CEA-R-3534 (I)

9.0

CEA-R-3534 (I)

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

ANALYSE BINAIRE

1ère partie

DEFINITIONS ET TRAITEMENTS DES FONCTIONS BINAIRES

par

René-Louis VALLEE

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA-R-3534 (I)

1968

Ea

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N-SACLAY B.P. n°2, 91-GIF-sur-YVETTE-France

CEA-R-3534 (1) - VALLEE René-Louis

ANALYSE BINAIRE - 1ère partie
DEFINITIONS ET TRAITEMENT DES FONCTIONS BINAIRES

Sommaire. - L'analyse binaire a pour objet l'étude mathématique des propriétés d'ensembles binaires algébriques et pour but l'élaboration de méthodes simples, rigoureuses et pratiques, destinées aux techniciens, aux ingénieurs et à tous ceux qu'intéresse directement le traitement numérique de l'information, discipline en expansion rapide qui, déjà, en électronique nucléaire comme dans de nombreux autres domaines de la recherche, tend à jouer un rôle essentiel sinon déterminant.

1968 51 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-R-3534 (1) - VALLEE René-Louis

BINARY ANALYSIS - 1st part
DEFINITIONS AND TREATMENT OF BINARY FUNCTIONS

Summary. - The study of binary groups under their mathematical aspects constitutes the matter of binary analysis, the purpose of which consists in developping altogether simple, rigorous and practical methods needed by the technicians, the engineers and all those who may be mainly concerned by digital processing.

This subject, fast extending if not determining, however tends actually to play a main part in nuclear electronics as well as in several other research areas.

1968 51 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cotte diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

PLAN DE CLASSIFICATION

1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS

2. BIOLOGIE ET MEDECINE

2. 1 Biologie générale
2. 2 Indicateurs nucléaires en biologie
2. 3 Médecine du travail
2. 4 Radiobiologie et Radioagronomie
2. 5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine

3. CHIMIE

3. 1 Chimie générale
3. 2 Chimie analytique
3. 3 Procédés de séparation
3. 4 Radiochimie

4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE

5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE

6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX

6. 1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux
6. 2 Effets des rayonnements sur les matériaux
6. 3 Corrosion

7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS

7. 1 Neutronique et physique des réacteurs
7. 2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité
7. 3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs

8. PHYSIQUE

8. 1 Accélérateurs
8. 2 Electricité, électronique, détection des rayonnements
8. 3 Physique des plasmas
8. 4 Physique des états condensés de la matière
8. 5 Physique corpusculaire à haute énergie
8. 6 Physique nucléaire
8. 7 Electronique quantique, lasers

9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES

10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS

10. 1 Protection sanitaire
10. 2 Contrôle des rayonnements
10. 3 Traitement des effluents

11. SEPARATION DES ISOTOPES

12. TECHNIQUES

12. 1 Mécanique des fluides - Techniques du vide
12. 2 Techniques des températures extrêmes
12. 3 Mécanique et outillage

13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE

13. 1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines
13. 2 Etudes économiques, programmes
13. 3 Divers (documentation, administration, législation, etc...)

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2 200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

The C.E.A. reports starting with n° 2 200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

- Rapport CEA-R-3534 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Département d'Electronique Générale
Service d'Instrumentation Nucléaire

ANALYSE BINAIRE

1ère partie

DEFINITIONS ET TRAITEMENTS DES FONCTIONS BINAIRES

par

René-Louis VALLEE

- Septembre 1968 -

ANALYSE BINAIRE

1ère partie

DEFINITIONS ET TRAITEMENTS DES FONCTIONS BINAIRES

INTRODUCTION

Pourquoi s'agit-il ici d'analyse binaire et non d'algèbre de " BOOLE" ?

Simplement parce qu'il sera question, dans ce qui suit, d'analyse mathématique avec pour objet l'étude des propriétés particulières des ensembles binaires.

Malgré la très large audience accordée aux algèbres de "BOOLE" et l'existence d'objectifs communs, il convenait d'éviter les confusions et les difficultés qui auraient inévitablement résulté d'un rapprochement trop hâtif avec l'analyse binaire. Les raisons sont diverses et apparaîtront clairement au cours du développement de l'étude et au travers des définitions et des théorèmes proposés.

L'analyse binaire repose sans restriction sur l'axiomatique de l'algèbre classique et permet d'établir une intéressante réciproque du théorème de "STONE", montrant que toute algèbre de "BOOLE" peut être considérée comme une forme homomorphe de l'algèbre classique.

George BOOLE lui-même, dans son ouvrage publié en 1854 et intitulé "AN INVESTIGATION OF THE LAWS OF THOUGHT", s'est servi de l'algèbre classique comme base mathématique pour l'étude de la logique. Il découvrit très vite que cette algèbre n'est pas dans sa structure, convenablement adaptée à l'utilisation visée.

Deux issues étaient alors possibles :

- modifier l'axiomatique et conserver globalement le formalisme ; ce qui a été fait par BOOLE et pratiquement tous ceux qui ont développé l'algèbre logique ou l'algèbre des propositions, comme RUSSEL ou WHITEHEAD,
- ou bien, modifier le formalisme et conserver l'axiomatique dans toute sa rigueur ; ce que fait très exactement l'analyse binaire.

Il est incontestable que la seconde voie, qui est vraiment mathématique au sens le plus strict, est plus simple, plus fructueuse et plus pratique que la première. Il est surprenant qu'elle n'ait pas été adoptée par tous ceux qu'intéressent les circuits de commutation, et que SHANNON même, ait, à l'origine, choisi de modifier l'axiomatique plutôt que le formalisme, alors que l'étude des chaînes de contacts conduit tout naturellement au second type de solution.

Ernst MACH écrivait en 1904 : "A cause de la courte durée de la vie et des limites resserrées de l'intelligence humaine, un savoir digne de ce nom ne peut être acquis que par la plus grande économie mentale".

Cette pensée est un critère de grande valeur par ses résonances profondes. S'il nous oriente vers une optimatisation des structures complexes de nos modèles, n'est-il pas nécessaire de nous y référer au niveau élémentaire des concepts, des définitions, des axiomes et des symboles qui constituent les bases fondamentales de notre connaissance ?

C'est ce critère même qui a présidé à l'élaboration de l'analyse binaire.

- Une première partie, objet du présent rapport, est consacrée aux définitions et au traitement des fonctions binaires.
- Une deuxième partie sera relative aux applications et aux fonctions explicites ou de transcodage.
- Une troisième partie traitera des fonctions récursives et des systèmes séquentiels.

Dans cette première partie, chaque chapitre est assorti d'exercices d'application simples qui en facilitent la compréhension, en relèvent l'intérêt et rompent la monotonie aride et déprimante qui souvent ressort d'un texte purement théorique.

Les bases de l'analyse binaire sont introduites en faisant appel exclusivement à l'axiomatique de l'algèbre classique. Un symbolisme bidimensionnel simple traduit le caractère de dualité inhérent à tout ensemble binaire.

Un soin particulier a été apporté au choix de la terminologie qu'il fallait rendre aussi concise, aussi claire, aussi précise que possible, en utilisant quelquefois, lorsque c'était nécessaire, des termes empruntés à l'algèbre dite "logique". Le lecteur jugera et pourra constater la richesse et l'efficacité de méthodes simples, dépouillées de tout artifice inutile susceptible d'en gêner la compréhension ou d'en alourdir l'utilisation.

Le spécialiste peut y trouver, avec un moindre effort d'assimilation, un outil mathématique sûr, rapide et pratique qui permet de pousser très loin l'investigation dans l'étude formelle des circuits de l'automatisme numérique.

Le chercheur, pour sa part, peut disposer d'une base de départ qui autorise, au delà des techniques, l'exploration aisée du vaste et passionnant domaine des systèmes de l'information que la logique élémentaire ne peut qu'effleurer et que la philosophie n'avait fait qu'entrevoir.

CHAPITRE I

DEFINITIONS

1.1. Ensembles binaires algébriques

On appelle variable ou fonction binaire, toute variable ou toute fonction ne pouvant prendre que l'une des deux valeurs algébriques distinctes $a \neq b$, à l'exclusion de toute autre.

L'Ensemble "E_{ab}" des variables et des fonctions ainsi définies est appelé ensemble binaire algébrique. Si l'élément "ϕ_{ab}" est égal à "a" lorsqu'il est différent de "b" et s'il est égal à "b" lorsqu'il est différent de "a", alors ϕ_{ab} appartient à l'ensemble "E_{ab}".

$$\phi_{ab} \in E_{ab}, \text{ si } (\phi_{ab} \neq a) \Rightarrow (\phi_{ab} = b), \quad \text{et si } (\phi_{ab} \neq b) \Rightarrow (\phi_{ab} = a)$$

1.2. Dualité des ensembles binaires algébriques

Il est possible de trouver différentes relations d'application d'un ensemble binaire E_{ab} vers un ensemble binaire $E_{\alpha\beta}$.

Les applications les plus simples consistent à faire correspondre les valeurs "a" et "b" de l'ensemble "E_{ab}" aux valeurs "α" et "β" de l'ensemble "$E_{\alpha\beta}$". Cette correspondance peut revêtir deux formes particulières associées à deux groupes différents d'implications. Ces implications conduisent respectivement aux bijections que traduisent les deux relations algébriques suivantes :

1.2.1. Première relation

$$(\phi_{ab} = a) \Leftrightarrow (\phi_{\alpha\beta} = \alpha) \; ; \quad (\phi_{ab} = b) \Leftrightarrow (\phi_{\alpha\beta} = \beta)$$

$$\boxed{(\beta - \alpha)\,(\phi_{ab} - a) = (b - a)\,(\phi_{\alpha\beta} - \alpha)}$$

1.2.2. Deuxième relation

$$(\bar{\phi}_{ab} = a) \Leftrightarrow (\phi_{\alpha\beta} = \beta) \; ; \; (\bar{\phi}_{ab} = b) \Leftrightarrow (\phi_{a\beta} = \alpha)$$

$$\boxed{(\beta - \alpha)\ (\overline{\Phi}_{ab} - b) = (a - b)\ (\Phi_{\alpha\beta} - \alpha)}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \in E_{\alpha\beta} \Longrightarrow (\Phi_{ab} \in E_{ab} \quad \text{et} \quad \overline{\Phi}_{ab} \in E_{ab})^{*}$$

L'Addition membre à membre des relations algébriques "1,21" et "1,22" fournit une relation algébrique linéaire entre les éléments de l'ensemble "E_{ab}".

$$\boxed{(\Phi_{ab} + \overline{\Phi}_{ab}) - (a + b) = O}$$

Il existe donc dans tout ensemble binaire, une relation algébrique linéaire et biunivoque qui fait correspondre deux à deux tous les éléments de l'ensemble.

Cette propriété fondamentale d'automorphisme des ensembles binaires qui résulte du rôle symétrique que jouent les valeurs algébriques a et b choisies pour leur définition en compréhension, est appelée "dualité".

On peut, en particulier, choisir pour a et b les valeurs algébriques "O" et "1". Il est en effet intéressant, afin d'utiliser le produit algébrique, de choisir pour "a" l'élément absorbant "O" et pour "b" l'élément neutre "1", de cette opération.

L'une des deux relations,

$$\left|\begin{array}{l} (b - a)\ .\ \Phi_{01} = (\Phi_{ab} - a) \\ (b - a)\ .\ (1 - \overline{\Phi}_{01}) = (\Phi_{ab} - a) \end{array}\right.$$

définit une application de l'ensemble E_{01} vers tout ensemble binaire E_{ab}**.

Pour l'ensemble E_{01}, la relation de dualité s'écrit :

$$\boxed{\Phi_{01} + \overline{\Phi}_{01} - 1 = O}$$

$\overline{\Phi}_{01} = 1 - \Phi_{01}$, est appelé complément de Φ_{01} et s'énonce "Φ_{01} barre".

---

* Chaque bijection ne fait pas correspondre au même élément $\Phi_{\alpha\beta}$ un même élément de l'ensemble "E_{ab}". C'est pourquoi deux symboles différents Φ_{ab} et $\overline{\Phi}_{ab}$ ont été utilisés.

** Ainsi se trouve établie d'une façon simple la réciproque du théorème d'isomorphisme de STONE qui révèle que toute algèbre de BOOLE n'est autre qu'une application de l'ensemble binaire algébrique E_{01} dont la définition repose sur l'axiomatique de l'algèbre classique.

Réciproquement $\Phi_{01} = 1 - \overline{\Phi}_{01}$, est le complément de $\overline{\Phi}_{01}$. La double complémentation conduit à la relation d'involution :

$$\overline{\overline{\Phi}}_{01} = 1 - (1 - \Phi_{01}) = \Phi_{01}$$

1.3. Produits binaires

Le choix de l'ensemble binaire particulier E_{01}, se justifie par l'adoption d'une valeur d'absorption "O" et d'une valeur neutre "1" qui font du produit algébrique une fonction binaire appartenant au même ensemble.

La dissymétrie introduite fournit deux possibilités de représentation qui se correspondent par dualité en permutant les valeurs "O" et "1".

1.3.1. Produit

Soient n fonctions binaires $f_1, f_2 \ldots f_n$ telles que $f_i \in E_{01}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Le produit algébrique de ces n fonctions appartient à l'ensemble E_{01}.

$$(P = f_1 \,.\, f_2 \,.\, \ldots \,.\, f_n) \in E_{01}$$

Le produit P est en effet égal à l'unité lorsque toutes les fonctions en facteur sont simultanément égales à l'unité. $(f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1) \Longleftrightarrow (P = 1)$.

Il est nul dans tous les autres cas, puisque chaque fonction en facteur ne peut prendre que la valeur "O" lorsqu'elle n'est pas égale à "1" et, que le produit est nul si un facteur au moins est nul.

Le produit "P" est habituellement appelé fonction "ET" quand il est l'objet d'applications technologiques.

1.3.2. Produel

Les définitions algébriques qui précèdent sont suffisantes en principe pour permettre le calcul et l'établissement de toutes les fonctions binaires appartenant à l'ensemble E_{01}.

Mais l'important n'est pas uniquement le choix de l'ensemble E_{01} avec ses propriétés élémentaires simplificatrices.

Il faut également choisir un symbolisme simple qui puisse traduire dans l'expression écrite, la dualité qui caractérise les ensembles binaires et qui permette, en utilisant si possible les deux dimensions du plan, l'établissement de relations duales élémentaires.

Nous savons qu'un produit s'exprime algébriquement en disposant horizontalement les facteurs :

$$f_1 \,.\, f_2 \,.\, f_3 \ldots . f_n = P$$

Nous savons aussi, par dualité, qu'il est possible de lui faire correspondre la fonction algébrique binaire.

$$\pi = 1 - (1 - f_1)\,.\,(1 - f_2) \ldots (1 - f_n) = \overline{\overline{f}_1 \,.\, \overline{f}_2 \ldots \overline{f}_n}$$

$$(f_i \in E_{01},\ \forall i = 1, 2, \ldots n) \Longleftrightarrow (\pi \in E_{01})$$

Nous constatons que la fonction π est égale à zéro lorsque toutes les fonctions f_i sont simultanément nulles.

$$(f_1 = f_2 = \ldots = f_n = O) \Longleftrightarrow (\pi = O)$$

et qu'elle est égale à l'unité dans tous les autres cas, puisqu'il suffit qu'une fonction f_i au moins soit égale à l'unité pour que le produit algébrique

$(1 - f_1) \,.\, (1 - f_2) \,\ldots\ldots\, (1 - f_n)$ soit nul, ce qui entraîne $\pi = 1$.

Nous retrouvons alors dans l'expression de la fonction π , toutes les propriétés d'un produit algébrique (commutativité, associacitivité). La seule différence qui résulte de la dualité, réside dans le fait que la valeur d'absorption se trouve être l'unité "1" et la valeur neutre "O".

Nous conviendrons alors de représenter la fonction " π ", que nous appellerons " produel " [x], en groupant les termes qui la composent suivant une colonne verticale par analogie avec l'écriture horizontale du produit et afin de traduire dans le symbolisme, la propriété de dualité.

$$\pi = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = 1 - (1 - f_1) \,.\, (1 - f_2) \ldots (1 - f_n) = \overline{\bar{f}_1 \,.\, \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_n}$$

Dans le cas des applications technologiques, nous appellerons également " π ", fonction "OU" comme à l'ordinaire.

Les termes f_1, f_2, ... f_n seront, par analogie, appelés "facteurs duals".

1.3.3. Théorème de DE MORGAN .

Ce théorème est contenu implicitement dans les définitions précédentes.

$$1 - \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = \overline{\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix}} = \bar{f}_1 \,.\, \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_n = (1 - f_1) \,.\, (1 - f_2) \ldots\ldots (1 - f_n)$$

Le complément d'un produel est égal au produit des compléments des facteurs duals qui le composent.

$$\overline{f_1 \,.\, f_2 \ldots f_n} = \begin{vmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{f}_n \end{vmatrix} = 1 - (f_1 \,.\, f_2 \ldots f_n)$$

[x] Les racines latines "pro" et "dualis" ont été choisies dans la constitution du néologisme "produel" pour marquer, d'une part, la nécessité de conserver la dualité dans les expressions binaires, et aussi par analogie avec le mot "produit".

Le complément d'un produit est égal au produel des compléments des facteurs qui le composent.

1.3.4. Correspondances duales des propriétés élémentaires

Le symbolisme proposé repose sur des bases algébriques simples et rigoureuses.

La correspondance duale biunivoque introduite par la définition du produel à partir du produit, adapte parfaitement ce symbolisme à la représentation simple de toutes les fonctions binaires.

Toute opération, tout théorème de l'analyse binaire, qui possède nécessairement le caractère de dualité, va donc se traduire dans l'écriture par deux applications possibles, absolument analogues ; l'une suivant la direction horizontale, l'autre suivant la direction verticale.

A l'exception du théorème de DE MORGAN, vu précédemment, les propriétés duales élémentaires comparées des produits et des produels sont résumées dans le tableau suivant :

Produit	Produel
$P = a.b.c.d$	$\pi = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 1 - (1-a).(1-b).(1-c).(1-d)$
- élément neutre "1" - élément absorbant "0" - le produit est commutatif et associatif	- élément neutre "0" - élément absorbant "1" - le produel est commutatif et associatif
Le produit par " 0 " de toute fonction f est nul : $(0 \,.\, f) = 0$	Le produel par "1" de toute fonction f est égal à l'unité $\begin{vmatrix} 1 \\ f \end{vmatrix} = 1$
Toute fonction multipliée par 1 reste égale à elle-même $(1 \,.\, f) = f$	Toute fonction multipliée dualement par O reste égale à elle-même $\begin{vmatrix} 0 \\ f \end{vmatrix} = f$

Théorèmes d'idempotence

Si tous les facteurs d'un produit sont égaux à un même terme, le produit est égal à ce terme ;	Si tous les facteurs duals d'un produel sont égaux à un même terme, le produel est égal à ce terme :
$P = \overbrace{a \,.\, a \ldots a}^{n} = a^n$ pour $a = 0$ $(0)^n = 0$ pour $a = 1$ $(1)^n = 1$	$\pi = \left.\begin{vmatrix} a \\ a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \end{vmatrix}\right\rbrace n = 1 - (1 - a)^n$ pour $a = 0$ $\pi = 1 - (1)^n = 0$ pour $a = 1$ $\pi = 1 - (0)^n = 1$
$\boxed{P = a^n = a}$	$\boxed{\pi = a}$

Si dans un produit, deux facteurs sont complémentaires, le produit est nul.

$$P = f \, . \, \bar{f} \, . \, P_1$$

$$P = f. \, (1-f). \, P_1 = (f - f^2). \, P_1$$

$$P = (0 \, . \, P_1) = 0$$

Si dans un produel, deux facteurs duals sont complémentaires, le produel est égal à l'unité

$$\pi = \left| \begin{matrix} \bar{f} \\ f \\ \pi_1 \end{matrix} \right| = 1 - (1 - f). \, f. \, (1 - \pi_1)$$

$$= 1 - (f - f^2) \, . \, (1 - \pi_1) = 1 - 0.(1 - \pi_1)$$

$$\pi = \left| \begin{matrix} 1 \\ \pi_1 \end{matrix} \right| = 1$$

Corollaires

Le produit de deux fonctions complémentaires est nul.

$$(f \, . \, \bar{f}) = 0$$

Le produel de deux fonctions complémentaires est égal à l'unité.

$$\left| \begin{matrix} \bar{f} \\ f \end{matrix} \right| = 1$$

1.4. Fonctions canoniques et tables de vérité

Nous allons démontrer à partir des définitions précédentes que toute fonction binaire peut s'exprimer ; soit par un produit de produels, soit par un produel de produits faisant intervenir toutes les variables directes ou complémentées. Les expressions obtenues sont appelées "formes canoniques".

Considérons en effet une fonction binaire qui dépend de "n" variables distinctes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Nous ne pouvons envisager au total que "2^n" combinaisons de valeurs distinctes (0 ou 1) de ces "n" variables. Si la fonction binaire cherchée est égale à l'unité pour "p" combinaisons particulières des valeurs de ces "n" variables, elle est nécessairement égale à zéro pour les "2^n - p" combinaisons complémentaires et nous avons dans tous les cas $p \leqslant 2^n$. Nous pouvons donc écrire la fonction sous la forme d'un produel de produits que nous appellerons, par définition, "première forme canonique".

Nous rappelons, pour mémoire, les expressions équivalentes des produits et des produels en algèbre de BOOLE .

Produit : $a \, . \, b \, . \, c = a \cap b \cap c = a \wedge b \wedge c$

produel : $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = (a + b + c) = (a \cup b \cup c) = (a \vee b \vee c)$

Malgré l'équivalence d'expression, le produel se distingue de la "somme logique" dans sa définition et son symbolisme.

$$F_1 = \left| \begin{matrix} f_1 \, (x_1, \, x_2, \, \ldots\ldots, \, x_n) \\ f_2 \, (x_1, \, x_2, \, \ldots\ldots, \, x_n) \\ ------------ \\ ------------ \\ f_p \, (x_1, \, x_2, \, \ldots\ldots, \, x_n) \end{matrix} \right|$$

Chaque fonction $f_k \, (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ de "F_1" est un produit faisant intervenir chacune des variables ou son complément. "f_k" est égale à l'unité pour une seule combinaison de valeurs des variables.

Nous en déduisons que "F_1", produel des "p" produits "f_k" est égal à l'unité pour chacune des "p" combinaisons de valeurs des variables qui correspondent successivement à la valeur unité de chacun des "p" produits. Ceci résulte des définitions précédentes.

Il est également possible d'exprimer la même fonction "F_1" par un produit de produels appelé, par définition, "deuxième forme canonique" :

$$F_1 = \left| f'_1 \, (x_1, \, x_2, \, \ldots, \, x_n) \right| . \left| f'_2 \, (x_1, \, x_2, \, \ldots\ldots, \, x_n) \right| \ldots . \left| f'_q \, (x_1, \, x_2, \ldots, \, x_n) \right|$$

Dans cette expression, le nombre "q" de produels est tel que $p + q = 2^n$. Chaque fonction "f'_k" représente un produel faisant intervenir chaque variable ou son complément. Le produel "f'_k" est nul pour une seule combinaison de valeurs des variables qui interviennent dans la fonction F_1 et par suite cette fonction "F_1" qui est le produit des produels "f'_k" sera nulle pour chacune des "q" combinaisons de valeurs des variables qui annulent successivement chacune de ces fonctions "f'_k".

Nous appellerons "transposition", le passage, pour une même fonction, de la première à la deuxième forme canonique et réciproquement. Si l'on veut établir le produit égal à l'unité pour une combinaison donnée des valeurs de "n" variables, il suffit de faire le produit des variables directes qui sont égales à "1" d'une part, et le produit des compléments des variables égales à "0" d'autre part, dans la combinaison choisie.

Prenons par exemple quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 et cherchons le produit égal à l'unité pour la combinaison $x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_4 = 1$.

Ce produit s'établit immédiatement :

$$f = x_1 \, . \, \bar{x}_2 \, . \, \bar{x}_3 \, . \, x_4$$

Pour la combinaison choisie, nous avons en effet :

$$x_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 1, \quad x_4 = 1 \quad \text{d'où} \quad f = 1$$

Pour établir le produel correspondant à une combinaison de valeurs de "n" variables, il suffit de mettre en facteur dual les variables directes qui correspondent à "0" d'une part et les compléments des variables égales à "1" d'autre part, dans la combinaison choisie.

Dans le cas, par exemple, de la combinaison de quatre variables $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, on aura :

$$f' = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right|$$

Nous obtiendrons bien dans le cas considéré :

$\bar{x}_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ et par suite $f' = 0$

Il est donc intéressant, pour établir rapidement une fonction canonique, de connaître le tableau des combinaisons de valeurs des variables qui rendent la fonction égale à zéro ou égale à l'unité.

Ce tableau est appelé, par définition "table de vérité".

1.4.1. Etablissement de la première forme canonique

Pour établir la première forme canonique (produel de produits) on peut opérer de la façon suivante :

On inscrit horizontalement les variables dans un ordre quelconque, puis on porte successivement sous ces variables, dans le sens horizontal, les combinaisons de valeurs pour lesquelles la fonction est égale à l'unité. Il suffit alors, d'après ce qui vient d'être dit, de remplacer respectivement dans le tableau obtenu, chaque valeur "1" par la variable "x_k" de la même colonne et chaque valeur "0" par le complément $\bar{x}_k$ de la variable de la même colonne.

Exemple :

Etablir la première forme canonique d'une fonction de trois variables x_1, x_2, x_3, égale à l'unité lorsque l'une des variables est égale à l'unité, les deux autres étant nulles.

La table de vérité s'écrit :

x_1	x_2	x_3	f
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

La première forme canonique s'établir immédiatement à partir de la table de vérité comme nous l'avons indiqué précédemment, et nous écrivons :

$$f = \left| \begin{array}{c} x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \end{array} \right|$$

1.4.2. Etablissement de la deuxième forme canonique.

Pour établir la deuxième forme canonique relative aux combinaisons de valeurs de "n" variables pour lesquelles cette fonction est nulle, on inscrit verticalement les variables x_1, x_2, ..., x_n dans un ordre quelconque et successivement dans le même ordre vertical, les combinaisons de valeurs pour lesquelles $f = 0$. Il suffit alors d'écrire le produit des produels obtenus en remplaçant respectivement dans ce tableau chaque valeur "0" par la variable "x_k" de la même ligne et chaque valeur "1" par le complément x_k de la variable de la même ligne.

Exemple :

Etablir la deuxième forme canonique d'une fonction de trois variables x_1, x_2, x_3, égale à zéro lorsque deux au moins des trois variables sont égales à l'unité.

La table de vérité s'écrit :

x_1	x_2	x_3	f
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous en tirons le tableau :

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

d'où la fonction cherchée :

$$f = \left| \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & x_3 & \bar{x}_3 \end{array} \right|$$

1.5. Présentation des tables de vérité

Comme nous l'avons vu, une table de vérité fait apparaître les combinaisons de valeurs des variables qui définissent une fonction binaire.

Nous allons préciser dès maintenant la présentation que nous adopterons pour les tables de vérité et les différentes formes qu'elles pourront revêtir.

1.5.1. Table de vérité complète

Nous dirons qu'une table de vérité est complète lorsqu'elle fait apparaître la totalité des "2^n" combinaisons de valeurs possibles, relatives aux "n" variables dont dépend la fonction. Nous conviendrons d'inscrire les valeurs (0 ou 1) que prend la fonction à droite d'un double trait vertical de séparation et sur la même ligne que la combinaison correspondante des valeurs des variables.

Ainsi la table de vérité complète d'une fonction de trois variables, F (a, b, c) peut s'écrire par exemple :

	a	b	c	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Il est souvent intéressant de faire figurer dans une colonne, à gauche, des repères décimaux qui correspondent aux nombres représentés par les chiffres binaires a, b et c, en plaçant ces nombres dans l'ordre naturel. Cette disposition permet, en particulier, de s'assurer qu'aucune combinaison n'a été oubliée.

Une table de vérité complète autorise, en suivant les règles énoncées précédemment, l'écriture immédiate de la fonction sous ses deux formes canoniques.

En ce qui concerne l'exemple donné, nous pouvons écrire

$$F = \left|\begin{array}{l} \bar{a} \,.\, \bar{b} \,.\, \bar{c} \\ a \,.\, \bar{b} \,.\, \bar{c} \,. \\ a \,.\, b \,.\, \bar{c} \,. \\ a \,.\, b \,.\, c \,. \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} a & a & a & \bar{a} \\ b & \bar{b} & \bar{b} & b \\ \bar{c} & c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right|$$

La première forme utilise les combinaisons pour lesquelles F = 1 , (0, 4, 6, 7) et la seconde forme les combinaisons pour lesquelles F = 0 , (1, 2, 3, 5).

1.5.2. Tables de vérité incomplètes

Une fonction binaire est entièrement définie si l'on connaît seulement les combinaisons de valeurs des variables pour lesquelles elle conserve la même valeur (0 ou 1).

Nous appellerons, par définition, table de vérité incomplète, le tableau dans lequel sont inscrites ces combinaisons. Nous préciserons à droite de ce tableau, la valeur correspondante de la fonction. Pour chaque fonction, il existe donc deux tables de vérité incomplètes.

Les deux tables de vérité incomplètes qui correspondent à la fonction précédente F (a, b, c) peuvent s'écrire suivant que l'on choisit pour "F" la valeur "0" ou la valeur "1" :

Table de vérité (F = 1)

	a	b	c	F
0	0	0	0	F = 1
4	1	0	0	
6	1	1	0	
7	1	1	1	

Table de vérité (F = 0)

	a	b	c	F
1	0	0	1	F = 0
2	0	1	0	
3	0	1	1	
5	1	0	1	

1.5.3. Tables de vérité réduites

Ce sont des tables de vérité incomplètes dans lesquelles certaines combinaisons sont groupées afin de tenir compte d'une partie ou de la totalité des adjacences qui existent entre elles. Ces adjacences étant repérées dans la table par le symbole "ϕ" qui signifie que la valeur prise par la variable peut être indifféremment "0" ou "1".

Nous pouvons tirer de l'exemple précédent différentes tables de vérités réduites, parmi lesquelles les deux suivantes :

	a	b	c	F
0-4	ϕ	0	0	1
6-7	1	1	ϕ	

	a	b	c	F
1-5	ϕ	0	1	0
2-3	0	1	ϕ	

L'adjacence, comme nous le verrons quand nous étudierons les simplifications, a pour effet de supprimer la variable biforme (directe et complémentée) dans le produit ou le produel qui résulte des combinaisons groupées. Une table de vérité réduite ne donne donc plus une forme canonique mais une forme déjà simplifiée. Dans le cas envisagé, nous tirons de la première table de vérité réduite :

$$F = \left|\begin{array}{l} \bar{b} \,.\, \bar{c} \\ a \,.\, b \end{array}\right|$$

De la seconde table de vérité réduite, nous tirons :

$$F = \left|\begin{array}{c|c} b & a \\ \bar{c} & \bar{b} \end{array}\right|$$

1.6. Transformations des formes canoniques

Nous allons examiner maintenant quelques transformations simples que peuvent subir les formes canoniques compte tenu des théorèmes déjà établis.

1.6.1. Transpositions

Nous avons appelé (1.4) transposition, le passage, pour une même fonction, de la première à la deuxième forme canonique ou réciproquement.

Pour transposer une fonction de "n" variables, mise sous forme canonique, il est recommandé d'écrire pour cette fonction, une table de vérité complète en inscrivant les "2^n" combinaisons de valeurs des variables dans un ordre binaire naturel.

Si une fonction binaire de "n" variables, mise sous la première forme canonique, contient "p" produits, elle contient nécessairement lorsqu'elle est transposée, "q" produels tels que : $p + q = 2^n$.

Il en résulte que la transposition est un moyen de simplification dans le cas où le nombre de produits ou de produels d'une fonction canonique de "n" variables est supérieur à "2^{n-1}".

1.6.2. Complémentations

L'application du théorème de DE MORGAN permet d'écrire immédiatement la fonction complément d'une forme canonique. Il suffit de remplacer chaque produel par un produit et réciproquement, en complémentant chacune des variables. Les lignes horizontales deviennent des colonnes verticales, les colonnes deviennent des lignes horizontales et les variables se trouvent complémentées. La simplicité de la complémentation résulte de l'aspect dual du symbolisme adopté.

A titre d'exemple, la fonction
$$f = \left|\begin{array}{c} x_1 \cdot \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_3 \end{array}\right|$$

peut être complémentée facilement, selon la méthode indiquée; et nous obtenons :

$$\overline{f} = \left|\begin{array}{c} \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \end{array}\right|$$

Si la fonction ne se présente pas sous une forme canonique, la méthode de complémentation est identique, et reste aussi simple dans son application ; ce qu'illustrent les deux exemples suivants :

- $f_1 = a\left|\begin{array}{c} b \\ \overline{c} \cdot d \end{array}\right| \iff \overline{f_1} = \left|\begin{array}{c} \overline{a} \\ \overline{b} \;\Big|\; \begin{array}{c} c \\ \overline{d} \end{array} \end{array}\right|$

- $f_2 = \left|\begin{array}{c} x_1 \;\Big|\; \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \end{array} \\ x_2 \cdot x_3 \end{array}\right| \iff \overline{f_2} = \left|\begin{array}{c|c} \overline{x}_2 & \overline{x}_1 \\ \overline{x}_3 & \overline{x}_2 \;\; \overline{x}_3 \end{array}\right|$

EXERCICES D'APPLICATION RELATIFS AU CHAPITRE I

1 – Quelle est l'expression algébrique développée de la fonction $\left|\begin{array}{c} a \cdot b \\ c \cdot \overline{d} \end{array}\right|$?

Réponse : c - cd + ab - abc + abcd

2 – Quelle est l'expression algébrique développée de chacune des deux fonctions suivantes :

$$f_1 = \left|\begin{array}{c|c} a & \overline{c} \\ b & d \end{array}\right| , \qquad f_2 = b\left|\begin{array}{c} \overline{a} \\ c \\ d \end{array}\right| \quad ?$$

Réponse : $f_1 = a + b - ab - ac - bc + abc + acd + bcd - abcd$

$f_2 = b - ab + abc + abd - abcd$

3 – En partant de l'expression algébrique, $y = c + b \cdot (a - c)$, établir la table de vérité complète relative à la fonction "y" et donner les deux formes canoniques correspondantes.

Réponses :

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Première forme canonique

$$y = \left|\begin{array}{c} \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \\ a \cdot \overline{b} \cdot c \\ a \cdot b \cdot \overline{c} \\ a \cdot b \cdot c \end{array}\right|$$

Deuxième forme canonique

$$y = \left|\begin{array}{c|c|c|c} a & a & a & \overline{a} \\ b & \overline{b} & \overline{b} & b \\ c & c & \overline{c} & c \end{array}\right|$$

4 – Montrer que les fonctions $\left|\begin{array}{c|c} a & \bar{a} \\ b & c \end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{c} a \, . \, b \\ \bar{a} \, . \, c \end{array}\right|$ admettent la même expression algébrique.

Réponse : $\left|\begin{array}{c|c} \bar{a} & a \\ b & c \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a \, . \, b \\ \bar{a} \, . \, c \end{array}\right| = ab - ac + c$

5 – Etablir les tables de vérité réduites relatives aux deux fonctions binaires

$$\left|\begin{array}{c} a \, . \, \bar{b} \\ \bar{a} \, . \, c \end{array}\right| \quad \text{et} \quad F_2 = \left|\begin{array}{c|c} a & \bar{a} \\ c & \bar{b} \end{array}\right|$$

Montrer que F_1 et F_2 admettent la même table de vérité complète et représentent par suite la même fonction.

Réponse :

	a	b	c	$F_1 = F_2$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

6 – Pour réaliser un "va et vient" à l'aide de trois interrupteurs x_1, x_2, x_3 ; on désire que le circuit d'allumage soit fermé ($F = 1$) lorsque le nombre de valeurs "1" des variables x_1, x_2, x_3 est impair, et que le circuit soit ouvert ($F = 0$) lorsque le nombre de valeurs "1" des variables est pair.

- Ecrire la table de vérité relative à la fonction "F"
- Quelles sont les deux formes canoniques de "F" ?

Réponses :

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_1 \, . \, \bar{x}_2 \, . \, x_3 \\ \bar{x}_1 \, . \, x_2 \, . \, \bar{x}_3 \\ x_1 \, . \, \bar{x}_2 \, . \, \bar{x}_3 \\ x_1 \, . \, x_2 \, . \, x_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ x_2 & \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 \\ x_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & x_3 \end{array}\right|$$

7 – Etant donné la forme canonique suivante :

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{a} \, . \, \bar{b} \, . \, \bar{c} \, . \, \bar{d} \\ \bar{a} \, . \, b \, . \, \bar{c} \, . \, \bar{d} \\ \bar{a} \, . \, b \, . \, \bar{c} \, . \, d \\ \bar{a} \, . \, b \, . \, c \, . \, \bar{d} \\ a \, . \, \bar{b} \, . \, \bar{c} \, . \, d \\ a \, . \, \bar{b} \, . \, c \, . \, \bar{d} \\ a \, . \, b \, . \, \bar{c} \, . \, \bar{d} \\ a \, . \, b \, . \, \bar{c} \, . \, d \\ a \, . \, b \, . \, c \, . \, \bar{d} \\ a \, . \, b \, . \, c \, . \, d \end{array}\right| \begin{array}{r} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array}$$

qui groupe les combinaisons 0, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15, transposer la fonction "F" de manière à obtenir un produit de six produels.

Réponse : $F = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & a & a & a & \bar{a} & \bar{a} \\ b & b & b & \bar{b} & b & b \\ c & \bar{c} & \bar{c} & \bar{c} & c & \bar{c} \\ \bar{d} & d & \bar{d} & \bar{d} & d & \bar{d} \end{array}\right| \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 11 \end{array} \end{array}$

8 – On donne la table de vérité suivante :

a	b	c	d	e	f	ϕ
0	0	0	ø	ø	ø	|
1	1	ø	ø	ø	1	|
0	ø	ø	ø	0	0	0
ø	ø	ø	1	1	1	|

Ecrire la fonction " ϕ " sous la forme d'un produit de produels et indiquer le nombre total de combinaisons qui apparaîtrait dans la table de vérité incomplète pour $\phi = 0$, en précisant le nombre décimal associé à chaque combinaison et en prenant les variables dans l'ordre a, b, c, d, e, f.

