

DENIZ V. .-  
 La Cinétique des milieux hétérogènes.-  
 Commissariat à l'énergie atomique, Centre d'études  
 nucléaires de Saclay (Essonne), 1967.-  
 27 cm, 25 p.

CEA-R 3080 - DENIZ Valentin

## LA CINÉTIQUE DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES

**Sommaire.** - On présente dans ce rapport une méthode générale, utilisant la théorie du transport pour l'étude de la cinétique des milieux finis hétérogènes. La théorie est applicable aussi bien aux expériences près de la criticité qu'aux expériences par sources pulsées de neutrons sur des réseaux multiplicateurs ou non-multiplicateurs. La méthode générale est aussi appliquée aux expériences exponentielles sur des réseaux infinis non-divergents.

La particularité de l'étude est l'introduction explicite de l'hétérogénéité dans la formulation et la recherche de la dépendance des paramètres par rapport au laplacien du réseau fini. Il en résulte d'une part que les paramètres en milieu fini sont exprimés en fonction des paramètres correspondants en milieu infini par l'intermédiaire du laplacien et des aires de migration anisotropes, et d'autre part que tous ces paramètres sont exprimés en fonction des intégrales sur une seule cellule et non sur toute la pile.

Une étude préliminaire moins détaillée est d'abord faite pour bien distinguer entre ce qu'on appelle "paramètres dynamiques" et "paramètres statiques" et pour préciser le sens que l'on donne aux deux termes dans

CEA-R 3080 - DENIZ Valentin

## KINETICS OF HETEROGENEOUS SYSTEMS

**Summary.** - In this report, a general transport theory treatment is presented for the kinetic study as applied to finite heterogeneous systems. The theory is applicable to experiments near the critical point as well as to pulsed neutron experiments on multiplying or non-multiplying lattices. The general method is also applied to exponential experiments on infinite non-diverging lattices.

The particularity of the present study is the explicit introduction of heterogeneity in the formulation and the search for the dependence of the parameters on the Laplacian of the finite lattice. As a result of this, the parameters in finite medium are expressed in function of the corresponding parameters in infinite medium by the intermediary of the Laplacian and the anisotropic migration areas, and all these parameters are expressed in function of the integrals over one cell and not over the whole core.

A preliminary less detailed study is first made to distinguish between what is called "dynamic parameters" and "static parameters" and to specify the meaning that is given to the two terms in

ce rapport. On donne en annexe des traitements approximatifs à un groupe pour l'étude de la structure fine dynamique, de la constante de temps en milieu infini, et des coefficients de diffusion anisotrope dans des réseaux non-multiplicateurs.

1967

29 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

these two terms. In the appendices are given approximate one-group treatments for the study of the dynamic fine structure, the time constant in infinite lattices, and the anisotropic diffusion coefficients in non-multiplying lattices.

1967

49 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

**LA CINÉTIQUE DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES**

par

Valentin DENIZ

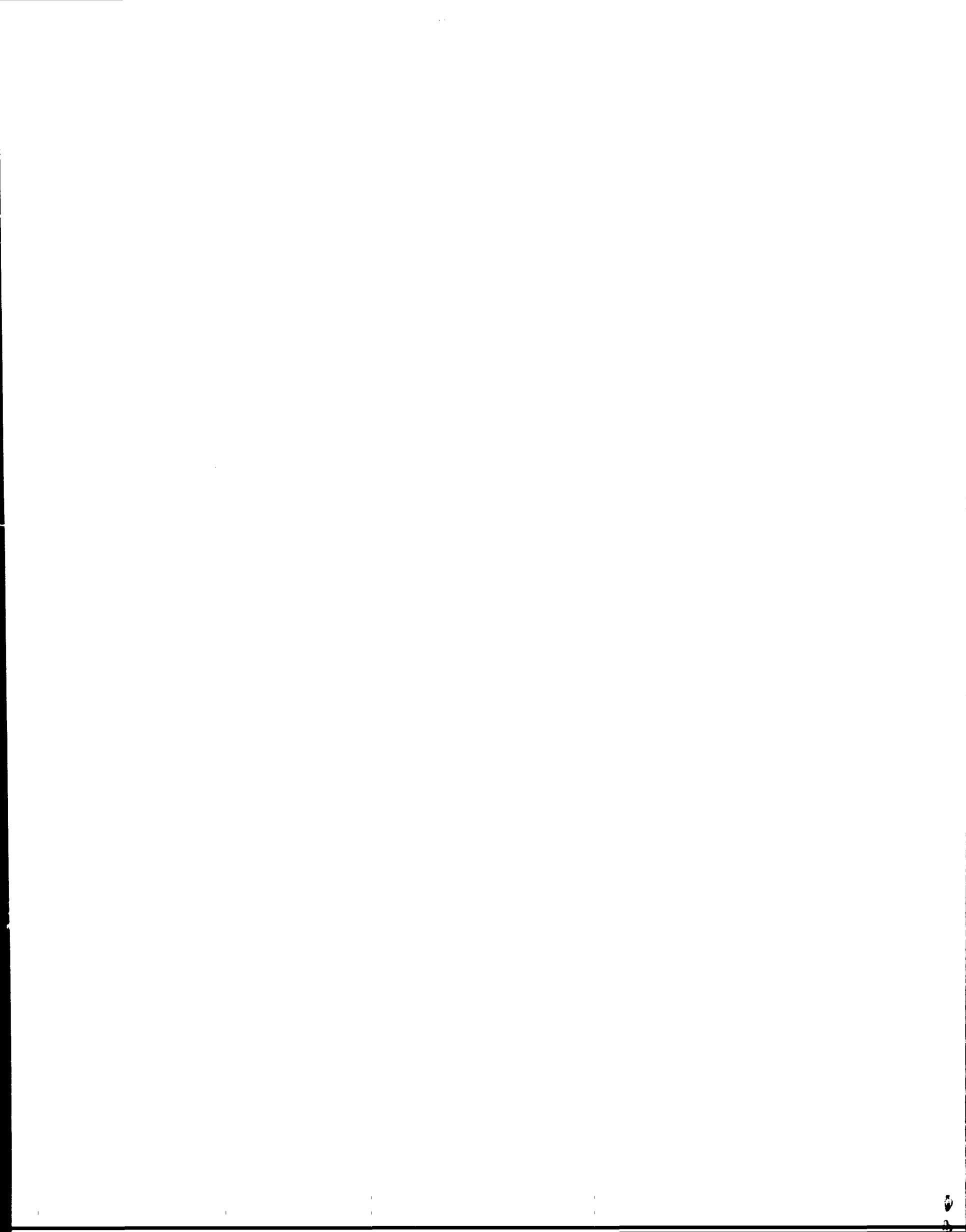
**Rapport CEA - R 3080**

**1967**

Ca

*Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.*

*The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.*



- Rapport CEA-R 3080 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Service des Expériences Neutroniques

LA CINÉTIQUE DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES

par

Valentin DENIZ

- Janvier 1967 -

TABLE DES MATIERES

	Pages
I - INTRODUCTION	1
II - PARAMETRES DYNAMIQUES ET PARAMETRES STATIQUES	1
III - POSITION DU PROBLEME	4
IV - PRESENTATION DE LA THEORIE	5
V - QUELQUES REMARQUES SUR LES RESULTATS OBTENUS	8
VI - CONCLUSIONS	9
ANNEXES	
I - ETUDE BREVE DES SYMETRIES	13
II - L'AIRE DE MIGRATION ANISOTROPE A PARTIR DES EQUATIONS ST	17
III - APPLICATION DE LA THEORIE DT AUX EXPERIENCES EXPONENTIELLES	19
IV - $\alpha_0$ ET LA STRUCTURE FINE DYNAMIQUE	21
V - COEFFICIENTS DE DIFFUSION D'UN RESEAU NON MULTIPLICATEUR	23

## LA CINÉTIQUE DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES

### I.- INTRODUCTION

Pour étudier un système non-stationnaire sur une période stable, la méthode la plus directe est la "théorie dynamique" (que l'on désignera par le symbole DT), où l'on étudie l'équation de bilan primaire qui a pour valeur propre la période stable. Une autre méthode est la "théorie statique" (désignée par le symbole ST), où l'on fait intervenir l'idée d'un système modifié par un changement de  $\nu$  pour le rendre critique. L'équation de bilan pour ce deuxième cas a pour valeur propre le facteur de multiplication effectif, qui est ici le réciproque du facteur par lequel  $\nu$  est modifié. Des remarques sur ces deux façons d'envisager le problème ont été faites par WEINBERG et WIGNER [1]. Parmi les études de la cinétique des piles, on cite les travaux de OUSSATCHEV [2], HENRY [3], GROSS et MARABLE [4] et LEWINS [5].

