, F. - 1923, Ann. d. Phys., 70, p. 405; ibid, 71, p. 457.

Lansraux, G. - 1953, Diffraction Instrumentale, Thèse, Paris. - 1953, Cahs de Phys., N° 45, p. 29; - 1955, Rev. Opt., 34, p. 65.

Laporte, O. et Meixner, J. - 1958, Zeit. f. Phys., 153, p. 129.

Levine, H. et Schwinger, J. - 1948, Phys. Rev., 74, p. 958; - 1949, ibid, 75, p. 1423; - 1950, Comm. Pure Appl. Math., 3, p. 355.

Lighthill, M.J. - 1960, Phil. Trans. R.S., 252, p. 397; - 1965, J. Inst. Math. Appls., 1, p. 1.

Linfoot, E.H., et Wolf, E. - 1952, M.N.R.A.S., 112, p. 452; - 1953, Proc. Phys. Soc., London, 66, p. 145; - 1956, ibid, 69, p. 923.

Lommel, E. - 1884, Abh. Kgl. Bayr. Akad. Wiss., 15, p. 233.

Luneburg, R.K. - 1944, Mathematical Theory of Optics, Brown Univ., Providence, R.I. - 1965, California Univ. Press, Berkeley, Cal.

Maggi, G. - 1888, Annales Mat. Pure Appl. 16, p. 21.

Magnus, W. - 1942, Jahrber. dtsch. Math. Ver., 52, p. 177.

Magnus, W. et Rellich, F. - 1943, Jahrber. dtsch. Math. Ver., 53, p. 57.

Mandelstam, L. - Festschrift H. Weber, Teubner, Leipzig, 1912, p. 228. Frank, Ph. et Mises, R. von - Diff. und - Integral-gleichungen der Mathematischen Physik, I. Braunschweig, 1930, p. 473.

Marchand, E.W. et Wolf, E. - 1962, J.O.S.A., 52, p. 761.

Maréchal, A. - 1948, Rev. Opt., 27, p. 73; - 1953, ibd., 32, p. 649.

Maréchal, A. et Françon, M. - 1960, Diffraction, Structure des Images. Ed. Rev. Opt., Paris.

Maue, A.-W. - 1949, Zeit. f. Phys., 126, p. 601. (voyez, Hönl, H., Maue, A.-W. et Westpfahl, K.).

Meixner, J. - 1948, Zeit. f. Naturforsch., 3a, p. 506; - 1949, Ann. d. Phys., 6, p. 2; - 1953, ibd., 12, p. 227.

Meixner, J. et Andrejewski, W. - 1950, Ann. d. Phys., 7, p. 158.

Meixner, J. et Fritze, U. - 1949, Zeit. Angw. Phys., 1, p. 535.

Miyamoto, K. et Wolf, E. - 1962, J.O.S.A., 52, p. 615, 626.

Morse, P.M. et Rubenstein, P.J. - 1938, Phys. Rev., 54, p. 895.

Muller, Claus, - 1950, Abh. dtsch. Aka. Wiss., Berlin, N° 3; - 1952, Math. Zeit., 56, p. 80; - 1957, Grundprobleme der Mathematische Theorie Elektromagnetischer Schwingungen. J. Springer, Berlin.

Newton, Isaac (Sir) - 1935, Traité d'Optique. Reproduction facsimile de 2eme éd. (1722). Trad. par M. Coste. Gauthiers-Villars, Paris. Livre III, question XXXI.

Nienhaus, K. - 1948, Thèse, Groningen.

Nijboer, B.R.A. - 1942, Thèse, Groningen; - 1943, Physica, 10, p. 679; - 1947, ibd., 13, p. 605.

Nijboer, B.R.A. et Nienhaus, K. - 1949, Physica, 14, p. 590.

Nomura, Y. et Katsura, Sh. - 1955, J. Phys. Soc., Japan, 10, p. 285; - 1958, ibd., 12, p. 190.

Petykiewicz, J. - 1964, Act. Phys. Pol., 26, p. 229; - 1965, ibd., 27, p. 849.

Picht, J. - 1925, Ann. d. Phys., 77, p. 685; - 1931, Optische Abbildung. Braunschweig; - 1956, Optik, 13, p. 494; - 1963, Elektronenoptik, 3eme édit. Leipzig.

Rayleigh, Lord - 1897, Phil. Mag., 43, p. 259 = Sci. Papers, IV, p. 283; ibd., 44, p. 28 = Sci. Papers, IV, p. 305; 1903, Cambridge Uni. Press.

Rellich, F. - 1943, Jahrb. dtsch. Math. Ver., 53, p. 57.

Richards, B. - et Wolf, E. - 1959, Proc. R.S., 253, p. 358.