Réponses : $\phi = \left|\begin{array}{c|c|c|c} a & \bar{a} & a & \bar{d} \\ b & \bar{b} & e & \bar{e} \\ c & \bar{f} & f & \bar{f} \end{array}\right|$

La table de vérité incomplète relative à $\phi = 0$ grouperait 27 combinaisons correspondant dans l'ordre aux nombres décimaux : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 39, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63.

9 - Pour déverrouiller la bobine de sécurité de la porte d'accès à la cabine d'un transformateur haute tension (p = 1 au déverrouillage), on désire que le disjoncteur "D" d'alimentation du transformateur et que le sectionneur "S" de liaison, soient ouverts (D = S = 0)

Etablir la table de vérité complète de la fonction "p" et donner les deux formes canoniques correspondantes.

réponses :

D	S	p
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$p = \bar{D}\ \bar{S} = \left|\begin{array}{c|c|c} D & \bar{D} & \bar{D} \\ \bar{S} & S & \bar{S} \end{array}\right|$$

10 - Ecrire les compléments des fonctions suivantes :

$$f_1 = \left|\begin{array}{c} a \,.\, b \\ \bar{c} \,.\, d \,.\, \bar{e} \end{array}\right| , \quad f_2 = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \\ x_2 & x_3 \\ & x_4 \end{array}\right| , \quad f_3 = \left|\begin{array}{c|c|c} a & \bar{a} & \bar{a} \\ \bar{b} & b & b \\ c & \bar{c} & c \end{array}\right|$$

réponses :

$$\bar{f}_1 = \left|\begin{array}{c|c} \bar{a} & c \\ \bar{b} & \bar{d} \\ & e \end{array}\right| , \quad \bar{f}_2 = \left|\begin{array}{c} x_1 \,.\, \bar{x}_2 \\ x_2 \,.\, \bar{x}_3 \,.\, \bar{x}_4 \end{array}\right| , \quad \bar{f}_3 = \left|\begin{array}{c} \bar{a} \,.\, b \,.\, \bar{c} \\ a \,.\, \bar{b} \,.\, c \\ a \,.\, \bar{b} \,.\, \bar{c} \end{array}\right|$$

11 - Calculer l'expression algébrique développée de la fonction $f = a \,.\left|\begin{array}{c} \bar{b} \\ \bar{c} \end{array}\right|$. Déduire de cette expression une table de vérité réduite correspondant à f = 0 puis la table de vérité complète donnant "f". Ecrire "f" sous la première forme canonique.

Réponses : f = a - abc

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Table de vérité réduite

a	b	c	f
0	ϕ	ϕ	0
ϕ	1	1	0

Première forme canonique

$$f = \left|\begin{array}{c} a \,.\, \bar{b} \,.\, \bar{c} \\ a \,.\, \bar{b} \,.\, c \\ a \,.\, b \,.\, \bar{c} \end{array}\right|$$

CHAPITRE II

SIMPLIFICATION DES FONCTIONS BINAIRES

Par simplification des fonctions binaires, nous entendrons la réduction du nombre des éléments littéraux ; c'est-à-dire la simplification, en dehors de toute considération technologique, des expressions symboliques écrites.

Le but poursuivi sera donc, en général, la recherche et l'élimination des termes redondants : en définissant comme tel tout terme qui peut être supprimé dans une fonction binaire sans lui apporter de modification numérique relativement aux combinaisons de valeurs des variables indépendantes.

Les simplifications devront être les conséquences démontrables des propriétés algébriques des produits et des produels. Parmi les méthodes fondamentales, nous étudierons en particulier les simplifications par mise en facteur et développements, par adjacences, par transpositions et par consensus, qui sont des méthodes fondamentales et simples et s'avèrent suffisantes dans la plupart des cas.

2.1. Mise en facteur et développement

L'ensemble binaire "E_{01}" définit un anneau commutatif automorphe, puisque "$E_{01} = E_{10}$" et que l'on a choisi deux lois algébriques internes de composition qui sont le produit, "P = xy " et le produel " $\pi = 1 - (1 - x).(1 - y) = \left|\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right|$ ".

Il est intéressant de démontrer la propriété algébrique de distributivité du produel par rapport au produit et réciproquement, du produit par rapport au produel. Cette réciprocité, qui résulte de la propriété fondamentale de dualité, est une caractéristique essentielle et particulièrement intéressante des ensembles binaires.

2.1.1. Mise en facteur dans un produel

Considérons le produel : $F = \left|\begin{array}{c} \Phi \,.\, f_1 \\ \Phi \,.\, f_2 \end{array}\right| = 1 - (1 - \Phi.f_1).(1 - \Phi.f_2)$

L'expression algébrique développée s'écrit :

$F = \Phi.f_1 + \Phi.f_2 - \Phi^2 f_1.f_2$, en utilisant le théorème d'absorption $\Phi^2 = \Phi$,

$F = \Phi.f_1 + \Phi.f_2 - \Phi.f_1.f_2$ que nous pouvons écrire :

$$F = \phi \, . \left[1 - (1 - f_1) \, . \, (1 - f_2) \right] = \phi \, . \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right|$$

Ainsi se trouve démontrée l'identité réciproque :

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \phi . f_1 \\ \phi . f_2 \end{matrix} \right| = \phi \, . \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right|}$$

Nous appellerons "mise en facteur" le passage de la première expression à la seconde et "développement" le passage inverse.

L'identité précédente peut être étendue à un produel contenant un nombre quelconque de produits admettant " ϕ " comme facteur commun.

soit, en effet, la fonction , $F = \left| \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ P_q \\ P_{q+1} \\ . \\ P_n \end{matrix} \right|$

dans laquelle, $P_1 = \phi . f_1$, $P_2 = \phi . f_2 \dots$, $P_q = \phi . f_q$, $q \leqslant n$.

Appelons $P'_{12} = \phi \, . \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right|$, la fonction obtenue en mettant " ϕ " en facteur dans les deux premiers produits P_1 et P_2.

En groupant "P'_{12}" et " P_3", nous pouvons à nouveau mettre "ϕ" en facteur et nous obtenons $P'_{123} = \phi \, . \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \right|$, et ainsi de suite jusqu'à "P_q". Ce qui permet d'écrire l'identité :

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \phi . f_1 \\ \phi . f_2 \\ . \\ . \\ \phi . f_q \\ P_{q+1} \\ . \\ P_n \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \phi \, . \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_q \end{matrix} \right| \\ P_{q+1} \\ . \\ P_n \end{matrix} \right|}$$

Ainsi se trouve démontrée la distributivité du produit par rapport au produel.

2.1.2. Mise en "facteur dual" dans un produit

Considérons la fonction $F = \left| \begin{matrix} \phi \\ f_1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \phi \\ f_2 \end{matrix} \right|$.

Le développement algébrique de "F" s'écrit :

$$F = \left[1 - (1 - \phi) \, . \, (1 - f_1) \right] . \left[1 - (1 - \phi) \, . \, (1 - f_2) \right]$$

$$= 1 - (1 - \phi) \, . \, (1 - f_1) - (1 - \phi) \, . \, (1 - f_2) + (1 - \phi)^2 . \, (1 - f_1) \, . \, (1 - f_2)$$

Le théorème d'absorption permet d'écrire $(1 - \phi)^2 = (1 - \phi)$, d'où l'expression de " F " :

$$F = 1 - (1 - \phi) \, . \left[(1 - f_1) + (1 - f_2) - (1 - f_1) \, . \, (1 - f_2) \right]$$

$$= 1 - (1 - \phi) \, . \, (1 - f_1 . f_2) = \left| \begin{matrix} \phi \\ f_1 \, . \, f_2 \end{matrix} \right|$$

Nous avons ainsi démontré l'identité réciproque :

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \phi \\ f_1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \phi \\ f_2 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \phi \\ f_1 \, . \, f_2 \end{matrix} \right|}$$

Nous appellerons "mise en facteur dual" le passage de la première expression à la seconde et "développement dual" le passage inverse.

Comme pour le produel, l'identité précédente peut être étendue à un produit contenant un nombre quelconque de produels admettant "ϕ" comme "facteur dual" commun.

Soit :

$$\pi = \pi_1 \, . \, \pi_2 \, \dots \, \pi_q \, . \, \pi_{q+1} \dots \pi_n$$

avec $\pi_1 = \left| \begin{matrix} \phi \\ f_1 \end{matrix} \right|$, $\pi_2 = \left| \begin{matrix} \phi \\ f_2 \end{matrix} \right|$, ..., $\pi_q = \left| \begin{matrix} \phi \\ f_q \end{matrix} \right|$, $q \leqslant n$.

Nous pouvons de proche en proche mettre " ϕ " en facteur dual dans les produels π_1, π_2, ..., π_q, et obtenir finalement l'identité

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \phi \\ f_1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \phi \\ f_2 \end{matrix} \right| \dots \left| \begin{matrix} \phi \\ f_q \end{matrix} \right| . \, \pi_{q+1} \dots \pi_n = \left| \begin{matrix} \phi \\ f_1 . f_2 \dots f_q \end{matrix} \right| . \, \pi_{q+1} \dots \pi_n}$$

Nous avons ainsi démontré la distributivité du produel par rapport au produit.

2.2. Simplifications élémentaires des fonctions binaires

La propriété réciproque de distributivité des produits et produels va nous permettre de tirer un certain nombre de conséquences et de théorèmes élémentaires relatifs à la simplification des fonctions binaires.

2.2.1. Simplifications par produits effectués

Si la mise en facteur fournit en général une forme simplifiée des fonctions binaires, l'opération inverse par produits effectués peut, dans les cas que nous allons envisager, fournir également des simplifications intéressantes.

- 1er cas

$$\phi \left|\begin{matrix} f \\ A.\bar{\phi} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \phi . f \\ A . \phi . \bar{\phi} \end{matrix}\right| = \phi . f$$

Dans le cas particulier, souvent rencontré où $A = 1$, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\phi \left|\begin{matrix} f \\ \bar{\phi} \end{matrix}\right| = \phi . f}$$

- 2ème cas

$$\left|\begin{matrix} \phi \\ f \left|\begin{matrix} B \\ \bar{\phi} \end{matrix}\right. \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \phi \\ f \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \phi \\ \bar{\phi} \\ B \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \phi \\ f \end{matrix}\right|$$

Dans le cas particulier $B = 0$, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\left|\begin{matrix} \phi \\ f . \bar{\phi} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \phi \\ f \end{matrix}\right|}$$

2.2.2. Implications

Nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit binaire soit égal à l'unité, est que chacun des facteurs soit égal à l'unité.

$$(P = f_1 . f_2 \ldots . f_n = 1) \iff (f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1)$$

Nous pouvons donc appeler chaque facteur f_1, f_2, ..., f_n, implicant direct, ou implicant de la fonction "P".

- Toute fonction partielle pouvant être mise en facteur dans une fonction donnée sera donc un implicant de cette dernière.

Nous savons également que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un produel soit nul, est que chaque facteur dual soit égal à zéro.

$$\pi = \left|\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ f_n \end{matrix}\right| = 0 \iff (f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0)$$

- Toute fonction partielle pouvant être mise en facteur dual dans une fonction donnée sera par définition un implicant dual de cette dernière.

Considérons le produit ayant pour facteurs un produel et l'un de ses implicants duals. $F = \phi . \left|\begin{matrix} \phi \\ f \end{matrix}\right|$ " 0" étant l'élément neutre du produel, nous pouvons écrire :

$$\phi = \left|\begin{matrix} \phi \\ 0 \end{matrix}\right| \quad \text{et} \quad F = \left|\begin{matrix} \phi \\ 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \phi \\ f \end{matrix}\right| .$$

En mettant "ϕ" en facteur dual, nous obtenons $F = \left|\begin{matrix} \phi \\ O . f \end{matrix}\right| = \phi$

De même, le produel ayant pour facteurs duals un produit et l'un de ses implicants, s'écrit :

$$F' = \left|\begin{matrix} \phi \\ \phi . f \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \phi . 1 \\ \phi . f \end{matrix}\right| = \phi . \left|\begin{matrix} 1 \\ f \end{matrix}\right| = \phi$$

Nous tirons de ces égalités les deux théorèmes suivants :

2.2.3. Théorèmes

Le produit d'une fonction binaire et de l'un quelconque de ses implicants duals est égal à cet implicant dual.

$$\boxed{\phi . \left|\begin{matrix} \phi \\ f \end{matrix}\right| = \phi}$$

Le produel d'une fonction binaire et de l'un quelconque de ses implicants directs, est égal à cet implicant.

$$\boxed{\left|\begin{matrix} \phi \\ \phi . f \end{matrix}\right| = \phi}$$

2.2.4. Adjacences

Deux produits "P_1" et "P_2" sont dits adjacents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre en complémentant l'un des facteurs et ce facteur seulement.

$$P_1 = |\phi . f| , \quad P_2 = |\bar{\phi} . f|$$

Nous pouvons également par dualité définir l'adjacence pour des produels.

Deux produels "π_1" et "π_2" sont dits adjacents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre en complémentant l'un des facteurs duals et ce facteur seulement.

$$\pi_1 = \left|\begin{matrix} \phi \\ f \end{matrix}\right| , \quad \pi_2 = \left|\begin{matrix} \bar{\phi} \\ f \end{matrix}\right|$$

2.2.5. Théorèmes

Le produel de deux produits adjacents est égal au facteur commun des deux produits.

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi . f \\ \overline{\phi} . f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi \\ \overline{\phi} \end{vmatrix} . f = f$$

Le produit de deux produels adjacents est égal au facteur dual commun des deux produels.

$$\pi_1 . \pi_2 = \begin{vmatrix} \phi \\ f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{\phi} \\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi . \overline{\phi} \\ f \end{vmatrix} = f$$

La fonction "ϕ" est appelée "fonction adjacente" ou "variable adjacente" lorsqu'il s'agit d'une simple variable.

2.3. Méthodes générales de simplification utilisant la mise en facteur

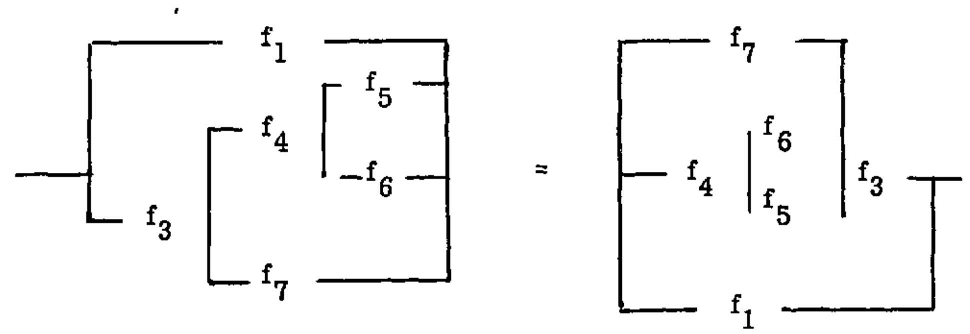
Compte tenu de la propriété de commutativité des produits et des produels, les mises en facteur sont des opérations qui peuvent s'effectuer en cascade, dans un ordre quelconque mais qui ne mènent pas nécessairement à une forme optimale des fonctions binaires.

2.3.1. Exemples de simplifications par mises en facteur

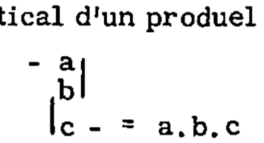
Considérons le produit de produels suivant :

$$F_1 = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_4 \\ f_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{vmatrix}$$

" F_1 " peut s'écrire, après mise en facteur dual de "f_1" puis de "f_7" :

F_1 = 

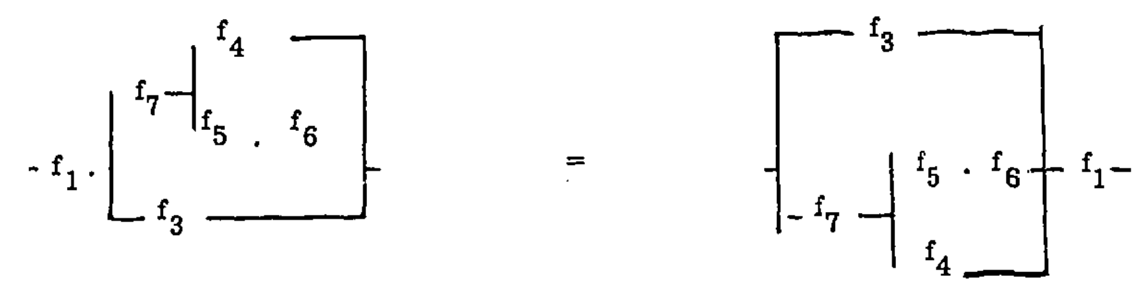
Lorsque les fonctions ne remplissent pas complètement l'espace qu'elles occupent entre les deux traits verticaux qui symbolisent les produels, on peut compléter par des traits continus horizontaux comme cela est indiqué dans les expressions simplifiées de la fonction "F_1" ci-dessus.

N.B. Le trait vertical d'un produel est équivalent au symbole (.) du produit. Ce qui permet d'écrire :  = a.b.c

Considérons d'autre part le produel de produits :

$$F_2 = \begin{vmatrix} f_1 . f_4 . f_7 \\ f_1 . f_5 . f_6 . f_7 \\ f_1 . f_3 \text{ ——} \end{vmatrix}$$

En mettant successivement "f_7" et "f_1" en facteur, nous obtenons :

F_2 = 

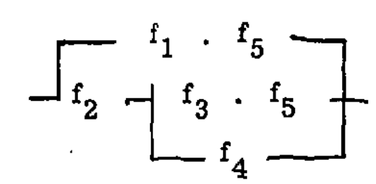
Les produits et les produels sont commutatifs, les colonnes ou les lignes des fonctions binaires peuvent être permutées entre elles et par suite les mises en facteur peuvent s'effectuer aussi bien en partant de la droite qu'en partant de la gauche pour un produit, et les mises en facteur dual, en partant du haut ou en partant du bas pour un produel.

Ces mises en facteur peuvent même se faire simultanément à droite et à gauche pour la première forme (produit) ou en haut et en bas pour la deuxième forme (produel). Cette façon de procéder introduit une solution étrangère.

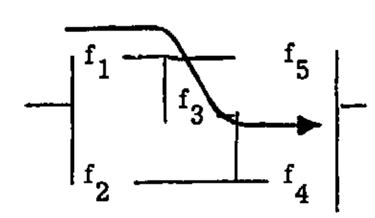
Il y a donc lieu de s'assurer que la solution étrangère introduite dans la simplification obtenue correspond à un produit nul.

Considérons en effet la fonction :

$$F = \begin{vmatrix} f_1 . f_5 \\ f_2 . f_3 . f_5 \\ f_2 . f_4 \end{vmatrix} =$$



Si l'on met, dans cette fonction, "f_5" en facteur à droite, la simplification obtenue :



fait apparaître suivant le parcours indiqué par la flèche, le produit $f_1 . f_3 . f_4$ qui n'était pas contenu initialement dans la fonction proposée. Cette simplification ne peut pas être effectuée si

$f_1 . f_3 . f_4 \neq 0$.

Nous pouvons par contre effectuer une simplification par mise en facteur à droite et à gauche, dans la fonction suivante :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 . \bar{x}_2 . \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 . x_2 . \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 . \bar{x}_2 . x_3 \end{array}\right| \quad = \quad -\left|\begin{array}{ll} x_1 . \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ & x_2 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 . x_3 \end{array}\right|-$$

Le produit $x_1 . \bar{x}_2 . x_2 . \bar{x}_2 . x_3$ indiqué par la flèche est identiquement nul puisqu'il contient en facteur deux variables complémentaires x_2 et $\bar{x}_2$. Il n'y a donc pas de modification introduite dans la fonction initiale et la simplification obtenue est valable.

Notons que dans certains cas, la solution particulière introduite est redondante et permet d'améliorer la simplification. C'est le cas de la fonction suivante :

$$F = -\left|\begin{array}{c} f_1 . f_4 \\ f_1 . f_2 . f_3 \\ f_5 . f_2 \\ f_5 . f_3 . f_4 \end{array}\right|- \;=\; -\left|\begin{array}{ll} f_1 & \left|\begin{array}{l} f_4 - \\ f_3 . f_2 \end{array}\right. \\ f_5 & \left|\begin{array}{l} f_2 - \\ f_3 . f_4 \end{array}\right. \end{array}\right|- \;=\; -\left|\begin{array}{lll} f_1 & f_4 & \\ & f_3 & f_2 \\ f_5 & & f_3 . f_4 \end{array}\right|-$$

Les deux parcours indiqués par les flèches correspondent au même produit "$f_5 . f_3 . f_4$". Le produit "$f_3 . f_4$" en facteur dual de "f_2" peut, en conséquence, être supprimé sans que la fonction soit modifiée. Nous obtenons donc finalement :

$$F = -\left|\begin{array}{lll} (f_1) & & (f_4) \\ & (f_3) & \\ (f_5) & & (f_2) \end{array}\right|-$$

Le symbolisme choisi permet ainsi, par des mises en facteur simultanées de part et d'autre des expressions binaires, d'établir des liens étroits avec la topologie et d'aboutir à des expressions simples ayant l'aspect de schémas.

Notons cependant que ces simplifications particulières n'offrent d'intérêt que pour des circuits utilisant une technologie où les éléments sont à commande isolée (relais électromagnétiques, optoélectroniques ou transformateurs). Ce n'est pas le cas des circuits électroniques utilisant des semi-conducteurs des types diode et transistor.

2.4. Décomposition des fonctions binaires par rapport aux variables

Il est intéressant, dans un but de simplification, d'étudier les différentes formes que peut revêtir une fonction binaire relativement à une variable indépendante.

2.4.1. Définitions

Nous dirons, par définition, qu'une fonction est monoforme par rapport à la variable "x" si cette variable intervient dans la fonction sous une seule de ses formes binaires

(directe ou complémentée).

Nous dirons dans ce cas que "x" est une variable monoforme de la fonction.

$$f_1 \left|\begin{array}{c} x \\ f_2 \end{array}\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{c} x . \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{array}\right|$$

sont des fonctions monoformes par rapport à la variable "x" a condition que f_1, f_2, Φ_1 et Φ_2 soient des fonctions indépendantes de "x".

Nous appellerons fonction biforme par rapport à la variable "x", toute fonction binaire dans laquelle la variable "x" intervient à la fois sous ses deux formes (directe et complémentée) et nous dirons que "x" est une variable biforme de la fonction

$$\Phi_1 . \left|\begin{array}{c} x \\ f_1 \end{array}\right|\left.\begin{array}{c} \bar{x} \\ f_2 \end{array}\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{c} x . f_1 \\ \bar{x} . f_2 \\ \Phi_1 \end{array}\right|$$ sont des fonctions biformes par rapport à la variable "x".

Nous dirons qu'une fonction binaire est un produit monoforme de la variable "x" lorsque "x" ou "$\bar{x}$", est un implicant direct de cette fonction.

$F = x . A$ est un produit monoforme de la variable "x".

Un produel monoforme de la variable "x" admet cette variable ou son complément comme implicant dual.

$$F' = \left|\begin{array}{c} x \\ B \end{array}\right|$$ est un produel monoforme de la variable "x".

Nous appellerons fonction carrée biforme, une fonction biforme comprenant quatre termes groupés en carré suivant un produit de deux produels de deux facteurs duals, ou suivant un produel de deux produits de deux facteurs directs.

$$\left|\begin{array}{c} \Phi . A \\ \bar{\Phi} . B \end{array}\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{c} \Phi \\ A_1 \end{array}\right|\left.\begin{array}{c} \bar{\Phi} \\ B_1 \end{array}\right|$$ sont des fonctions carrées biformes en "Φ".

2.4.2. Propriétés des fonctions carrées biformes (*)

Les fonctions carrées biformes ont un aspect dual qui laisse prévoir des propriétés particulièrement intéressantes.

Toute fonction peut s'écrire sous la forme d'une fonction carrée biforme.

$$f_1 \left|\begin{array}{c} \bar{x} \\ f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x . \bar{x} \\ f_1 \end{array}\right|\left.\begin{array}{c} \bar{x} \\ f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x \\ f_1 \end{array}\right|\left.\begin{array}{c} \bar{x} \\ f_1 \end{array}\right|\left.\begin{array}{c} \bar{x} \\ f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x \\ f_1 \end{array}\right|\left.\begin{array}{c} \bar{x} \\ f_1 f_2 \end{array}\right|$$

(*) L'algèbre de BOOLE ne peut pas mettre en évidence d'une façon simple les propriétés fondamentales des fonctions carrées biformes qui ont une symétrie duale particulière et sont extrêmement utiles pour la simplification des circuits de commutation.

$$\left|\begin{array}{c}\bar{x}\cdot\Phi_1\\ \\ \Phi_2\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c}\bar{x} & \Phi_1\\ \bar{x} & \\ x & \Phi_2\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c}\bar{x} & \Phi_1\\ & \Phi_2\\ x\cdot\Phi_2 & \end{array}\right|$$

$$\Phi_1\left|\begin{array}{c|c} x & \bar{x}\\ \\ f_1 & f_2\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} x\cdot\bar{x} & x & \bar{x}\\ \\ \Phi_1 & f_1 & f_2\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x & \bar{x}\\ \\ \Phi_1\cdot f_1 & \Phi_1\cdot f_2\end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c}\bar{x}\cdot f_1\\ x\cdot f_2\\ \Phi_1\end{array}\right| = \left|\begin{array}{l}\bar{x}\cdot f_1\\ x\cdot f_2\\ \left.\begin{array}{c}\bar{x}\\ x\end{array}\right|\Phi_1\end{array}\right| = \left|\begin{array}{l}\bar{x}\cdot\left|\begin{array}{c}f_1\\ \Phi_1\end{array}\right.\\ \\ x\cdot\left|\begin{array}{c}f_2\\ \Phi_1\end{array}\right.\end{array}\right|$$

Si une fonction carrée biforme se présente sous la forme d'un produit de produels,

$$P = \left|\begin{array}{c|c}\Phi & \bar{\Phi}\\ A & B\end{array}\right|$$

nous pouvons l'écrire sous la forme de produel de produits en effectuant les produits élémentaires.

$$F = \left|\begin{array}{c}\Phi\cdot B\\ A\cdot\bar{\Phi}\\ A\cdot B\end{array}\right| = \left|\begin{array}{l}\Phi\cdot B\\ A\cdot\bar{\Phi}\\ \\ A.B.\left|\begin{array}{c}\Phi\\ \bar{\Phi}\end{array}\right.\end{array}\right| = \left|\begin{array}{l}\Phi\cdot\left|\begin{array}{c}B\\ A.B\end{array}\right.\\ \bar{\Phi}\cdot\left|\begin{array}{c}A\\ A.B\end{array}\right.\end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c}B\\ A.B\end{array}\right| = B, \qquad \left|\begin{array}{c}A\\ A.B\end{array}\right| = A,$$

$$\left|\begin{array}{c}\Phi\cdot B\\ A\cdot\bar{\Phi}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c}\Phi & B\\ A & \bar{\Phi}\end{array}\right|$$

Nous avons ainsi établi le théorème suivant ; théorème fondamental et très important qui va nous permettre la recherche systématique des implicants directs et duals d'une fonction par la méthode des consensus.

2.4.3. Théorème

Une fonction carrée biforme n'est pas modifiée par la suppression ou le tracé d'un trait vertical médian, à condition de disposer les facteurs complémentaires suivant une diagonale du carré correspondant à son expression symbolique.

$$\boxed{\left|\begin{array}{cc}\Phi & B\\ A & \bar{\Phi}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c}\Phi & B\\ A & \bar{\Phi}\end{array}\right|}$$

Les facteurs "A" et "B" sont appelés simplement facteurs diagonaux de la fonction carrée biforme.

Ce théorème nous permet de passer ainsi facilement d'un produel à un produit et vice-versa, sans introduire de terme redondant. Ce qui justifie l'attention particulière consacrée à l'étude des fonctions carrées biformes.

2.5. Simplifications par la méthode des "consensus" (*)

Etant donnée une fonction carrée biforme, on appelle "consensus" de cette fonction, le produit des termes diagonaux non complémentaires, et "consensus dual", le produel des termes diagonaux non complémentaires.

La fonction carrée biforme $F = \left|\begin{array}{c|c}\Phi & f_1\\ f_2 & \bar{\Phi}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\Phi\cdot f_1\\ \bar{\Phi}\cdot f_2\end{array}\right|$

admet pour "consensus" le produit $f_1\cdot f_2$,

et pour "consensus dual" le produel $\left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right|$.

En procédant par produits effectués, nous pouvons écrire :

$$F = \left|\begin{array}{c}\Phi\cdot f_1\\ \\ f_2\cdot\Phi\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c}\Phi & f_1 & f_1\\ \\ f_2 & \bar{\Phi} & f_2\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\Phi\cdot f_1\\ f_2\cdot\bar{\Phi}\\ f_2\cdot f_1\end{array}\right|$$

Le consensus $f_1\cdot f_2$ est donc un implicant dual de "F" et le consensus dual $\left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right|$ est un implicant de "F". Nous en déduisons les théorèmes suivants.

2.5.1. Théorèmes

2.5.1.1. Si parmi les facteurs d'un produit, il existe une fonction carrée biforme et un terme contenant en facteur dual, le consensus dual de cette fonction; ce dernier terme est redondant et peut être supprimé.

2.5.1.2. Si parmi les facteurs duals d'un produel, il existe une fonction carrée biforme et un terme contenant en facteur le consensus de cette fonction, ce dernier terme est redondant et peut être supprimé.

(*) Rappelons pour mémoire qu'une théorie complète des consensus, dans le formalisme de l'algèbre de BOOLE, a été développée par M. TISON.

Nous pouvons écrire en effet :

$$\left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \cdot \overline{\phi}\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}k\\ f_1\\ f_2\end{array}\right| .f_3 \ldots f_n = \left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \;\overline{\phi}\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}o\\ f_1\\ f_2\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}k\\ f_1\\ f_2\end{array}\right| .f_3 \ldots f_n = \left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \cdot \overline{\phi}\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right| .f_3 \ldots f_n = \left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \cdot \overline{\phi}\end{array}\right| .f_3 \ldots f_n$$

De même :

$$\left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \cdot \overline{\phi}\\ k \cdot f_1 \cdot f_2\\ f_3\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \cdot \overline{\phi}\\ 1 \cdot f_2 \cdot f_1\\ k \cdot f_1 \cdot f_2\\ f_3\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \cdot \overline{\phi}\\ f_2 \cdot f_1\\ f_3\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_1\\ f_2 \cdot \overline{\phi}\\ f_3\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n\end{array}\right|$$

2.5.2. Règles générales des "consensus"

Donnons-nous la fonction carrée biforme :

$$F = \left|\begin{array}{c}\phi\\ f_1\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}f_2\\ \overline{\phi}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\phi \cdot f_2\\ f_1 \cdot \overline{\phi}\end{array}\right|$$

2.5.2.1. Le consensus " $f_1.f_2$ " mis sous la forme d'un produel de produits, traduit, lorsque l'un de ces produits apparaît en facteur dans un terme facteur dual de "F", une condition suffisante pour affirmer que ce terme est redondant et peut être supprimé.

2.5.2.2. Le consensus dual $\left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right|$ mis sous la forme d'un produit de produels, traduit, lorsque l'un de ces produels apparaît en facteur dual dans un terme facteur de "F" une condition suffisante pour affirmer que ce terme est redondant et peut être supprimé.

Supposons que le consensus de la fonction carrée biforme "F" soit mis sous la forme d'un produel de "q" produits :

$$f_1 \cdot f_2 = \left|\begin{array}{c}p_1\\ p_2\\ \cdot\\ p_k\\ \cdot\\ \cdot\\ p_q\end{array}\right|$$

et que le consensus dual soit mis sous la forme d'un produit de "r" produels ;

$$\left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right| = \pi_1 \cdot \pi_2 \ldots \pi_j \ldots \pi_r$$

Si la fonction "F" est en facteur dual d'un terme de la forme "Ap_k", ce terme est redondant.

Nous pouvons écrire en effet dans ce cas :

$$\left|\begin{array}{c}F\\ \\ Ap_k\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}F\\ f_1 \cdot f_2\\ Ap_k\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}F\\ p_1\\ p_2\\ \cdot\\ \cdot\\ p_k\\ \cdot\\ \cdot\\ p_q\\ Ap_k\end{array}\right|$$

"p_k", implicant de "Ap_k", est en facteur dual et nous savons que $\left|\begin{array}{c}p_k\\ Ap_k\end{array}\right| = p_k$

$$\text{d'où :} \quad \left|\begin{array}{c}F\\ f_1 \cdot f_2\\ Ap_k\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}F\\ f_1 \cdot f_2\end{array}\right| = F$$

Si la fonction "F" est en facteur d'un terme de la forme $\left|\begin{array}{c}B\\ \pi_j\end{array}\right|$, nous pouvons écrire :

$$F \cdot \left|\begin{array}{c}B\\ \pi_j\end{array}\right| = F \cdot \left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}B\\ \pi_j\end{array}\right| = F \cdot \pi_1 \cdot \pi_2 \ldots \pi_j \cdot \left|\begin{array}{c}B\\ \pi_j\end{array}\right| \cdot \pi_{j+1} \cdot \ldots \cdot \pi_r$$

π_j est un implicant dual du produel $\left|\begin{array}{c}B\\ \pi_j\end{array}\right|$

$$\text{donc,} \quad F \cdot \left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}B\\ \pi_j\end{array}\right| = F \cdot \left|\begin{array}{c}f_1\\ f_2\end{array}\right| = F$$

2.5.3. Exemple de simplification par consensus

$$\text{Considérons la fonction} \quad F_1 = \left|\begin{array}{c}B \cdot C \cdot F\\ D \cdot \overline{C} \cdot F\\ D \cdot B \cdot E\\ A \cdot \overline{C}\\ D \cdot \overline{A}\\ A \cdot B\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}D\\ B\\ \overline{C}\\ \overline{F}\end{array}\right|$$

Il existe, dans le premier facteur de "F_1" deux variables biformes "C" et "A" et nous pouvons faire apparaître successivement les deux fonctions carrées biformes

$$\left|\begin{array}{c} C\,.\,B\,.\,F \\ \left.\begin{array}{c} D.F \\ A \end{array}\right| \;\bar{C} \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} A\left|\begin{array}{c}\bar{C}\\ B\end{array}\right. \\ D\,.\,\bar{A} \end{array}\right|$$

qui admettent respectivement

pour consensus : $\left|\begin{array}{c} B\,.\,D\,.\,F \\ A\,.\,B\,.\,F \end{array}\right|$, $\left|\begin{array}{c} D\,.\,\bar{C} \\ D\,.\,B \end{array}\right|$,

et admettent pour consensus dual : $\left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} A\\ D\\ B\end{array} & \begin{array}{c} A\\ F\end{array}\end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{c} D\\ B\\ \bar{C}\end{array}\right|$

Nous voyons par le consensus de la fonction carrée biforme en "A" consensus égal à $\left|\begin{array}{c} D.B \\ D.\bar{C}\end{array}\right|$, que les termes $D.\bar{C}.F$ et $D.B.E$ peuvent être supprimées. Nous pouvons donc écrire :

$$\left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} A\left|\begin{array}{c}\bar{C}\\ B\end{array}\right. \\ D\,.\,\bar{A} \\ B.C.F \end{array} & \begin{array}{c} D\\ B\\ \bar{C}\\ \bar{F}\end{array}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \begin{array}{c|c} A & \bar{C} \\ D & \begin{array}{c} B\\ \bar{A}\end{array}\end{array} \\ B.C.F \end{array} & \begin{array}{c} D\\ B\\ \bar{C}\\ \bar{F}\end{array}\end{array}\right|$$

Le produel $\left|\begin{array}{c} D\\ B\\ \bar{C}\\ \bar{F}\end{array}\right|$ contient le consensus dual $\left|\begin{array}{c} D\\ B\\ \bar{C}\end{array}\right|$

d'où,

$$F_1 = \left|\begin{array}{c} \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} A\\ D\end{array} & \begin{array}{c}\bar{C}\\ B\\ \bar{A}\end{array}\end{array} \\ B.C.F \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} A\,.\,\bar{C} \\ A\,.\,B \\ D\,.\,\bar{A} \\ B.C.F \end{array}\right|$$

Nous pouvons encore écrire : $F_1 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} A\\ D\\ B.C.F\end{array} & \begin{array}{c}\bar{A}\\ B\\ \bar{C}\end{array}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} A & A & A & \bar{A} \\ D & D & D & B \\ B & C & F & \bar{C}\end{array}\right|$

La recherche des consensus conduit souvent à la simplification optimale des fonctions binaires. Elle complète utilement les méthodes de simplifications par mises en facteur transpositions et adjacences.

Ces quatres méthodes combinées permettent en général, lorsqu'elles sont utilisées judicieusement, d'obtenir des formes minimales.

2. 6. Simplifications par adjacences

Les simplifications par adjacences sont les premières qui ont été utilisées en algèbre de "BOOLE". Elles étaient alors les plus faciles à mettre en oeuvre et ont donné naissance à différentes méthodes comme celle établie par "QUINE et Mc CLUSKEY" ou celles des

diagrammes de "VENN" et de "VEITCH" que nous citons simplement pour mémoire.

Nous développerons, par contre, la méthode des diagrammes de "KARNAUGH" parce que ces diagrammes sont assimilables aux tracés de tables de vérité particulières dans lesquelles les adjacences sont topologiquement groupées ou bien se correspondent géométriquement par symétrie.

Le diagramme de KARNAUGH se présente sous la forme d'un carré ou d'un rectangle selon la parité du nombre des variables. L'ensemble des variables est généralement partagé en deux sous-ensembles contenant, à une unité près, le même nombre de variables.