On présente dans ce rapport une étude pour des systèmes hétérogènes nus, en utilisant la théorie du transport. Utilisant la méthode DT, on propose un ensemble de définitions pour les divers paramètres cinétiques. L'introduction de l'hétérogénéité dans la formulation permet d'employer des techniques analogues à celles mises au point par BENOIST [6], LESLIE [7] et BEHRENS et OLDEKOP [8] pour étudier l'anisotropie du coefficient de diffusion ou de l'aire de migration.

Les différences entre les définitions des paramètres cinétiques de ce rapport et celles données dans les références citées consistent, d'une part dans le rattachement des paramètres en milieu fini aux paramètres correspondants en milieu infini par l'intermédiaire du laplacien, et d'autre part dans l'expression de ces paramètres comme fonction des intégrales sur une seule cellule élémentaire et non sur toute la pile. La théorie est également applicable à des milieux homogènes qui peuvent être considérés comme des réseaux de cellules ponctuelles.

La distinction entre "paramètres dynamiques" et "paramètres statiques" n'est pas quelque chose de fondamental et repose en grande partie sur une convention arbitraire qui n'est d'ailleurs pas universellement adoptée. Il sera utile, avant d'aborder l'étude proprement dite, de considérer un traitement moins détaillé qui permettra, d'une part de voir les caractéristiques essentielles dans les définitions des paramètres et d'autre part, de préciser les sens donnés dans ce rapport aux mots "dynamique" et "statique".

### II - PARAMÈTRES DYNAMIQUES ET PARAMÈTRES STATIQUES

Considérons une pile finie quelconque dans laquelle le flux en phase  $F(\vec{r}, \nu, \vec{\Omega}, t)$  est séparable sous la forme  $\psi(\vec{r}, \nu, \vec{\Omega}) \exp\left(\frac{\lambda t}{\Lambda}\right)$ . Exprimons l'équation de bilan en fonction des opérateurs suivants qui donnent les gains ou les pertes par unité de temps :

$S_i F$  est le gain dû aux neutrons prompts,  $S_i F'$  le gain provenant des neutrons retardés du groupe  $i$  dans le cas où ils sont tous émis au moment de la fission, et  $LF$  les pertes nettes dues à tous les autres phénomènes. Le vrai gain instantané provenant du groupe  $i$ , dont la constante de décroissance est  $\lambda_i$ , est donné par  $S_i F$  où

$$S_i = \frac{\lambda_i T}{1 + \lambda_i T} S_{i0} \text{ pour } \lambda_i T > -1 \quad (1)$$

Nous définissons

$$\begin{cases} S_0 = S_p + \sum_i S_{i0} \\ S = S_p + \sum_i S_i = S_0 - \sum_i \frac{1}{1 + \lambda_i T} S_{i0} \end{cases} \quad (2)$$

Considérons d'abord les équations de bilan pour le flux  $\psi$  et le flux adjoint  $\psi^+$

$$S\psi - L\psi = \frac{1}{vT} \psi \quad (3)$$

$$S^+\psi^+ - L^+\psi^+ = \frac{1}{vT} \psi^+ \quad (4)$$

Ce sont des équations DT, dont la première est la véritable équation de bilan pour la population neutronique. Multiplions cette équation (3) par une fonction de pondération  $p(\vec{r}, v, \vec{\Omega})$  quelconque et intégrons le résultat sur toutes les directions, toutes les vitesses et sur le volume de la pile. En définissant le symbole (a,b) par

$$(a,b) = \int_{V_{\text{pile}}} dV \int_0^\infty dv \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega} (ab) \quad (5)$$

on obtient

$$(p, S\psi) - (p, L\psi) = \frac{1}{T} (p, \frac{1}{v} \psi) \quad (6)$$

Posons

$$l(p) = \frac{(p, \frac{1}{v} \psi)}{(p, L\psi)} ; k(p) = \frac{(p, S\psi)}{(p, L\psi)} ; k'(p) = \frac{(p, S_0\psi)}{(p, L\psi)} \quad (7)$$

Physiquement  $l(p)$  représente une vie moyenne, et  $k(p)$  et  $k'(p)$  sont des facteurs de multiplication dont les définitions sont basées sur des taux de production donnés respectivement par les opérateurs  $S$  et  $S_0$ . Les valeurs numériques de tous ces paramètres dépendent évidemment de la fonction  $p$  utilisée, mais la valeur propre  $T$  définie à partir de ces paramètres est indépendante de  $p$ .

$$\frac{1}{T} = \frac{k(p) - 1}{l(p)} \quad (8)$$

La réactivité  $\rho(p)$  est donnée par

$$\rho(p) = \frac{k(p) - 1}{k(p)} = \frac{l(p)}{Tk(p)} = \frac{l(p)}{l(p) + T} \quad (9)$$

En définissant des fractions effectives  $\beta_{i, \text{eff}}(p)$  des neutrons retardés par

$$\beta_{i, \text{eff}}(p) = \frac{(p, S_{i0}\psi)}{(p, S_0\psi)} \quad (10)$$

on obtient la relation entre  $k(p)$  et  $k'(p)$ , qui est

$$k(p) = k'(p) \left[ 1 - \sum_i \frac{1}{1 + \lambda_i T} \beta_{i, \text{eff}}(p) \right] \quad (11)$$

d'où l'on peut définir une autre réactivité  $\rho'(p)$  par

$$\rho'(p) = \frac{k'(p) - 1}{k'(p)} = \frac{l(p)}{Tk'(p)} + \sum_i \frac{\beta_{i, \text{eff}}(p)}{1 + \lambda_i T} \quad (12)$$

Notons que si d'une part les fractions réelles  $\beta_i$  et les spectres de fission des groupes prompt et retardés (émission isotrope) sont tous indépendants de la vitesse du neutron qui provoque la fission et si d'autre part  $p$  est indépendant de la variable vitesse, les  $\beta_{i, \text{eff}}(p)$  deviennent identiques aux  $\beta_i$ .

Tous les paramètres définis dans les équations (7) à (12) seront considérés dans ce rapport comme "paramètres dynamiques". On n'a nulle part introduit l'idée d'un milieu modifié par un changement de  $v$  pour le rendre critique, sauf indirectement en définissant  $k'(p)$  par l'intermédiaire de l'opérateur  $S_0$  qui, lui, est propre au système critique.

Considérons maintenant les équations de bilan ST

$$\frac{1}{k_s} S_0 \psi_s = L \psi_s \quad (13)$$

$$\frac{1}{k_s} S_0^+ \psi_s^+ = L^+ \psi_s^+ \quad (14)$$

où l'indice  $s$  désigne "statique". Parmi les paramètres statiques que l'on peut définir, on a

$$l_s(p) = \frac{(p, \frac{1}{v} \psi_s)}{(p, L \psi_s)} ; l_s^{(+)}(p) = \frac{(p, \frac{1}{v} \psi_s^+)}{(p, L^+ \psi_s^+)} ; k_s = \frac{(p, S_0 \psi_s)}{(p, L \psi_s)} = \frac{(p, S_0^+ \psi_s^+)}{(p, L^+ \psi_s^+)} \quad (15)$$

les vies moyennes  $l_s$  et  $l_s^{(+)}$  étant fonction de  $p$ , et  $k_s$  en étant indépendant.

Evidemment, les équations (13) et (14) ne représentent pas le véritable milieu non-stationnaire et les paramètres définis dans l'équation (15) ne sont pas intéressants en eux-mêmes. Néanmoins il arrive que, pour des valeurs particulières de la fonction de pondération, les "paramètres dynamiques" définis plus haut se confondent avec ces "paramètres statiques". Plus précisément

$$l(\psi_s^+) = l_s^{(+)}(\psi) ; k'(\psi_s^+) = k_s \quad (16)$$

On peut, bien entendu, définir des "paramètres dynamiques" en utilisant  $\psi_s^+$  comme fonction de pondération, comme l'ont fait OUSSATCHEV [2] et HENRY [3]. Ceci est utile du point de vue des calculs, puisque souvent les équations (13) et (14) sont plus faciles à résoudre que les équations (3) et (4) et qu'un ensemble de "paramètres dynamiques" définis avec  $p = \psi_s^+$  et  $\psi_s^+$  rend le calcul plus abordable, les erreurs ainsi introduites n'étant pas importantes, sauf si l'on est loin de la criticité. Les paramètres ainsi définis sont connus dans la littérature comme "paramètres statiques", mais comme on vient de le voir, ils ne sont qu'un ensemble particulier des "paramètres dynamiques". GROSS et MARABLE [4] et LEWINS [5] entendent par "paramètres dynamiques" l'ensemble obtenu avec  $p = 1$ . Encore une fois, ceci n'est qu'un ensemble particulier.