Rubinowicz, A. - 1917, Ann. d. Phys., 53, p. 257; - 1924, ibd., 73, p. 339; - 1953, Act. Phys. Pol., 12, p. 225; - 1957, Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie, Varsovie; - 1957, Nature, 180, p. 160; - 1962, J.O.S.A., 52, p. 717; - 1962, Act. Phys. Pol., 21, p. 61; - 1965, ibd., 27, p. 435; ibd., 28, p. 361, 435, 841.

Schelkunoff, S.A. - 1951, Comm. Pure Appl. Math., 4, p. 43.

Scheffers, H. - 1942, Ann. d. Phys., 42, p. 211.

Schnabel, B. - 1959, Optik, 16, p. 449.

Schoch, A. - 1950, Schallreflexion, Schallbrechung und Schall-Beugung. Ergbn. d. Exacten Wiss., XXIII, p. 127.

Severin, H. - et Starke, C. - 1952, Acoustica, 2, p. 59.

Slevogt, H. - 1949, Optik, 4, p. 349; - 1957, ibd., 14, p. 377.

Sommerfeld, A. - 1896, Math. Ann., 47, p. 317; - 1912, Jahrb. dtsch. Math. Ver., 21, p. 309; - 1942, Ann. d. Phys., 42, p. 389; - 1965, Optik, 3eme édit., Leipzig. Chapitres V, VI.

Steel, W.H. - 1953, Rev. Opt., 32, p. 3, 143.

Stenzel, H. - 1939, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen. J. Springer, Berlin; - 1942, Ann. d. Phys. 41, p. 245; - 1949, ibd., 4, p. 303.

Steward, G.C. - 1925, Phil. Trans. R.S., 225, p. 131; - 1926, Trans. Camb. Phil. Soc., 23, p. 235; - 1928, Symmetrical Optical Systems. Cambridge Univ. Press.

Stratton, J. - 1941, Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book C°, N.Y. Traduction française par Hebenstreit, J. Dunod, Paris, 1965.

Strehl, Karl - 1894, Théorie des Fernrohrs. J.A. Barth, Leipzig; - 1907, Einführung in der Beugungs Theoretische Optik, Berlin.

Struve, O. - 1882, Mem. de l'Acad. d. Sciences, St. Petersbourg, T. 30, N° 88 - Thèse, Dopart; - 1886, ibd., T. 34, N° 5; - 1882, Ann. d. Phys., 17, p. 1002.

Sturrock, P.A. - 1951, Phil. Trans. R.S., 243, p. 387; - 1952, ibd., 245, p. 155; - 1955, Static and Dynamic Electron Optics, Camb. Univ. Press.

Toraldo di Francia, G. - 1950, Nuov. Cim., 7, p. 1; - 1956, Introduction to the Modern Theory of Electromagnetic Diffraction. Publ. Inst. Naz. Ottica, Firenze.

Tramm, W. - 1908, Thèse, Zurich.

Tricomi, F.G. - 1956, Integral Equation. Interscience Publs., N.Y.

Van der Pol, B. et Bremmer, H. - 1937, Phil Mag., 24, p. 141, 824.

Westpfahl, K. - 1959, Ann. d. Phys., 4, p. 283; (voyez aussi Hönl, Maue et Westpfahl).

Weyl, H. - 1952, Math. Zeit., 55, p. 187; - ibd., 56, p. 105.

Whittaker, E. T. - 1902-03, Math. Ann., 57, p. 333; - 1951, Introduction to the Theories of Aether and Electricity, I. Thomas Nelson & Sons Ltd, London.

Wolf, E. - 1951, Diffraction Theory of Aberrations, Prog. in Physics, XIV, p. 95. - 1951, Proc. R.S., 204, p. 533; - 1959, ibd., 253, p. 349; - 1959, Proc. Phys. Soc., London, 74, p. 269.

Wolf, E. et Marchand, E.W. - 1964, J.O.S.A., 54, p. 587.

Young, Thomas - 1802, Phil. Trans. R.S., 92, p. 12, 387 - Miscell. Works, I, p. 140, 170; - 1804, Phil. Trans. R.S., 94, p. 1 = Miscell, Works, I, p. 179; - 1807, A course of Lectures on Natural Philosophy and Mechanical Arts, London, T.I., p. 342, 374.

Zernike, F. - 1934, Physica, 1, p. 689; - 1938, ibd., 5, p. 785.

Zernike, F. et Brinkman, H.C. - 1935, Proc. Kon. Acad. Wetensch., Amsterdam, 38, p. 3.

Zernike, F. et Nijboer, B.R.A. - 1951, La Théorie des Images Optiques. Edition, Rev. Opt., Paris, p. 227.

Manuscrit remis le 11 Mai 1967

FIN