Au nombre de combinaisons de valeurs de ces deux sous-ensembles, on fait correspondre respectivement le nombre des cases de chacun des côtés du rectangle ou du carré. Il suffit ensuite de ranger les combinaisons de valeurs des variables dans un ordre respectant les adjacences par groupements ou symétries comme le précisent les exemples suivants :

Cas de deux variables :

A \ B	0	1
0	0	1
1	2	3

Cas de trois variables :

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Il est intéressant, comme cela est fait sur les exemples traités, de repérer chaque case par l'équivalent décimal du nombre binaire associé à la combinaison de valeurs qui lui correspond.

Cas de quatre variables :

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Cas de cinq variables :

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

Pour utiliser le diagramme de "KARNAUGH", on porte dans chacune des cases du carré ou du rectangle, la valeur que prend la fonction binaire envisagée pour la combinaison de valeurs des variables qui correspond justement à cette case. Puis on constitue une table de vérité réduite, soit par rapport aux "0", soit par rapport aux "1" de la fonction selon ce qui paraît le plus simple, en tenant compte des adjacences possibles qui sont localisées avec facilité grâce à la distribution topologique particulière du diagramme. Il suffit ensuite d'établir la fonction à partir de la table de vérité réduite. Avec un peu d'habitude, on peut tirer la fonction directement du diagramme sous forme de produits ou de produels.

La méthode du diagramme de "KARNAUGH" est intéressante et permet des simplifications rapides, mais présente l'inconvénient de n'utiliser que les adjacences comme mode de recherche des implicants. Le choix des groupements et des symétries reste arbitraire et la méthode des mises en facteur ou celle des consensus la complètent utilement.

2.6.1. Exemples :

Les variables étant rangées dans l'ordre A, B, C, D, écrire à l'aide du diagramme de "KARNAUGH" la fonction binaire simplifiée égale à zéro pour les combinaisons 3 (0011), 7 (0111), 8 (1000), 9 (1001), 14 (1110) et 15 (1111) des valeurs des variables.

On trace le diagramme de KARNAUGH pour les quatre variables A, B, C et D. On inscrit "0" dans les cases correspondant à 3, 7, 8, 9, 14 et 15 et "1" dans les autres cases.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{1}	0_{3}	1_{2}
01	1_{4}	1_{5}	0_{7}	1_{6}
11	1_{12}	1_{13}	0_{15}	0_{14}
10	0_{8}	0_{9}	1_{11}	1_{10}

En groupant les cases adjacentes 3-7, 8-9 et 14-15, on obtient la table de vérité réduite suivante :

Combinaisons groupées	A	B	C	D	F
3-7	0	∅	1	1	0
8-9	1	0	0	∅	0
14-15	1	1	1	∅	0

ce qui permet d'écrire :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} A & \bar{A} & \bar{A} \\ \bar{C} & B & \bar{B} \\ \bar{D} & C & \bar{C} \end{array}\right|$$

Mais on peut aussi bien grouper les cases adjacentes 0-1-4-5, 0-2-4-6, 4-5-12-13, 10-11 et l'on obtient la table de vérité réduite relative aux "1" de la fonction binaire.

Combinaisons groupées	A	B	C	D	F
0-1-4-5	0	∅	0	∅	1
0-2-4-6	0	∅	∅	0	1
4-5-12-13	∅	1	0	∅	1
10-11	1	0	1	∅	1

ce qui donne :

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{A}\ .\ \bar{C} \\ \bar{A}\ .\ \bar{D} \\ B\ .\ \bar{C} \\ A\ .\ \bar{B}\ .\ C \end{array}\right|$$

En utilisant les propriétés des fonctions carrées biformes on peut écrire successivement :

$$\left|\begin{array}{c} \bar{A}\ .\ \bar{C} \\ \bar{A}\ .\ \bar{D} \\ \bar{A}\ .\ B\ .\ \bar{C} \\ A\ .\ B\ .\ \bar{C} \\ A\ .\ \bar{B}\ .\ C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{A} & \begin{array}{c} \bar{C} \\ \bar{D} \\ B.\bar{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} B.\bar{C} \\ C.\bar{B} \end{array} & A \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{A} & A \\ \begin{array}{c|c} B & \bar{C} \\ C & \bar{B} \end{array} & \begin{array}{c} \bar{C} \\ \bar{D} \end{array} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \bar{A} & \bar{A} & A \\ B & \bar{B} & \bar{C} \\ C & \bar{C} & \bar{D} \end{array}\right|$$

Le diagramme de KARNAUGH se révèle vraiment utile dans le cas où les fonctions binaires sont incomplètement définies et présentent un certain nombre de combinaisons de variables disponibles qui ne sont jamais réalisées et pour lesquelles nous pouvons attribuer à la fonction aussi bien la valeur "1" que la valeur "0" selon les simplifications possibles.

Donnons-nous par exemple une fonction de cinq variables x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 rangées dans l'ordre inverse des indices pour pouvoir leur faire correspondre les puissances de "2" des nombres binaires associés.

Il s'agit d'écrire la fonction binaire "F" égale à l'unité pour les combinaisons 1-3-7-8-10-12-17-20.

Les combinaisons disponibles sont les suivantes :

0 - 5 - 6 - 9 - 11 - 14 - 16 - 18 - 21 - 22 .

La fonction est égale à zéro pour les combinaisons qui n'ont pas été considérées, c'est-à-dire :

2 - 4 - 13 - 15 - 19 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - 31.

Les données permettent de tracer le diagramme de KARNAUGH suivant :

$x_5 x_4$ \ $x_3 x_2 x_1$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	$\emptyset_{0}$	1_{1}	1_{3}	0_{2}	$\emptyset_{6}$	1_{7}	$\emptyset_{5}$	0_{4}
01	1_{8}	$\emptyset_{9}$	$\emptyset_{11}$	1_{10}	$\emptyset_{14}$	0_{15}	0_{13}	1_{12}
11	0_{24}	0_{25}	0_{27}	0_{26}	0_{30}	0_{31}	0_{29}	0_{28}
10	$\emptyset_{16}$	1_{17}	0_{19}	$\emptyset_{18}$	$\emptyset_{22}$	0_{23}	$\emptyset_{21}$	1_{20}

Nous pouvons tirer du diagramme la table de vérité réduite relative aux valeurs "1" de la fonction "F" en utilisant au mieux les combinaisons disponibles repérées par le symbole "∅".

Combinaisons groupées	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	F
1 - 3 - 5 - 7	0	0	∅	∅	1	1
8 - 10 - 12 - 14	0	1	∅	∅	0	1
16 - 17 - 20 - 21	1	0	∅	0	∅	1

d'où

$$F = \left|\begin{array}{c} \overline{x_5}\cdot\overline{x_4}\cdot x_1 \\ \overline{x_5}\cdot x_4\cdot\overline{x_1} \\ x_5\cdot\overline{x_4}\cdot\overline{x_2} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} \overline{x_5}\left|\begin{array}{c} \overline{x_4}\cdot x_1 \\ \overline{x_1}\cdot x_4 \end{array}\right. \\ \overline{x_4}\cdot\overline{x_2}\cdot x_5 \end{array}\right|$$

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_4} \\ x_4 & \overline{x_4} & \overline{x_5} & \overline{x_5} \\ x_5 & x_5 & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \overline{x_4} & \overline{x_4} & \overline{x_2} \\ x_4 & \overline{x_1} & \overline{x_5} & \overline{x_5} \\ x_5 & & & \end{array}\right|$$

Nous pouvons également dresser une table de vérité réduite relative aux zéros de la fonction "F" en utilisant les combinaisons disponibles.

Combinaisons groupées	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	F
0 - 2 - 4 - 6	0	0	∅	∅	0	0
9-11-13-15-25-27-29-31	∅	1	∅	∅	1	0
24-25-26-27-28-29-30-31	1	1	∅	∅	∅	0
18-19-22-23-26-27-30-31	1	∅	∅	1	∅	0

d'où

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_4} & \overline{x_2} \\ x_4 & \overline{x_4} & \overline{x_5} & \overline{x_5} \\ x_5 & & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x_1 & \overline{x_1}\cdot\overline{x_5} \\ x_4 & \overline{x_2}\cdot\overline{x_4} \\ x_5 & \overline{x_4}\cdot\overline{x_5} \end{array}\right|$$

Nous pouvons également écrire "F" sous la forme :

$$F = \left|\begin{array}{c} \overline{x_5}\cdot\overline{x_1}\cdot x_4 \\ \overline{x_5}\cdot x_1\cdot\overline{x_4} \\ x_5\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_4} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \overline{x_5}\left|\begin{array}{c} \overline{x_1}\cdot x_4 \\ x_1 \end{array}\right| \overline{x_4} \\ x_5\cdot\overline{x_2} \end{array}\right|$$

2.7. Simplifications par transpositions, mises en facteur et adjacences.

Nous avons constaté dans ce qui précède que les transpositions, les mises en facteur et les adjacences sont des moyens qui permettent d'opérer des simplifications sur les

fonctions binaires.

La méthode que nous proposons réunit ces trois moyens de façon efficace et systématique. Elle permet de simplifier une fonction binaire mise sous forme canonique avec le maximum de rapidité.

Nous savons qu'une forme canonique est en général une fonction carrée biforme lorsque l'une des variables a été mise en facteur partiel.

$$F\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n) = \left|\begin{array}{c} x_i\ .\ G \\ H\ .\ \overline{x_i} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c|c} x_i & G \\ H & \overline{x_i} \end{array}\right|$$

Si "F" est une fonction canonique, "H" et "G" sont également des fonctions canoniques qui ne contiennent plus le variable "x_i".

$$\left|\begin{array}{l} G = G\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots\ ,\ x_n\ ) \\ H = H\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots\ ,\ x_n\ ) \end{array}\right.$$

Elles sont donc également carrées biformes et les fonctions diagonales résiduelles sont toujours des fonctions canoniques sur lesquelles il est donc possible d'effectuer des transpositions.

Soit "p" le nombre de produits ou de produels élémentaires d'une fonction canonique. Le nombre total des variables littérales qui apparaissent dans la fonction est égal à " p.n " si " n " désigne le nombre des variables indépendantes.

Le nombre total de variables littérales qui apparaissent après la mise en facteur partielle de la variable "x_i" est égal à :

$p\,.(n-1) + 2$, si "x_i" est une variable biforme

et $p\,.\,(n-1) + 1$, si "x_i" est une variable monoforme.

Une fonction binaire peut être simplifiée, en opérant successivement des mises en facteur partielles, des transpositions et des réductions par adjacences.

Supposons, en effet, que la fonction canonique de "n" variables F (x_1, x_2,... x_n) contenant "p" termes tels que $p = 2^{n-1} - m$ ("m" entier, positif, inférieur à 2^{n-1}), soit écrite sous forme de fonction carrée biforme par mise en facteur partielle de la variable "x_i" de telle manière que les deux fonctions diagonales "H" et "G" contiennent respectivement p_o et p_1 termes (produits ou produels).

Nous avons nécessairement $p_o + p_1 = p = 2^{n-1}$-m. Les "p_o" et "p_1" termes contiennent chacun les (n-1) variables (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ... , x_n).

2.7.1. Si $p_o < 2^{n-2}$ et $p_1 < 2^{n-2}$, aucune transposition ne peut être envisagée.

S'il existe un nombre "a" ($a < p_o$ et $a < p_1$) d'adjacences relatives à la variable "x_i", c'est-à-dire un nombre "a" de termes communs aux fonctions "H" et "G", on peut opérer une simplification par adjacences, le nombre total réduit des variables littérales étant égal à :

$N_1 = (p - a)\,.\,(n - 1) + 2$ lorsque p_o et p_1 sont tous deux différents de zéro.

et $N_1 = p\,.\,(n - 1) + 1$, dans le cas où "x_i" est monoforme et où l'une des valeurs

p_o ou p_1 est nulle ainsi que "a" .

La simplification par adjacences, relative à la variable "x_i", après mise en facteur partielle de la variable "x_i" fournit donc une réduction des variables littérales égale à :

$$\Delta N_1 = p.(n-1) + 2 - (p-a).(n-1) - 2$$

$$\boxed{\Delta N_1 = a.(n-1)}$$

2.7.2. Supposons par contre $2^{n-2} < p_o$.

($p_o = 2^{n-2} + k$, k entier positif et inférieur à 2^{n-2}).

Dans ces conditions, la fonction diagonale "H" qui comprend, $p_o = 2^{n-2} + k$ termes, peut être transposée et le nombre de termes, après transposition, est égal à :

$$p_2 = 2^{n-1} - p_o = 2^{n-2} - k$$

Le nombre total des variables littérales qui apparaissent dans la fonction "F" ainsi simplifiée, est alors égal à :

$N_2 = (p_2 + p_1).(n-1) + 2$ lorsque "x_i" est biforme

$N_2 = p_2.(n-1) + 1$ lorsque "x_i" est monoforme.

La simplification par transposition après mise en facteur partiel de la variable "x_i" fournit donc une réduction des variables littérales égale à :

$$\begin{aligned} \Delta N_2 &= p.(n-1) + 2 - (p_2 + p_1).(n-1) - 2 \\ &= (p - p_2 - p_1).(n-1) = (p_o - p_2).(n-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta N_2 = 2k.(n-1)}$$

" ΔN_2 " est maximal, lorsque " k " est maximal et nous remarquons que :

$$\begin{aligned} |p_o - p_1| &= |2p_o - (p_o + p_1)| = |2p_o - p| \\ &= |2(2^{n-2} + k) - 2^{n-1} + m| = |2k + m| \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour obtenir la simplification optimale par transposition, de faire une mise en facteur partielle par rapport à l'une des variables où à la variable pour laquelle le module de la différence $|p_o - p_1|$ est maximal.

2.7.3. Théorème

Lorsqu'une fonction binaire mise sous forme canonique est simplifiée par mise

en facteur partielle d'une variable, suivie d'une réduction par transposition, la simplification est optimale lorsque la mise en facteur partielle a été faite par rapport à une variable pour laquelle le module de la différence $|p_o - p_1|$ est maximal. Dans cette formule "p_o" peut représenter le nombre de fois que la variable est écrite sous forme directe, et "p_1" le nombre de fois qu'elle est écrite sous forme complémentée, dans la fonction avant mise en facteur.

2.7.4. Méthode pratique

Pour opérer en pratique une simplification par transpositions, mises en facteur et adjacences, on procède de la manière suivante :

- on écrit d'abord la fonction sous forme canonique si elle ne l'était pas, et on la transpose dans le cas où le nombre de termes (produits ou produels élémentaires) est supérieur à "2^{n-1}" (n étant le nombre de variables). On calcule ensuite, pour chaque variable, le module $|p_o - p_1|$.

On écrit la fonction carrée biforme relative à la variable, ou à l'une des variables "x_i" qui correspond aux maximum du module $|p_o - p_1|$. "H" et "G" étant les fonctions diagonales de la fonction carrée biforme obtenue, on détermine le nombre "a" des termes communs à ces fonctions diagonales.

Si "H" et "G" ne sont pas réductibles par transposition, on simplifie par adjacences en écrivant selon le cas :

$$\left|\begin{array}{c} x_i \,.\, H_1 \\ G_1 \,.\, \overline{x_i} \\ J_1 \end{array}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{c|c} x_i & H_1 \\ G_1 & \overline{x_i} \end{array}\right| K_1$$

"H_1" et "G_1" étant obtenues à partir des fonctions "H" et "G", en supprimant dans ces dernières les termes communs. J_1 et K_1, représentent donc respectivement et selon le cas, le produel ou le produit des termes communs à "G" et "H" .

- Lorsque l'une des fonctions diagonales, "H" par exemple, est réductible par transposition, c'est-à-dire que le nombre de termes qu'elle comprend est égal à $2^{n-2} + k$, on calcule "k" que l'on compare au nombre d'adjacences "a" .

  - Si $2k \leqslant a$, on procède comme précédemment.
  - Si $a < 2k$, on transpose la fonction "H" mais on écrit "G_1" et "J_1" ou "K_1" en tenant compte des adjacences.

En appelant "H_t" la fonction transposée de "H" ($H_t = H$), on obtient selon le cas :

$$\left|\begin{array}{c} x_i \,.\, H_t \\ G_1 \,.\, \overline{x_i} \\ J_1 \end{array}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{c|c} x_i & H_t \\ G_1 & \overline{x_i} \end{array}\right| K_1$$

On poursuit la simplification en répétant les mêmes opérations pour les fonctions canoniques H_t, H_1, G_1, J_1 ou K_1 jusqu'à épuisement du nombre des variables.

2.7.5. Exemple :

Simplifier la fonction F (a, b, c, d) égale à l'unité pour les combinaisons de valeurs binaires qui correspondent aux nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13 des quatres variables a, b, c, d rangées dans l'ordre alphabétique.

La fonction, écrite sous la première forme canonique, comprendrait dix produits alors que le nombre total de combinaisons de valeurs des quatre variables est égal à $2^4 = 16$.

Nous pouvons donc simplifier par transposition en écrivant la fonction sous la deuxième forme canonique qui comporte les 16 - 10 = 6 combinaisons complémentaires 0, 1, 8, 11, 14 et 15.

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & \bar a & a & \bar a & a & \bar a \\ b & b & b & \bar b & \bar b & \bar b \\ c & c & c & c & \bar c & \bar c \\ d & d & \bar d & \bar d & \bar d & \bar d \\ 0 & 1 & 8 & 11 & 14 & 15 \end{array}\right|$$

Le calcul des modules $|p_o - p_1|$ fournit :

- pour "a" $|p_o - p_1| = 0$
- pour "b" $|p_o - p_1| = 0$
- pour "c" $|p_o - p_1| = 2$
- pour "d" $|p_o - p_1| = 2$

Nous pouvons donc mettre "c" ou "d" en facteur dual. Etablissons la fonction carrée biforme relative à "d" par exemple

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{d} & \multicolumn{4}{c}{\bar d} \\ a & \bar a & a & \bar a & a & \bar a \\ b & b & b & \bar b & \bar b & \bar b \\ c & c & c & c & \bar c & \bar c \end{array}\right|$$

Nous constatons qu'il existe une adjacence, indiquée par les flèches, mais que les fonctions diagonales ne sont pas susceptibles d'être simplifiées par transposition.

Nous écrivons donc :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} & & \left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ \bar b & \bar b & \bar b \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right. \\ a & d & \\ b & \bar a & \\ c & b & \\ & c & \bar d \end{array}\right|$$

Sans qu'il soit besoin de calculer les valeurs des modules $|p_o - p_1|$, nous voyons que $\bar b$ peut être mis en facteur dual dans la fonction diagonale :

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ b & \bar b & b \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\bar b} \\ a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right|$$

$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right|$ peut être simplifiée par transposition.

Cette fonction est égale au complément du produel $\left|\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\right|$ qui n'y figure pas et qui correspond à la quatrième combinaison possible des deux variables "a" et "c".

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right| = \overline{\left|\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\right|} = \bar a \,.\, \bar c$$

Finalement :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} a & d & \bar b \\ & \bar a & \\ b & & \bar a . \bar c \\ & b & \\ c & & \bar d \\ & c & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} c & \bar b \\ a.d & \bar a . \bar c \\ b & \bar d \end{array}\right|$$

2.8. Fonctions carrées

La propriété des fonctions carrées biformes qui permet de passer très simplement d'un produit à un produel ou vice-versa, peut s'étendre à une fonction carrée sous certaines conditions.

Nous allons rechercher les conditions générales auxquelles doivent satisfaire les termes f_1, f_2, f_3, et f_4 d'une fonction carrée pour que soit vérifiée l'identité :

$$\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_1 \,.\, f_2 \\ f_4 \,.\, f_3 \end{array}\right|$$

Cette identité mise sous forme algébrique s'écrit :

$$[\, 1 - (1 - f_1) \,.\, (1 - f_4) \,] \,.\, [\, 1 - (1 - f_2) \,.\, (1 - f_3) \,] = 1 - (1 - f_1 f_2) \,.\, (1 - f_4 f_3)$$

Ce qui donne après simplification :

$$f_1 . f_3 . (1 - f_2) \,.\, (1 - f_4) + f_2 . f_4 . (1 - f_1) \,.\, (1 - f_3) = 0$$

Théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'identité $\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_1 \,.\, f_2 \\ f_4 \,.\, f_3 \end{array}\right|$ soit vérifiée, est que les f_1, f_2, f_3, et f_4 qui apparaissent dans les fonctions carrées, vérifient simultanément les deux identités :

$$f_1 \,.\, f_3 \,.\, \bar f_2 \,.\, \bar f_4 = 0 \quad \text{et} \quad f_2 \,.\, f_4 \,.\, \bar f_1 \,.\, \bar f_3 = 0$$

Notons que les fonctions carrées "biformes" correspondent aux deux cas particuliers où :

$(f_1 \cdot f_3 = 0 ,\quad \overline{f}_1 \cdot \overline{f}_3 = 0)$ soit $(f_1 = \overline{f}_3)$

et $(f_2 \cdot f_4 = 0 ,\quad \overline{f}_2 \cdot \overline{f}_4 = 0)$ soit $(f_2 = \overline{f}_4)$

Parmi les nombreuses solutions possibles, il est intéressant de retenir celles qui correspondent respectivement aux relations :

$$f_1 \cdot f_3 = f_2 \cdot f_4 = 0$$

et $\overline{f}_1 \cdot \overline{f}_3 = \overline{f}_2 \cdot \overline{f}_4 = 0$ soit $\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_2 \\ f_4 \end{array}\right| = 1$

Si dans une fonction binaire mise sous forme "carrée" les produits des termes diagonaux sont respectivement nuls ou leurs produels respectivement égaux à l'unité, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_2 \\ f_4 \cdot f_3 \end{array}\right|}$$

Les conditions précédentes sont en particulier vérifiées lorsque :

$$f_1 = A_o \cdot \Phi_o ,\quad f_2 = A_1 \cdot \Phi_1 ,\quad f_3 = B_o \cdot \overline{\Phi}_o \quad \text{et} \quad f_4 = B_1 \cdot \overline{\Phi}_1$$

ou lorsque : $f_1 = \left|\begin{array}{c} A_o \\ \Phi_o \end{array}\right| ,\quad f_2 = \left|\begin{array}{c} A_1 \\ \Phi_1 \end{array}\right| ,\quad f_3 = \left|\begin{array}{c} B_o \\ \overline{\Phi}_o \end{array}\right| \quad \text{et} \quad f_4 = \left|\begin{array}{c} B_1 \\ \overline{\Phi}_1 \end{array}\right|$

Cela entraîne différentes égalités qu'il est intéressant d'utiliser au cours de simplifications ; telles les égalités suivantes :

$$\left|\begin{array}{c} \Phi_o \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_p \cdot \overline{\Phi}_1 \\ \Phi_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_q \cdot \overline{\Phi}_o \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Phi_o \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_i & a_{i+1} \cdots a_p \cdot \overline{\Phi}_1 \\ \Phi_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_j & b_{j+1} \cdots b_q \cdot \overline{\Phi}_o \end{array}\right|$$

$$\forall \ (i, j)$$

ou

$$\left|\begin{array}{c|c} \Phi_o & \Phi_1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_p & b_q \\ \overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_o \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Phi_o & \Phi_1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_i & b_{j+1} \\ a_{i+1} & b_{j+1} \\ \cdot & \cdot \\ a_p & b_q \\ \overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_o \end{array}\right| \quad \forall \ (i, j)$$

Les produits et les produels étant commutatifs, les permutations respectives des facteurs ou des facteurs duals permettent d'obtenir d'autres égalités de même forme sous réserve d'écrire toujours des termes complémentaires aux extrémités des diagonales des fonctions carrées.

EXERCICES D'APPLICATION RELATIFS AU CHAPITRE II

1 - On donne la table de vérité incomplète suivante :

	A	B	C	D	F
3	0	0	1	1	
9	1	0	0	1	
11	1	0	1	1	1
13	1	1	0	1	
15	1	1	1	1	

Ecrire la fonction "F" sous forme canonique puis la simplifier en utilisant le diagramme de "KARNAUGH".

Vérifier la simplification par la méthode des transpositions, mises en facteur et adjacences.

Réponse : $F = D \,.\left| \begin{array}{c} A \\ \overline{B} . C \end{array} \right|$

2 - On considère le produel des produits de quatre variables A, B, C, D (première forme canonique) qui correspondent aux combinaisons (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15).

Transposer la fonction (deuxième forme canonique).

La simplifier en utilisant la méthode des transpositions, mises en facteur et adjacences.

Vérifier la simplification par la méthode de "KARNAUGH" .

Réponses $\pi = \left| \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \middle| \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ \overline{D} \end{array} \middle| \begin{array}{c} A \\ B \\ \overline{C} \\ D \end{array} \middle| \begin{array}{c} \overline{A} \\ B \\ \overline{C} \\ \overline{D} \end{array} \middle| \begin{array}{c} A \\ B \\ \overline{C} \\ \overline{D} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} B \\ A . \left| \begin{array}{c} \overline{C} \\ \overline{D} \end{array} \right| \end{array} \right|$

3 - Simplifier par la méthode des "consensus", la fonction suivante :

$$F = \left| \begin{array}{c} A \\ \overline{C} \\ D \end{array} \middle| \begin{array}{c} A . B \\ A . C . D \\ B . \overline{C} . D \\ \overline{B} . C . D \end{array} \right|$$

Réponses : $F = \left| \begin{array}{c} A . B \\ B . \overline{C} . D \\ \overline{B} . C . D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} B . \left| \begin{array}{c} A \\ \overline{C} . D \end{array} \right| \\ C.D . \overline{B} \end{array} \right|$

$$F = \left| \begin{array}{c} A \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{array} \middle| \begin{array}{c} A \\ D \end{array} \middle| \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \middle| \begin{array}{c} B \\ D \end{array} \right|$$

4 - On donne la table de vérité réduite suivante :

x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	∅	1	0	
0	1	1	∅	∅	
1	0	1	∅	∅	
∅	0	0	1	∅	1
∅	∅	0	1	1	
1	1	∅	1	1	
1	1	1	∅	∅	

- écrire la fonction "f" qui correspond à cette table de vérité.
- calculer les "consensus" relatifs à chaque fonction carrée biforme de chacune des variables.
- simplifier la fonction en utilisant les consensus calculés et l'écrire successivement sous forme de produit de produels et sous forme de produel de produits en constatant qu'elle est carrée biforme en "x_2" .

Réponses :

- consensus relatif à "x_o" - $x_1 . x_2$
- consensus relatif à "x_1" - $\left| \begin{array}{c} x_o . x_2 \\ x_o . x_3 . x_4 \end{array} \right|$
- consensus relatif à "x_2" - $\left| \begin{array}{c} x_o . \overline{x}_1 . x_3 \\ x_1 . x_3 . x_4 \end{array} \right|$

Il n'existe pas de consensus relatif à "x_3" qui est monoforme.

- consensus relatif à "x_4" - $x_o . \overline{x}_1 . \overline{x}_2 . x_3$

fonction simplifiée : $f = \left| \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} x_o \\ x_1 \\ \bar{x}_2 \end{array} & \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_4 \end{array} \right. \end{array} \end{array} \right|$

$$f = \left| \begin{array}{c|c|c} x_o & \bar{x}_1 & \\ x_1 & x_2 & \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \end{array} \\ \bar{x}_2 & x_4 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot x_2 \\ x_1 \cdot x_2 \\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \end{array} \right|$$

5 – Simplifier les fonctions :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} A \cdot B \\ \bar{B} \cdot \bar{C} \\ C \cdot A \end{array} \right| , \quad f_2 = \left| \begin{array}{c} A \cdot B \\ C \cdot \bar{A} \\ A \cdot \bar{D} \\ D \cdot \bar{C} \\ C \cdot A \end{array} \right|$$

$$f_3 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_1 \cdot x_3 \\ x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot x_2 \\ \bar{x}_o \cdot \bar{x}_1 \cdot x_2 \\ x_o \cdot x_1 \cdot x_3 \end{array} \right| , \quad f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o \\ \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ x_2 & \bar{x}_1 \end{array} \end{array} \right| \begin{array}{c} x_1 \\ \bar{x}_2 \end{array} \left| \begin{array}{c} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \end{array} \right| , \quad f_5 = \left| \begin{array}{c} A \left| \begin{array}{c} \bar{B} \\ C \end{array} \right| \begin{array}{c} B \\ \bar{C} \end{array} \\ A . \bar{B} . C \end{array} \right|$$

Réponses :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} A \\ \bar{B} \cdot \bar{C} \end{array} \right| , \quad f_2 = \left| \begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array} \right| , \quad f_3 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_3 \end{array} \right|$$

$$f_4 = x_o \cdot \left| \begin{array}{c|c} x_1 & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_o \cdot x_1 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right| , \quad f_5 = A \left| \begin{array}{c} \bar{B} \\ C \end{array} \right|$$

6 – Démontrer que si une fonction canonique, mise sous la forme de fonction carrée biforme, ne contient aucune adjacence relative à la variable mise en facteur partiel, son consensus est identiquement nul dans le cas de la première forme canonique (produel de produits) et son consensus dual est identiquement égal à l'unité dans le cas de la deuxième forme canonique (produits de produels).

7 – On donne dans l'ordre alphabétique les six variables (A, B, C, D, E, F) et le produit des produels correspondant aux combinaisons suivantes :

I (4, 5, 7, 12, 13, 15, 20, 21, 23, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63).

Dans l'équivalence binaire des nombres indiqués, on affecte à la variable "A" le poids "32" et successivement les poids 16, 8, 4, 2 et 1 aux variables B, C, D, E, F.

Simplifier la fonction "I" par mises en facteur, transpositions et adjacences

successives et vérifier le résultat par la méthode de "KARNAUGH".

Réponse : $I = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{D} \\ B . \bar{C} & E . \bar{F} \end{array} \right|$

8 – Etablir les tables de vérité réduites relatives aux valeurs "0" puis aux valeurs "1" de la fonction $f_1 = \left| \begin{array}{c} A \\ \bar{B} \cdot \bar{C} \end{array} \right|$

Etablir ensuite la table de vérité complète de "f_1" et les deux formes canoniques correspondantes.

Réponses :

Tables de vérité réduites

A	B	C	f_1
1	∅	∅	1
∅	0	0	1

A	B	C	f_1
0	1	∅	0
0	∅	1	0

Table de vérité complète

	A	B	C	f_1
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Première forme canonique

$$f_1 = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A} . \bar{B} . \bar{C} & 0 \\ A . \bar{B} . \bar{C} & 4 \\ A . \bar{B} . C & 5 \\ A . B . \bar{C} & 6 \\ A . B . C & 7 \end{array} \right.$$

Deuxième forme canonique

$$f_1 = \left| \begin{array}{c|c|c} A & A & A \\ B & \bar{B} & \bar{B} \\ \bar{C} & C & \bar{C} \end{array} \right|$$

9 – Etablir les tables de vérité réduites relatives à la fonction simplifiée $f_4 = x_o \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_1 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right|$.

En déduire la première forme canonique (produel de produits) en partant directement de la forme donnée de "f_4".

Réponses :

On peut écrire : $f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_o \cdot x_1 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right| = x_o \cdot \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & x_1 \end{array} \right|$

Ce qui permet d'établir les deux tables de vérité réduites :

x_o	x_1	x_2	x_3	f_4
1	0	0	∅	1
1	1	∅	0	1

x_o	x_1	x_2	x_3	f_4
0	∅	∅	∅	0
∅	1	∅	1	0
∅	0	1	∅	0

Pour obtenir la première forme canonique, il suffit de multiplier le premier produit de "f_4" par $\left| \begin{array}{c} x_3 \\ \overline{x_3} \end{array} \right|$ et le second produit par $\left| \begin{array}{c} x_2 \\ \overline{x_2} \end{array} \right|$

$$f_4 = \left| \begin{array}{l} x_o \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ x_o \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ x_o \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ x_o \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \end{array} \right|$$

10 – Ecrire la fonction "F" qui correspond à la table de vérité réduite suivante :

A	B	C	D	F
0	∅	∅	0	0
0	1	∅	∅	0
1	∅	1	∅	0
∅	1	1	0	0

Puis, la simplifier par la méthode des consensus.

Réponse :

$$F = \left| \begin{array}{c} A \\ D \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} A \\ \overline{B} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overline{A} \\ \overline{C} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overline{B} \\ \overline{C} \\ D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A \\ D \cdot \overline{B} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overline{C} \\ \overline{A} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A \cdot \overline{C} \\ \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot D \end{array} \right|$$

11 – Simplifier les fonctions suivantes :

$$A = \left| \begin{array}{l} x_o \cdot x_1 \\ x_o \cdot x_2 \\ x_o \cdot x_3 \\ \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \end{array} \right| , \quad B = \left| \begin{array}{l} \overline{x_o} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ \overline{x_o} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ x_o \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \\ x_o \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ x_o \cdot x_2 \cdot x_3 \end{array} \right| , \quad C = \left| \begin{array}{c} x_o \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_o \\ x_1 \\ \overline{x_2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overline{x_o} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overline{x_o} \\ x_1 \\ \overline{x_2} \end{array} \right|$$

Réponse :

$$A = \left| \begin{array}{c} x_o \\ \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \end{array} \right| , \quad B = \left| \begin{array}{c} x_2 \\ x_o \cdot \overline{x_1} \end{array} \right| , \quad C = x_1$$

Manuscrit reçu le 4 avril 1968

FIN

CEA-R-3534 (2)

9.0

CEA-R-3534 (2)

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

ANALYSE BINAIRE

2éme partie

APPLICATIONS ET FONCTIONS DE TRANSCODAGE

par

René-Louis VALLEE

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA-R-3534 (2)

1969

Fa

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

CEN SACLAY BP n°2, 91-GIF-sur-YVETTE-France

CEA-R-3534(2) - VALLEE René-Louis

ANALYSE BINAIRE - 2ème partie
APPLICATIONS ET FONCTIONS DE TRANSCODAGE

Sommaire. - L'analyse binaire a pour objet l'étude mathématique des propriétés d'ensembles binaires algébriques et pour but l'élaboration de méthodes simples, rigoureuses et pratiques, destinées aux techniciens, aux ingénieurs et à tous ceux qu'intéresse directement le traitement numérique de l'information, discipline en expansion rapide qui, déjà, en électronique nucléaire comme dans de nombreux autres domaines de la recherche, tend à jouer un rôle essentiel sinon déterminant.

1969 68 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-R-3534(2) - VALLEE René-Louis

BINARY ANALYSIS - Part 2
APPLICATIONS AND FUNCTIONS OF TRANSCODING

Summary. - The study of binary groups under their mathematical aspects constitutes the matter of binary analysis, the purpose of which consists in developping altogether simple, rigorous and practical methods needed by the technicians, the engineers and all those who may be mainly concerned by digital processing. This subject, fast extending if not yet deter mining however tends actually to play a main part in nuclear electronics as well as in several other research areas.

1969 68 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

PLAN DE CLASSIFICATION

1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS

2. BIOLOGIE ET MEDECINE

- **2. 1** Biologie générale
- **2. 2** Indicateurs nucléaires en biologie
- **2. 3** Médecine du travail
- **2. 4** Radiobiologie et Radioagronomie
- **2. 5** Utilisation des techniques nucléaires en médecine

3. CHIMIE

- **3. 1** Chimie générale
- **3. 2** Chimie analytique
- **3. 3** Procédés de séparation
- **3. 4** Radiochimie

4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE

5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE

6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX

- **6. 1** Fabrication, propriétés et structure des matériaux
- **6. 2** Effets des rayonnements sur les matériaux
- **6. 3** Corrosion

7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS

- **7. 1** Neutronique et physique des réacteurs
- **7. 2** Refroidissement, protection, contrôle et sécurité
- **7. 3** Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs

8. PHYSIQUE

- **8. 1** Accélérateurs
- **8. 2** Electricité, électronique, détection des rayonnements
- **8. 3** Physique des plasmas
- **8. 4** Physique des états condensés de la matière
- **8. 5** Physique corpusculaire à haute énergie
- **8. 6** Physique nucléaire
- **8. 7** Electronique quantique, lasers

9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES

10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS

- **10. 1** Protection sanitaire
- **10. 2** Contrôle des rayonnements
- **10. 3** Traitement des effluents

11. SEPARATION DES ISOTOPES

12. TECHNIQUES

- **12. 1** Mécanique des fluides - Techniques du vide
- **12. 2** Techniques des températures extrêmes
- **12. 3** Mécanique et outillage

13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE

- **13. 1** Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines
- **13. 2** Divers (documentation, administration, législation, etc...)

14. ETUDES ECONOMIQUES ET PROGRAMMES

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2 200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

The C.E.A. reports starting with n° 2 200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

- Rapport CEA-R-3534 (2) -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Département d'Electronique Générale
Service d'Instrumentation Nucléaire

ANALYSE BINAIRE

2ème partie

APPLICATIONS ET FONCTIONS DE TRANSCODAGE

par

René-Louis VALLEE

- Mai 1969 -

ANALYSE BINAIRE

2ème partie

APPLICATIONS ET FONCTIONS DE TRANSCODAGE

Faisant suite à l'étude mathématique entreprise, il apparaît intéressant, après l'examen des avantages concrets qu'offre l'analyse binaire pour la réalisation des circuits de commutation, de poursuivre, en accordant une attention particulière aux fonctions algébriques explicites discontinues dont les valeurs numériques résultent d'éléments binaires ordonnées. Ces fonctions, appelées "fonctions de transcodage" parce qu'elles traduisent, sur le plan théorique, les transformations que peuvent subir les codes d'information numériques, conservent, dans leur forme développée, le mode d'expression propre aux fonctions binaires.

Les solutions de continuité sont évitées, de telle sorte que soit conservée l'homogénéité de l'architecture proposée.

Les fonctions de transcodage, sous leurs différents aspects ; paramétrique, itératif et maillé, peuvent revêtir des formes lexicographiques diverses qui s'harmonisent avec la topologie tout en élargissant le domaine d'application des résultats obtenus lors de l'étude des fonctions binaires élémentaires.

CHAPITRE III

FONCTIONS BINAIRES ET CIRCUITS DE COMMUTATION

Malgré des bases mathématiques rigoureuses, l'analyse binaire ne présenterait aucun intérêt si elle ne constituait un outil utile, simple et adapté à la mise en équation, à l'étude et à la réalisation des circuits de commutation qui sont les constituants fondamentaux des automatismes complexes de plus en plus indispensables à l'organisation d'une société moderne.