Dans ce rapport, on entend par "paramètres dynamiques" tous les ensembles possibles définis à partir des équations (7) à (12). Un seul de ces ensembles (avec  $p = \psi_S^+$  et  $\psi_S^-$ ) sera désigné par le nom particulier "paramètres statiques". Malgré la liberté dans le choix de  $p$ , les pondérations intéressantes ne sont guère que les fonctions adjointes et la fonction unité.

Notons que l'on a introduit deux définitions pour le facteur de multiplication :  $k(p)$  et  $k'(p)$ . De ces deux,  $k(p)$  est le véritable facteur de multiplication du problème, puisqu'il est basé sur le taux instantané de production donné par l'opérateur  $S$ . Mais dans la littérature, le facteur de multiplication habituellement utilisé est l'équivalent de  $k'(p)$ , c'est-à-dire qu'il est basé sur l'opérateur  $S_0$  qui est caractéristique de l'équation de bilan ST.

On signale en passant que les facteurs d'utilisation thermique classiques sont basés sur la structure fine  $\psi_g$  en milieu infini, tandis que la véritable structure fine est la solution de l'équation DT. La différence entre les deux est d'autant plus grande que la taille critique du réseau est plus petite.

On passe maintenant à la théorie principale du rapport. Les paramètres qui viennent d'être définis d'une manière générale seront redéfinis plus précisément en introduisant explicitement le laplacien du milieu. En l'occurrence, on donnera des expressions explicites pour le flux en phase  $\psi$  et pour les aires de migration anisotropes.

### III - POSITION DU PROBLEME

L'étude détaillée du réseau fini doit tenir compte des effets de frontière, ce qui est nécessaire pour associer un laplacien au milieu. On s'intéresse dans ce rapport seulement à la solution asymptotique, non polluée par les solutions spatiales transitoires près de la frontière. On considère donc un réseau infini dans lequel la population neutronique a une distribution spatiale macroscopique de la forme  $\exp(i\vec{R}\cdot\vec{r})$  où le vecteur de laplacien  $\vec{B}$  est arbitrairement orienté par rapport à la géométrie du réseau.

Le flux en phase  $F_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)$  est exprimé sous la forme

$$F_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) = \psi_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) \exp(-\alpha_{\vec{B}} t) \quad (17)$$

L'équation de bilan s'écrivant

$$H\psi_{\vec{B}} = \frac{\alpha_{\vec{B}}}{v} \psi_{\vec{B}} \quad (18)$$

L'opérateur  $H$  étant défini par

$$H = L - \left[ S_p + \sum_I S_i(\alpha_{\vec{B}}) \right]; S_i(\alpha_{\vec{B}}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \alpha_{\vec{B}}} S_{i0} \text{ pour } \alpha_{\vec{B}} < \lambda_i \quad (19)$$

$H$  étant une fonction de  $\alpha_{\vec{B}}$ , l'équation (18) n'est pas une équation habituelle à valeur propre. Néanmoins, on la résoudra pour un réseau fictif dans lequel des gains dus aux neutrons retardés sont donnés par les opérateurs  $S_i(c_0)$  où  $c_0$  est une constante arbitraire. La solution ainsi obtenue se confondra avec la solution du réseau réel pour  $\alpha_{\vec{B}} = c_0$ . On peut, par conséquent, obtenir en principe la solution du réseau réel par la résolution de l'équation (18) pour diverses valeurs de  $c_0$ . La difficulté ne se rencontre pas quand il s'agit des expériences par sources pulsées de neutrons, puisque dans l'étude de la décroissance des neutrons prompts les  $S_i$  sont tous nuls et pour des réseaux non-multiplicateurs  $H = L$ .

Dans le traitement qui suit, les opérateurs, les flux en phase, et les paramètres sont tous en fonction d'une constante arbitraire  $c_0$  et les vraies solutions pour un  $\alpha_{\vec{B}}$  donné sont celles qui sont obtenues avec  $c_0 = \alpha_{\vec{B}}$ .

### IV - PRESENTATION DE LA THEORIE

Considérons d'abord le cas  $\vec{B} = 0$ , dont la solution est présumée connue et prise comme référence. Les équations de bilan sont

$$H\psi_0 = \frac{\alpha_0}{v} \psi_0; H^+\psi_0^+ = \frac{\alpha_0}{v} \psi_0^+ \quad (20)$$

La solution pour  $\vec{B} \neq 0$  est exprimée en fonction de cette référence. L'équation de bilan pour le cas  $\vec{B} \neq 0$  s'écrit

$$H\psi_{\vec{B}} = \frac{\alpha_{\vec{B}}}{v} \psi_{\vec{B}} \quad (21)$$

On exprime  $\psi_{\vec{B}}$  sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) &= f_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) \exp(i\vec{B}\cdot\vec{r}) \\ f_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) &= g_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) + ih_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

$g_{\vec{B}}$  et  $h_{\vec{B}}$  étant des fonctions périodiques sans courbure macroscopique, qui ont la périodicité du réseau dans le plan transversal et qui sont uniformes dans la direction axiale du réseau.

Étant donné que

$$H\psi_{\vec{B}} = \exp(i\vec{B}\cdot\vec{r}) \left[ H + i\vec{\Omega}\cdot\vec{B} \right] f_{\vec{B}} \quad (23)$$

l'équation de bilan pour  $f_{\vec{B}}$  s'écrit

$$\Lambda f_{\vec{B}} = \frac{\gamma_{\vec{B}}}{v} f_{\vec{B}} - i\vec{\Omega}\cdot\vec{B} f_{\vec{B}} \quad (24)$$

où l'on a posé

$$\Lambda = H - \frac{\alpha_0}{v}; \gamma_{\vec{B}} = \alpha_{\vec{B}} - \alpha_0 \quad (25)$$

L'opérateur  $\Lambda$  étant réel, on a la relation

$$\int (\psi_0^+ \Lambda f_{\vec{B}} - f_{\vec{B}} \Lambda^+ \psi_0^+) d\tau = 0 \quad (26)$$

le domaine de  $\tau$  s'étendant sur toutes les directions, toutes les vitesses et sur le volume d'une cellule élémentaire.

En utilisant l'équation (26) dans l'équation (24), on obtient

$$\gamma_{\vec{B}} \int \psi_0^+ \frac{1}{v} f_{\vec{B}} d\tau = i\vec{B}\cdot \int \psi_0^+ \vec{\Omega} f_{\vec{B}} d\tau \quad (27)$$

Pour obtenir  $f_{\vec{B}}$ , on écrit l'équation (24) sous la forme

$$\Lambda f_{\vec{B}} = Qf_{\vec{B}} \quad \text{où} \quad Qf_{\vec{B}} = \frac{\gamma_{\vec{B}}}{v} f_{\vec{B}} - i\vec{\Omega}\cdot\vec{B} f_{\vec{B}} \quad (28)$$

Physiquement, l'opérateur  $\Lambda$  représente un réseau infini critique, puisque  $\Lambda \psi_0 = 0$ . Dans l'équation (28),  $Q f_{\vec{B}}$  représente une source indépendante du temps qui, dans ce réseau, donne le flux en phase  $f_{\vec{B}}$  qui est indépendant du temps. L'équation (27) exprime le fait que la source  $Q f_{\vec{B}}$  multipliée par la fonction d'importance  $\psi_0^+$  donne une intégrale nulle. Exprimons  $f_{\vec{B}}$  sous la forme d'une série de LIOUVILLE-NEUMANN :

$$f_{\vec{B}} = \psi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots \quad (29)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \xi_1 = Q \psi_0 \\ \Lambda \xi_{j+1} = Q \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (30)$$

En ce qui concerne ces équations (30), on note les faits suivants :

a) En général, les sources  $Q \psi_0$  et  $Q \xi_j$  n'engendreront pas nécessairement des flux indépendants du temps dans le réseau critique ; en d'autres termes, les équations (30) ne donneront pas nécessairement des solutions physiquement réalisables. Néanmoins, du fait que le développement entier (29) est stable dans le temps, les dépendances temporelles des  $\xi_j$  s'annulent dans la somme.

b) Si l'une quelconque des sources  $Q \xi_j$  engendre une solution physique stable, disons, la solution générale mathématique de l'équation  $\Lambda \xi_{j+1} = Q \xi_j$  est donnée par  $\xi_{j+1} = \xi_j + n \psi_0$ , où  $n$  est une constante arbitraire.