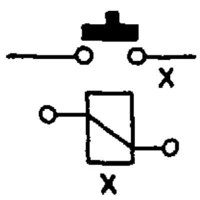
Il est donc absolument nécessaire que l'informaticien puisse établir immédiatement les liens étroits qui existent entre des résultats théoriques et l'ensemble des possibilités technologiques dans une continuité harmonieuse qui mène de la conception à la réalisation pratique.

3.1 - Circuits à relais

Un relais est constitué généralement d'un circuit magnétique sur lequel sont bobinés un ou plusieurs enroulements de commande. Le circuit magnétique comprend une armature mobile supportant des contacts à ouverture ou à fermeture dont l'état ouvert ou fermé dépend de l'excitation. Les circuits de commande et les contacts sont généralement isolés les uns des autres.

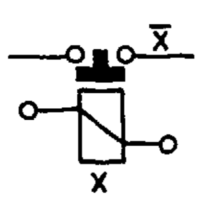
La représentation schématique d'un relais se fait en général comme l'indiquent les figures 3,11 et 3,12 ci-après.

figure 3,11



contact travail
ou normalement ouvert.

figure 3,12



contact repos
ou normalement fermé.

En désignant un relais et ses contacts par la même lettre "x" , par exemple, on peut établir des correspondances simples avec les expressions binaires.

– Si le relais est au repos (désexcité), $x = 0$. Les contacts "travail" désignés également par "x" sont ouverts. Les contacts "repos" désignés par "$\bar{x}$" sont fermés ($\bar{x} = 1$)

– Si le relais est excité, $x = 1$. Les contacts "travail" sont alors fermés ($x = 1$). Les contacts "repos" sont ouverts ($\bar{x} = 0$).

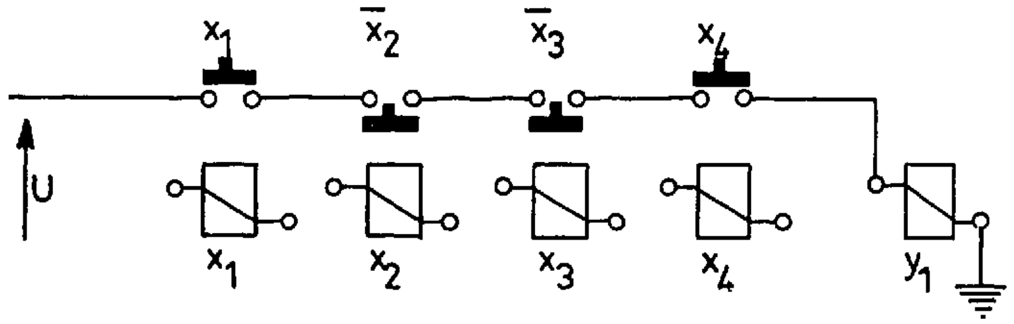
Il est ainsi possible de réaliser en pratique un produit binaire à l'aide d'une chaîne de contact montés en cascade, dans laquelle les variables directes sont des contacts "travail" et les variables complémentées des contacts "repos" des relais correspondants.

On peut également réaliser un "produel" en utilisant des contacts de relais montés en parallèle et en respectant les mêmes correspondances.

– Le produit :

$$U \cdot x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 = y_1$$

peut être représenté par la chaîne de contacts suivante :



On peut convenir, dans l'expression binaire, d'affecter à "U" la valeur "1" ou "0" selon que la tension nécessaire à l'excitation du relais "y_1" est appliquée ou non.

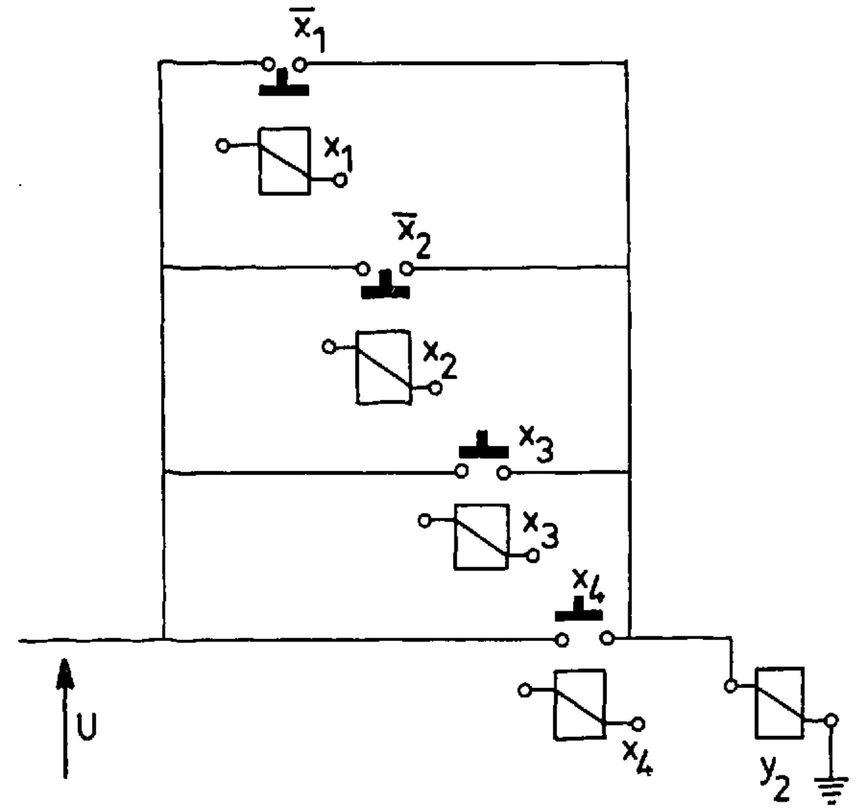
Pour que le relais "y_1" soit excité ($y_1 = 1$), il faut que la tension "U" soit appliquée ($U = 1$), que le relais "x_1" soit excité ($x_1 = 1$), que le relais "x_2" soit au repos ($\bar{x}_2 = 1$), que le relais "x_3", soit au repos ($\bar{x}_3 = 1$) et que le relais "x_4" soit excité ($x_4 = 1$).

Dans tous les autres cas, le relais "y_1" reste au repos ($y_1 = 0$). Ces conditions montrent bien l'identité de la chaîne réalisée et du produit binaire,

$$U . x_1 . \bar{x}_2 . \bar{x}_3 . x_4 = y_1 .$$

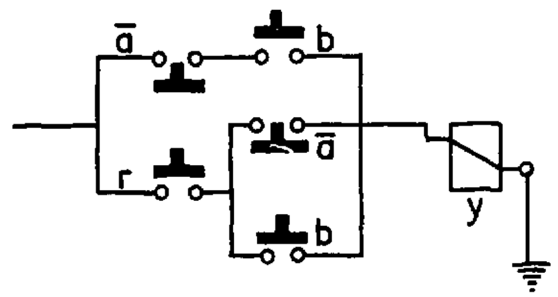
– Le "produel" : $U . \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right| = y_2$

peut également être représenté en pratique par la chaîne de contacts suivante :



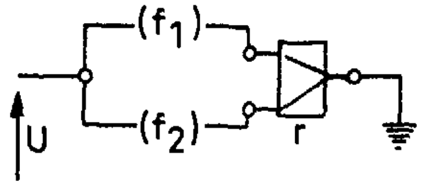
Les contacts et relais associés étant désignés par une même lettre, il n'est pas toujours nécessaire de représenter ces derniers dans un schéma.

Le schéma suivant :



correspond à la fonction $\left| \begin{array}{l} \bar{a} . b \\ r \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ b \end{array} \right. \end{array} \right| = y$

et nous constatons que le schéma même se confond avec la fonction et devient ainsi superflu. Les fonctions binaires sont donc immédiatement utilisables pour la réalisation de circuits comprenant de simples relais à contacts multiples. Certains circuits particuliers correspondent à des fonctions binaires qu'il est intéressant de déterminer. C'est le cas, par exemple, du relais "r" à deux enroulements inversés, alimentés en courant continu, de la figure ci-dessous :

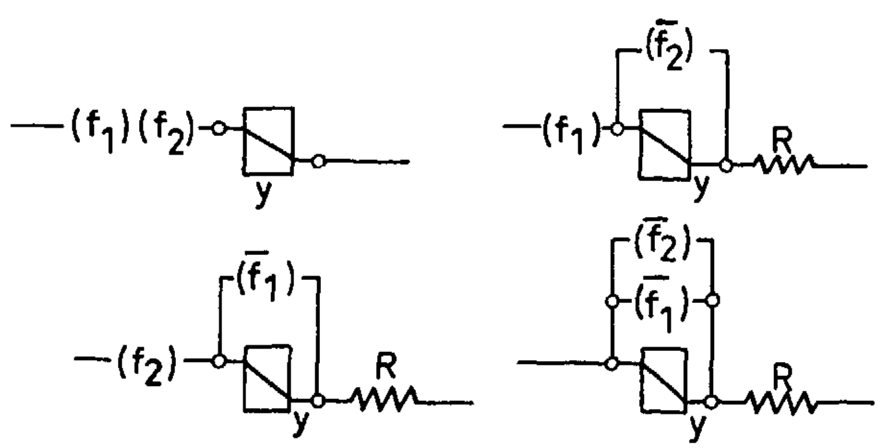


Lorsque les deux enroulements sont parcourus par des courants de même intensité, le relais reste au repos et il ne peut être excité que si $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$ ou $f_1 = 1$ et $f_2 = 0$ avec $U = 1$.

Le circuit est donc équivalent à la fonction :

$$r = U. \begin{vmatrix} f_1 . \bar{f}_2 \\ f_2 . \bar{f}_1 \end{vmatrix} = U. \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_1 \end{vmatrix}$$

- Lorsque la chaîne d'excitation d'un relais "y" est un produit "$f_1.f_2$", il est possible de réaliser l'un des schémas équivalents suivants :



Les résistances "R" évitent simplement que la source d'alimentation se trouve en court-circuit lorsque les fonctions $\bar{f}_1$ ou $\bar{f}_2$, montées en parallèle avec le relais, sont égales à l'unité.

3.2 - Circuits utilisant des semi-conducteurs :

Les progrès et les perfectionnements apportés à la fabrication des semi-conducteurs, l'amélioration en particulier de la fiabilité des circuits, ont ouvert à l'automatisme

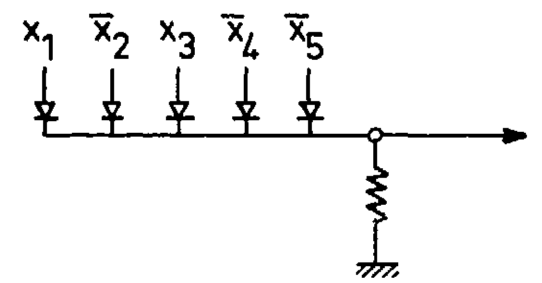
d'immenses perspectives.

Avec l'utilisation des semi-conducteurs, l'analyse binaire trouve ses applications les plus fécondes.

Les diodes sont utilisées surtout pour des transcodages faisant intervenir des "produits" (fonction ET) ou des "produels" (fonction OU) à condition, toutefois, de disposer des tensions qui correspondent aux variables directes et complémentées nécessaires à la constitution de ces fonctions.

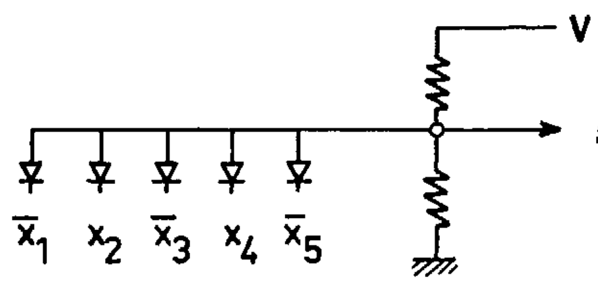
Nous avons vu qu'il était possible d'associer une variable binaire à une tension en convenant d'affecter la valeur "0" ou "1" à cette variable selon que la tension est absente ou présente au point considéré.

Il est ainsi possible, à l'aide de diodes, de réaliser par exemple la fonction "OU" et la fonction "ET" suivantes :



$$S_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ \bar{x}_2 \\ x_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{vmatrix}$$

- "produel" ou fonction "OU" à diodes

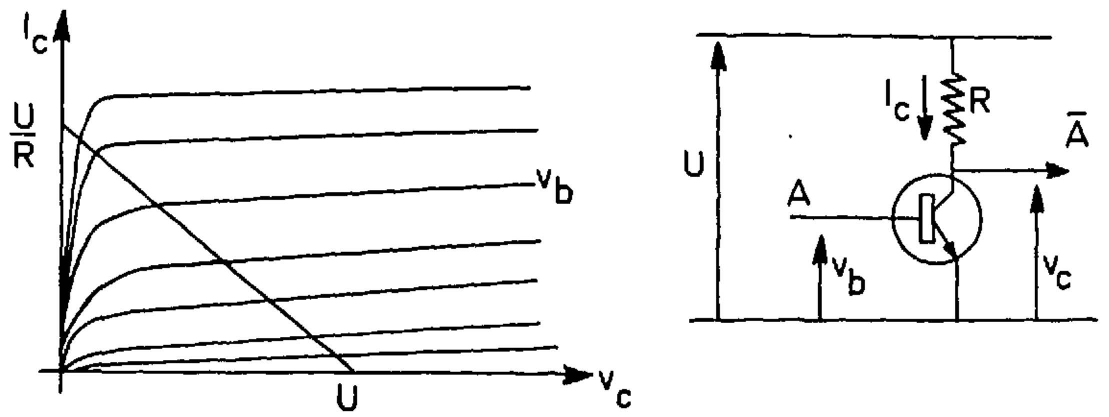


$$S_2 = \bar{x}_1 . x_2 . \bar{x}_3 . x_4 . \bar{x}_5$$

- "produit" ou fonction "ET" à diodes

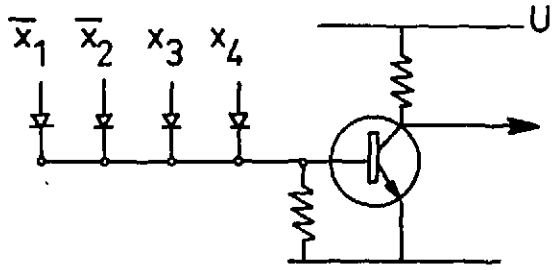
Si nous nous référons aux caractéristiques d'un transistor, du type NPN par exemple (figure 3,21), nous voyons que la polarité de la tension de sortie est inverse de celle de la tension d'entrée. Nous pouvons, d'autre part, obtenir un gain de puissance en utilisant l'amplification du transistor. Ces deux particularités permettent donc de complémenter une fonction binaire et de régénérer son signal de sortie.

Figure 3,21



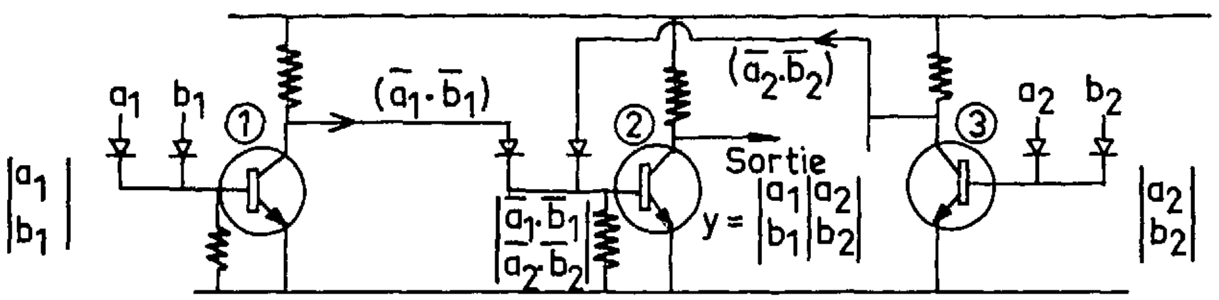
Nous pourrons, ainsi, à l'aide de diodes et de transistors, réaliser des fonctions "OU", des fonctions "ET", ainsi que leurs compléments avec régénération de puissance comme le montre le schéma ci-dessous :

$$A = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$$



$\bar{A} = x_1 . x_2 . \bar{x}_3 . \bar{x}_4$

Il est également aisé de déterminer directement la fonction binaire associée à un montage électronique, comme le montre l'exemple suivant :



A l'entrée du transistor n° 1 est appliquée la fonction $\begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{vmatrix}$ et nous obtenons, en sortie, le complément $\bar{a}_1 . \bar{b}_1$. A la sortie du transistor n° 3 est réalisée la fonction $\bar{a}_2 . \bar{b}_2 = \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \end{vmatrix}$. A l'entrée du transistor n° 2 se trouve donc appliquée la fonction

$\begin{vmatrix} \bar{a}_1 . \bar{b}_1 \\ \bar{a}_2 . \bar{b}_2 \end{vmatrix} = \bar{y}$ ce qui permet, en définitive, d'écrire à la sortie du transistor n° 2, la fonction $y = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \end{vmatrix}$.

En conclusion, nous constatons que toute fonction binaire est réalisable en pratique à l'aide de relais ou à l'aide d'éléments semi-conducteurs. Dans ce dernier cas, cependant, il est nécessaire d'exprimer la fonction sous forme d'un produit de produels ou d'un produel de produits.

3.3 - Circuits logiques intégrés

Le nombre considérable d'éléments exigés par la réalisation d'ensembles complexes, tels que les calculateurs électroniques, ne peut se concevoir et s'admettre que si chacun des éléments possède un temps moyen de bon fonctionnement élevé sous un volume aussi réduit que possible.

Du tube électronique au transistor, un pas très important a été franchi dans cette voie et les circuits intégrés marquent une nouvelle étape vers la réduction de l'encombrement.

L'évolution des circuits électroniques logiques s'est faite et continue à se faire en fonction de critères d'amélioration précis qui peuvent s'énumérer ainsi :

- réduction de l'encombrement,
- réduction de la consommation,
- réduction de la sensibilité aux parasites,
- augmentation de la rapidité,
- augmentation de la fiabilité.

Ces améliorations ne sont pas toujours compatibles entre elles et font, en pratique, l'objet de compromis qui dépendent du but recherché dans l'utilisation d'un circuit donné.

L'étude de la réduction des dimensions et de la recherche d'un fonctionnement plus rapide ont amené les constructeurs à envisager d'étendre aux ensembles logiques des techniques de fabrication appropriées comme celle appliquée aux transistors "Planar".

Malgré les difficultés présentées par les micromanipulations, la tentative a été couronnée de succès. Les premières difficultés passées, la fiabilité et le prix des circuits intégrés n'ont fait que s'améliorer.

Dans la technique "Planar", que nous décrirons sommairement à titre d'exemple, les circuits intégrés sont réalisés à partir d'une plaquette de silicium de type "N" très pur, recouverte d'une couche protectrice de silice (Si O_2). La formation d'un cache par photogravure préserve une partie de la couche de silice de l'attaque chimique (fluorure d'ammonium) qui, par dissolution, met à nu le silicium aux endroits restés sans protection et qui ont été préalablement choisis pour être traités par diffusion à haute température d'une impureté de type "P" (Bore) ou de type "N" (Phosphore).

Le silicium de type "P" constitue la base des transistors et l'anode des diodes.

Les émetteurs sont réalisés ensuite par diffusion d'une impureté de type "N".

Enfin, les résistances sont obtenues à l'aide de transistors bloqués.

Les circuits intégrés sont généralement réalisés sur des parallélépipèdes de silicium de 500 à 600 μ de côté et de 150 à 200 μ d'épaisseur environ.

Les connexions extérieures sont reliées aux circuits par des fils d'or de quelques dizaines de microns de diamètre soudés par thermocompression sur les points à connecter qui ont été préalablement métallisés à l'aide d'un dépôt d'aluminium.

La métallisation à l'aluminium permet également d'intégrer des condensateurs en utilisant la silice comme diélectrique ; mais il est difficile d'augmenter beaucoup la surface des armatures et, par conséquent, d'obtenir des capacités supérieures à quelques centaines de picofarads.

Notons, en conclusion, que l'intégration permet une réduction considérable de l'encombrement des circuits. Pour un même montage, le gain de volume, hors tout, est de l'ordre de 600.

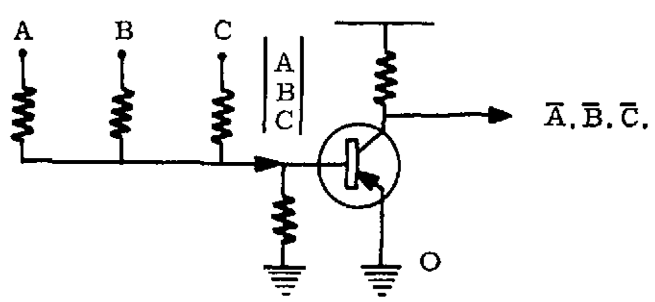
3.4 – Classification des circuits logiques :

Différents systèmes logiques ont été élaborés pour répondre aux conditions citées, tout en essayant d'obtenir un coût acceptable.

Nous allons passer en revue les principaux systèmes rencontrés en pratique.

3.41 – Système à résistances et transistors (R.T.L.) :

(R.T.L, Resistors Transistors Logic), ce système n'est plus guère utilisé. Les transistors y jouent uniquement un rôle de régénération des signaux et de complémentation. La fonction "OU", à l'entrée, est obtenue à l'aide de résistances montées en parallèle.

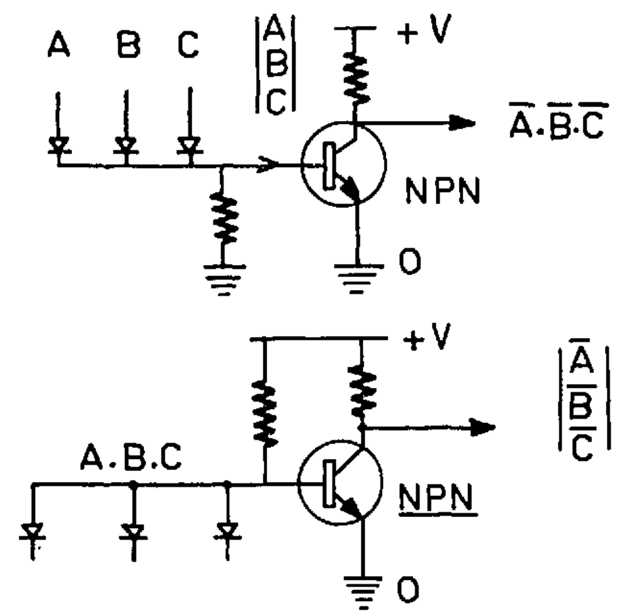


Dans l'exemple cité, les fonctions logiques indiquées sont valables en "logique négative", c'est-à-dire si l'on affecte la valeur logique "1" aux tensions négatives par rapport à la masse électrique, laquelle constitue le zéro logique de référence.

Les inconvénients de ce système sont nombreux du fait des interactions électriques entre les différentes entrées qui limitent le facteur pyramidal d'entrée (entrance ou fan-in) et de l'absence de seuils élevés qui se traduit par une sensibilité aux parasites plus importante. Il présente, par contre, l'avantage d'être peu onéreux.

3.42 – Systèmes à diodes et transistors (D.T.L.) :

(D.T.L, Diodes Transistors Logic). C'est à ce système que se rattachent les exemples du paragraphe "4.2" précédent.

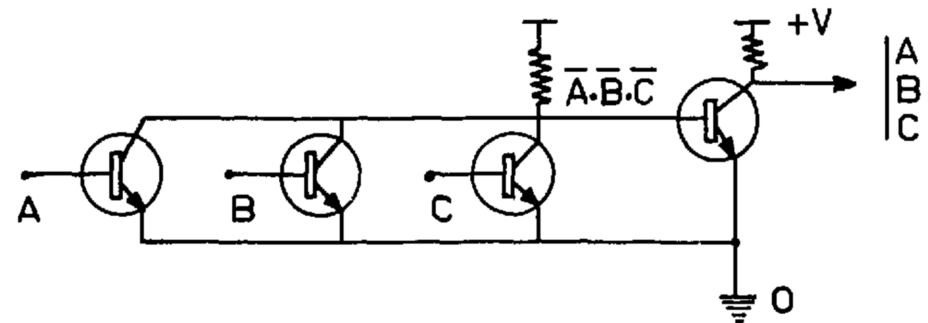


La présence des diodes isole les différentes entrées les unes des autres et le facteur pyramidal d'entrée (entrance ou fan-in) peut être important.

Les seuils fixés par les diodes améliorent l'immunité aux parasites ; les faibles résistances directes et les faibles capacités en font un circuit rapide. C'est, par contre, un système dont le prix est plus élevé.

3.43 – Système à transistors à couplage direct (D.C.T.L.) :

Comme la désignation l'indique (D.C.T.L., Direct Coupled Transistors Logic), ce système utilise des transistors à liaisons directes collecteurs-bases.



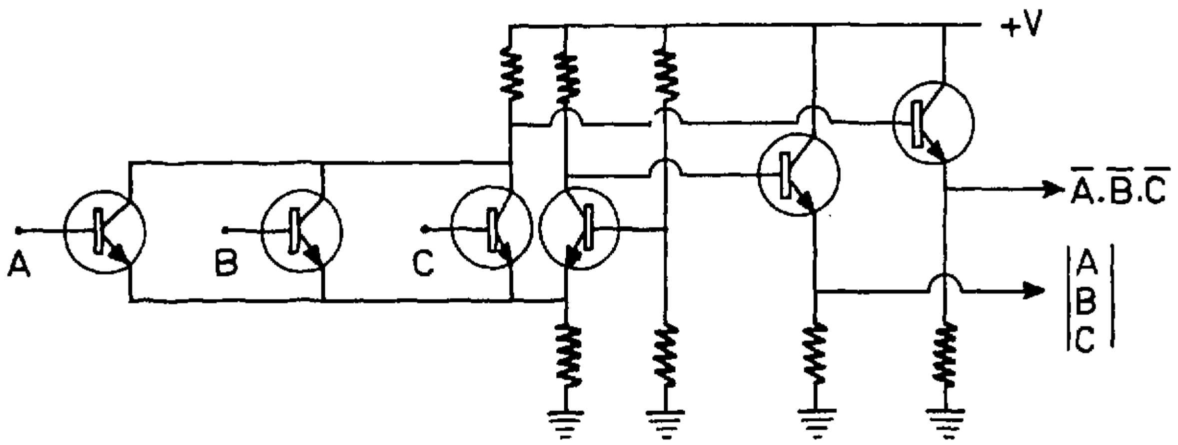
Il est intéressant par sa simplicité, car il se limite aux deux éléments de base que constituent le transistor et sa résistance de charge de collecteur.

La fabrication en est facilitée, mais la saturation des transistors augmente la consommation et réduit la rapidité.

3.44 – Système à transistors à émetteurs couplés (E.C.T.L.) :

(E.C.T.L., Enitters Coupled Transistors Logic).

Il se rattache au système D.C.T.L. précédent, mais la résistance commune d'émetteur évite la saturation des transistors , accroît la rapidité de fonctionnement et permet d'ajuster les seuils. L'écart entre les niveaux logiques "0" et "1" est, par contre, de l'ordre de grandeur de la tension de seuil émetteur-base d'un transistor ; soit 0,7 Volt, pour les transistors au silicium. Ce faible écart rend le circuit très sensible aux parasites.



Généralement, les niveaux sont respectivement de 0,8 Volt pour le "0" logique et de 1,5 Volt pour le "1" logique.

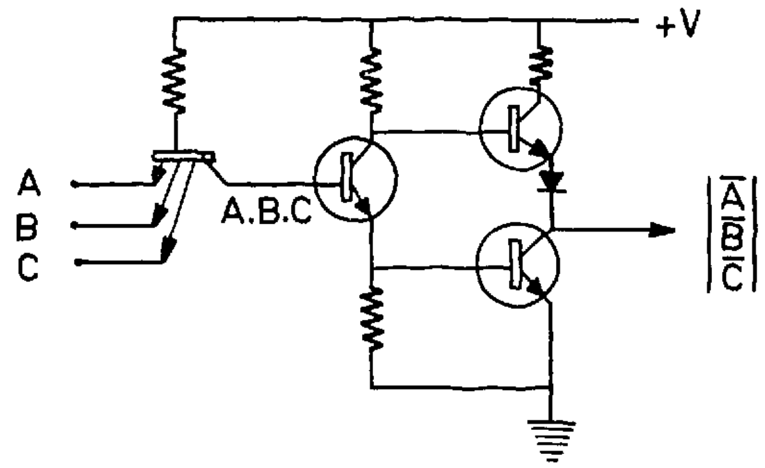
Les circuits "E.C.T.L." sont les seuls qui allient, à l'avantage de la rapidité, celui de la compensation, c'est-à-dire que la consommation reste pratiquement indépendante de l'état logique du circuit. Cette particularité est très intéressante lorsque l'on considère les faibles impédances mises en jeu dans les circuits à transistors relativement à celles des alimentations. La compensation affaiblit les niveaux des impulsions transitoires de courant et réduit considérablement les couplages parasites et les possibilités d'interaction des circuits par l'intermédiaire de la source. L'intérêt en est d'autant plus grand que les circuits alimentés par une même source sont plus nombreux, ce qui est souvent et de plus en plus le cas.

3.45 – Système à transistors multiples :

(T.T.L. Transistor-Transistor Logic)

Le transistor d'entrée à émetteur multiple possède un faible temps de recouvrement qui réduit les temps de propagation. Grâce au montage en cascade prévu en sortie,

les impédances sont faibles et le facteur pyramidal de sortie (sortance ou fan out) est important.



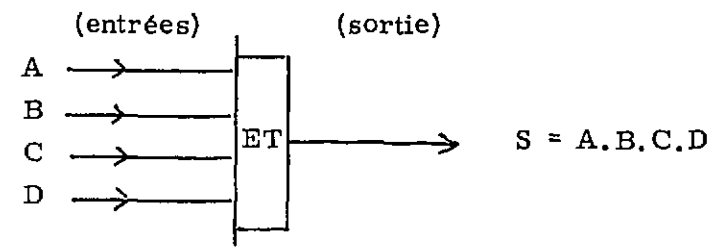
Le circuit réalisé est assez rapide et présente une bonne immunité aux parasites. Il est, par contre, peu compensé et sa consommation est importante. Une bonne fiabilité globale en fait cependant un circuit intéressant et recherché.

3.5 – Symboles et schémas logiques

Les multiples possibilités de réalisation technologiques des fonctions binaires, sous forme de circuits électroniques, nous orientent vers la recherche d'un symbolisme simple destiné à la représentation générale des schémas logiques mais étroitement lié aux expressions mathématiques.

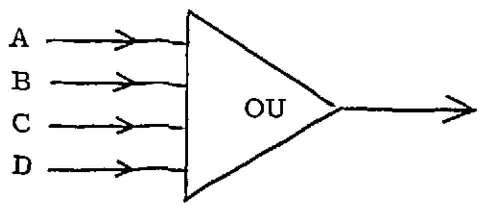
Nous avons adopté des symboles * qui sont d'exécution facile, mais on peut en utiliser d'autres aussi commodes et aussi bien définis.

– La fonction "ET" (produit) sera représentée par un rectangle dont un côté prolongé correspond à l'entrée des variables.



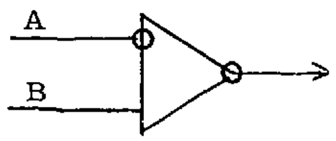
* Ce symbolisme a été emprunté à l'ouvrage de Monsieur DEBRAINE "MACHINES DE TRAITEMENT DE L'INFORMATION" Masson, Editeur.

– La fonction "OU" (produel) sera représentée par un triangle dont le sommet est orienté vers la sortie et dont la base correspond aux entrées.

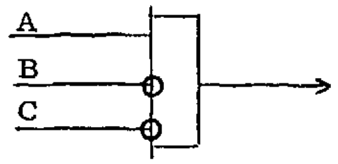


$S = \left| \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \right|$

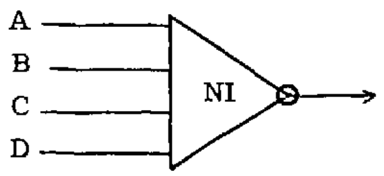
– Un cercle entourant une entrée ou la sortie indiquera que la variable ou la fonction correspondante est complémentée.



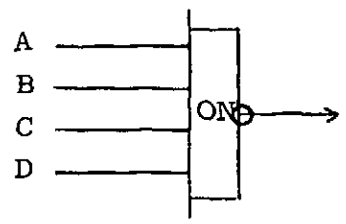
$S = \overline{\left| \begin{matrix} \overline{A} \\ B \end{matrix} \right|} = A.\overline{B}$



$S = A.\overline{B}.\overline{C}$



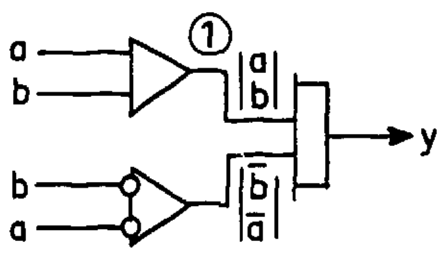
$S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$

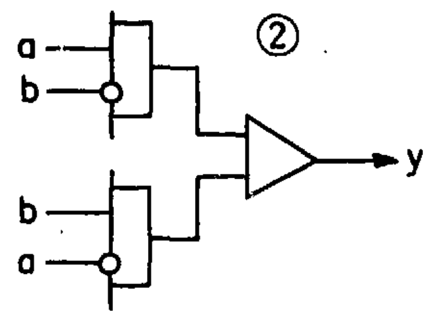


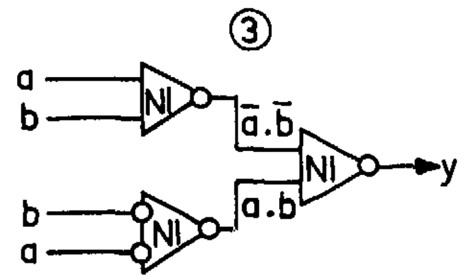
$S = \left| \begin{matrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \\ \overline{D} \end{matrix} \right|$

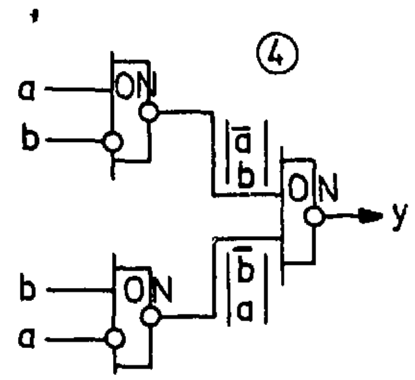
Les deux derniers circuits "NI" et "ON" sont désignés respectivement en anglais sous les noms de circuit "NOR" et circuit "NAND".

Un circuit correspondant à une fonction binaire est susceptible d'être représenté schématiquement de plusieurs manières différentes. A titre d'exemple, le circuit "OU" exclusif $y = \left| \begin{matrix} a.\overline{b} \\ b.\overline{a} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \overline{b} \\ \overline{a} \end{matrix} \right|$, peut être représenté à l'aide de l'un des quatre schémas suivant selon la technologie utilisée.









Les formes 3 et 4 sont les plus courantes. Les transistors permettent, en effet, de régénérer le signal en le complémentant. Les différents circuits logiques utilisant diodes et transistors mènent donc souvent à des éléments qui correspondent, soit au complément d'un produel (circuit "NI"), soit au complément d'un produit (circuit "ON").

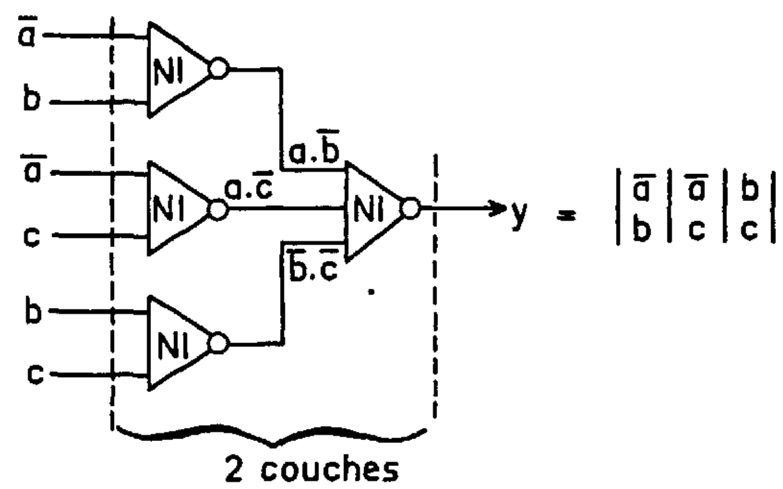
On peut établir un certain nombre de règles élémentaires de base quant à la forme à donner aux fonctions binaires suivant la technologie imposée ou choisie.

Lorsqu'on dispose des variables et de leurs compléments, il est toujours possible d'établir un schéma logique en deux couches, ce qui réduit le temps d'action des circuits à deux fois seulement le temps de propagation d'un élément.

Dans le cas où l'on utilise des circuits "NI", il suffit de mettre la fonction binaire sous forme d'un produit de produels pour limiter le montage à deux couches.