Considérons maintenant des formes particulières pour  $\gamma_{\vec{B}}$  et  $f_{\vec{B}}$  exprimées en coordonnées cartésiennes, avec les axes des coordonnées parallèles aux trois directions principales  $k$  du réseau. Du fait que  $\alpha_{\vec{B}}$  est invariant par rapport aux réflexions du système physique dans les plans des coordonnées, on peut développer  $\gamma_{\vec{B}}$  en puissances paires des  $B_k$ , où  $B_k$  est la composante de  $\vec{B}$  dans la direction  $k$ .

$$\gamma_{\vec{B}} = \sum_k \omega_k B_k^2 + \sum_k c_k B_k^4 + \sum_{k \neq k'} c_{kk'} B_k^2 B_{k'}^2 + \dots \quad (31)$$

En introduisant ce développement dans les équations (30) on écrit leurs solutions formelles ne perdant pas de vue les remarques faites dans (a) ci-dessus. On groupe les coefficients des diverses puissances des  $B_k$  pour obtenir le développement complet de  $f_{\vec{B}}$  qui donne explicitement sa dépendance en fonction du laplacien

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\vec{B}} = \psi_0 + \sum_k B_k^2 E_{2k} - \sum_{k \neq k'} B_k B_{k'} E_{kk'} + \dots \\ h_{\vec{B}} = - \sum_k B_k E_k + \dots \end{array} \right. \quad (32)$$

où les  $E_k, E_{2k}$  etc... sont les solutions des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda E_k = \Omega_k \psi_0 \\ \Lambda E_{2k} = \frac{\omega_k \psi_0}{v} - \Omega_k E_k \\ \Lambda E_{kk'} = \Omega_k E_{k'} + \Omega_{k'} E_k, \quad \text{etc} \end{array} \right. \quad (33)$$

Or, le développement (32) étant valable pour n'importe quel vecteur  $\vec{B}$ , chacune des quantités  $E_k, E_{2k}$  etc. représente des flux en phase qui sont stables, et les équations (33) représentent par conséquent des systèmes physiquement réalisables. D'après les remarques faites dans (b) ci-dessus, les solutions générales pour  $E_k, E_{2k}$  etc. contiennent des termes additifs de la forme  $n \psi_0$ .

Ayant obtenu les expressions couplées (31) et (32), on les introduit dans l'équation (27) et l'on égalise les coefficients des diverses puissances des  $B_k$  de part et d'autre du signe d'égalité, obtenant ainsi des expressions explicites pour les divers coefficients  $\omega_k, c_k$  etc. En particulier les termes en  $B_k^2$  donnent l'expression suivante pour  $\omega_k$  :

$$\omega_k \int \psi_0^+ \frac{1}{v} \psi_0 d\tau = \int \psi_0^+ \Omega_k \Gamma(\Omega_k \psi_0) d\tau \quad (34)$$

où  $\Gamma(\Omega_k \psi_0)$  est une forme symbolique pour la solution  $E_k$  de l'équation  $\Lambda E_k = \Omega_k \psi_0$ . Notons que l'équation (34) veut dire que la source qui engendre  $E_{2k}$  (terme en  $B_k^2$ ) est telle que son intégrale, pondérée par  $\psi_0^+$ , est nulle. Le terme additif  $n \psi_0$  n'apporte aucune contribution au membre de droite de l'équation (34) puisque  $\int \psi_0^+ \Omega_k \psi_0 d\tau = 0$ . Cette dernière remarque implique en particulier qu'un calcul utilisant des perturbations de premier ordre donnerait  $\gamma_{\vec{B}} = 0$ .

Il faut remarquer que les termes additifs  $n \psi_0$  traduisent le fait que, dans le réseau critique représenté par  $\Lambda$ , on peut maintenir la distribution  $\psi_0$  sans l'aide d'une source externe. Néanmoins, ces termes ne font pas partie du flux  $f_{\vec{B}}$ . Leur présence d'une part ne permet pas à l'équation (28) d'être vérifiée, et d'autre part conduit à une fausse valeur pour  $\gamma_{\vec{B}}$ . Bien que ces termes n'influent pas sur le membre de droite de l'équation (27), ils modifient le terme de gauche.

On a vu que les  $\omega_k$  ne sont pas affectés, les erreurs se feront sentir sur les termes d'ordre supérieur.

Les définitions des autres paramètres cinétiques sont immédiates. Multiplions l'équation de bilan pour  $\psi_0$  par une fonction de pondération  $p_0(r, v, \vec{n})$  quelconque, qui est périodique sans courbure macroscopique et intégrons le résultat sur le domaine  $\tau$ . La fonction  $p_0$  peut être par exemple l'un des flux adjoints  $\psi_0^+$  ou  $\psi_{s0}^+$ , le deuxième étant le flux adjoint de l'équation ST.

On obtient :

$$\alpha_0 = - \frac{1}{l_0} (k_{\infty} - 1) \quad (35)$$

où

$$l_0 = \frac{\int p_0 \frac{1}{v} \psi_0 d\tau}{\int p_0 L \psi_0 d\tau} ; \quad k_{\infty} = \frac{\int p_0 S \psi_0 d\tau}{\int p_0 L \psi_0 d\tau} \quad (36)$$

Notons que  $\alpha_0$  est tout à fait indépendant de la fonction  $p_0$  utilisée. Le terme de fuite n'apporte aucune contribution à  $\int p_0 L \psi_0 d\tau$ . C'est également le cas avec le terme donnant les pertes nettes par diffusion si  $p_0$  ne dépend que de  $\vec{r}$ .

La valeur propre  $\alpha_{\vec{B}}$  s'exprime comme suit :

$$\alpha_{\vec{B}} = - \frac{1}{l_0} (k_{\infty} - 1) + \gamma_{\vec{B}} = - \frac{1}{l_0} (k_{\text{eff}} - 1) \quad (37)$$

où

$$l = \frac{l_0}{1 + l_0 \gamma_{\vec{B}}} ; \quad k_{\text{eff}} = \frac{k_{\infty}}{1 + l_0 \gamma_{\vec{B}}} \quad (38)$$

On peut voir que  $l_{0k}$  est l'aire de migration associée à la direction  $k$ , les termes  $l_{0k} B_k^4$  etc. étant des termes d'ordre supérieur.

L'équation pour la réactivité  $\rho$  s'écrit :

$$\rho = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} = \frac{1}{1+T} = \frac{1}{Tk_{\text{eff}}} = \frac{l_0}{Tk_{\infty}} \quad (39)$$

où les paramètres sont calculés à  $c_0 = -1/T = \alpha_{\vec{B}}$ . En définissant

$$\beta_{i,\text{eff}} = \frac{\int p_0 S_{i0} \psi_0 d\tau}{\int p_0 S_0 \psi_0 d\tau} ; k'_{\infty} = \frac{\int p_0 S_0 \psi_0 d\tau}{\int p_0 L \psi_0 d\tau} \quad (40)$$

on obtient la relation suivante entre  $k_{\infty}$  et  $k'_{\infty}$  et par conséquent entre  $k_{\text{eff}}$  et  $k'_{\text{eff}}$  :

$$\frac{k_{\text{eff}}}{k'_{\text{eff}}} = \frac{k}{k'_{\infty}} = 1 - \sum_i \frac{\beta_{i,\text{eff}}}{1 + \lambda_i T} \quad (41)$$

d'où

$$\rho' = \frac{k'_{\text{eff}} - 1}{k'_{\text{eff}}} = \frac{1}{Tk'_{\text{eff}}} + \sum_i \frac{\beta_{i,\text{eff}}}{1 + \lambda_i T} \quad (42)$$

Les  $\beta_{i,\text{eff}}$  se réduisent aux  $\beta_i$  réels dans les conditions définies dans la section II.

## V - QUELQUES REMARQUES SUR LES RESULTATS OBTENUS

a) Quand les neutrons retardés jouent un rôle dans le bilan neutronique, les paramètres  $l_0$ ,  $k_{\infty}$  (ou  $k'_{\infty}$ ),  $w_k$  etc. ne peuvent pas, strictement parlant, être déterminés une fois pour toutes. Pour chaque valeur de  $\alpha_{\vec{B}}$ , ils doivent être déterminés pour  $c_0 = \alpha_{\vec{B}}$ . Il faut bien remarquer néanmoins que cette variation provient de la période et non pas du laplacien.

b) Les fonctions périodiques dans les expressions pour  $g_{\vec{B}}$  et  $h_{\vec{B}}$  données dans l'équation (32) sont des flux en phase engendrés par diverses "sources" périodiques dans le réseau infini critique représenté par l'opérateur  $\Lambda$ . La criticité est obtenue par un empoisonnement uniforme en  $1/v$ ,  $\Sigma_a'(\vec{r}, v) = -\frac{\alpha_0}{v}$  et non par un changement de  $v$ . Les "sources" qui engendrent les flux stables sont telles que leurs intégrales sur  $\tau$ , avec une pondération par la fonction d'importance  $\psi_0^+$ , sont nulles.

Ces fonctions périodiques appartiennent à diverses catégories de symétrie. Une étude brève de ces symétries est présentée dans l'annexe I.

c) Si l'on compare l'expression pour  $w_k$  donnée dans l'équation (34) avec l'expression pour le coefficient de diffusion anisotrope obtenue par BENOIST [6], on voit d'une part l'apparition d'une fonction adjointe et d'autre part la disparition de ce qu'il appelle le "terme d'absorption". Néanmoins, si l'on ne s'intéresse qu'à la probabilité non pondérée de fuite,  $Z_{\vec{B}}$ , comme l'a fait BENOIST, on obtient une expression analogue à la sienne. On définit :

$$Z_{\vec{B}} \int \frac{1}{v} \psi_{\vec{B}} d\tau = \int \text{div } \vec{\Omega} \psi_{\vec{B}} d\tau \quad (43)$$

On développe  $Z_{\vec{B}}$  en puissances paires des  $B_k$

$$Z_{\vec{B}} = \sum_k w_k B_k^2 + \dots \quad (44)$$

d'où

$$w_k \int \frac{1}{v} \psi_0 d\tau = \int \text{div } \rho_k \vec{\Omega} \Gamma(\Omega_k \psi_0) d\tau = \int \Omega_k \Gamma(\Omega_k \psi_0) d\tau + \int \rho_k \text{div } \vec{\Omega} \Gamma(\Omega_k \psi_0) d\tau \quad (45)$$

où  $\vec{\rho}$  est le vecteur de position par rapport au centre de la cellule élémentaire. L'opérateur  $\Gamma$  mis à part, la forme de  $w_k$  est la même que celle obtenue par BENOIST.

La différence entre  $\gamma_{\vec{B}}$  et  $Z_{\vec{B}}$  traduit le fait qu'une courbure macroscopique n'introduit pas seulement des fuites en supplément, mais modifie également la probabilité moyenne de disparition d'un neutron par l'effet combiné des autres phénomènes. Dans les réseaux usuels, cette différence ne doit pas être importante.

Une méthode d'étude de l'anisotropie, qui est à quelques points de vue analogue à celle utilisée dans ce rapport, a été employée par BEHRENS et OLDEKOP [8] pour l'étude des aires de migration anisotrope. Ils utilisent l'approximation de diffusion multigroupe et l'équation de bilan ST. Leur valeur propre étant le facteur de multiplication effective (statique), leur méthode n'est pas applicable aux réseaux non-multiplicateurs. Une brève étude de l'anisotropie, en partant de l'équation de bilan ST en théorie du transport, est donnée dans l'annexe II.

## VI - CONCLUSIONS

L'ensemble des paramètres définis englobe à la fois les expériences faites autour du point critique et les expériences par sources pulsées de neutrons, qu'elles soient sur milieu multiplicateur ou non-multiplicateur. La recherche de l'expression pour la constante de variation temporelle en fonction du laplacien a permis d'exprimer les paramètres en milieu fini en fonction des solutions relatives à un laplacien nul, avec des intégrales qui ne portent que sur le volume d'une seule cellule élémentaire. Avec ces formules, il n'y a pas d'intégration sur l'espace quand il s'agit des milieux homogènes.

L'introduction des fonctions de pondération  $p$  ou  $p_0$  fait qu'il est difficile d'associer un sens physique aux paramètres, mis à part les valeurs propres. Normalement, quand on parle de vie moyenne, facteur de multiplication, etc., on pense aux bilans de neutrons réels, ce qui implique que la fonction de pondération doit être unité. LEWINS [5] interprète la fonction de pondération comme étant l'efficacité de réponse du système de détection. C'est une interprétation intéressante, bien que les "observables" (vie moyenne, facteur de multiplication, etc.) ne soient qu'hypothétiques, la vraie grandeur observable étant la période qui, elle, est indépendante de la pondération. La pondération par une fonction adjointe a néanmoins une utilité pratique pour les calculs, puisque, lorsque l'on n'est pas très loin du point critique, on peut approcher les flux du système DT par ceux du système ST correspondant.

Le milieu fini étudié dans ce rapport a la forme d'une plaque. Les solutions correspondant à d'autres géométries peuvent être obtenues par la superposition linéaire des solutions pour différents vecteurs  $\vec{B}$  associés à une période donnée. Par exemple, la superposition des solutions correspondant aux vecteurs  $\vec{B}$  qui sont des images mutuelles dans les plans des coordonnées conduit à la solution pour une géométrie parallélépipédique.

La méthode générale qui a abouti aux expressions pour le flux en phase et la période peut également être employée pour l'étude des expériences exponentielles sur des réseaux infinis non-divergents. Ce problème est étudié dans l'annexe III. Dans les annexes IV et V, on présente des méthodes approximatives pour étudier  $\alpha_0$ , la structure fine dynamique  $\psi_0$ , et les coefficients de diffusion anisotropes dans des milieux non multiplicateurs pulsés en utilisant un traitement monocinétique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WEINBERG A.M., WIGNER E.P.  
The physical theory of neutron chain reactors  
Univ. of Chicago Press, 1958
- [2] OUSSATCHEV L.N.  
Equation d'importance pour les neutrons cinétiques  
d'une pile et théorie de la perturbation  
Conférence de Genève, 1955, V, P/656
- [3] HENRY A.F.  
Application of reactor kinetics to the analysis  
of experiments. Nucl. Sc. Engng., 1958, 3, 52-70
- [4] GROSS E.E., MARABLE J.H.  
Static and dynamic multiplication factors  
and their relation to the inhour equation  
Nucl. Sc. Engng., 1960, 7, 281-291
- [5] LEWINS J.  
Importance. The adjoint function.  
Pergamon Press, 1965
- [6] BENOIST P.  
Théorie du coefficient de diffusion des neutrons  
dans un réseau comportant des cavités  
Rapport CEA-R 2278, 1964
- [7] LESLIE D.C.  
The calculation of leakage and of flux distributions  
in systems with superimposed bucklings  
Rapport AEEW-M-292, 1964
- [8] BEHRENS E., OLDEKOP W.  
Calculation of migration areas in heterogeneous reactors  
with periodic structure. Nukleonik, 1964, 6, 3
- [9] STARR E., KOPPEL J.  
Determination of diffusion hardening in water  
Nucl. Sc. Engng., 1962, 14, 224-229
- [10] AMOUYAL A., BENOIST P., HOROWITZ J.  
Nouvelle méthode de détermination du facteur  
d'utilisation thermique d'une cellule  
J. Nucl. Energy, 1957, 6, 79-98
- [11] DENIZ V.  
La structure fine dans des réseaux infinis  
multiplicateurs ou non multiplicateurs  
Rapport intérieur, 1965

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Messieurs P. BENOIST, D. BRETON, J. BUSSAC et  
M. CADILHAC qui ont fait des remarques très utiles sur le travail présenté dans ce rapport.

ANNEXE I

ETUDE BREVE DES SYMETRIES

Les divers flux en phase dans le développement de  $f_{\vec{B}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega})$  sont engendrés par l'action de l'opérateur  $\Gamma$  sur des sources qui sont périodiques dans le plan transversal, ayant la périodicité du réseau et étant uniformes dans la direction axiale. Par conséquent, le champ final possède les mêmes caractéristiques de périodicité, bien que ses propriétés de symétrie puissent être différentes.

Considérons la section transversale d'une cellule élémentaire et prenons un point  $(x_0, y_0)$  dans cette section, les coordonnées cartésiennes ayant pour origine le centre de la section. Représentons un vecteur de direction  $\vec{\Omega}$  en  $(x_0, y_0)$  par les coordonnées  $(x_0, y_0, \vec{\Omega})$ . Le type de symétrie d'un champ  $F$  donné est complètement déterminé par l'interrelation des grandeurs  $F$  correspondant aux huit vecteurs que forment  $(x_0, y_0, \vec{\Omega})$  et ses images dans les plans des coordonnées. On peut ainsi distinguer entre six types de symétrie distincts, qui sont donnés dans le tableau ci-dessous, avec un exemple de chaque.