– Exemple :

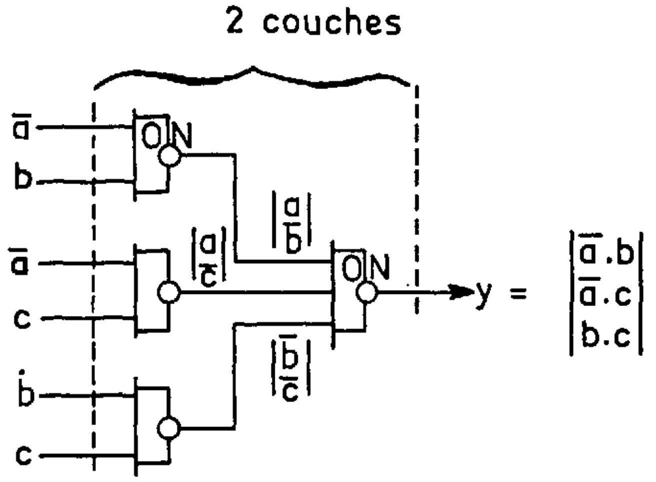
$y = \left| \begin{matrix} \overline{a} \\ b \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \overline{a} \\ c \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \right|$



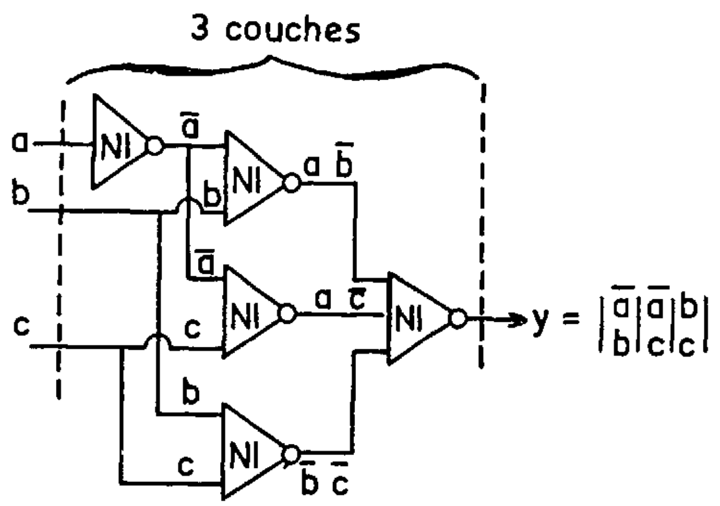
Dans le cas où l'on utilise des circuits "ON", il suffit de mettre la fonction binaire sous forme d'un produel de produits pour limiter également le montage à deux couches.

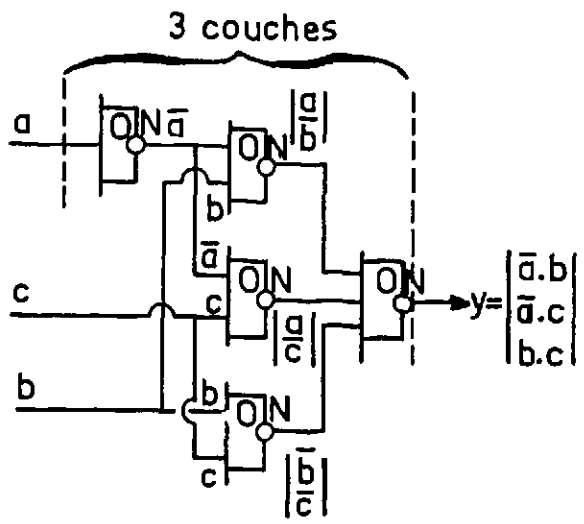
- Exemple :

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c} \bar{a} & \bar{a} & b \\ b & c & c \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \,.\, c \\ \bar{a} \,.\, c \\ b \,.\, c \end{array} \right|$$



Lorsqu'on ne dispose pas des variables complémentées, il faut utiliser un circuit "NI" ou un circuit "ON" supplémentaire pour chaque complémentation et la réalisation pratique ne peut se limiter, généralement, à moins de trois couches. En ce qui concerne les deux exemples précédents, il faudrait alors réaliser les montages suivants :





D'une façon générale, il faut essayer, lorsqu'on utilise des circuits "NI", de mettre les variables directes en facteur dual et les variables complémentées en facteur direct.

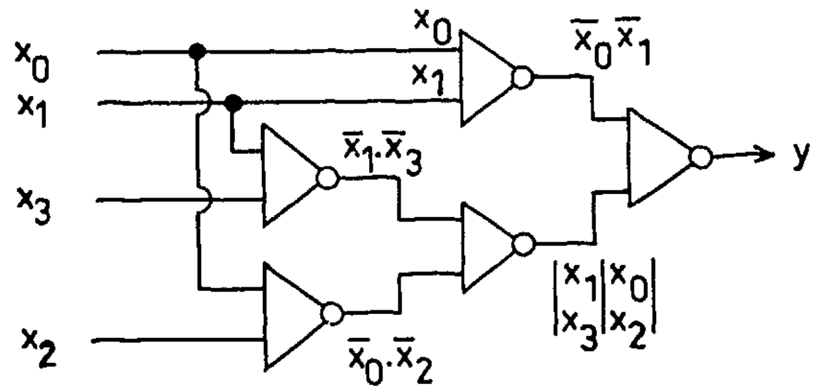
- Exemple :

$$y = \left| \begin{array}{c} x_o \,.\, \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_3 \\ x_1 \,.\, \bar{x}_o \,.\, \bar{x}_2 \end{array} \right|$$

il est intéressant de mettre la fonction "y" sous la forme :

$$y = \left| \begin{array}{c|c} x_o & \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_3 \\ x_1 & \bar{x}_o \,.\, \bar{x}_2 \end{array} \right|$$

Cette forme conduit au schéma simple suivant :



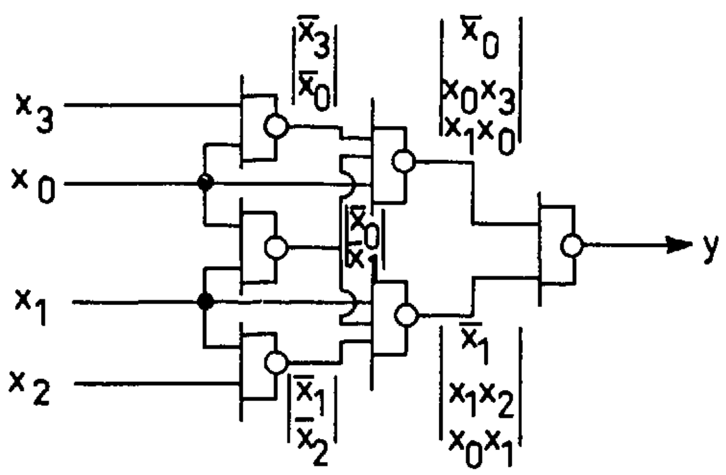
Dans le cas où l'on utilise des circuits du type "ON", il faut essayer de mettre en facteur direct les variables directes et en facteur dual les variables complémentées.

- Exemple :

$$y = \left| \begin{array}{c} x_o \,.\, \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_3 \\ x_1 \,.\, \bar{x}_o \,.\, \bar{x}_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_o \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_3 \\ \bar{x}_o \end{array} \right| \\ x_1 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_o \,.\, \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{array} \right| \end{array} \right|$$

$$y = \left| \begin{array}{c} x_o \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_o & \bar{x}_o \end{array} \right| \\ x_1 \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_o & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \end{array} \right| \end{array} \right|$$

Cette dernière expression permet de réaliser le montage suivant :



La recherche des expressions binaires optimales en fonction du type de circuit utilisé peut faire l'objet d'une étude très approfondie reposant sur les bases élémentaires que l'on vient de passer rapidement en revue. Compte tenu, cependant, de l'évolution des circuits intégrés, il est à prévoir que les circuits logiques se présenteront dans un proche avenir sous forme symétrique et compensée, c'est-à-dire que chaque circuit élémentaire nécessitera sur chaque entrée une double connexion correspondant aux deux formes directe et complémentée des variables et fournira également en sortie les deux formes directe et complémentée de la fonction.

La symétrie permettra avec facilité de compenser les circuits qui conserveront ainsi une consommation constante quel que soit leur état. Ces dispositions sont intéressantes parce qu'elles augmentent la fiabilité de façon notable en réduisant les interactions et la sensibilité aux parasites en assurant la possibilité de liaisons bifilaires ou coaxiales entre circuits.

3.6 - Fonctions "MAJORITE"

L'exemple général que nous allons traiter a pour but de montrer surtout la marche à suivre dans l'étude d'un problème particulier.

Etant données "n" variables binaires distinctes et "p" un nombre entier inférieur ou égal à "n", on appelle fonction "MAJORITE" une fonction binaire des "n" variables qui prend la même valeur logique (0 ou 1) lorsque le nombre des variables qui prennent simultanément la même valeur (0 ou 1) fixée à l'avance, est supérieur ou égal à "p".

Nous désignerons par "M_n^p" la fonction "majorité" de "n" variables binaires qui prend la valeur "1" lorsque le nombre de variables qui prennent la valeur "1" est supérieur ou égal à "p" ($p \leqslant n$).

Nous désignerons par "$M_n^{\underline{p}}$" la fonction "majorité" de "n" variables qui prend la valeur "1" lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur "0" est supérieur ou égal à "p".

Nous en déduisons que $\bar{M}_n^p$ est une fonction "majorité" qui prend la valeur "0"

lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur "1" est supérieur ou égal à "p" et que $\bar{M}_n^{\underline{p}}$ est une fonction majorité qui prend la valeur "0" lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur "0" est supérieur ou égal à "p".

On passe de la fonction M_n^p à $M_n^{\underline{p}}$ en remplaçant toutes les variables littérales par leurs compléments.

Il suffit donc d'étudier la fonction M_n^p et d'étendre les résultats obtenus aux autres formes $M_n^{\underline{p}}$, $\bar{M}_n^p$ et $\bar{M}_n^{\underline{p}}$.

Compte tenu des définitions précédentes, nous pouvons écrire immédiatement la fonction majorité "M_n^p" sous la forme d'un produel de tous les produits distincts de "p" variables directes prises parmi les "n" variables, ou sous la forme d'un produit de tous les produels distincts de "n-p+1" variables directes prises parmi les "n" variables.

Le nombre des produits est dans le premier cas, égal à

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p\,!}$$

Cas particuliers :

$$\left|\begin{array}{l} M_n^n = x_1 . x_2 \dots\dots x_n \\ M_n^o = 1 \end{array}\right.$$

3.61 - Décomposition des fonctions "majorité" :

Si nous mettons l'une des variables, "x_i" par exemple, en facteur partiel dans la fonction "majorité" M_n^p, nous obtenons l'égalité :

$$M_n^p = \left|\begin{array}{l} x_i \,.\, M_{n-1}^{p-1} \\ M_{n-1}^p \end{array}\right| .$$

Les fonctions "majorité" M_{n-1}^p et M_{n-1}^{p-1} ne contiennent pas la variable "x_i" mais tous les produits en facteur dual dans M_{n-1}^{p-1} se retrouvent en facteur direct dans les produits des produels M_{n-1}^p.

Nous en déduisons que le produit de M_n^p par $\overline{M_{n-1}^{p-1}}$ est nul.

$$M_{n-1}^p \,.\, \overline{M_{n-1}^{p-1}} \equiv 0$$

En utilisant la relation $\left|\begin{array}{c} \varphi \\ A \end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c} \varphi \\ A\bar{\varphi} \end{array}\right|$, nous écrirons :

$$M_n^p = \left|\begin{array}{l} x_i \,.\, M_{n-1}^{p-1} \\ M_{n-1}^p \left|\begin{array}{l} \bar{x}_i \\ \overline{M_{n-1}^{p-1}} \end{array}\right. \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} x_i \,.\, M_{n-1}^{p-1} \\ M_{n-1}^p \,.\, \bar{x}_i \\ M_{n-1}^p \,.\, \overline{M_{n-1}^{p-1}} \end{array}\right|$$

et M_n^p peut également s'exprimer par la fonction carrée biforme :

$$M_n^p = \left| \begin{array}{l} x_i \cdot M_{n-1}^{p-1} \\ M_{n-1}^p \cdot \bar{x}_i \end{array} \right|$$

Si nous effectuons, par exemple, la mise en facteur partielle de la variable "x_1" dans la fonction "M_n^p" puis la mise en facteur partielle de "x_2" dans les deux fonctions résiduelles "M_{n-1}^p" et "M_{n-1}^{p-1}" nous obtenons :

$$M_n^p = \left| \begin{array}{l} x_1 \cdot M_{n-1}^{p-1} \\ M_{n-1}^p \end{array} \right| , \quad M_{n-1}^p = \left| \begin{array}{l} x_2 \cdot M_{n-2}^{p-1} \\ M_{n-2}^p \end{array} \right| , \quad M_{n-1}^{p-1} = \left| \begin{array}{l} x_2 \cdot M_{n-2}^{p-2} \\ M_{n-2}^{p-1} \end{array} \right|$$

soit :

$$M_n^p = \left| \begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 \cdot M_{n-2}^{p-2} \\ \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right. \cdot M_{n-2}^{p-1} \\ 1 \cdot M_{n-2}^p \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} M_2^2 \cdot M_{n-2}^{p-2} \\ M_2^1 \cdot M_{n-2}^{p-1} \\ M_2^o \cdot M_{n-2}^p \end{array} \right|$$

Dans cette dernière expression les symboles M_2^k représentent les fonctions "majorité" des deux variables "x_1" et "x_2" et les symboles $M_{n-2}^{k'}$, les fonctions "majorité" des "n-2" variables $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

La décomposition de la fonction M_n^p peut être poursuivie par récurrence jusqu'aux termes de la forme "M_h^h" et "M_ℓ^o" mais nous obtiendrons, dans ce cas, les C_n^p produits "M_p^p" relatifs aux combinaisons des "n" variables prises "p" à "p". Il est, par contre, intéressant, si les temps de fonctionnement n'exigent pas la réalisation du circuit en deux couches, de séparer l'ensemble des "n" variables en deux sous-ensembles ; l'un contenant par exemple les "p" variables $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p$, auxquelles nous ferons correspondre les fonctions "M_p^k" et l'autre contenant les "n - p" variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ auxquelles nous ferons correspondre les fonctions "$M_{n-p}^{k'}$".

La fonction majorité "M_n^p" peut alors s'écrire :

- Dans le cas où $p \leqslant \frac{n}{2}$:

$$M_n^p = \left| \begin{array}{l} M_p^p \cdot M_{n-p}^o \\ M_p^{p-1} \cdot M_{n-p}^1 \\ M_p^{p-2} \cdot M_{n-p}^2 \\ \text{- - - - - - - - -} \\ M_p^o \cdot M_{n-p}^p \end{array} \right|$$

Dans le cas où $\frac{n}{2} < p < n$.

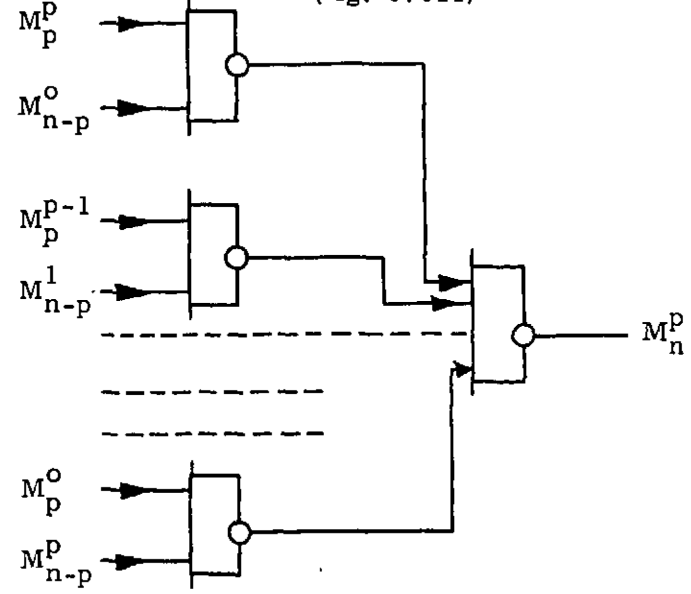
$$M_n^p = \left| \begin{array}{l} M_p^p \cdot M_{n-p}^o \\ M_p^{p-1} \cdot M_{n-p}^1 \\ M_p^{p-2} \cdot M_{n-p}^2 \\ \text{- - - - - - - - -} \\ M_p^{2p-n} \cdot M_{n-p}^{n-p} \end{array} \right|$$

Dans les deux cas, le nombre des fonctions "majorité" qui apparaissent dans le produel "M_n^p" est inférieur à "n" et le nombre final des éléments du schéma inférieur à "C_n^p". Le nombre des couches est supérieur à deux et le temps de réponse est, en conséquence, plus long.

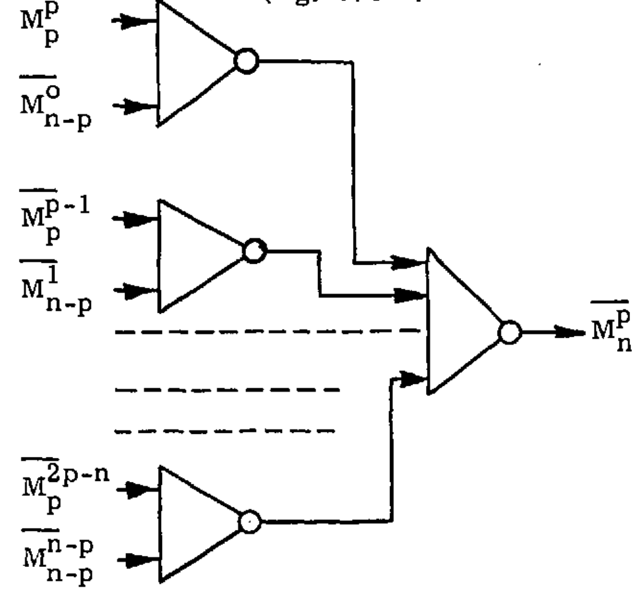
La figure 3,611 représente le schéma partiel de réalisation dans le cas où $p \leqslant \frac{n}{2}$ et où les éléments du montage sont des circuits "ON".

La figure 3,612 fournit le schéma partiel dans le cas où $\frac{n}{2} < p < n$, les éléments du montage étant des circuits "NI".

(fig. 3.611)



(fig. 3.612)



3.62 – Exemples de fonctions "majorité" :

$$M_3^1(a,b,c) = \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right| \qquad M_3^2(a,b,c) = \left| \begin{array}{l} a.b \\ b.c \\ c.a \end{array} \right| \qquad M_3^3(a,b,c) = a.b.c$$

$$M_4^2\,(a,b,c,d) = \left| \begin{array}{l} M_2^2\,(a,b)\ .\ M_2^o \\ M_2^1\,(a,b)\ .\ M_2^1\,(c,d) \\ M_2^o\ .\ M_2^2\,(c,d) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a\,.\,b\,.\,1 \\ \begin{array}{c|c} a & c \\ b & d \end{array} \\ 1\,.\,c\,.\,d \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a\,.\,b \\ a\,.\,c \\ a\,.\,d \\ b\,.\,c \\ b\,.\,d \\ c\,.\,d \end{array} \right|$$

$$M_5^3 = \left| \begin{array}{l} M_3^3\,(x_1x_2x_3)\ .\ M_2^o\,(x_4x_5) \\ M_3^2\,(x_1x_2x_3)\ .\ M_2^1\,(x_4x_5) \\ M_3^1\,(x_1x_2x_3)\ .\ M_2^2\,(x_4x_5) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x_1.x_2\,.\,x_3 \\ \begin{array}{l|l} x_1.x_2 & x_4 \\ x_2.x_3 & x_5 \\ x_3.x_1 & \end{array} \\ \begin{array}{l|l} x_1 & \\ x_2 & x_4.x_5 \\ x_3 & \end{array} \end{array} \right|$$

EXERCICES D'APPLICATION RELATIFS AU CHAPITRE III

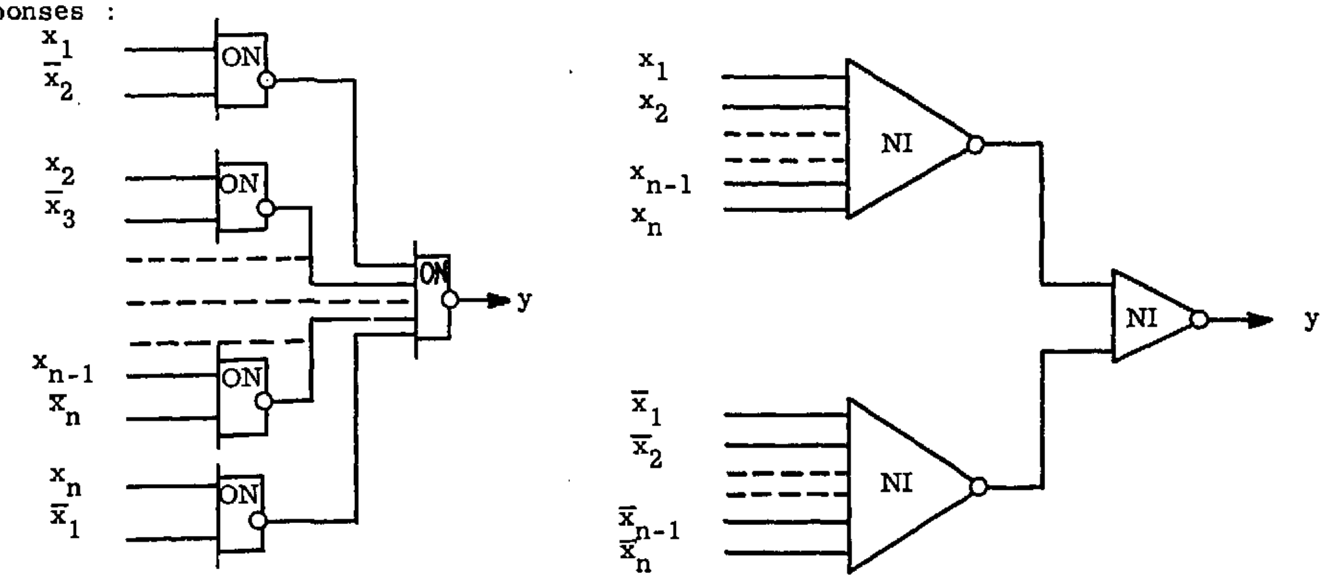
1 – a) En effectuant les produels et en tenant compte de la relation

$$\left| \begin{array}{c} A \\ \varphi \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A\ \overline{\varphi} \\ \varphi \end{array} \right| ,$$ démontrer l'égalité :

$$y = \left| \begin{array}{l} x_1.\overline{x}_2 \\ x_2.\overline{x}_3 \\ x_3.\overline{x}_4 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x_{n-2}.\overline{x}_{n-1} \\ x_{n-1}.\overline{x}_n \\ x_n\ .\overline{x}_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l|l} x_1 & \overline{x}_2 \\ x_2 & \overline{x}_3 \\ x_3 & \overline{x}_4 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & \overline{x}_{n-1} \\ x_{n-1} & \overline{x}_n \\ x_n & \overline{x}_1 \end{array} \right|$$

b) Tracer successivement en deux couches les deux schémas possibles utilisant uniquement des fonctions de type "ON", puis des fonctions de type "NI". On supposera que l'on dispose des variables directes et complémentées x_i et $\overline{x}_i$.

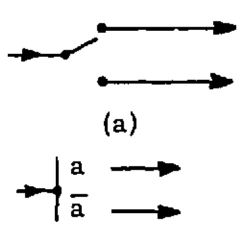
Réponses :



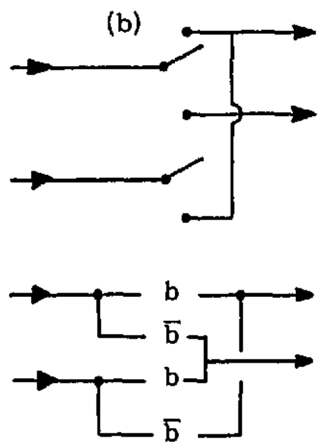
2 – a) On désire installer un "va-et-vient" de commande d'allumage comprenant les trois points de commande a, b et c. Etablir la table de vérité incomplète relative au circuit d'allumage en admettant que ce circuit est fermé (y = 1) lorsque le nombre des variables a, b ou c qui prennent la valeur "1" est impair.

b) Ecrire l'expression binaire du "va-et-vient" et montrer qu'elle peut être réalisée en pratique à l'aide de deux inverseurs et d'un permutateur. Inverseur et permutateur correspondent aux deux schémas ci-après :

(inverseur)



(permutateur)

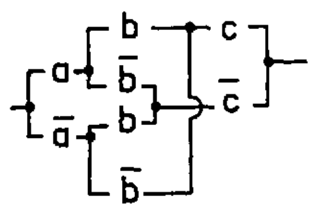


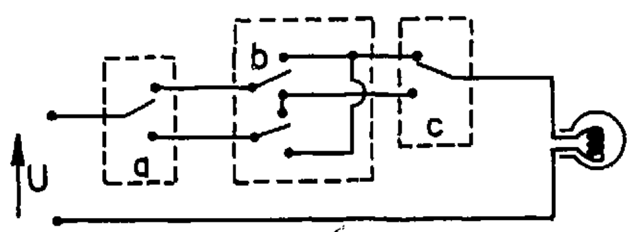
Réponses :

a)

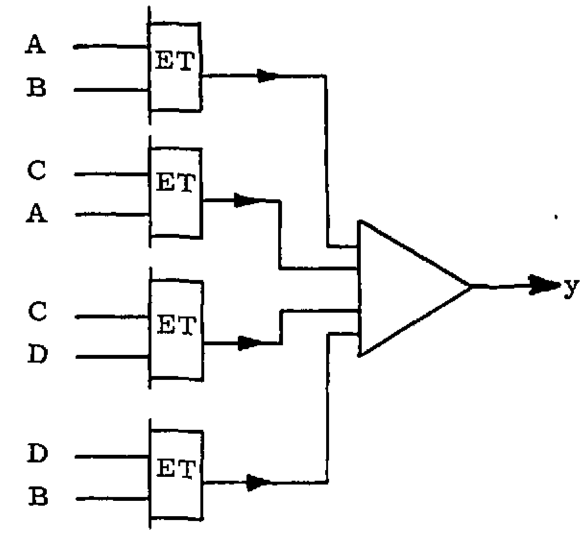
a	b	c	y
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	1	1

b) $y = \left| \begin{array}{l} a.\bar{b}.\bar{c} \\ \bar{a}.b.\bar{c} \\ \bar{a}.\bar{b}.c \\ a.b.c \end{array} \right| =$





3 – On donne le schéma ci-dessous :

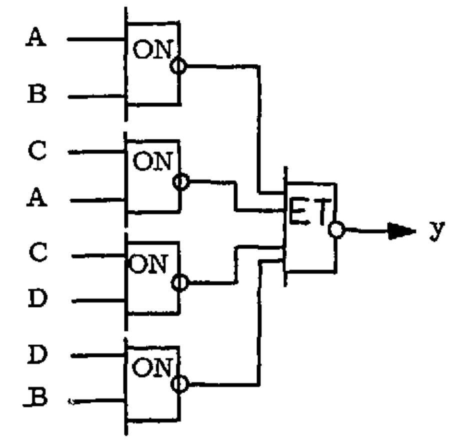


a- Ecrire la fonction binaire "y" correspondante et réaliser le schéma à l'aide de circuit "ON" uniquement.

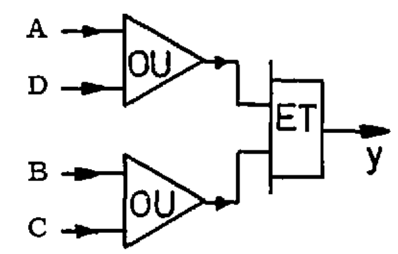
b- Simplifier la fonction "y" par mise en facteur et l'écrire sous la forme d'un produit de deux produels. Réaliser le schéma à l'aide de deux circuits "OU" et d'un circuit "ET" puis à l'aide de trois circuits "NI" seulement.

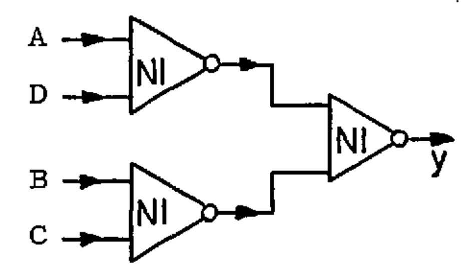
réponses :

a- $y = \left| \begin{array}{l} A.B \\ C.A \\ C.D \\ D.B \end{array} \right|$



b- $y = \left| \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right. \\ D \left| \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} A \\ D \end{array} \right| \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right|$





4 – a- Calculer et simplifier la fonction binaire f(a,b,c,d) égale à l'unité pour les combinaisons de valeurs 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, des variables prises dans l'ordre alphabétique.

b- Mettre la fonction sous la forme d'un produel de produits, puis sous la forme d'un produit de produels et, enfin, sous la forme maillée en faisant une mise en facteur de part et d'autre de la première expression et en rendant nulle la solution étrangère introduite de ce fait.

c- Réaliser ensuite les circuits optimaux correspondants aux trois cas suivants :

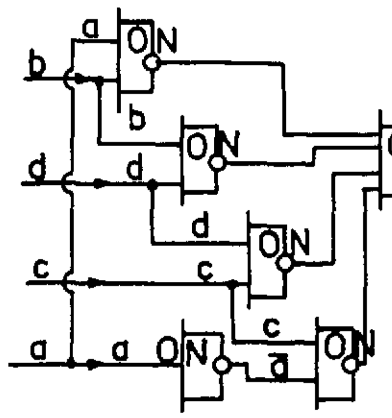
1) Utilisation exclusive de circuits "ON"
2) Utilisation exclusive de circuits "NI"
3) Utilisation de relais.

réponses :

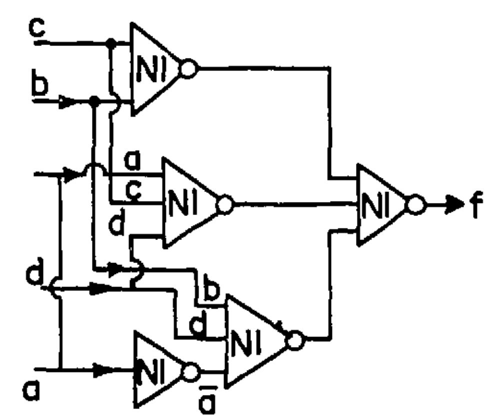
a - $f(a,b,c,d) = \left| \begin{array}{c|c} b & \begin{array}{c} a \\ d \end{array} \\ c & \begin{array}{c} d \\ \bar{a} \end{array} \end{array} \right|$

b- $f = \left| \begin{array}{c} a.b \\ b.d \\ d.c \\ c.\bar{a} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} b \\ c \end{array} & \begin{array}{c} a \\ c \\ d \end{array} & \begin{array}{c} \bar{a} \\ b \\ d \end{array} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} b & \begin{array}{c} a \\ d.\bar{a} \end{array} \\ c & \begin{array}{c} d.a \\ \bar{a} \end{array} \end{array} \right| = -\left[\begin{array}{c} b \left[\begin{array}{c} a \\ d \end{array} \right] \\ c \quad \bar{a} \end{array} \right]-$

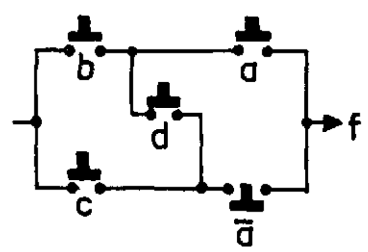
-(1-c)



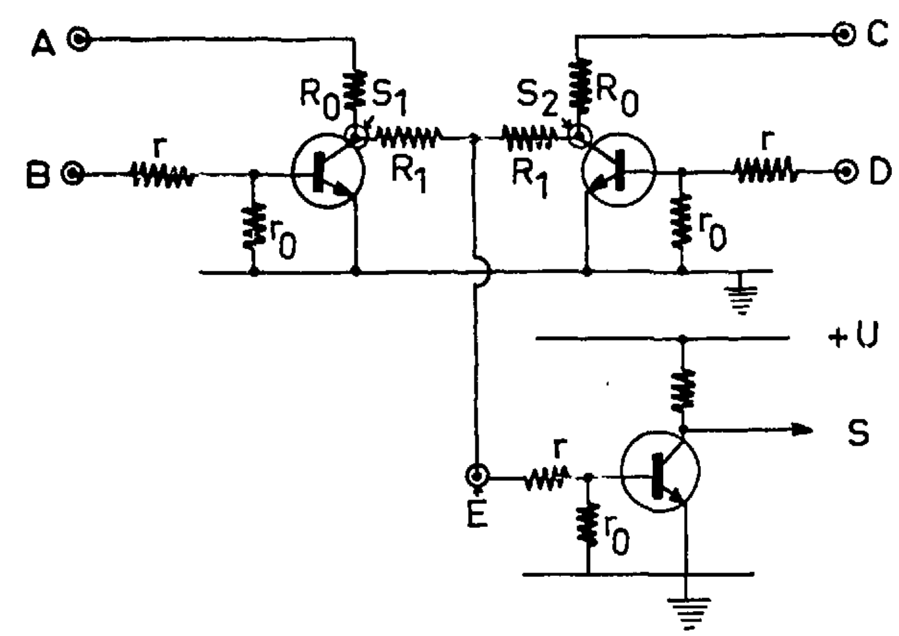
-(2-c)



-(3-c)



5 – On considère le schéma suivant :



Les transistors sont bloqués ou saturés suivant la répartition des tensions appliquées aux points A, B, C et D.

Etablir en fonction des valeurs de A, B, C ou D, les expressions binaires qui correspondent successivement aux points S_1, S_2, E et S. On admettra que le niveau logique "1" correspond à une tension positive appliquée au point considéré.

réponses :

$S_1 = A.\bar{B}$, $S_2 = C.\bar{D}$, $E = \left| \begin{array}{c} A.\bar{B} \\ C.\bar{D} \end{array} \right|$, $S = \bar{E} = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{C} \\ B & D \end{array} \right|$

6 – a- Ecrire la fonction " $f(x_o, x_1, x_2, a, b)$ " donnée par la table de vérité réduite suivante :

x_o	x_1	x_2	a	b	f
1	0	1	0	∅	1
0	1	∅	∅	0	1

Mettre "f" sous la forme d'une fonction carrée produit de deux facteurs dont l'un ne contient que des variables directes et l'autre des variables complémentées.

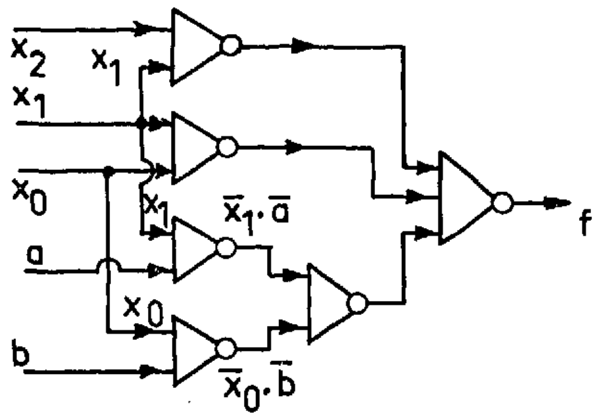
b- En supposant que l'on ne dispose que des variables directes, montrer que la fonction peut être réalisée en trois couches de façon optimale à l'aide de six circuits "NI" ou également à l'aide de six circuits "ON". Représenter, dans les deux cas, les schémas correspondants.

réponses :

a - $f = \left|\begin{array}{c} x_o.\bar{x}_1.x_2.\bar{a} \\ \bar{x}_o.x_1.\bar{b} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x_o.x_2 & \bar{x}_1.\bar{a} \\ x_1 & \bar{x}_o.\bar{b} \end{array}\right|$

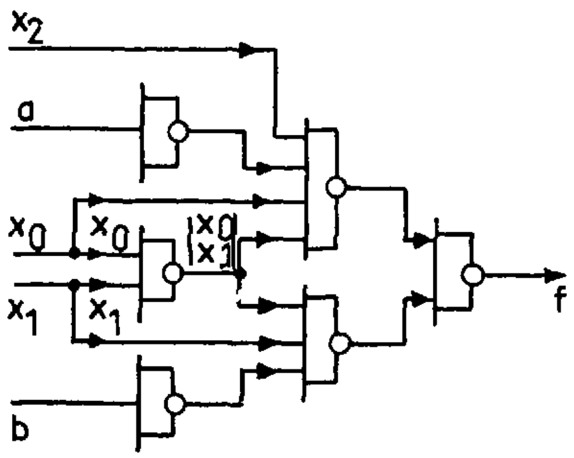
b- Réalisation optimale à l'aide de circuits "NI" :

$f = \left|\begin{array}{c|c|c} x_o & x_2 & \bar{x}_1.\bar{a} \\ x_1 & x_1 & \bar{x}_o.\bar{b} \end{array}\right|$

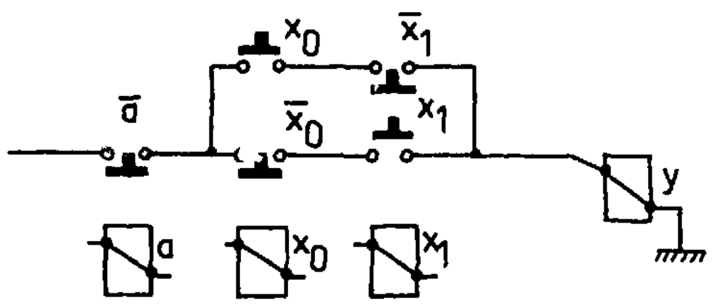


Réalisation optimale à l'aide de circuits "ON" :

$f = \left|\begin{array}{l} x_o.x_2 \left|\begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_o \end{array}\right|.\bar{a} \\ x_1 - \left|\begin{array}{c} \bar{x}_o \\ \bar{x}_1 \end{array}\right|.\bar{b} \end{array}\right|$



7 - On donne la chaîne de contact suivante :

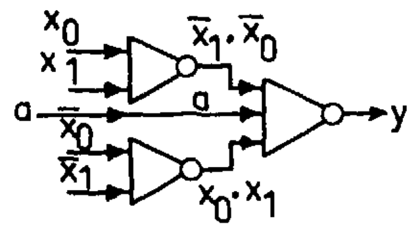


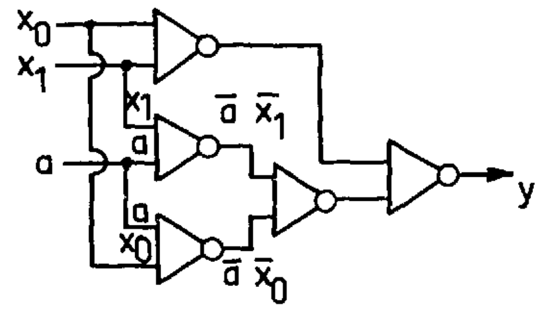
Ecrire la fonction binaire correspondante, puis faire le schéma en utilisant trois circuits "NI" en deux couches.

Montrer que le schéma peut être réalisé à l'aide de cinq circuits "NI" au maximum si l'on ne dispose que des variables directes.