Nomenclature du type de symétrie	Exemples	
	Champ vectoriel	Champ scalaire
I	$\vec{\Omega} \psi_0(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) \equiv \vec{W}$	$\psi_0(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) \equiv U$
$\left\{ \begin{array}{l} II_x \\ II_y \\ III_z \end{array} \right.$	$\Omega_x \vec{W}$	$\Omega_x U$
	$\Omega_y \vec{W}$	$\Omega_y U$
	$\Omega_z \vec{W}$	$\Omega_z U$
IV <sub>xy</sub>	$\Omega_x \Omega_y \vec{W}$	$\Omega_x \Omega_y U$
$\left\{ \begin{array}{l} V_{xz} \\ V_{yz} \end{array} \right.$	$\Omega_x \Omega_z \vec{W}$	$\Omega_x \Omega_z U$
	$\Omega_y \Omega_z \vec{W}$	$\Omega_y \Omega_z U$
VI <sub>xyz</sub>	$\Omega_x \Omega_y \Omega_z \vec{W}$	$\Omega_x \Omega_y \Omega_z U$

Si l'on prend un champ de départ et si l'on veut déterminer si sa symétrie change après l'action d'un ou plusieurs opérateurs, les constatations suivantes permettent de le faire :

a) le seul opérateur qui puisse effectuer un changement de symétrie est l'opérateur multiplicatif  $\Omega_k^n$  si  $n$  est impair. Pour un  $k$  donné, s'il y a plusieurs opérateurs  $\Omega_k^{n_1}, \Omega_k^{n_2}, \dots$  qui agissent en succession, le champ final sera d'un type différent de celui du départ si  $(n_1 + n_2 + \dots)$  est impair. Le changement de symétrie est indépendant de la valeur de la puissance impaire.

b) Si une succession d'opérateurs du type  $\Omega_k^n$ , avec des k différents, agissent sur un champ, l'ordre des opérateurs n'influe pas sur le résultat final en ce qui concerne le type de symétrie.

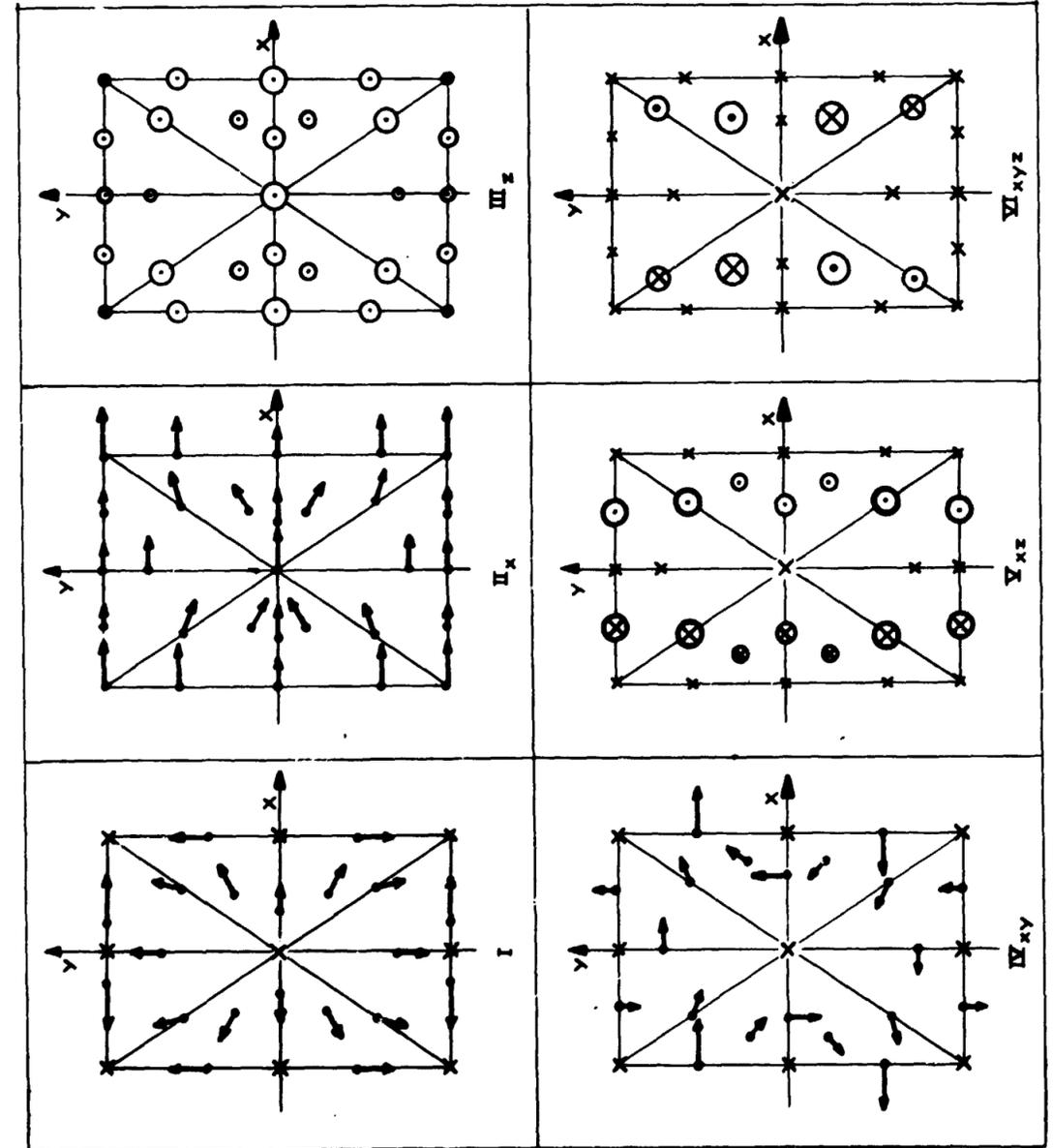
c) L'opérateur  $\vec{\Omega}$ , agissant sur un champ scalaire d'un type de symétrie donné, le transforme en un champ vectoriel du même type de symétrie.

La correspondance entre les diverses combinaisons des opérateurs  $\Omega_k$  et le type de symétrie est apparent dans le tableau ci-dessus.

Les champs qu'on vient d'étudier sont, pour une vitesse donnée, fonction de la position et de la direction. Les caractéristiques de symétrie resteront inchangées si l'on fait une intégration à chaque point sur toutes les directions. Le champ qui résulte est, pour une vitesse donnée, fonction seulement de la position et sera désigné par le symbole "champ P". Un examen des champs P permet de déterminer si le champ apporte une contribution non-nulle quand on intègre sur le volume d'une cellule élémentaire.

Pour une meilleure visualisation des diverses symétries, on donne dans la figure 1, des exemples des champs vectoriels P des divers types de symétrie.

- Figure 1 -  
Exemples des champs vectoriels "P" des diverses symétries



- Légende -

- X Vecteur impérativement nul
- Vecteur dirigé le long de +z
- ⊗ Vecteur dirigé le long de -z
- ⊙ et ⊗ Diamètre du cercle indiquant la magnitude

NOTA :

Les vecteurs indiqués parallèles aux axes, ont impérativement ces directions. Les sens et les magnitudes de tous les vecteurs sont arbitraires, aux conditions de symétrie près.



Etant donné que :

$$(II.7) \quad \int (\psi_{so}^+ \Lambda_s f_{sB} - f_{sB} \Lambda_s^+ \psi_{so}^+) d\tau = 0$$

On obtient :

$$(II.8) \quad W_{sk} \int \psi_{so}^+ S_o \psi_{so} d\tau = \int \psi_{so}^+ \Omega_k \Gamma_s (\Omega_k \psi_{so}^+) d\tau$$

En posant :

$$(II.9) \quad l_{so} \int \psi_{so}^+ L \psi_{so} d\tau = \int \psi_{so}^+ \frac{1}{v} \psi_{so} d\tau ; w_{sk} = W_{sk} \frac{k_{so}}{l_{so}} = \frac{M_{sk}^2}{l_{so}}$$

On obtient :

$$(II.10) \quad w_{sk} \int \psi_{so}^+ \frac{1}{v} \psi_{so} d\tau = \int \psi_{so}^+ \Omega_k \Gamma_s (\Omega_k \psi_{so}^+) d\tau$$

ANNEXE III

APPLICATION DE LA THEORIE DT AUX EXPERIENCES EXPONENTIELLES

La théorie qui suit est applicable aux expériences exponentielles sur des réseaux non-multiplicateurs ou des réseaux multiplicateurs qui ne divergent pas à laplacien nul.

On considère un réseau infini, un vecteur  $\vec{K}$  dont l'orientation est fixe, et un plan perpendiculaire à  $\vec{K}$  qui divise tout l'espace en deux demi-espaces. Au départ, il existe dans tout le réseau une population neutronique  $\psi_o(\vec{r}, v, \vec{\Omega})$  qui décroît avec une constante de décroissance  $\alpha_o$ , l'équation du bilan étant :

$$(III.1) \quad H\psi_o = \frac{\alpha_o}{v} \psi_o$$

A un instant donné on met dans l'un des demi-espaces une source externe de neutrons donnée par  $(\alpha_o \psi_o / v)$  et dans l'autre un poison uniforme en  $1/v$  :  $\Sigma_a'(\vec{r}, v) = (\gamma - \alpha_o) / v$ , où  $\gamma$  est une constante positive ou nulle. Au-delà d'un régime transitoire, dans l'espace et le temps, on admet qu'il existe dans le deuxième demi-espace une distribution macroscopique suivant la fonction  $\exp(-\vec{K} \cdot \vec{r})$ , où la valeur absolue de  $\vec{K}$  dépend de  $\gamma$ . Si  $\gamma = 0$ , l'addition du poison revient à mettre la source  $(\alpha_o \psi_o / v)$  également dans le deuxième demi-espace, d'où une distribution macroscopique plate dans tout l'espace, en d'autres termes, on aura  $|\vec{K}| = 0$ . Pour  $\gamma = \alpha_o$ , on aura  $\vec{K} = \vec{K}_R$ , où  $\vec{K}_R$  est lié au vecteur  $\vec{L}_R$ , représentant la longueur de relaxation du réseau non empoisonné, par la relation :

$$(III.2) \quad \vec{L}_R = \frac{1}{|\vec{K}_R|^2} \cdot \vec{K}_R$$

La composante de  $\vec{L}_R$  dans la direction principale  $k$  est la longueur de relaxation propre à cette direction. Pour d'autres valeurs de  $\gamma$  on aura  $\vec{L}' \leq \vec{L}_R$  suivant que  $\gamma \geq \alpha_o$ .

Représentons le flux en phase asymptotique dans le deuxième demi-espace par  $\psi_{\vec{K}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega})$ , l'équation de bilan étant :

$$(III.3) \quad H\psi_{\vec{K}} + \left( \frac{\gamma - \alpha_o}{v} \right) \psi_{\vec{K}} = 0$$

En cherchant une solution de la forme :

$$(III.4) \quad \psi_{\vec{K}} = f_{\vec{K}}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}) \exp(-\vec{K} \cdot \vec{r})$$

on obtient :

$$(III.5) \quad \Lambda f_{\vec{K}} = - \frac{\gamma}{v} f_{\vec{K}} + \vec{\Omega} \cdot \vec{K} f_{\vec{K}} \quad \text{où} \quad \Lambda = H - \frac{\alpha_o}{v}$$

Pour comparer cette équation avec l'équation (24) de la section IV, on introduit le vecteur  $i\vec{K}$  au lieu de  $K$ . L'équation (III.5) s'écrit :

$$(III.6) \quad \Lambda f_{i\vec{K}} = - \frac{\gamma}{v} f_{i\vec{K}} - i\vec{\Omega} \cdot (i\vec{K}) f_{i\vec{K}}$$

ce qui est de la même forme que l'équation (24) sauf que  $\vec{B}$  est remplacé par  $i\vec{K}$ . La correspondance se poursuit plus loin. Etant donné que le système est invariant par rapport aux réflexions du vecteur  $\vec{K}$  dans les plans des coordonnées, on peut développer  $\gamma$  en puissances paires des  $i\vec{K}_k$  :

$$(III.7) \quad \gamma = - \sum_k u_k (iK_k)^2 + \sum_k e_k (iK_k)^4 + \sum_{k \neq k'} e_{kk'} (iK_k)^2 (iK_{k'})^2 + \dots$$

Cette expression vérifie la condition  $\gamma = 0$  quand  $\vec{K} = 0$ . Le flux  $f_{i\vec{K}}$  peut également être exprimé sous la forme :

$$(III.8) \quad f_{i\vec{K}} = \psi_0 + \text{termes ayant les } (iK_k) \text{ en coefficient.}$$

Cette expression vérifie la condition  $f_{i\vec{K}} = \psi_0$  quand  $\vec{K} = 0$ .

La correspondance établie entre cette formulation et celle de la section IV nous permet d'écrire immédiatement :

$$(III.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{i\vec{K}} = f_{\vec{B}}, \text{ avec } \vec{B} \text{ remplacé par } i\vec{K} \\ u_k = w_k ; e_k = c_k ; e_{kk'} = c_{kk'} ; \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Pour le réseau non-empoisonné, la constante de décroissance  $\alpha_0$  équivaut à dire que le réseau a une section de disparition effective en  $1/v$  donné par  $\Sigma_{aR}(\vec{r}, v) = \alpha_0/v$ . Pour le réseau empoisonné, cette section effective de disparition devient  $\Sigma_{a, \text{eff}}(\vec{r}, v) = \Sigma_{aR}(\vec{r}, v) + \Sigma_a(\vec{r}, v) = \gamma/v$ , en d'autres termes  $1/\gamma$  est la vie moyenne effective  $l_{\text{eff}}$  des neutrons dans le réseau empoisonné. La relation entre cette vie moyenne et la longueur de relaxation est :

$$(III.10) \quad \frac{1}{l_{\text{eff}}} = - \sum_k w_k (iK_k)^2 + \sum_k c_k (iK_k)^4 + \sum_{k \neq k'} c_{kk'} (iK_k)^2 (iK_{k'})^2 + \dots$$

En conclusion, on constate que les expériences exponentielles sur des milieux uniformément empoisonnés avec un poison en  $1/v$  constituent le moyen de continuer analytiquement les courbes de  $\alpha_{\vec{B}}$  en fonction de  $\vec{B}$  vers des valeurs imaginaires de  $\vec{B}$ , et par conséquent ces expériences fournissent un moyen indépendant de déterminer les coefficients  $w_k, c_k$  etc. Des expériences de ce genre ont été faites sur l'eau légère par STARR et KOPPEL [9].

#### ANNEXE IV

##### $\alpha_0$ ET LA STRUCTURE FINE DYNAMIQUE

On donne ci-dessous une méthode approximative à un groupe, qui est basée sur l'interprétation physique du terme  $(\alpha_0 \psi_0/v)$  dans l'équation de bilan  $H\psi_0 = \alpha_0 \psi_0/v$  comme une source qui rend le système critique.

Considérons le cas  $\alpha_0 > 0$ , et remplaçons la source  $(\alpha_0 \psi_0/v)$  par des sources constantes et isotropes dans chaque milieu, et égales à  $(\alpha_0 \bar{\phi}_i/v)$  où  $\bar{\phi}_i$  est le flux moyen du milieu  $i$  et  $\bar{v}$  est la vitesse moyenne des neutrons.

Soit  $U_{ij}$  le flux moyen engendré dans le milieu  $j$  par une source uniforme et isotrope de  $1 \text{ n/cm}^3/\text{s}$  dans le milieu  $i$ . Les  $U_{ij}$  sont calculés sans tenir compte des neutrons de fission mais en incorporant la section efficace de fission dans celle d'absorption du corps fissile. Représentons par  $U_{ij}^*$  les flux moyens qu'on obtiendrait en tenant compte des neutrons de fission. Les  $U_{ij}^*$  sont liés aux  $U_{ij}$  par la relation suivante :

$$(IV.1) \quad U_{ij}^* = U_{ij} + U_{iu}^* \Sigma_f v \rho C \frac{v_u}{v_m} U_{mj}$$

les indices  $u$  et  $m$  représentant respectivement le corps fissile et le modérateur. Le facteur  $C$  est lié à la constante arbitraire  $c_0$  par la relation :

$$(IV.2) \quad C = 1 + \sum_i \frac{c_0}{\lambda_i - c_0} \beta_i$$

L'expression pour  $U_{iu}^*$  est obtenue en mettant  $j = u$  dans l'équation (IV.1). Les  $U_{ij}$  peuvent être calculés par une extension directe de la méthode développée par AMOUYAL, BENOIST et HOROWITZ [10]. Cette extension ne sera pas présentée dans ce rapport ; les détails sont donnés dans un autre rapport par DENIZ [11].

Connaissant les  $U_{ij}^*$ , on résout ensuite le système des équations :

$$(IV.3) \quad \bar{\phi}_j = \frac{\alpha_0}{\bar{v}} \sum_i \bar{\phi}_i U_{ij}^* ; j = u, m, \dots$$

d'où l'on obtient  $\alpha_0$  comme solution du déterminant :

$$(IV.4) \quad (U_{ij}^* - \frac{\bar{v}}{\alpha_0} \delta_{ij}) = 0$$

et la structure fine dynamique en introduisant dans l'équation (IV.3) la valeur de  $\alpha_0$  ainsi obtenue.