Réponses :

$y = \bar{a} \left|\begin{array}{c} x_o.\bar{x}_1 \\ x_1.\bar{x}_o \end{array}\right| = \bar{a} \left|\begin{array}{c|c} x_o & \bar{x}_1 \\ x_1 & \bar{x}_o \end{array}\right|$





8 - Déterminer le circuit d'égalité, ou circuit de coïncidence, relatif aux deux nombres binaires de n chiffres, A_n et B_n .

$A_n = a_n, a_{n-1}, \ldots.., a_2, a_1$

$B_n = b_n, b_{n-1}, \ldots.., b_2, b_1$

a- Etablir en premier lieu, la fonction binaire "F_n" telle que $F_n = 1$ lorsque $A_n = B_n$. On calculera, dans ce but, les fonctions $s_1, s_2, \ldots.., s_n$ telles que $s_i = 1$ lorsque $a_i = b_i$.

b- Faire les schémas en utilisant des circuits "NI" :

1) Dans le cas où le schéma est réalisé en deux couches et où l'on dispose à la fois des formes directes et complémentées des variables.

2) Dans le cas où l'on dispose seulement des variables sous la forme directe.

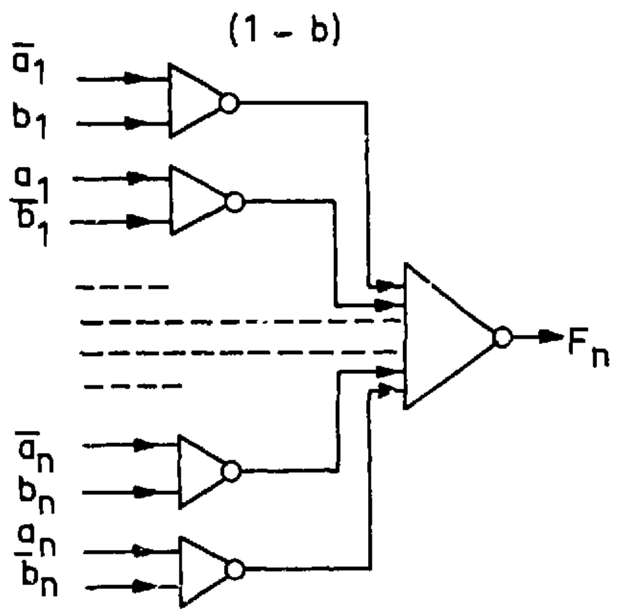
Indiquer dans chaque cas le nombre de circuits "NI" nécessaires.

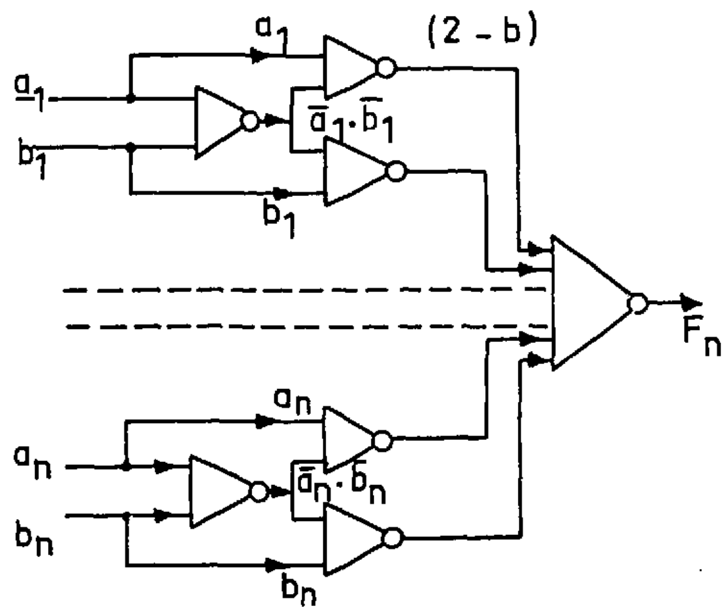
a - $s_i = \left|\begin{array}{c} \bar{a}_i.\bar{b}_i \\ b_i.a_i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{a}_i & \bar{b}_i \\ b_i & a_i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{a}_i.\bar{b}_i & \bar{a}_i.\bar{b}_i \\ a_i & b_i \end{array}\right|$

$$F_n = s_1 . s_2 \ldots\ldots s_{n-1} . s_n = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} \bar{a}_1 & a_1 & \bar{a}_2 & a_2 & \ldots & \bar{a}_{n-1} & a_{n-1} & \bar{a}_n & a_n \\ b_1 & \bar{b}_1 & b_2 & \bar{b}_2 & & b_{n-1} & \bar{b}_{n-1} & b_n & \bar{b}_n \end{array}\right|$$

$$F_n = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \bar{a}_1 . \bar{b}_1 & \bar{a}_1 . \bar{b}_1 & \bar{a}_2 . \bar{b}_2 & \bar{a}_2 . \bar{b}_2 & \ldots\ldots & \bar{a}_n . \bar{b}_n & \bar{a}_n . \bar{b}_n \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & & a_n & b_n \end{array}\right|$$

b-





Cas où l'on dispose des deux formes des variables. Le schéma comprend alors $(2n + 1)$ circuits "NI" dont un à "2n" entrées.

Cas où la forme directe des variables est seule disponible. Dans ce cas, le schéma comprend $(3n + 1)$ circuits "NI" dont un à "2n" entrées.

9 – Pour réaliser un circuit de coïncidence, on utilise la fonction binaire "F_n" suivante :

$$F_n = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \bar{a}_1 . \bar{b}_1 & \bar{a}_2 . \bar{b}_2 & \ldots\ldots & \bar{a}_n . \bar{b}_n \\ a_1 . b_1 & a_2 . b_2 & & a_n . b_n \end{array}\right|$$

a- Etablir la loi de récurrence qui permet de passer de "F_{p-1}" à "F_p", $F_p(F_{p-1}, a_p, b_p)$, puis en supposant que l'on dispose des variables directes et complémentées, montrer que la fonction "F_n" peut être réalisée à l'aide de "3n" circuits "ON" ayant au maximum trois entrées.

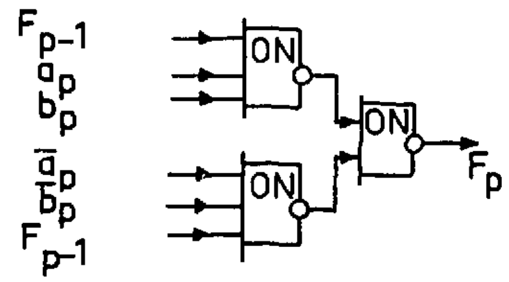
b- Montrer que la complémentation de la formule de récurrence permet d'envisager la réalisation de la fonction "F_n" en utilisant "3n + 1" circuits "NI" ne disposant que de trois entrées au maximum.

- Quel est, alors, dans chacun des deux cas précédents, le nombre des couches (circuits en cascade) utilisées ?
- Que peut-on en déduire quant au temps de réponse du circuit de coïncidence ainsi réalisé ?

Réponses :

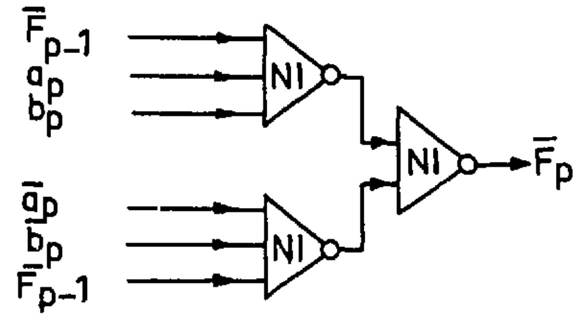
a- $$F_p = F_{p-1} \left|\begin{array}{c} \bar{a}_p . \bar{b}_p \\ a_p . b_p \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} F_{p-1} . \bar{a}_p . \bar{b}_p \\ F_{p-1} . a_p . b_p \end{array}\right|$$

élément itératif du circuit.



Il faudra "3n" circuits "ON", au total, avec "2n" couches au maximum. Le temps de réponse maximal sera donc égal à $2n . \tau$ en appelant "τ" le temps de réponse moyen d'un circuit "ON".

$$\bar{F}_p = \left|\begin{array}{c|c} \bar{F}_{p-1} & \bar{F}_{p-1} \\ \bar{a}_p & a_p \\ \bar{b}_p & b_p \end{array}\right|$$



Il faudra, dans ce cas, envisager un circuit "NI" supplémentaire pour complémenter $\bar{F}_n$, d'où "3n + 1" circuit et "2n + 1" couches avec un temps de réponse maximal égal à $(2n + 1) . \tau$.

CHAPITRE IV

FONCTIONS DE TRANSCODAGE

Il est possible d'exprimer, de diverses façons, des combinaisons de valeurs binaires par des nombres entiers associés, exprimés dans le système de numération binaire.

Prenons, par exemple, les cinq variables x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, et choisissons pour ces variables un ordre défini, l'ordre inverse des indices par exemple. Tout nombre binaire de cinq chiffres peut alors représenter sans ambiguïté une combinaison de valeurs de ces cinq variables et une seule.

Le nombre (13) 01101_2 définit la combinaison,

$$x_5 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1 .$$

Le nombre (26) 11010_2 définit la combinaison,

$$x_5 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 0 .$$

Lorsque le nombre est inférieur à (16) 10000_2, il faut écrire les cinq chiffres en complétant par des zéros les chiffres correspondant aux poids les plus élevés.

$x_5 = 0$, $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, correspond par exemple à "3", 00011_2.

4.1 - Définitions

Nous appellerons fonction de transcodage toute fonction algébrique explicite discontinue et limitée faisant correspondre à des nombres entiers donnés "X_n" (vecteur variable ou vecteur de commande), des nombres entiers "Y_p" (vecteur fonction).

Une fonction de transcodage $\boxed{Y_p = F(X_n)}$ définit donc une application de l'ensemble des vecteurs "X_n" vers l'ensemble des vecteurs "Y_p".

La fonction peut être représentée par un système de p fonctions binaires qui dépendent de n variables, en posant :

$$X_n = x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots\dots, x_2, x_1$$

$$Y_p = y_p, y_{p-1}, \dots\dots\dots\dots, y_2, y_1$$

Nous obtenons alors le système suivant :

$$Y_p(X_n) \left| \begin{array}{l} y_p = y_p\,(x_n,\ x_{n-1},\ \ldots\ldots,\ x_2,\ x_1 \\ y_{p-1} = y_{p-1}\,(x_n,\ x_{n-1},\ldots\ldots,\ x_2,\ x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2 = y_2\,(x_n,\ x_{n-1},\ \ldots\ldots,\ x_2,\ x_1\ ) \\ y_1 = y_1\,(x_n,\ x_{n-1},\ \ldots\ldots,\ x_2,\ x_1) \end{array} \right.$$

4.2 – Propriétés des fonctions de transcodage

Une fonction de transcodage $Y_p = F\ (X_n)$ fait correspondre à toute valeur entière du vecteur de commande "X_n", une valeur entière du vecteur fonction "Y_p" et une seule.

Cette propriété essentielle caractérise les fonctions de transcodage que l'on peut représenter graphiquement dans un plan ramené à deux axes de coordonnées OX et OY. Le graphe obtenu se limite à un ensemble fini de points absolument indépendants les uns des autres. Ce qui signifie qu'il est toujours possible de choisir pour quelques points ou pour la totalité des points du graphe, un ordre de succession quelconque.

Réciproquement, si à chaque valeur de "X_n" d'un graphe donné correspond une valeur de "Y_p" et une seule, le graphe considéré définit une fonction de transcodage.

Notons que les fonctions élémentaires "y_i" du vecteur "Y_p" sont des fonctions binaires au sens défini dans les chapitres précédents $y_i \in E_{01}$. Les résultats établis concernant l'utilisation des tables de vérité et toutes les méthodes de simplification, étudiées précédemment, leur sont applicables.

Pour conserver une représentation homogène, nous conviendrons d'écrire la table de vérité d'une fonction de transcodage en plaçant à gauche d'un double trait vertical les composantes du vecteur de commande et, à droite, celles du vecteur fonction. L'établissement des fonctions binaires "y_i" ne présente aucune difficulté comme le montre l'exemple suivant :

Soit à établir la fonction de transcodage :

$$\underline{Y_{(6)*} = X^2_{(3)*}}$$

$x = x_3,\ x_2,\ x_1$ $\qquad\qquad$ $Y = y_6,\ y_5,\ y_4,\ y_3,\ y_2,\ y_1$

* L'indice placé au bas du vecteur variable ou du vecteur fonction indique le nombre de composantes de ce vecteur ; c'est-à-dire le nombre de chiffres binaires associés.

Table de vérité

	X			Y						
	x_3	x_2	x_1	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
3	0	1	1	0	0	1	0	0	1	9
4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	16
5	1	0	1	0	1	1	0	0	1	25
6	1	1	0	1	0	0	1	0	0	36
7	1	1	1	1	1	0	0	0	1	49

Nous tirons immédiatement de la table de vérité :

$$y_1 = x_1 \qquad\qquad y_4 = \left| \begin{array}{l} \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \\ x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \end{array} \right| = x_1 \left| \begin{array}{l} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array} \right|$$

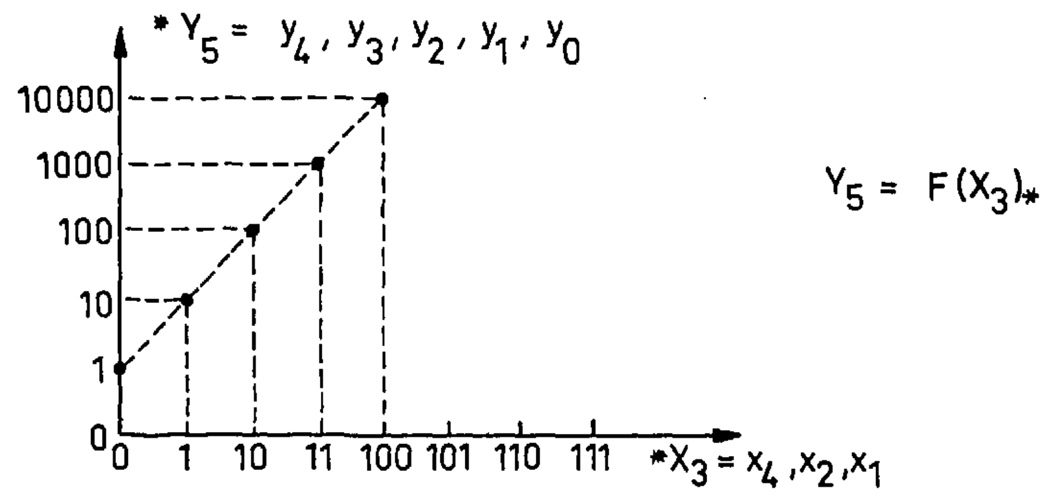
$$y_2 = 0 \qquad\qquad y_5 = \left| \begin{array}{l} x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \\ x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \\ x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{array} \right| = x_3 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \bar{x}_2 \end{array} \right|$$

$$y_3 = \left| \begin{array}{l} \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \\ x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \end{array} \right| \qquad\qquad y_6 = \left| \begin{array}{l} x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \\ x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{array} \right| = x_2 \cdot x_3$$

$$= x_2 \cdot \bar{x}_1$$

Il arrive souvent qu'une fonction de transcodage soit incomplètement définie, lorsqu'un certain nombre de valeurs peuvent être arbitrairement fixées. Ces valeurs correspondent à des combinaisons disponibles.

Il y a lieu de choisir, alors, ces combinaisons disponibles de façon à simplifier au mieux les fonctions binaires calculées. Considérons, par exemple, la représentation graphique suivante :



On peut, en partant du graphe, établir une table de vérité dans laquelle les combinaisons :

X = 101 , X = 110 , X = 111 sont disponibles.

	X			Y						
	x_3	x_2	x_1	y_4	y_3	y_2	y_1	y_o		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	1	0	2	
2	0	1	0	0	0	1	0	0	4	
3	0	1	1	0	1	0	0	0	8	
4	1	0	0	1	0	0	0	0	16	
5	1	0	1	1			1			combinaisons disponibles
6	1	1	0	1		1				
7	1	1	1	1	1					

En utilisant au mieux les combinaisons disponibles, nous voyons que "y_1" peut être simplifiée par adjacence en associant 1 et 5, "y_2" peut être simplifiée en associant 2 et 6, "y_3" en associant 3 et 7 et "y_4" en associant 4 - 5 - 6 et 7.

Ce qui donne :

$$y_o = \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \qquad y_2 = \left| \begin{matrix} \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \\ x_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \end{matrix} \right| = x_2 \cdot \bar{x}_1$$

$$y_1 = \left| \begin{matrix} \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \\ x_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \end{matrix} \right| = \bar{x}_2 \cdot x_1 \qquad y_3 = \left| \begin{matrix} \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot x_1 \\ x_4 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{matrix} \right| = x_2 \cdot x_1$$

$$y_4 = x_4$$

Notons que la fonction de transcodage considérée correspond à :

$$\boxed{Y_{(5)} = 2^{X_{(3)}}}$$

à condition de limiter $Y_{(5)}$ à (16) 10000_2 .

4.3 - Formes de transcodage

Lorsque les fonctions binaires élémentaires qui constituent une fonction de transcodage sont exprimées séparément en fonction des variables "x_i" du vecteur de commande, on dit que la fonction de transcodage se présente sous forme développée.

C'est le cas des deux exemples précédents.

Une fonction de transcodage peut cependant revêtir d'autres formes parmi lesquelles nous distinguerons principalement : la forme maillée ou arborescente, la forme paramétrique et la forme itérative.

4.31 - Forme maillée ou arborescente

C'est une forme que l'on obtient en procédant à des mises en facteur sur plusieurs fonctions binaires groupées appartenant à un système de transcodage.

Prenons, par exemple, la forme développée suivante :

$$\begin{aligned} y_o &= \bar{x}_4 . \bar{x}_2 . \bar{x}_1 \\ y_1 &= \bar{x}_4 . \bar{x}_2 . x_1 \\ y_2 &= \bar{x}_4 . x_2 . \bar{x}_1 \\ y_3 &= \bar{x}_4 . x_2 . x_1 \\ y_4 &= x_4 . \bar{x}_2 . \bar{x}_1 \end{aligned}$$

Nous pouvons l'écrire sous forme maillée ou arborescente :

$$
\left|\begin{array}{l}
\bar{x}_4 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_2 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_1 = y_o \\ x_1 = y_1 \end{array}\right. \\ x_2 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_1 = y_2 \\ x_1 = y_3 \end{array}\right. \end{array}\right. \\
x_4 . \bar{x}_2 . \bar{x}_1 = y_4
\end{array}\right.
\quad \text{ou encore} \quad
\left|\begin{array}{l}
\bar{x}_1 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_2 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_4 = y_o \\ x_4 = y_4 \end{array}\right. \\ x_2 . \bar{x}_4 - = y_2 \end{array}\right. \\
x_1 . \bar{x}_4 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_2 - = y_1 \\ x_2 - = y_3 \end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Nous obtenons des réseaux à structure arborescente ou pyramidale qui ont surtout un intérêt lorsque les fonctions binaires élémentaires sont des produits.

4.32 – Forme paramétrique

Elle se caractérise par la substitution de fonctions ou paramètres à des groupes fonctionnels de variables qui apparaissent simultanément dans plusieurs fonctions binaires élémentaires du même système de transcodage.

Rien ne s'oppose à ce que le paramètre soit même, dans certains cas, une fonction binaire du système.

Considérons, par exemple, la fonction de transcodage développée :

$$
\left|\begin{array}{l}
y_o = \bar{x}_1 . \bar{x}_2 \\
y_1 = x_1 . \bar{x}_2 = \left|\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right| \bar{x}_2 \\
\\
y_2 = \bar{x}_1 . x_2 = \left|\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right| \bar{x}_1
\end{array}\right.
$$

Nous constatons qu'en posant $a = \left|\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right|$, nous pouvons écrire la forme paramétrique :

$$
a = \left|\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right|
$$

$$
\begin{array}{l}
y_o = \bar{a} \\
y_1 = a . \bar{x}_2 \\
y_2 = a . \bar{x}_1
\end{array}
$$

mais nous pouvons écrire également :

$$
\begin{array}{l}
y_o = \bar{x}_1 . \bar{x}_2 \\
y_1 = \bar{y}_o . \bar{x}_2 \\
y_2 = \bar{y}_o . \bar{x}_1
\end{array}
\quad \text{ou encore} \quad
\left|\begin{array}{l}
\bar{x}_1 . \bar{x}_2 = y_o \\
\bar{y}_o \left|\begin{array}{l} \bar{x}_1 = y_2 \\ \bar{x}_2 = y_1 \end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

4.33 – Forme itérative

La forme itérative est une forme paramétrique particulière qui s'établit lorsque les fonctions élémentaires d'un système de transcodage sont reliées entre elles par une loi de récurrence.

$y_p = y_{p-1} . x_p$ est un exemple simple de récurrence qui conduit, si l'on pose $y_o = x_o$, à la forme itérative suivante :

$$
\left|\begin{array}{l}
y_o = x_o \\
y_1 = y_o . x_1 \\
y_2 = y_1 . x_2 \\
\dots\dots\dots\dots \\
y_n = y_{n-1} . x_n
\end{array}\right.
$$

On peut, en partant d'une forme itérative, retrouver la forme développée correspondante :

$$
\left|\begin{array}{l}
y_o = x_o \\
y_1 = x_o . x_1 \\
y_2 = x_o . x_1 . x_2 \\
\vdots \;\; \dots\dots\dots\dots \\
y_n = x_o . x_1 . x_2 \dots\dots x_n
\end{array}\right.
$$

On peut même, le cas échéant, l'écrire sous forme maillée :

$$
\begin{array}{l}
- x_o \left|\begin{array}{l} \vdash \; = y_o \\ x_1 \left|\begin{array}{l} \vdash \; = y_1 \\ x_2 \left|\begin{array}{l} \vdash \; = y_2 \\ x_3 \left|\begin{array}{l} \vdash \; = \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\
\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad \vdash x_n - = y_n
\end{array}
$$

L'avantage d'une forme itérative est de pouvoir être déterminée à partir de tables de vérité très simples où les fonctions binaires apparaissent également comme des variables selon la valeur de l'indice considéré.

Dans le cas de l'exemple traité, la table de vérité est particulièrement simple :

variables		fonction
x_p	y_{p-1}	y_p
1	1	1

Le double trait vertical de séparation permet systématiquement de distinguer dans toute table de vérité, les éléments considérés comme variables (à gauche) de ceux qui ont été choisis comme fonctions (à droite).

La forme itérative est, en conclusion, celle que l'on rencontre le plus souvent en pratique. Elle résulte du fait que la recherche des algorithmes dans les systèmes de traitement numérique de l'information procède, le plus souvent, de lois de récurrence liées à la distribution des fonctions.

4.4 – Simplification des fonctions de transcodage

Comme dans le cas des fonctions binaires, l'optimisation des fonctions de transcodage est un problème qui ne peut être résolu de façon systématique.

Il est, d'ailleurs, illusoire de vouloir optimiser si l'on ne s'est pas donné, au préalable, une règle précise d'optimisation.

Ce serait vouloir résoudre un problème en ignorant l'une de ses principales données. Une règle étant fixée, il faut encore l'assortir d'hypothèses complémentaires (hypothèse d'additivité par exemple). Ces règles et ces hypothèses ont, à priori, un caractère arbitraire qui dépend essentiellement du but recherché, et laissent entrevoir les difficultés du problème lorsqu'il est considéré dans sa généralité.

Il est donc sage de nous limiter, comme nous l'avons déjà fait, à l'établissement de méthodes de simplification qui, sans prétendre à l'optimisation, permettent d'obtenir des formes plus accessibles à la compréhension ou mieux adaptées aux réalisations pratiques.

La simplification des formes paramétriques conduit souvent à la recherche de facteurs directs et de facteurs duals communs à plusieurs fonctions binaires. Pour opérer avec facilité, il suffit de se référer aux deux théorèmes suivants :

4.41 – Théorème

Tous les facteurs ou implicants communs à "p" fonctions binaires élémentaires $y_1, y_2, \dots, y_p$, sont facteurs ou implicants du produel de ces fonctions.

Considérons, en effet, le produel $\pi_f = \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{matrix} \right|$

π_f est un implicant de toutes les fonctions "y_i".

$$\left(\pi_f = \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{matrix} \right| \right) \Longrightarrow (y_i = \pi_f . y_i, \ \forall i = 1, 2, \dots p)$$

Tout facteur "f" commun aux fonctions "y_i" est réciproquement facteur de "π_f".

$$\left(y_1 = f.h_1, \ y_2 = f.h_2, \ \dots, \ y_p = f.h_p \right) \Longrightarrow \left(\pi_f = f. \left| \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{matrix} \right| \right)$$

4.42 – Théorème

Tous les facteurs ou implicants duals communs à "p" fonctions binaires élémentaires $y_1, y_2, \dots, y_p$, sont facteurs ou implicants duals du produit de ces fonctions.

Soit le produit $P_f = y_1 . y_2 \dots y_p$

P_f est un implicant dual de toutes les fonctions "y_i".

$$\left(P_f = y_1 . y_2 \dots y_p \right) \Longrightarrow \left(y_i = \left| \begin{matrix} y_i \\ P_f \end{matrix} \right|, \ \forall i = 1, 2, \dots, p \right)$$

Réciproquement, tout facteur dual "f" commun aux "p" fonctions "y_i" est facteur dual de "P_f".

$$\left(y_1 = \left| \begin{matrix} f \\ g_1 \end{matrix} \right|, \ y_2 = \left| \begin{matrix} f \\ g_2 \end{matrix} \right|, \ \dots, \ y_p = \left| \begin{matrix} f \\ g_p \end{matrix} \right| \right) \Longrightarrow \left(P_f = \left| \begin{matrix} \text{---}\ f\ \text{---} \\ g_1 . g_2 \dots g_p \end{matrix} \right| \right)$$

4.43 – Corollaire

Donnons-nous deux fonctions binaires qui dépendent des mêmes variables ; $y_1 (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y_2 (x_1, x_2, \dots x_n)$. Supposons connues, en totalité, les "p" combinaisons repérées par les nombres $a_1, a_2, \dots, a_p$, pour lesquelles $y_1 = 1$ et $y_2 = 0$, ainsi que la totalité des "q" combinaisons repérées par les nombres $b_1, b_2, \dots, b_q$ pour lesquelles $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$.

Calculons les "p" produels $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_p$ respectivement nuls pour les combinaisons $a_1, a_2, \dots, a_p$ des variables et les "q" produits $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$ respectivement égaux à l'unité pour les combinaisons $b_1, b_2, \dots, b_q$ des variables. Nous pouvons, alors, écrire les deux relations :

$$y_2 = \left| \begin{matrix} y_1 . \bar{f}_1 . \bar{f}_2 \dots \bar{f}_p \\ \text{---}\ \varphi_1\ \text{---} \\ \text{---}\ \varphi_2\ \text{---} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \text{---}\ \varphi_q\ \text{---} \end{matrix} \right| \qquad y_1 = \left| \begin{matrix} y_2 . \bar{\varphi}_1 . \bar{\varphi}_2 \dots \bar{\varphi}_q \\ \text{---}\ f_1\ \text{---} \\ \text{---}\ f_2\ \text{---} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \text{---}\ f_p\ \text{---} \end{matrix} \right|$$

4.5 – Etude d'une fonction de transcodage (Addition binaire)

Pour étudier un système complexe de transcodage, il faut procéder, d'abord, à une décomposition suivant des fonctions plus simples en analysant les particularités du système connues généralement à l'origine.

La décomposition doit se faire en rassemblant au mieux les fonctions élémentaires qui admettent des produits ou des produels communs. Il est intéressant, par conséquent, de grouper les fonctions ayant un maximum de variables communes, de facteurs ou de facteurs duals communs en procédant éventuellement à des complémentations susceptibles de faire apparaître des relations simplificatrices.

Il est indiqué, surtout, de faire apparaître des relations de récurrence qui peuvent mener à des formes itératives faciles à traiter. C'est tout l'art de l'ingénieur que de procéder à des choix judicieux qui dépendent beaucoup des buts envisagés et ne peuvent pas toujours faire l'objet d'une étude systématique. L'essentiel est de disposer, en définitive, de l'outil mathématique indispensable et d'apprendre, par l'exemple, à l'utiliser.

Etablissons, en particulier, la fonction de transcodage qui correspond à l'addition binaire.

Deux nombres binaires de "n" chiffres :

$A_n = a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$, $B_n = b_n, b_{n-1}, \dots, b_2, b_1$ et leur somme binaire : $S_n = s_n, s_{n-1}, \dots, s_2, s_1$, définissent une fonction de transcodage.

$$S_n = T(A_n, B_n) = A_n + B_n$$

Considérons l'addition des deux valeurs particulières :

$A_n = \dots 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ (93)_{10}$ et $B_n = \dots 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ (39)_{10}$

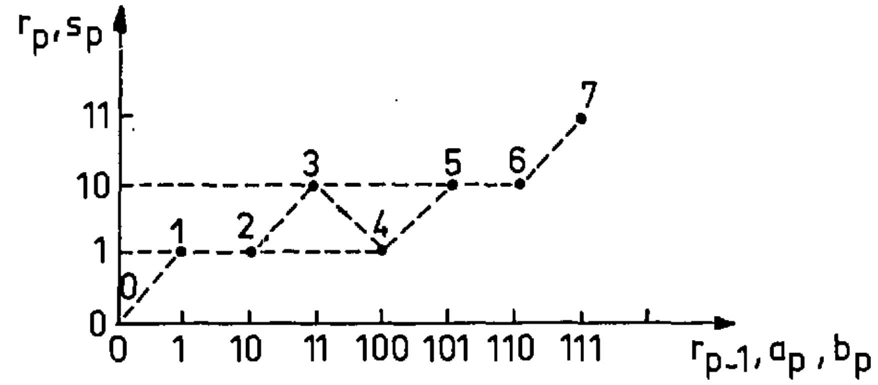
$$\begin{array}{rcll}
 & \dots 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 & \longleftarrow & \text{report des retenues} \\
 & \dots 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 & \longleftarrow & A_n \quad 93 \\
+ & \underline{\dots 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1} & \longleftarrow & B_n \quad + \underline{39} \\
 & \dots 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 & \longleftarrow & S_n \quad 132
\end{array}$$

En désignant par "r_p" la retenue rélative à l'addition des éléments de poids "p" nous pouvons donc écrire :

$$\underline{r_{p-1} + a_p + b_p = r_p, s_p}$$

cette relation de récurrence très simple mène à la table de vérité et au graphe suivants :

	r_{p-1}	a_p	b_p	r_p	s_p	
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	1	0	2
4	1	0	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	2
6	1	1	0	1	0	2
7	1	1	1	1	1	3



Nous voyons sur le graphe que les points 1, 2, 4 et 3, 5, 6 correspondent respectivement à une même valeur du vecteur fonction "r_p, s_p".

Le vecteur "$\bar{r}_p$, s_p" est donc nul pour les combinaisons 3, 5 et 6 des variables, ce qui signifie que les produels correspondant à ces combinaisons sont des facteurs communs aux fonctions binaires $\bar{r}_p$ et s_p que nous pouvons tirer immédiatement de la table de vérité.

$$\bar{r}_p = \left|\begin{array}{c|c|c|c} r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ \bar{a}_p & a_p & \bar{a}_p & \bar{a}_p \\ \bar{b}_p & \bar{b}_p & b_p & \bar{b}_p \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \bar{a}_p & \multicolumn{2}{c}{\bar{r}_{p-1}} \\ \bar{b}_p & a_p & b_p \\ & \bar{b}_p & \bar{a}_p \end{array}\right|$$

$$s_p = \left|\begin{array}{c|c|c|c} r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & r_{p-1} \\ \bar{a}_p & a_p & \bar{a}_p & a_p \\ \bar{b}_p & \bar{b}_p & b_p & b_p \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{r_{p-1}} & \multicolumn{2}{c}{\bar{r}_{p-1}} \\ \bar{a}_p & b_p & a_p & b_p \\ \bar{b}_p & a_p & \bar{b}_p & \bar{a}_b \end{array}\right|$$

En posant $\alpha_p = \left|\begin{array}{c|c} \bar{a}_p & b_p \\ \bar{b}_p & a_p \end{array}\right|$ nous pouvons écrire le système d'addition binaire sous une forme qui est à la fois itérative, paramétrique et maillée.

$$-\left|\begin{array}{c}\bar a_1\\ \bar b_1\end{array}\right|\begin{array}{c}b_1\\ a_1\end{array}\left|\begin{array}{l}- = \alpha_1 = s_1\\ \\ - = \bar r_1\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c}\bar a_2\\ \bar b_2\end{array}\right|\begin{array}{c}b_2\\ a_2\end{array}\Big|- = \alpha_2 \qquad\qquad -\left|\begin{array}{c}\bar r_1\\ \bar\alpha_2\end{array}\right|\begin{array}{c}\bar a_2\\ \bar b_2\\ \alpha_2\\ r_1\end{array}\left|\begin{array}{l}- = \bar r_2\\ \\ \\ - = s_2\end{array}\right.$$

....

$$\left|\begin{array}{c}\bar a_p\\ \bar b_p\end{array}\right|\begin{array}{c}b_p\\ a_p\end{array}\Big|- = \alpha_p \qquad\qquad -\left|\begin{array}{c}\bar r_{p-1}\\ \bar\alpha_p\end{array}\right|\begin{array}{c}\bar a_p\\ \bar b_p\\ \alpha_p\\ r_{p-1}\end{array}\left|\begin{array}{l}- = \bar r_p\\ \\ \\ - = s_p\end{array}\right.$$

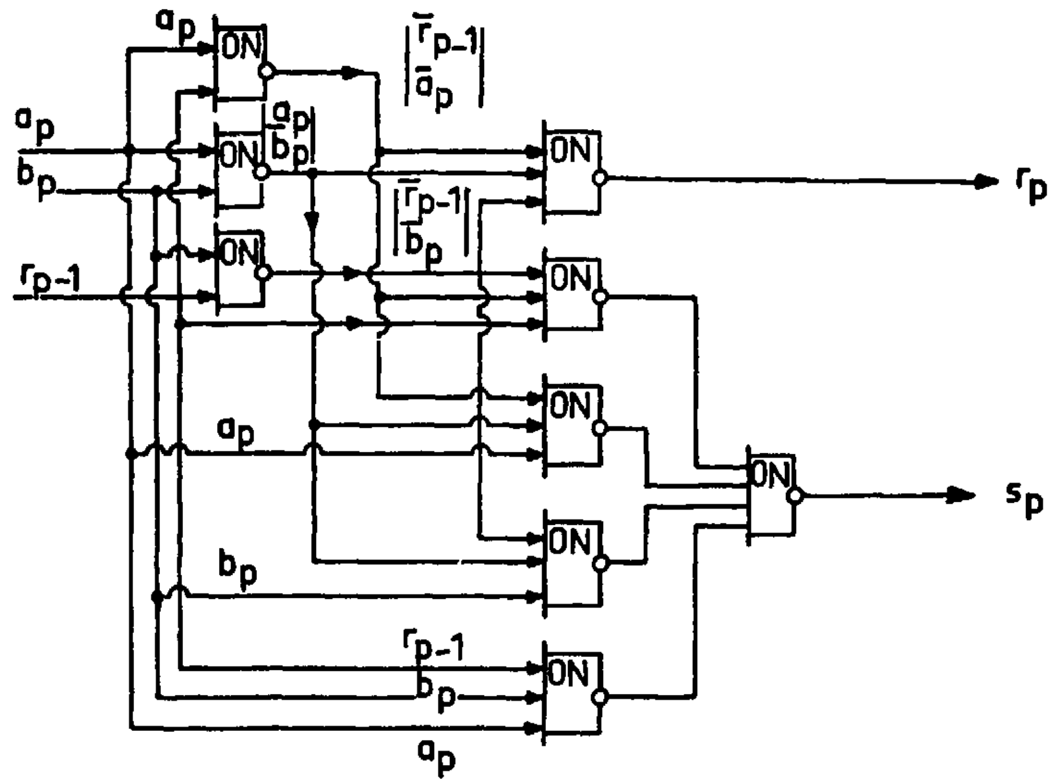
....

$$\left|\begin{array}{c}\bar a_n\\ \bar b_n\end{array}\right|\begin{array}{c}a_n\\ b_n\end{array}\Big|- = \alpha_n \qquad\qquad -\left|\begin{array}{c}\bar r_{n-1}\\ \bar\alpha_n\end{array}\right|\begin{array}{c}\bar a_n\\ \bar b_n\\ \alpha_n\\ r_{n-1}\end{array}\left|\begin{array}{l}- = \bar r_n\\ \\ \\ - = s_n\end{array}\right.$$

Pour réaliser le système de transcodage de façon optimale en utilisant des circuits "ON", nous écrirons :

$$r_p = \left|\begin{array}{c}a_p\cdot r_{p-1}\\ b_p\cdot r_{p-1}\\ a_p\cdot b_p\end{array}\right| , \quad s_p = \left|\begin{array}{c}\bar r_p\\ \\ r_{p-1}\cdot a_p\cdot b_p\end{array}\right.\left|\begin{array}{c}r_{p-1}\\ a_p\\ b_p\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c}\begin{array}{c}\bar r_{p-1}\\ \bar a_p\end{array} & \begin{array}{c}\bar r_{p-1}\\ \bar b_p\end{array} & r_{p-1}\\ \begin{array}{c}\bar a_p\\ \bar b_p\end{array} & \begin{array}{c}\bar r_{p-1}\\ \bar a_p\end{array} & a_p\\ \begin{array}{c}\bar a_p\\ \bar b_p\end{array} & \begin{array}{c}\bar r_{p-1}\\ \bar b_p\end{array} & b_p\\ \multicolumn{3}{c}{r_{p-1}\cdot a_p\cdot b_p}\end{array}\right|$$

Ce qui permet de réaliser le circuit suivant :



Pour chaque couple de chiffres binaires additionnés, 9 circuits "ON" sont nécessaires, au minimum, lorsque l'on ne dispose que des variables directes.

$$r_p = \left|\begin{array}{c}a_p\\ b_p\end{array}\right|\begin{array}{c}r_{p-1}\\ a_p\end{array}\left|\begin{array}{c}r_{p-1}\\ b_p\end{array}\right| , \quad s_p = \left|\begin{array}{c}\bar r_{p-1}\cdot\bar a_p\\ \bar r_{p-1}\cdot\bar b_p\\ r_{p-1}\end{array}\right|\begin{array}{c}\bar r_{p-1}\cdot\bar b_p\\ \bar a_p\cdot\bar b_p\\ b_p\end{array}\left|\begin{array}{c}\bar a_p\cdot\bar b_p\\ \bar r_{p-1}\cdot\bar a_p\\ a_p\end{array}\right|\begin{array}{c}r_{p-1}\\ a_p\\ b_p\end{array}\Big|$$

Sans qu'il soit besoin de faire un schéma, nous voyons qu'il faudra également 9 circuits "NI" si l'on ne dispose que des variables directes.