Si  $\alpha_0 < 0$ , ce qui est le cas dans les milieux multiplicateurs usuels, on ne peut pas appliquer directement cette méthode puisque les sources sont négatives. On procède de la façon suivante :

On calcule une valeur approximative de  $|\alpha_0|$  égale à  $\alpha'_0$  à laquelle on ajoute une constante arbitraire  $\delta' > 0$ . Si l'on empoisonne le réseau uniformément par un absorbant en  $1/v$  correspondant à  $\Sigma'_a(\vec{r}, v) = (\alpha'_0 + \delta')/v$ , la structure fine restera inchangée mais la population neutronique décroîtra exponentiellement avec une constante de décroissance  $\delta$ . Cette considération n'est pas limitée au cas monocinétique, elle est valable en toute généralité.

On peut par conséquent étudier par la méthode décrite plus haut, le réseau fictivement empoisonné. On obtient ainsi la structure fine et une constante de décroissance  $\delta$ . La valeur de  $|\alpha_0|$  sera donnée par l'équation :

$$(IV.5) \quad |\alpha_0| = \alpha'_0 + (\delta' - \delta)$$

ANNEXE V

COEFFICIENTS DE DIFFUSION D'UN RESEAU NON MULTIPLICATEUR

On développe ici une méthode approximative à un groupe pour le calcul de  $w_k$ , qui sera représenté par  $D_{ok}$ , puisqu'il est ici le coefficient de diffusion associé à la direction  $k$ . L'équation pour  $D_{ok}$  s'écrit :

$$(V.1) \quad \frac{D_{ok}}{\bar{v}} \int_{V_{cell}} dV \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega} \psi_0^+ \psi_0 = \int_{cell} dV \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega} \psi_0^+ \Omega_k \Gamma(\Omega_k \psi_0)$$

Comme l'a fait BENOIST [6], on exprime le terme à droite comme fonction de certaines probabilités de transport  $P_{ij,k}^{(i)}$ . Considérons le flux en phase  $f_k^{(i)}(\vec{r}, \vec{\Omega})$  engendré, dans le réseau infini représenté par l'opérateur  $\Gamma$ , par la source  $\Omega_k \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) \delta_i$ , où  $\delta_i$  est égale à un dans le milieu  $i$  et nulle dans les autres. L'équation de bilan s'écrit :

$$(V.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{\Omega} f_k^{(i)}(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \tilde{\Sigma}_{tot}(\vec{r}) f_k^{(i)}(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) f_k^{(i)}(\vec{r}, \vec{\Omega}') = \Omega_k \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) \delta_i \\ \text{où } \tilde{\Sigma}_{tot}(\vec{r}) = \Sigma_a(\vec{r}) + \Sigma_s(\vec{r}) - \frac{\alpha_0}{\bar{v}} \end{array} \right.$$

L'intégration de l'équation (V.2) sur  $\Omega_k d\vec{\Omega}$  conduit à :

$$(V.3) \quad \text{div } \vec{g}_{1k}^{(i)}(\vec{r}) + \tilde{\Sigma}_{tr}(\vec{r}) j_{1k}^{(i)}(\vec{r}) = \delta_i \int_{(4\pi)} \Omega_k^2 \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$$

avec :

$$(V.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Sigma}_{tr} = \tilde{\Sigma}_{tot} - \bar{\mu} \Sigma_s \\ \vec{g}_{1k}^{(i)}(\vec{r}) = \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \Omega_k f_k^{(i)}(\vec{r}, \vec{\Omega}) \\ j_{1k}^{(i)}(\vec{r}) = \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega} \Omega_k f_k^{(i)}(\vec{r}, \vec{\Omega}) \end{array} \right.$$

Posons :

$$\int_{V_i} dV \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega} \Omega_k^2 \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$$

$$(V.5) \quad R_k^{(i)} = \frac{\int_{V_i} dV \int_{(4\pi)} d\vec{\Omega} \Omega_k^2 \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})}{V_i \bar{\phi}_i} ; \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{1}{\tilde{\Sigma}_{tr,i}}$$

$\bar{\phi}_i$  étant le flux moyen défini dans l'annexe IV. Dans le cas où  $\psi_0$  est considéré comme étant isotrope  $R_k^{(i)} = 1/3$ .

L'intégration de l'équation (V.3) sur le volume du milieu j conduit à :

$$(V.6) \quad P_{ij,k}^* + P_{ij,k}^* = \delta_{ij}$$

où

$$(V.7) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{ij,k}^* &= \frac{1}{V_i \tilde{\lambda}_i R_k^{(i)}} \int_{V_j} dV \operatorname{div} \vec{g}_{1k}^{(i)}(\vec{r}) \\ P_{ij,k}^* &= \frac{1}{V_i \tilde{\lambda}_i R_k^{(i)} \tilde{\lambda}_j} \int_{V_j} dV j_{1k}^{(i)}(\vec{r}) \end{aligned} \right.$$

En sommant l'équation (V.6) sur tous les milieux j d'une cellule élémentaire, on obtient :

$$(V.8) \quad \sum_j P_{ij,k}^* = 0 \quad ; \quad \sum_j P_{ij,k}^* = 1$$

Admettons que le flux  $\psi_0$  est uniforme et isotrope dans chaque milieu. Il s'ensuit que :

$$(V.9) \quad V_i \tilde{\lambda}_j P_{ij,k}^* = V_j \tilde{\lambda}_i P_{ji,k}^*$$

En faisant l'approximation de remplacer  $\psi_0^+(\vec{r}, \vec{\Omega})$  en un point du milieu j par sa valeur moyenne  $\tilde{\psi}_j^+$  dans le milieu, on obtient :

$$(V.10) \quad \frac{3D_{ok}}{\bar{v}} = \frac{\sum_i \sum_j V_i \tilde{\psi}_i^+ \tilde{\lambda}_j P_{ij,k}^*}{\sum_i V_i \tilde{\psi}_i^+}$$

On peut vérifier en écrivant les équations de bilan pour  $\psi_0$  et  $\psi_0^+$ , et en utilisant la propriété  $\sum_{\vec{g}}(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \sum_{\vec{g}}(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')$  que  $\psi_0^+(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_0(\vec{r}, -\vec{\Omega})$ , d'où l'on obtient :

$$(V.11) \quad \frac{\tilde{\psi}_i^+}{\tilde{\psi}_j^+} = \frac{\tilde{\psi}_i}{\tilde{\psi}_j} \quad \text{pour tout } i \text{ et } j$$

Finalement, en utilisant la deuxième des équations (V.8) et les équations (V.9) et (V.11), l'expression pour  $D_{ok}$  donnée dans l'équation (V.10) peut se développer sous la forme suivante :

$$(V.12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{D_{ok}/\bar{v}}{\tilde{\lambda}_m/3} \right) \left[ \frac{1}{\tilde{\psi}_m} \frac{\sum_i V_i \tilde{\psi}_i^2}{\sum_i V_i \tilde{\psi}_i} \right] = 1 + \frac{\tilde{\psi}_m}{\tilde{\psi}_t} \left\{ \sum_{i \neq m} \frac{V_i}{V_t} \left( \frac{\tilde{\psi}_i}{\tilde{\psi}_m} - \frac{\tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}_i} \right) + \sum_{i \neq m} \sum_{j \leq i \neq m} (2 - \delta_{ij}) Y_{ij,k} \right\} \\ &\text{où } V_t \tilde{\psi}_t = \sum_i V_i \tilde{\psi}_i \quad ; \quad V_t = \sum_i V_i \\ &Y_{ij,k} = \frac{V_i}{V_t} \cdot \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_m} \cdot P_{ij,k}^* \cdot \left( \frac{\tilde{\psi}_i}{\tilde{\psi}_m} - \frac{\tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}_i} \right) \left( \frac{\tilde{\psi}_j}{\tilde{\psi}_m} - \frac{\tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}_j} \right) \end{aligned} \right.$$

L'indice m représente l'un des milieux, par exemple le modérateur. Les probabilités de transport  $P_{ij,k}^*$  peuvent être déterminées par des méthodes analogues à celles utilisées par BENOIST<sup>ij,k</sup> [6].

Les coefficients de diffusion d'un réseau multiplicateur peuvent être obtenus par la même formule. Ceci est dû au fait que les  $\omega_k$  calculés en mettant  $v = 0$  s'identifient avec les  $D_{ok}$  du réseau multiplicateur.

Manuscrit reçu le 12 septembre 1966