Il est possible, cependant, d'envisager une décomposition différente de la fonction de transcodage, si l'on considère deux additions successives :

1ère addition	$a_p + b_p = x_p, z_p$
2ème addition	$r_{p-1} + z_p = y_p, s_p$
retenue	$x_p + y_p = r_p$

Ces additions correspondent aux tables de vérité suivantes :

a_p	b_p	x_p	z_p
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

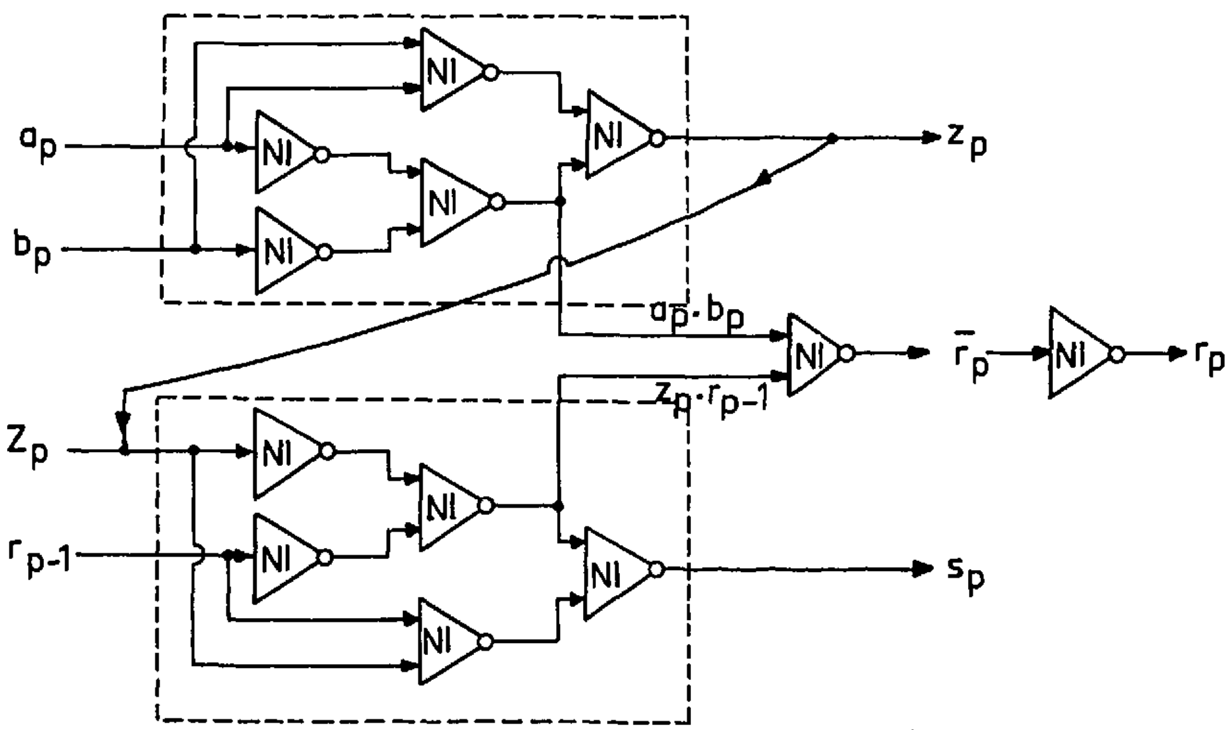
r_{p-1}	z_p	y_p	s_p
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

d'où les fonctions :

$$z_p = \left| \begin{array}{c|c} a_p & \bar{a}_p \\ b_p & \bar{b}_p \end{array} \right| \quad , \quad x_p = a_p \cdot b_p$$

$$s_p = \left| \begin{array}{c|c} r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ z_p & \bar{z}_p \end{array} \right| \quad , \quad y_p = r_{p-1} \cdot z_p \quad , \quad r_p = \left| \begin{array}{c} x_p \\ y_p \end{array} \right|$$

Nous pouvons faire correspondre à ces fonctions, les schémas suivants :



Les deux circuits identiques qui fournissent "z_p" et "s_p" sont appelés "demi-additionneurs".

4.6 – Etude d'une fonction de transcodage itérative

Il s'agit d'étudier la fonction de transcodage,

$$Y_n = y_n^n, \; y_n^{n-1}, \; \ldots, \; y_n^p, \; \ldots \; y_n^1, \; y_n^o$$

dans laquelle chaque composante "y_n^p" représente une fonction binaire des "n" variables

$$x_n, \; x_{n-1}, \; \ldots, \; x_2, \; x_1 = X_n,$$

telle que y_n^p prenne la valeur unité, lorsque "p" variables et "p" seulement, appartenant à "X_n", sont égales à l'unité.

Il y a lieu de rechercher, d'abord, une loi de récurrence qui permette de résoudre simplement le problème de transcodage en écrivant la fonction sous forme itérative. Dans ce but, nous supposerons connu le vecteur fonction

$$Y_{n-1} = y_{n-1}^{n-1}, \; y_{n-1}^{n-2}, \; \ldots, \; y_{n-1}^p, \; y_{n-1}^{p-1}, \; \ldots, \; y_{n-1}^1, \; y_{n-1}^o,$$

qui comprend une fonction et une variable binaires de moins que le vecteur "Y_n".

Un raisonnement simple permet de constater que $y_{n-1}^p = 1$ entraîne nécessairement $y_n^p = 1$ lorsque $x_n = 0$, et que si $x_n = 1$, c'est $y_{n-1}^{p-1} = 1$ qui entraîne nécessairement $y_n^p = 1$. Dans tous les autres cas, y_n^p est nulle et nous pouvons, en conséquence, écrire la table de vérité réduite suivante :

x_n	y_{n-1}^{p-1}	y_{n-1}^p	y_n^p
0	ø	1	1
1	1	ø	1

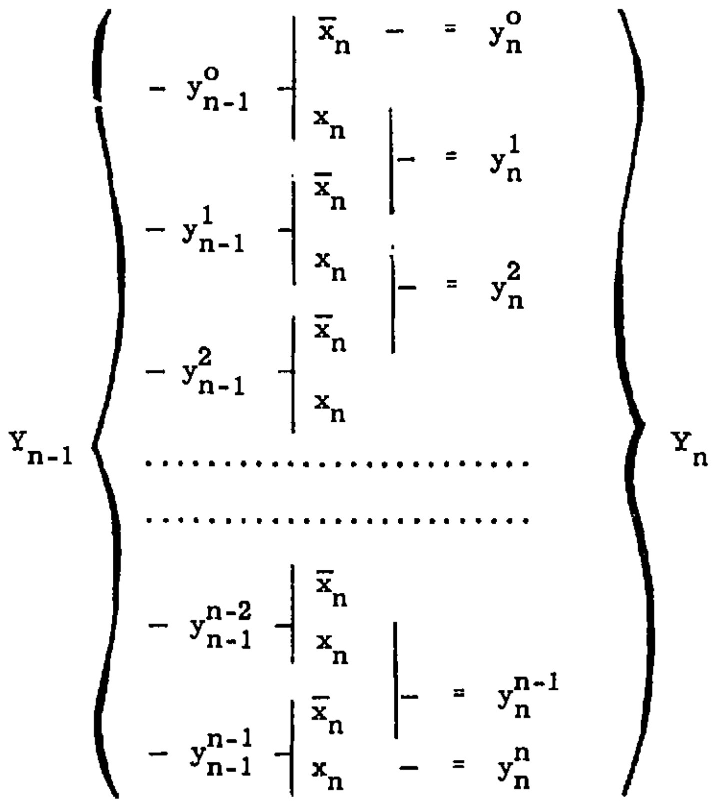
d'où nous tirons la fonction carrée biforme de récurrence :

$$y_n^p = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_n \cdot y_{n-1}^p \\ y_{n-1}^{p-1} \cdot x_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_n & y_{n-1}^p \\ y_{n-1}^{p-1} & x_n \end{array} \right|$$

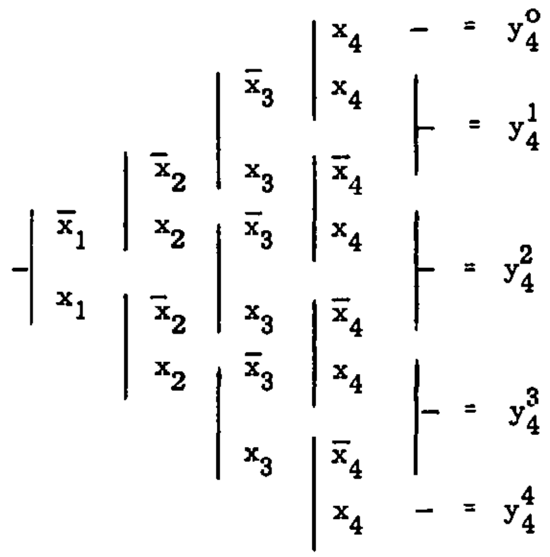
Les fonctions extrêmes se simplifient et s'écrivent :

$$y_n^n = x_n \cdot y_{n-1}^{n-1} \qquad \text{et} \qquad y_n^o = \bar{x}_n \cdot y_{n-1}^o$$

Le vecteur "Y_n" peut se déduire en définitive du vecteur "Y_{n-1}" en mettant la fonction de transcodage sous forme itérative et maillée :



La figure ci-après représente, à titre d'exemple, la fonction de transcodage Y_4 exprimée sous forme maillée en utilisant toutes les variables .



Il est intéressant de constater, d'autre part, qu'il existe une relation entre les fonctions "Y_n" et les fonctions binaires "majorité" étudiées au chapitre précédent.

La fonction "majorité" M^p_n est égale, en effet, au produel des fonctions y^p_n, y^{p+1}_n , ... , y^{n-1}_n , y^n_n , soit :

$$M^p_n = \left| \begin{array}{c} y^n_n \\ y^{n-1}_n \\ \vdots \\ y^{p+1}_n \\ y^p_n \end{array} \right|$$

4.7 – Codes binaires décimaux

L'habitude étant acquise et imposée légalement, d'utiliser le système décimal, il est nécessaire de pouvoir adapter des circuits binaires à ce système particulier à l'aide de codes binaires décimaux.

Le code couramment utilisé, appelé décimal codé binaire (D.C.B.) ou (8.4.2.1), est un code pondéré qui suit la numération binaire jusqu'au chiffre "9", en partant du zéro et en laissant disponibles, en général, les combinaisons qui vont de 10 a 16.

On peut imaginer, cependant, de nombreux autres codes binaires décimaux mieux adaptés à certaines utilisations ou répondant à des conditions particulières.

Quelques-uns, parmi les codes les plus courants, sont indiqués dans le tableau suivant :

Chiffres décimaux	Code D.C.B.				Code autocomplémentaire				Code biquinaire			
	8	4	2	1	2	4	2	1	5	4	2	1
0 –	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 –	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
2 –	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3 –	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4 –	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5 –	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
6 –	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
7 –	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
8 –	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
9 –	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Les codes figurant dans ce tableau sont des codes pondérés parce que chaque chiffre binaire est affecté du poids qui apparaît en chiffre décimal dans la même colonne.

Le code (2.4.2.1) est un code dit "autocomplémentaire" car le complément à "9" de chaque chiffre décimal représenté s'obtient en remplaçant la valeur "0" par la valeur "1" et réciproquement dans le nombre binaire associé.

Le chiffre "6" est exprimé par le nombre binaire 0 0 1 1, son complément à "9", c'est-à-dire le chiffre "3" correspond alors à 1 1 0 0.

Les codes autocomplémentaires, utilisés dans les calculateurs, permettent de procéder à des soustractions en additionnant les nombres binaires complémentaires qui correspondent aux chiffres décimaux à soustraire.

Il existe aussi des codes non pondérés qui présentent certains avantages particuliers malgré l'absence de relation de poids entre les chiffres binaires et les chiffres décimaux représentés.

- Exemples de codes non pondérés :

	Code "excédant 3" ou de STIBITZ				Code GRAY			
0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0	0	1	0
4	0	1	1	1	0	1	1	0
5	1	0	0	0	0	1	1	1
6	1	0	0	1	0	1	0	1
7	1	0	1	0	0	1	0	0
8	1	0	1	1	1	1	0	0
9	1	1	0	0	1	1	0	1

Bien que non pondéré, le code de STIBITZ, ou "excédant 3", est très intéressant parce qu'il est autocomplémentaire et que les nombres successifs sont dans un ordre binaire ; c'est-à-dire que chaque nombre, jusqu'à 1 1 0 0 (9), est obtenu en ajoutant 0 0 0 1 au nombre binaire précédent.

Cette particularité permet de faire correspondre aux additions décimales, des additions effectuées dans le système binaire.

Lorsque l'addition des deux chiffres binaires de gauche ne fait pas apparaître de retenue, on obtient le résultat, qui est inférieur à "10" décimal, en retranchant "0 0 1 1"$_2$ du nombre binaire obtenu. S'il apparaît une retenue, c'est que la somme dépasse "10" décimal, et l'on obtient le chiffre décimal qui excède "10" sous forme binaire en lui ajoutant "0 0 1 1_2".

- Exemples :

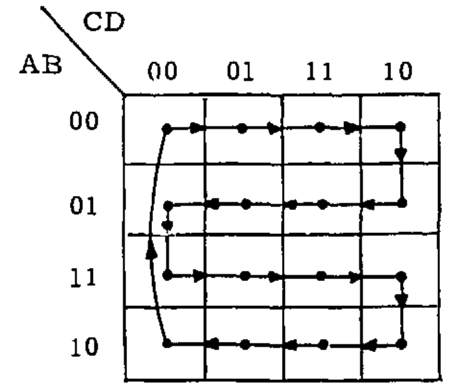
$$
\begin{array}{lrr}
 & 4 & 0\,1\,1\,1 \\
 & +\,3 & +\,0\,1\,1\,0 \\
\hline
\text{- pas de retenue} \longrightarrow & & 1\,1\,0\,1 \\
\text{d'où soustraction} \longrightarrow & & -\,0\,0\,1\,1 \\
\hline
 & =\,7 & 1\,0\,1\,0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrr}
 & 8 & 1\,0\,1\,1 \\
 & +\,7 & +\,1\,0\,1\,0 \\
\hline
\text{- retenue} \longrightarrow & & 1|\,0\,1\,0\,1 \\
\text{d'où addition} \longrightarrow & & +\,0\,0\,1\,1 \\
\hline
 & =\,5 & 1\,0\,0\,0
\end{array}
$$

Ces exemples suffisent à montrer l'intéret du code de STIBITZ. Quant aux codes "GRAY", ce sont des codes à distance unité qui sont généralement utilisés lorsque l'on veut que le passage d'un nombre au suivant se limite au changement de valeur d'un seul chiffre. Cela se traduit par la suppressiondes inconvénients qui résultent, en pratique, de la non simultanéité de variation des chiffres binaires qui sont sensés changer de valeur en même temps.

Il est à noter qu'un code "GRAY" n'est pas nécessairement décimal et peut être associé aux chiffres d'une base de numération quelconque, pourvu que cette base soit paire pour pouvoir revenir à zéro par modification d'un seul chiffre binaire.

Un code "GRAY" se définit sans difficulté à l'aide du diagramme de "KARNAUGH". Il suffit que les nombres binaires suivent un ordre qui correspond à des combinaisons successives adjacentes.

- Exemple :



En suivant l'ordre de succession indiqué dans le diagramme de KARNAUGH ci-dessus, on obtient un code binaire hexadécimal réfléchi qui est un code GRAY.

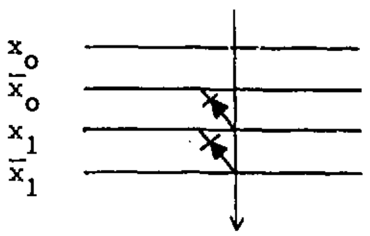
	A	B	C	D		A	B	C	D
0 -	0	0	0	0	8 -	1	1	0	0
1 -	0	0	0	1	9 -	1	1	0	1
2 -	0	0	1	1	10 -	1	1	1	1
3 -	0	0	1	0	11 -	1	1	1	0
4 -	0	1	1	0	12 -	1	0	1	0
5 -	0	1	1	1	13 -	1	0	1	1
6 -	0	1	0	1	14 -	1	0	0	1
7 -	0	1	0	0	15 -	1	0	0	0

4.8 - Décodage

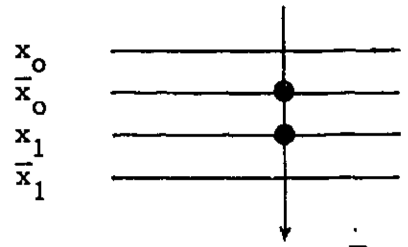
Lorsqu'une fonction de transcodage développée se limite à des fonctions binaires constituées chacune d'un simple produit ou d'un simple produel des variables élémentaires, on l'appelle parfois "fonction de décodage".

Nous avons vu que l'utilisation de diodes permettait la réalisation pratique très simple d'une fonction "ET" ou d'une fonction "OU" sous réserve que le nombre des variables ne soit pas trop important et que ces variables soient disponibles sous leurs formes directe et complémentée. Une matrice à diodes constitue donc une solution peu onéreuse et particulièrement intéressante dans le cas pratique de réalisation d'une "fonction de décodage" numérique.

Nous pouvons, comme suit, convenir de représenter par des cercles les connexions de diodes qui correspondent à une fonction produit "ET" :

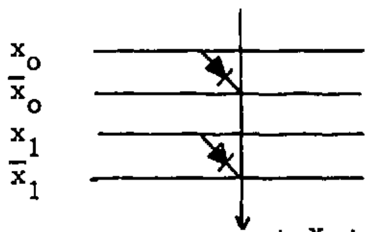


$y = x_1 . \bar{x}_o$

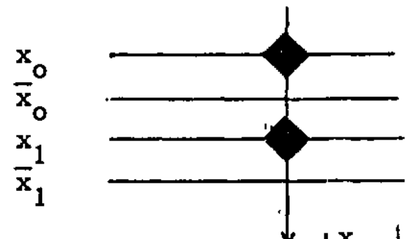


$y = x_1 . \bar{x}_o$

Nous pouvons représenter par des carrés les connexions qui correspondent à une fonction produel "OU" :

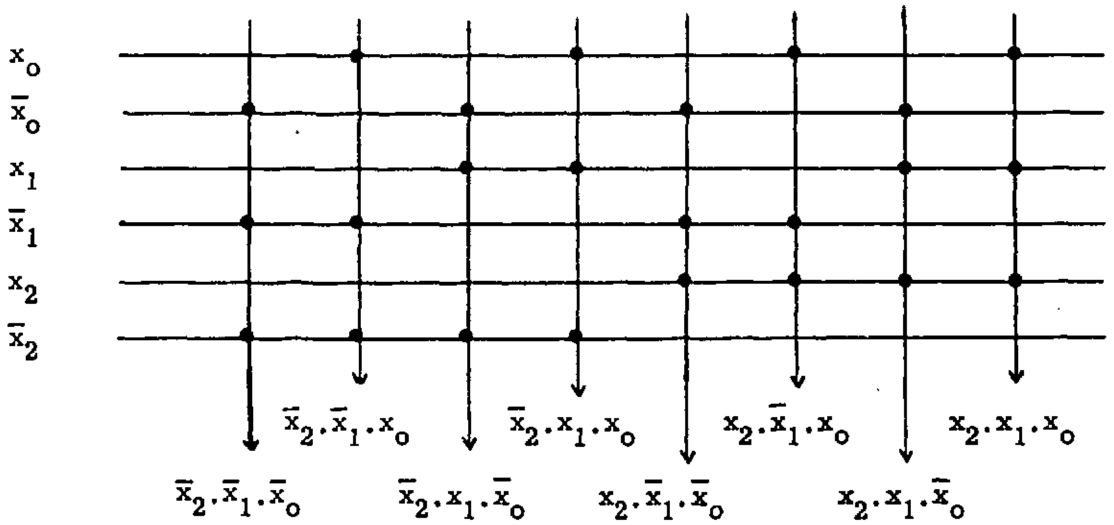


$y = \left| \begin{matrix} x_o \\ x_1 \end{matrix} \right|$



$y = \left| \begin{matrix} x_o \\ x_1 \end{matrix} \right|$

Les huit produits qu'il est possible d'associer aux combinaisons de trois variables peuvent être obtenus à l'aide d'une matrice à diodes, conformément au schéma de la figure suivante :



4.81 – Exemple d'établissement d'une fonction de décodage

On désire décoder une information enregistrée en binaire décimal (D.C.B) suivant le code (8.4.2.1). On désigne par x_8, x_4, x_2, x_1 les chiffres binaires qui correspondent à une décade.

Il s'agit d'établir les expressions des fonctions binaires y_1 , y_2 , ... , y_k , ... y_9 relatives aux chiffres décimaux 1, 2, ..., k, ..., 9 .

La fonction "y_k" est égale à l'unité lorsque les valeurs de x_1, x_2, x_4, x_8 correspondent au chiffre décimal "k" .

Le problème ainsi posé permet d'établir la table de vérité qui fait apparaître les valeurs du vecteur Y_9 (y_9, y_8, ... y_2, y_1) qui correspondent respectivement aux valeurs du vecteur variable X_4 (x_8, x_4, x_2, x_1).

	x_8	x_4	x_2	x_1	y_9	y_8	y_7	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	1	0	combinaisons disponibles								
11	1	0	1	1									
12	1	1	0	0									
13	1	1	0	1									
14	1	1	1	0									
15	1	1	1	1									

Dans le code binaire décimal (8.4.2.1) une remise à zéro est faite après le chiffre "9" (1 0 0 1 $_2$). Les combinaisons 10 , 11 , 12 , 13 , 14 et 15 n'apparaissent en principe jamais ; elles sont donc disponibles et rien ne s'oppose à les utiliser dans le but de simplifier le décodage.

Chaque fonction "y_k" égale à l'unité pour une seule valeur de "X_4" peut s'exprimer par un simple produit des variables binaires.

Nous constatons cependant que les fonctions élémentaires y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 et y_7 peuvent être simplifiées si nous leur associons les produits qui correspondent respectivement à chacune des combinaisons disponibles 10, 11, 12, 13, 14 et 15. Ceci permet d'obtenir :

$$y_2 = \bar{x}_4 . x_2 . \bar{x}_1$$
$$y_3 = \bar{x}_4 . x_2 . x_1$$
$$y_4 = x_4 . \bar{x}_2 . \bar{x}_1$$
$$y_5 = x_4 . \bar{x}_2 . x_1$$
$$y_6 = x_4 . x_2 . \bar{x}_1$$
$$y_7 = x_4 . x_2 . x_1$$

Les combinaisons 10, 12 et 14 peuvent être associées d'autre part à la combinaison "8" pour calculer "y_8" :

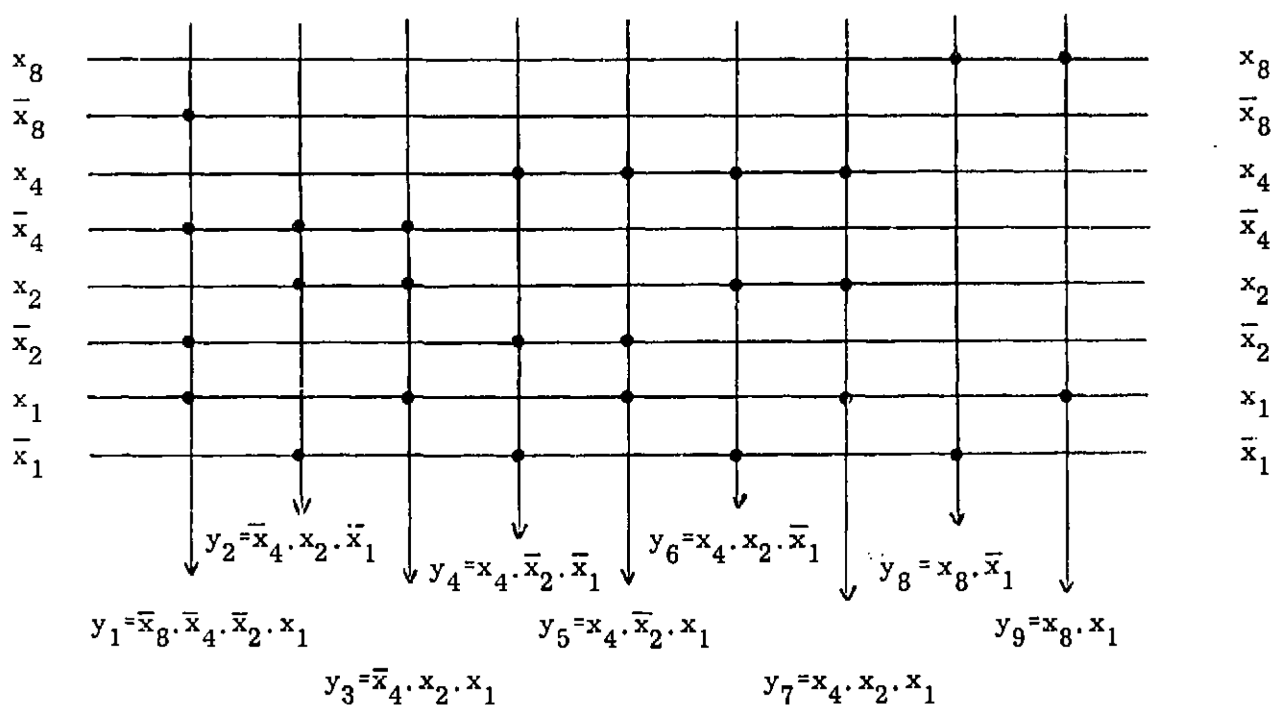
$$y_8 = x_8 . \bar{x}_1$$

Les combinaisons 11, 13 et 15 peuvent, de même, être associées à la combinaison "9" pour obtenir "y_9" :

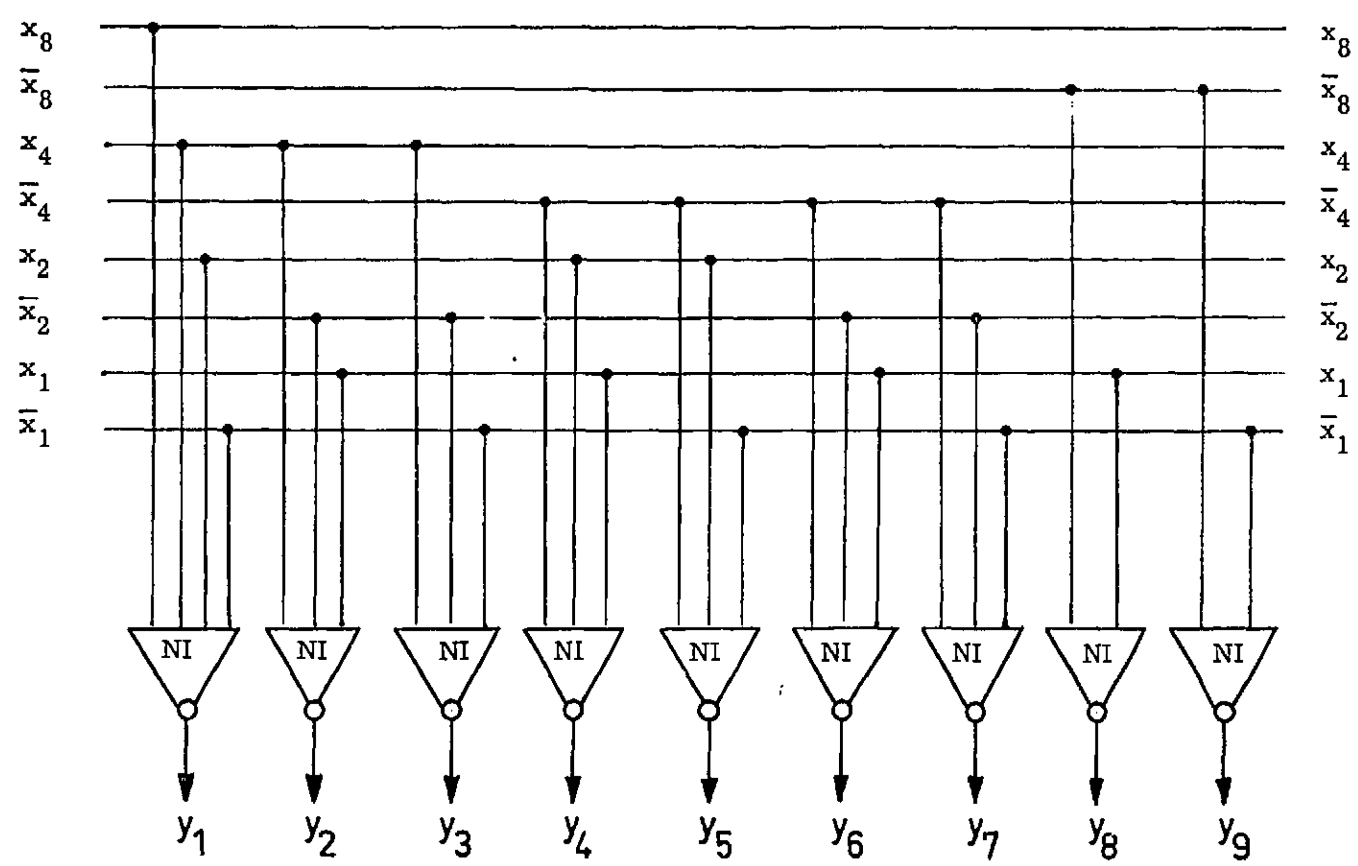
$$y_9 = x_8 . x_1$$

Le décodage peut être réalisé à l'aide de fonctions "ET" à diodes en utilisant huit niveaux de tension correspondant respectivement à x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2$, x_4, $\bar{x}_4$, x_8 et $\bar{x}_8$

Schéma de la matrice de décodage (D.C.B.)



Le décodage peut également se faire à l'aide de fonctions "OU" à diodes et de transistors assurant la régénération et la complémentation des signaux. Les montages obtenus correspondent, en fait, à des circuits du genre "NI" figurés sur le schéma ci-dessous :



EXERCICES D'APPLICATION RELATIFS AU CHAPITRE IV

1 – Etablir la fonction de décodage développée et simplifiée

$$Y_{10} = y_9,\ y_8,\ y_7,\ \ldots,\ y_2,\ y_1,\ y_o,$$

relative au code de STIBITZ (code excédent "3"), dont les états sont rappelés dans la table de vérité suivante :

	x_4	x_3	x_2	x_1	Y_{10}
0	0	0	1	1	$y_o = 1$
1	0	1	0	0	$y_1 = 1$
2	0	1	0	1	$y_2 = 1$
3	0	1	1	0	$y_3 = 1$
4	0	1	1	1	$y_4 = 1$
5	1	0	0	0	$y_5 = 1$
6	1	0	0	1	$y_6 = 1$
7	1	0	1	0	$y_7 = 1$
8	1	0	1	1	$y_8 = 1$
9	1	1	0	0	$y_9 = 1$
10	1	1	0	1	**combinaisons disponibles**
11	1	1	1	0	
12	1	1	1	1	
13	0	0	0	0	
14	0	0	0	1	
15	0	0	1	0	

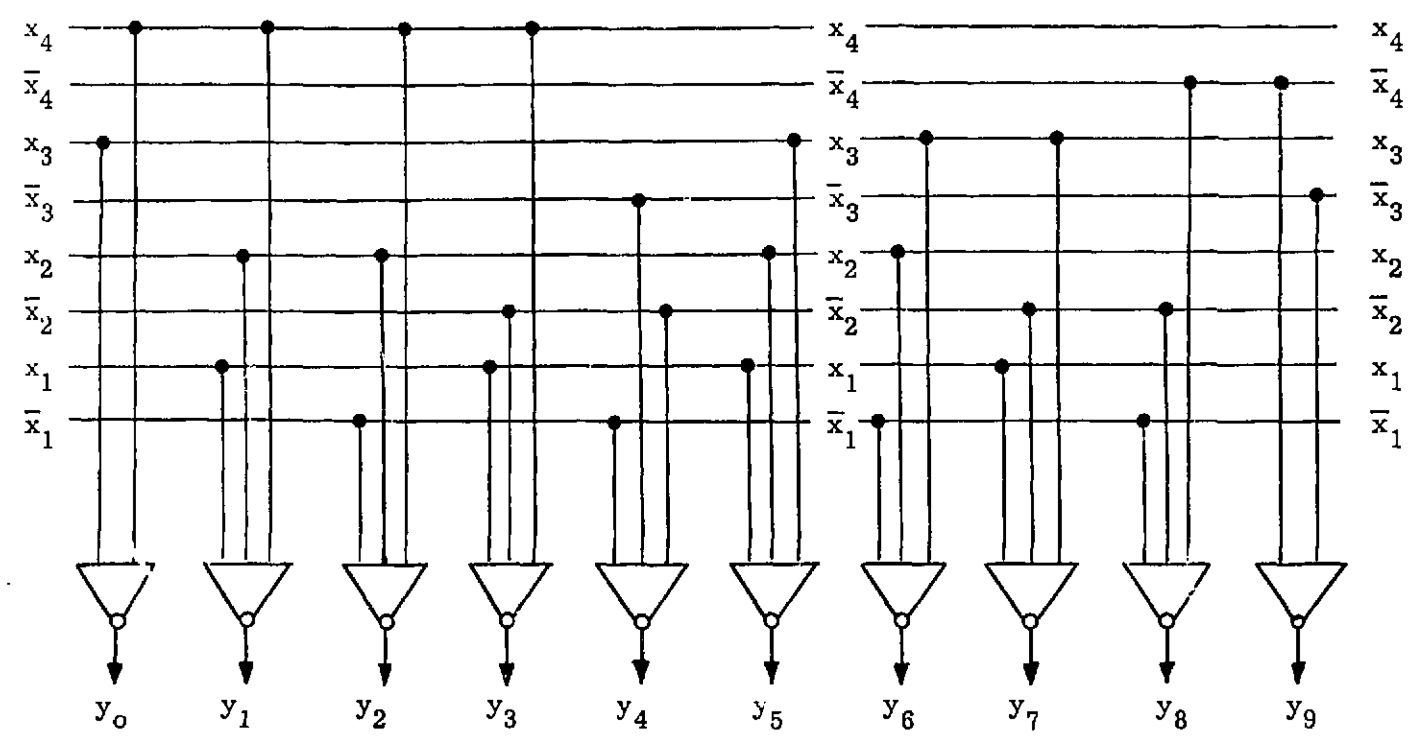
Faire le schéma de la matrice de décodage utilisant des circuits "NI" en supposant les variables x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2$, x_3, $\bar{x}_3$, x_4, $\bar{x}_4$, disponibles sur des barres de distribution omnibus.

Réponses :

Forme développée du décodage :

$y_o = \bar{x}_4 . \bar{x}_3$	$y_3 = \bar{x}_4 . x_2 . \bar{x}_1$	$y_5 = \bar{x}_3 . \bar{x}_2 . \bar{x}_1$	$y_8 = x_4 . x_2 . x_1$
$y_1 = \bar{x}_4 . \bar{x}_2 . \bar{x}_1$	$y_4 = x_3 . x_2 . x_1$	$y_6 = \bar{x}_3 . \bar{x}_2 . x_1$	$y_9 = x_4 . x_3$
$y_2 = \bar{x}_4 . \bar{x}_2 . x_1$		$y_7 = \bar{x}_3 . x_2 . \bar{x}_1$	

Matrice de décodage utilisant des circuits "NI".



2 - Ecrire la fonction de décodage du code de STIBITZ" précédent sous forme maillée en faisant apparaître les groupements respectifs, (y_o, y_4, y_8) - (y_1, y_5, y_9) - (y_2, y_6) et (y_3, y_7). En déduire une matrice de décodage à diodes, montées en fonction "ET", en supposant que les variables directes et complémentées sont disponibles sur des barres omnibus.

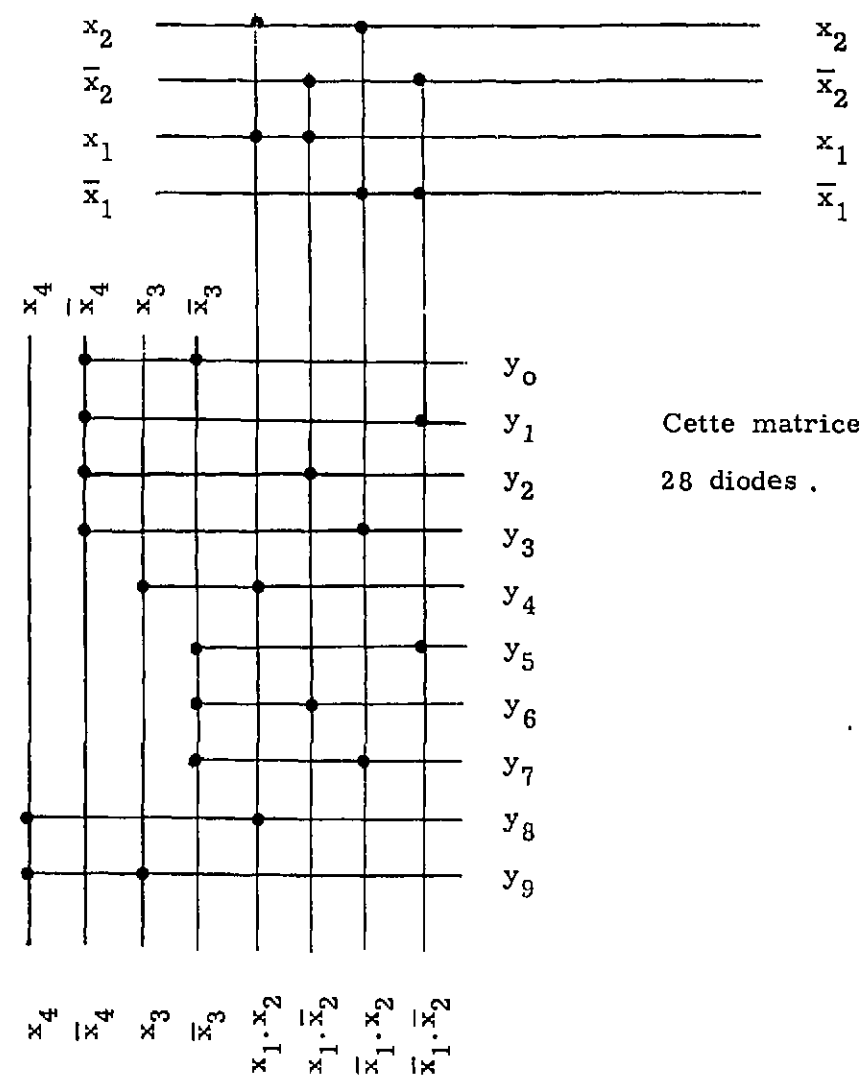
Réponses :

$$\bar{x}_3 . \bar{x}_4 - = y_o \qquad x_3 . x_4 - = y_9$$

$$- x_1 . x_2 \begin{cases} x_3 - = y_4 \\ x_4 - = y_8 \end{cases} \qquad - \bar{x}_1 . \bar{x}_2 \begin{cases} \bar{x}_3 - = y_5 \\ \bar{x}_4 - = y_1 \end{cases}$$

$$x_1 . \bar{x}_2 \begin{cases} \bar{x}_4 = y_2 \\ \bar{x}_3 = y_6 \end{cases} \qquad \bar{x}_1 . x_2 - \begin{cases} \bar{x}_4 - = y_3 \\ \bar{x}_3 - = y_7 \end{cases}$$

Matrice de décodage à diodes montées en fonctions "ET"



Cette matrice comprendra 28 diodes .

3 - Etablir respectivement les fonctions simplifiées de transcodage $Y_4 = f(X_4)$ et $X_4 = \varphi(Y_4)$ qui permettent le passage d'un code de STIBITZ à un code décimal codé binaire, et vice-versa, selon la correspondance établie par les tableaux ci-après, et en utilisant au mieux les combinaisons disponibles.

- Montrer que la première fonction de transcodage peut être réalisée à l'aide de portes "NI" à deux entrées quand on l'écrit sous forme paramétrique en posant $a = x_1 . x_2$.

- Montrer, de même, que la seconde fonction peut être réalisée à l'aide de portes "ON" à deux entrées, en posant $b = \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right|$. On supposera les variables disponibles sous leurs deux formes, directe et complémentée.

x_4	x_3	x_2	x_1		y_4	y_3	y_2	y_1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	2	0	0	1	0
0	1	1	0	3	0	0	1	1
0	1	1	1	4	0	1	0	0
1	0	0	0	5	0	1	0	1
1	0	0	1	6	0	1	1	0
1	0	1	0	7	0	1	1	1
1	0	1	1	8	1	0	0	0
1	1	0	0	9	1	0	0	1
1	1	0	1		1	0	1	0
1	1	1	0	combinaisons	1	0	1	1
1	1	1	1	disponibles	1	1	0	0
0	0	0	0		1	1	0	1
0	0	0	1		1	1	1	0
0	0	1	0		1	1	1	1

Code de STIBITZ — Code décimal codé binaire

Réponses :

fonction Y_4 -

$$y_1 = \bar{x}_1$$

$$y_2 = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}_2 & x_1 \\ \bar{x}_1 & x_2 \end{array}\right|$$

$$y_3 = \left|\begin{array}{c|c} x_3 & x_1 . x_2 \\ \bar{x}_2 & \\ \bar{x}_1 & x_3 \end{array}\right|$$

$$y_4 = x_4 \left|\begin{array}{c} x_3 \\ x_1 . x_2 \end{array}\right|$$

fonction X_4

$$x_1 = \bar{y}_1$$

$$\left|\begin{array}{c} \bar{y}_2 . \bar{y}_1 \\ y_2 . y_1 \end{array}\right|$$

$$x_3 = \left|\begin{array}{c} y_3 . \bar{y}_2 . \bar{y}_1 \\ \begin{array}{c|c} y_1 & \\ & \bar{y}_3 \\ y_2 & \end{array} \end{array}\right|$$

$$x_4 = \left|\begin{array}{c} y_4 . \bar{y}_3 \\ y_3 \left|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right. \end{array}\right|$$

fonction Y_4 -

$$a = x_1 . x_2$$

$$y_1 = \bar{x}_1 \qquad y_3 = \left|\begin{array}{c|c} x_3 & a \\ \bar{a} & x_3 \end{array}\right|$$

$$y_2 = \bar{a} \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right| \qquad y_4 = x_4 \left|\begin{array}{c} a \\ x_3 \end{array}\right|$$

fonction X_4

$$b = \left|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right| \qquad x_3 = \left|\begin{array}{c} y_3 . \bar{b} \\ b . \bar{y}_3 \end{array}\right|$$

$$x_1 = \bar{y}_1$$

$$x_2 = \left|\begin{array}{c} \bar{b} \\ y_1 . y_2 \end{array}\right| \qquad x_4 = \left|\begin{array}{c} y_4 . \bar{y}_3 \\ y_3 . b \end{array}\right|$$

4 - On veut réaliser, sous forme itérative, la fonction de parité "y_n" de "n" variables binaires x_n, x_{n-1}, ... x_2, x_1, telle que $y_n = 0$ lorsque les variables qui prennent la valeur "1" sont en nombre pair et $y_n = 1$ lorsque ce nombre est impair ("0" est considéré comme un chiffre pair).

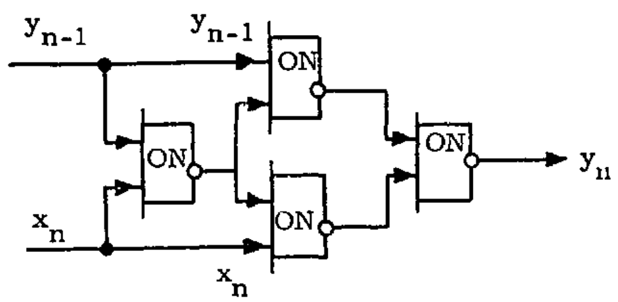
Etablir la relation de récurrence exprimant "y_n" en fonction de "y_{n-1}" et "x_n". Faire le schéma de la fonction itérative à l'aide de quatre circuits "ON" en supposant que seules les valeurs directes de "y_{n-1}" et de "x_n" sont disponibles.

Réponses :

Relation de récurrence $$y_n = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}_n & y_{n-1} \\ \bar{y}_{n-1} & x_n \end{array}\right|$$

soit :

$$y_n = \left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \bar{x}_n \\ \bar{y}_{n-1} \end{array} \right| y_{n-1} \\ \left| \begin{array}{c} \bar{x}_n \\ \bar{y}_{n-1} \end{array} \right| x_n \end{array} \right|$$



5 - Un système de comptage à base trois comprend deux chiffres binaires φ_2 et φ_1 qui prennent les valeurs successives (0, 0), (0, 1) et (1, 1). La combinaison (1, 0) n'apparaît jamais. Exprimer la fonction de décodage Y_3 (y_2, y_1, y_o) sous forme paramétrique et maillée en prenant y_2 comme paramètre et en posant $y_o = 1$ pour la combinaison ($\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$), $y_1 = 1$ pour ($\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 1$) et $y_2 = 1$ pour ($\varphi_2 = 1$, $\varphi_1 = 1$).

Réponse :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_2 = y_2 \\ - \bar{y}_2 \cdot \left| \begin{array}{l} \bar{\varphi}_1 = y_o \\ \varphi_1 = y_1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

6 - On donne les logarithmes à base deux figurant dans la liste suivante :

$$\log_2 3 = 1,585_{10}$$
$$\log_2 5 = 2,322_{10}$$
$$\log_2 7 = 2,807_{10}$$
$$\log_2 11 = 3,459_{10}$$
$$\log_2 13 = 3,700_{10}$$

Ecrire dans le système binaire et avec la meilleure approximation la table de vérité de transcodage correspondant à $Y = \log_2 X$, dans laquelle $Y = y_2\, y_1\, ,\, z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ et $X = x_8\, x_4\, x_2\, x_1$ (15 combinaisons, exceptée la combinaison $X = 0$). Exprimer, sous forme développée, la fonction de transcodage qui en résulte.

Réponses :

	x_8	x_4	x_2	x_1	y_2	y_1	z_1	z_2	z_3	z_4
1 -	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2 -	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
3 -	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
4 -	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
5 -	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
6 -	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
7 -	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
8 -	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
9 -	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
10 -	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
11 -	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
12 -	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
13 -	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
14 -	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
15 -	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

$$y_2 = \left| \begin{array}{c} x_8 \\ x_4 \\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \end{array} \right| , \qquad y_1 = \left| \begin{array}{c} x_8 \\ \bar{x}_4 \cdot x_2 \\ \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_1 \end{array} \right|$$

$$z_1 = \left| \begin{array}{l} x_8 \cdot x_4 \\ x_4 \cdot x_2 \\ \bar{x}_8 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{array} \right| , \qquad z_2 = \left| \begin{array}{l} x_8 \cdot x_2 \\ \bar{x}_8 \cdot x_4 \cdot x_1 \end{array} \right| , \qquad z_3 = x_8 \cdot x_1$$

$$z_4 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_8 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_8 \\ x_4 \\ x_2 \\ \bar{x}_1 \end{array} \left| \begin{array}{c} x_8 \\ x_4 \\ \bar{x}_2 \\ x_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_8 \\ \bar{x}_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{array} \left| \begin{array}{c} \bar{x}_8 \\ x_4 \\ x_2 \end{array} \right|$$

7 - On donne une grille comprenant 15 cases, repérée chacune par un nombre décimal, et distribuées comme l'indique la figure 1 :

(figure 1)

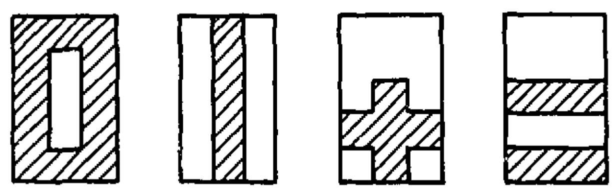
8	11	9
5	10	1
7	14	3
4	6	2
12	15	13

Ces cases correspondent à celles du diagramme de KARNAUGH selon les mêmes chiffres décimaux relatifs aux combinaisons des quatre variables binaires a, b, c et d.

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

On projette sur la grille de la figure "1" les chiffres 0, 1 et les signes "+" et "=" suivant les distributions respectives indiquées par la figure "2" :

(figure 2)



"0" "1" "+" "="

Calculer, sous forme développée, la fonction de transcodage

$$Y\,(y_o,\ y_1,\ y_{(+)},\ y_{(=)}) = F\ [\ X\,(a,\ b,\ c,\ d)\ ]$$

telle que les fonctions binaires élémentaires "y" soient égales à l'unité pour les combinaisons qui correspondent aux cases hachurées.

Montrer que l'on peut écrire les fonctions binaires "y" sous forme de produits de produels admettant pour facteurs duals les variables directes a, b, d (exceptée $\bar{c}$) et les produits $\bar{a}.\bar{b}$ et $\bar{a}.\bar{d}$.

(N.B. La combinaison X = 0 est disponible).

Réponses :

$$y_o = \left| \begin{array}{c|c} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{c} \\ d & d \end{array} \right| \qquad y_1 = \left| \begin{array}{c} a.c \\ b.c.\bar{d} \end{array} \right| = c \left| \begin{array}{c|c} a & a \\ b & \bar{d} \end{array} \right|$$

$$y_{(+)} = \left| \begin{array}{c} a.b.c \\ \bar{a}.c.\bar{d} \\ \bar{a}.b.\bar{d} \end{array} \right| \qquad y_{(=)} = \left| \begin{array}{c} a.b \\ \bar{a}.c.d \end{array} \right|$$

$$y_o = \left| \begin{array}{c} \bar{a}.\bar{b} \\ \bar{c} \\ d \end{array} \right| \qquad y_1 = c \left| \begin{array}{c|c} a & a \\ b & \bar{a}.\bar{d} \end{array} \right| \qquad y_{(+)} = \left| \begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & b \\ \bar{a}.\bar{d} & \bar{a}.\bar{b} & \bar{a}.\bar{d} & c \end{array} \right|$$

$$y_{(=)} = \left| \begin{array}{c|c|c} a & a & \bar{a}.\bar{b} \\ c & d & b \end{array} \right|$$

8 - On donne la table de vérité de transcodage complète ci-dessous :

a	b	c	y_2	y_1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

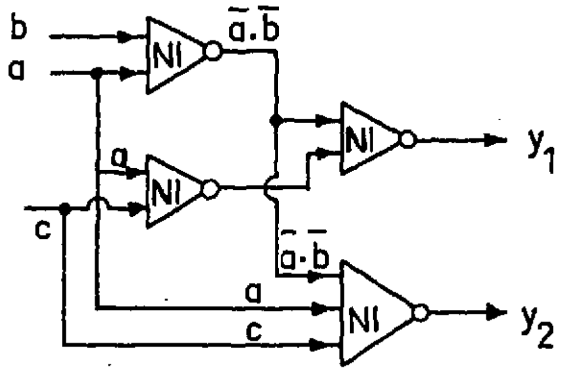
Il existe un facteur commun aux fonctions binaires y_1 et y_2 . Quel est ce facteur commun ?

Exprimer les fonctions y_1 et y_2 en faisant apparaître le facteur commun calculé et réaliser le schéma de transcodage à l'aide de quatre circuits "NI" .

Réponses :

facteur commun $\quad f = \left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right|$

$$y_1 = \left| \begin{array}{c|c} a & a \\ b & c \end{array} \right| \qquad y_2 = \left| \begin{array}{c|c} a & \bar{a}.\bar{c} \\ b & \end{array} \right|$$



Manuscrit reçu le 11 Décembre 1968

FIN

CEA-R-3534 (1) (E)
9.0

CEA-R-3534 (1) (E)

PREMIER MINISTRE
COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

BINARY ANALYSIS

First Part

DEFINITIONS AND TREATMENT OF BINARY FUNCTIONS

by

René-Louis VALLEE

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA-R-3534 (1) (E)

1968
Ea

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N-SACLAY B.P. n°2, 91-GIF-sur-YVETTE-France

CEA-R-3534(1)(E) - VALLEE René-Louis

ANALYSE BINAIRE - 1ère partie
DEFINITIONS ET TRAITEMENT DES FONCTIONS BINAIRES

Sommaire. - L'analyse binaire a pour objet l'étude mathématique des propriétés d'ensembles binaires algébriques et pour but l'élaboration de méthodes simples, rigoureuses et pratiques, destinées aux techniciens, aux ingénieurs et à tous ceux qu'intéresse directement le traitement numérique de l'information, discipline en expansion rapide qui, déjà, en électronique nucléaire comme dans de nombreux autres domaines de la recherche, tend à jouer un rôle essentiel sinon déterminant.

1968 54 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-R-3534(1)(E) - VALLEE René-Louis

BINARY ANALYSIS - 1st part
DEFINITIONS AND TREATMENT OF BINARY FUNCTIONS

Summary. - The study of binary groups under their mathematical aspects constitutes the matter of binary analysis, the purpose of which consists in developping altogether simple, rigorous and practical methods needed by the technicians, the engineers and all those who may be mainly concerned by digital processing.

This subject, fast extending if not determining, however tends actually to play a main part in nuclear electronics as well as in several other research areas.

1968 54 p.
Commissariat à l'Energie Atomique - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

PLAN DE CLASSIFICATION

1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS

2. BIOLOGIE ET MEDECINE

2\. 1 Biologie générale
2\. 2 Indicateurs nucléaires en biologie
2\. 3 Médecine du travail
2\. 4 Radiobiologie et Radioagronomie
2\. 5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine

3. CHIMIE

3\. 1 Chimie générale
3\. 2 Chimie analytique
3\. 3 Procédés de séparation
3\. 4 Radiochimie

4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE

5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE

6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX

6\. 1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux
6\. 2 Effets des rayonnements sur les matériaux
6\. 3 Corrosion

7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS

7\. 1 Neutronique et physique des réacteurs
7\. 2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité
7\. 3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs

8. PHYSIQUE

8\. 1 Accélérateurs
8\. 2 Electricité, électronique, détection des rayonnements
8\. 3 Physique des plasmas
8\. 4 Physique des états condensés de la matière
8\. 5 Physique corpusculaire à haute énergie
8\. 6 Physique nucléaire
8\. 7 Electronique quantique, lasers

9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES

10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS

10\. 1 Protection sanitaire
10\. 2 Contrôle des rayonnements
10\. 3 Traitement des effluents

11. SEPARATION DES ISOTOPES

12. TECHNIQUES

12\. 1 Mécanique des fluides - Techniques du vide
12\. 2 Techniques des températures extrêmes
12\. 3 Mécanique et outillage

13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE

13\. 1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines
13\. 2 Etudes économiques, programmes
13\. 3 Divers (documentation, administration, législation, etc...)

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

- Rapport CEA-R-3534 (1) (E) -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Département d'Electronique Générale
Service d'Instrumentation Nucléaire

BINARY ANALYSIS

First Part

DEFINITIONS AND TREATMENT OF BINARY FUNCTIONS

by

René-Louis VALLEE

- December 1968 -

BINARY ANALYSIS

First Part

DEFINITIONS AND TREATMENT OF BINARY FUNCTIONS

INTRODUCTION

Why Binary analysis and not Boolean algebra ?

Simply because in the following we shall be dealing with mathematical analysis, the subject of which will be the study of the particular properties of binary sets.

Despite the very wide appeal of Boolean algebra and the existence of common objectives, it was necessary to avoid the confusion and difficulties which would inevitably have resulted from over-hasty comparison with binary analysis. The reasons are various and will appear clearly during the course of the development of the study and through the proposed definitions and theorems.

Binary analysis is based absolutely on the principles of classical algebra and makes it possible to establish an interesting reciprocal of Stone's theorem showing that any Boolean algebra can be considered as a homomorphous form of classical algebra.

George Boole himself, in his work published in 1854 entitled "An Investigation of the Laws of Thought", used classical algebra as a mathematical basis for the study of logic. He very soon discovered that this algebra is not suitably adapted in structure to the use envisaged.

Two out comes were possible :

- Modify the principles and keep all the formalism ; which was done by Boole and practically all those who developed logical algebra or the algebra of propositions, such as RUSSEL or WHITEHEAD.

- Or, modify the formalism and keep the principles absolutely ; which is precisely what binary analysis does.

It is clear that the second method, which is truly mathematical in the strictest sense, is simpler, more fruitful and more practical than the first.

It is surprising that it has been adopted by all those who are interested in switching circuits, and that even Shannon originally chose to modify the principles rather than the formalism, whereas the study of chains of contacts leads quite naturally to the second type of solution.

In 1904 Ernst MACH wrote : "Because of the short life and the confined limits of human intelligence, knowledge worthy of the name can only be acquired by the greatest mental economy ".

This thought is a criterion of great value because of its deep repercussions. Although it guides us towards optimisation of the complex structures of our models, is it not necessary to refer to it at the elementary level of the concepts, definitions, principles and symbols which constitute the fundamental basis of our knowledge ?

It is this criterion itself which governed the development of binary analysis.

- The first part, which is the subject of the present report, is devoted to the definitions and treatment of binary functions.

- The second part will relate to the applications and explicit functions or transcoding functions.

- The third part will deal with the recursive functions and sequential systems.

In this first part, each chapter is provided with simple exercises in application which facilitate understanding, reveal the value and destroy the arid and depressing monotony which often arises from a purely theoretical text.

The fundamentals of binary analysis are introduced solely by the use of the principles of classical algebra. Simple two-dimensional symbolism illustrates the dual character inherent in any binary set.

Particular care has been paid to the choice of terminology, which had to be made as concise, as clear, as precise as possible, sometimes making use, when necessary, of terms borrowed from the so-called "logical" algebra. The reader will judge and can confirm the richness and the efficiency of simple methods, freed of any useless artifice liable to impair understanding or complicate the use thereof.

The expert can find here, with the minimum effort of assimilation, a reliable rapid and practical mathematical tool which makes it possible to pursue very thoroughly the investigation in the formal study of the circuits of digital automation.

The scientist in turn, can have at his disposal a starting point which permits, beyond technique, easy exploration of the vast and inspiring field of information systems which elementary logic can only touch on and which philosophy only half revealed.

CHAPTER I

DEFINITIONS

1.1 - Algebraic binary sets

A binary function or variable is any function or variable which can only assume one of the two separate algebraic values $a \neq b$, to the exclusion of any other.

The set " E_{ab} " of variables and functions thus defined is called algebraic binary set. If the element " Φ_{ab} " is equal to "a" when it is different from "b", and if it is equal to "b" when it is different from "a", then Φ_{ab} belongs to the set "E_{ab}".

$$\Phi_{ab} \in_{ab}, \text{ if } (\Phi_{ab} \neq a) \Longrightarrow (\Phi_{ab} = b), \text{ and if } (\Phi_{ab} \neq b) \Longrightarrow (\Phi_{ab} = a)$$

1.2 - Duality of algebraic binary sets

It is possible to find different relations for application of a binary set E_{ab} in a binary set $E_{\alpha\beta}$.

The simplest applications consist in making the values "a" and "b" of the set "E_{ab}" correspond to the values "α" and "β" of the set "$E_{\alpha\beta}$". This correspondence may take two particular forms associated with two different sets of implications. These implications lead respectively to the bijections represented by the two following algebraic relations :

1.2.1 - First relation

$$(\Phi_{ab} = a) \Leftrightarrow (\Phi_{\alpha\beta} = \alpha) \; ; \quad (\Phi_{ab} = b) \Leftrightarrow (\Phi_{\alpha\beta} = \beta)$$

$$\boxed{(\beta - \alpha)\,(\Phi_{ab} - a) = (b - a)\,(\Phi_{\alpha\beta} - \alpha)}$$

1.2.2.- Second relation

$$(\bar{\Phi}_{ab} = a) \Leftrightarrow (\Phi_{\alpha\beta} = \beta) \; ; \; (\bar{\Phi}_{ab} = b) \Leftrightarrow (\Phi_{\alpha\beta} = \alpha)$$

$$\boxed{(\beta - \alpha)\ (\bar{\Phi}_{ab} - b) = (a - b)\ (\Phi_{\alpha\beta} - \alpha)}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \in E_{\alpha\beta} \Longrightarrow (\Phi_{ab} \in E_{ab} \text{ et } \bar{\Phi}_{ab} \in E_{ab})^{*}$$

-The term-by-term addition of the algebraic relations "1.2.1" and "1.2.2" yields a linear algebraic relation between the elements of the set "E_{ab}".

$$\boxed{(\Phi_{ab} + \bar{\Phi}_{ab}) - (a + b) = O}$$

There exists thus throughout the binary set, a linear and biunivocal algebraic relation which makes all the elements of the set correspond two by two.

This fundamental property of automorphism of the binary sets, which results from the symmetrical role played by the algebraic values a and b chosen for defining them by comprehension, is called "duality".

It is possible, in particular, to choose the algebraic values "0" and "1" for α and β. It is useful, in order to use the algebraic product, to choose the absorbing element "0" for "α" and the neutral element "1" for "β", from this operation.

One of the two relations,

$$\left| \begin{array}{l} (b - a)\ .\ \Phi_{01} = (\Phi_{ab} - a) \\ (b - a)\ .\ (1 - \bar{\Phi}_{01}) = (\Phi_{ab} - a) \end{array} \right.$$

defines an application of the set E_{01} in any binary set E_{ab} **.

For the set E_{01}, the duality relation is written :

$$\boxed{\Phi_{01} + \bar{\Phi}_{01} - 1 = O}$$

$\bar{\Phi}_{01} = 1 - \Phi_{01}$ is called the complement of Φ_{01} and is pronounced "Φ_{01} bar".

---

* Each bijection does not make the same element of the set "E_{ab}" correspond to the same element $\Phi_{\alpha\beta}$. This is why two different symbols Φ_{ab} and $\bar{\Phi}_{ab}$ have been used.

** In this way the reciprocal is established in a simple fashion for Stone's isomorphism theorem which shows that any Boolean algebra is only an application of the algebraic binary set E_{01}, the definition of which is based on the principles of classical algebra.

Reciprocally $\Phi_{01} = 1 - \bar{\Phi}_{01}$ is the complement of $\bar{\Phi}_{01}$. The double complementation leads to the involution relation :

$$\bar{\bar{\Phi}}_{01} = 1 - (1 - \Phi_{01}) = \Phi_{01}$$

1.3 - Binary products

The choice of the particular binary set E_{01} is justified by the adoption of an absorption value "O" and a neutral value "1" which make of the algebraic product a binary function belonging to the same set.

The dissymmetry introduced provides two possibilities of representation which correspond by duality by permutating the values "O" and "1".

I.3.1 - Product

Let there be n binary functions $f_1, f_2 \ldots f_n$ such that $f_i \in E_{01}$, $\forall i = 1, 2 \ldots n$.

The algebraic product of these n functions belongs to the set E_{01}.

$$(P = f_1.f_2 \ldots\ldots f_n) \in E_{01}$$

The product P is equal to unity when all the functions in factor are simultaneously equal to unity. $(f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1) \Longleftrightarrow (P = 1)$.

It is zero in all the other cases since each function in factor can only assume the value "O" when it is not equal to "1" and since the product is zero if at least one factor is zero.

The product "P" is normally called the "AND" function when it is the subject of technological applications.

I.3.2 - Produal

The algebraic definitions above are sufficient in principle to permit the calculation and the establishment of all the binary functions belonging to the set E_{01}.

However, the important point is not solely the choice of the set E_{01} with its elementary simplifying properties.

It is also necessary to choose a simple symbolism which can translate into the written expression, the duality which characterises the binary sets and which permits the establishment of elementary dual relations, using the two dimensions of the plane if possible.

We know that a product is expressed algebraically by arranging horizontally the factors.

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \ldots f_n = P$$

We know also, by duality, that it is possible to make the following binary algebraic function correspond to it.

$$\pi = 1 - (1 - f_1)\,(1 - f_2)\,\ldots\,(1 - f_n) = \overline{\bar{f}_1 \,.\, \bar{f}_2 \,..\, \bar{f}_n}$$

$$(f_i \in E_{01},\ \forall i = 1, 2, ..n) \Longleftrightarrow (\pi \in E_{01})$$

We find that the function π is equal to zero when all the functions f_i are simultaneously zero,

$$(f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0) \Longleftrightarrow (\pi = 0)$$

and that it is equal to unity in all the other cases, since it is sufficient for one function f_i at least to be equal to unity in order for the algebraic product

$(1 - f_1) \,.\, (1 - f_2) \,.....\, (1 - f_n)$ to be zero ; which means $\pi = 1$.

We then find again in the expression for the function π, all the properties of an algebraic product (permutativity, associativity). The only difference which results from the duality lies in the fact that the absorption value is found to be unity "1" and the neutral value "O".

We shall then agree to represent the function "π", which we shall call "produal" *, by grouping the terms which form it in a vertical column by analogy with the horizontal writing of the product and in order to convert into symbolism the property of duality.

$$\pi = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = 1 - (1 - f_1) \,.\, (1 - f_2) \ldots (1 - f_n) = \overline{\bar{f}_1 \,.\, \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_n}$$

In the case of technological applications, we shall also call "π" the "OR" function as usual.

The terms $f_1, f_2, \ldots f_n$ will be called "dual factors" by analogy.

I.3.3 - De Morgan's theorem

This theorem is contained implicitly in the above definitions.

$$1 - \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix}} \end{vmatrix} = \bar{f}_1 \,.\, \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_n = (1 - f_1) \,.\, (1 - f_2) \,....\, (1 - f_n)$$

* The latin roots "pro" and "dualis" have been chosen in forming the neologism "produal" to show on the one hand the need to retain the duality in the binary expressions and also by analogy with the word "product".

The complement of a produal is equal to the product of the complements of the dual factors which form it.

$$\overline{f_1 \,.\, f_2 \ldots f_n} = \begin{vmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \vdots \\ \bar{f}_n \end{vmatrix} = 1 - (f_1 \,.\, f_2 \ldots f_n)$$

The complement of a product is equal to the produal of the complements of the factors which form it.

1.3.4 - Dual correspondence of elementary properties

The proposed symbolism is based on simple, strict algebraic principles.

The biunivocal dual correspondence introduced by the definition of the produal from the product, adapts this symbolism perfectly to the simple representation of all the binary functions.

Any operation, any theorem of binary analysis, which necessarily contains the character of duality, will therefore be represented in writing by two possible applications, which are absolutely similar ; one in the horizontal direction, the other in the vertical direction.

With the exception of DE MORGAN'S theorem, seen above, the compared elementary dual properties of the products and the produals are summarised in the following table :

Product	Produal
$P = a.\, b.\, c.\, d$	$\pi = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 1 - (1-a).\,(1-b).\,(1-c).\,(1-d)$
- neutral element "1" - absorbent element "0" - the product is permutative and associative	- neutral element "0" - absorbent element "1" - the produal is permutative and associative
The product of "0" with any function f is zero : $(0 \,.\, f) = 0$	The produal of "1" with any function f is unity $\begin{vmatrix} 1 \\ f \end{vmatrix} = 1$
Any function multiplied by 1 remains equal to itself $(1 \,.\, f) = f$	Any function multiplied dually by O remains equal to itself $\begin{vmatrix} 0 \\ f \end{vmatrix} = f$

Idempotence theorem

If all the factors of a product are equal to the same term, the product is equal to this term :

$$P = \overbrace{a.\ a\ \ldots\ a}^{n} = a^n$$

for $a = 0$ $\quad (0)^n = 0$

for $a = 1$ $\quad (1)^n = 1$

$$\boxed{P = a^n = a}$$

If all the dual factors of a produal are equal to the same term, the produal is equal to this term :

$$\pi = \left.\left|\begin{matrix} a \\ a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \end{matrix}\right|\right\} n \quad = 1 - (1 - a)^n$$

for $a = 0$ $\quad \pi = 1 - (1)^n = 0$

for $a = 1$ $\quad \pi = 1 - (0)^n = 1$

$$\boxed{\pi = a}$$

If in a product, two factors are complementary, the product is zero

$$P = f.\ \bar{f}.\ P_1$$

$$P = f.\ (1-f).\ P_1 = (f - f^2)\ P_1$$

$$P = (0\ .\ P_1) = 0$$

If in a produal, two dual factors are complementary, the produal is equal to unity

$$\pi = \left|\begin{matrix} f \\ \bar{f} \\ \pi_1 \end{matrix}\right| = 1 - (1-f).\ f.\ (1-\pi_1)$$

$$= 1 - (f-f^2).\ (1-\pi_1) = 1-0.\ (1-\pi_1)$$

$$\pi = \left|\begin{matrix} 1 \\ \pi_1 \end{matrix}\right| = 1$$

Corollaries

The product of two complementary functions is zero

$$(f.\ \bar{f}) = 0$$

The produal of two complementary functions is equal to unity

$$\left|\begin{matrix} f \\ \bar{f} \end{matrix}\right| = 1$$

1.4 - Canonical functions and truth tables

We shall demonstrate from the above definitions that any binary function can be expressed either by a product of produals, or by a produal of products involving all the direct or complemented variables. The expressions obtained are called "canonical functions".

Let us consider a binary function which depends on "n" separate variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$. We can only envisage altogether "2^n" combinations of separate values (0 or 1) of these "n" variables. Although the unknown binary function is equal to unity for "p" particular combinations of the values of these "n" variables, it is necessarily equal to zero for the "2^n - p" complementary combinations and we have $p \leq 2^n$ in all the cases. We can therefore write the function in the form of a produal of products which we shall call by definition "first canonical form".

$$F_1 = \left|\begin{matrix} f_1\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n) \\ f_2\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n) \\ ---------- \\ ---------- \\ f_p\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n) \end{matrix}\right|$$

Each function $f_k\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ of "F_1" is a product involving each of the variables or its complement. "f_k" is equal to unity for one single combination of values of these variables.

We deduce from this that "F_1", produal of the "p" products "f_k" is equal to unity for each of the "p" combinations of values of the variables which correspond successively to the value unity of each of the "p" products. This follows from the previous definitions.

It is also possible to express the same function "F_1" by a product of produals called by definition "second canonical form" :

$$F_1 = \left| f'_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| . \left| f'_2\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \ldots . \left| f'_q\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|$$

We give, as a reminder, the equivalent expressions for the products and produals in Boolean algebra.

$$\text{Product :}\ a\ .\ b\ .\ c = a \cap b \cap c = a \wedge b \wedge c$$

$$\text{Produal :} \left|\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right| = (a \dot{+} b \dot{+} c) = (a \cup b \cup c) = (a \vee b \vee c)$$

Despite the equivalence in expression, the produal is distinguished from the "logical sum" in its definition and its symbolism.

In this expression the number "q" of produals is such that $p + q = 2^n$. Each function "f'_k" represents a produal involving each variable or its complement. The produal "f'_k" is zero for one single combination of values of the variables which occur in the function F_1 and consequently this function "F_1", which is the product of the produals "f'_k" will be zero for each of the "q" combinations of values of the variables which nullify successively each of these functions "f'_k".

We shall call "transposition" the passage from the first to the second canonical form and vice-versa. When the purpose is to establish the product equal to unity for a given combination of the values of "n" variables, it is sufficient to form the product of the direct variables which are equal to "1" on the one hand, and the product of the complements of the variables equal to "0" on the other, in the chosen combination.

Let us take for example four variables x_1, x_2, x_3, x_4 and try to find the product equal to unity for the combination $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

This product is established immediately :

$$f = x_1 . \bar{x}_2 . \bar{x}_3 . x_4$$

For the chosen combination, we have :

$$x_1 = 1,\ \bar{x}_2 = 1,\ \bar{x}_3 = 1,\ x_4 = 1 \text{ hence } f = 1$$

To establish the produal corresponding to a combination of values of "n" variables, it is sufficient to factorise dually the direct variables which correspond to "0" on the one hand, and the complements of the variables equal to "1" on the other, in the chosen combination.

In the case, for example, of the combination of four variables $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, we will have

$$f' = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$$

We certainly obtain in this case :

$\bar{x}_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ and consequently $f' = 0$

It is therefore worthwhile, in order to establish a canonical function quickly, to know the table of combinations of values of the variables which make the function equal to zero or equal to unity.

This table is called by definition "truth table".

1.4.1 - <u>Establishment of the first canonical form</u>

In order to establish the first canonical form (produal of products) the following operations can be done :

Write the variables horizontally in any order, then enter successively in the horizontal direction, the different combinations of values for which the function is equal to unity. It is then only necessary, according to what has been said, to replace each value "1" in the table obtained by the variable "x_k" in the same column, and each value "0" by the complement $\bar{x}_k$ of the variable in the same column respectively.

<u>Example</u> :

Find the first canonical form of a function of three variables x_1, x_2, x_3 equal to unity when one of the variables is equal to unity, the two others being zero.

The truth table is written :

x_1	x_2	x_3	f
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

The first canonical form is found immediately from the truth table as indicated above, and we write :

$$f = \begin{vmatrix} x_1 . \bar{x}_2 . \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 . x_2 . \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 . \bar{x}_2 . x_3 \end{vmatrix}$$

1.4.2 - <u>Establishment of the second canonical form</u>

To establish the second canonical form relative to the combinations of values of "n" variables for which this function is zero, the variables x_1, x_2, ..., x_n are entered vertically in any order, and in succession in the same vertical order, the combinations of values for which $f = 0$. It is then only necessary to write the product of the produals obtained by replacing each value "0" in this table by the variable "x_k" in the same line, and each value "1" by the complement $\bar{x}_k$ of the variable in the same line respectively.

<u>Example</u> :

Find the second canonical form of a function of three variables x_1, x_2, x_3, equal to zero when at least two of the three variables are equal to unity.

The truth table is written :

x_1	x_2	x_3	f
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

As we have indicated previously, we take from the table :

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

hence the function :

$$f = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\ \overline{x_2} & x_2 & \overline{x_2} & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & \overline{x_3} \end{array}\right|$$

1.5 - Presentation of truth tables

As we have seen, a truth table reveals the combinations of values of the variables which define a binary function.

We shall now define the presentation which we shall adopt for the truth tables and the different forms which they can take.

1.5.1 - Full truth table

We shall say that a truth table is full when it shows all of the "2^n" combinations of possible values, relative to the "n" variables on which the function depends. We shall agree to enter the values (0 or 1) assumed by the function to the right of a double vertical separating line and to the left of the same line the corresponding combination of the values of the variables.

Thus the full truth table of a function of three variables, F (a, b, c) can be written :

Full truth table

	a	b	c	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

It is often useful to enter in a colum, on the left, decimal references which correspond to the numbers represented by the binary figures a, b, and c, by placing these numbers in the natural order. This arrangement ensures in particular that no combination has been forgotten.

A full truth table makes it possible, by following the rules given above, to write down the function immediately in its two canonical forms.

As regards the example given, we can write

$$F = \left|\begin{array}{l} \bar{a}\,.\,\bar{b}\,.\,\bar{c} \\ a\,.\,\bar{b}\,.\,\bar{c}\,. \\ a\,.\,b\,.\,\bar{c}\,. \\ a\,.\,b\,.\,c\,. \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} a & a & a & \bar{a} \\ b & \bar{b} & \bar{b} & b \\ \bar{c} & c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right|$$

The first form uses the combinations for which F = 1, (0,4,6,7) and the second form the combinations for which F = 0 (1, 2, 3, 5).

1.5.2 - Half truth tables

A binary function is fully defined if one knows only the combinations of values of the variables for which it retains the same value (0 or 1).

By definition we shall use the term half truth table for the table in which these combinations are entered. We shall state on the right of this table, the corresponding value of the function. For each function there are therefore two half truth tables.

The two half truth tables which correspond to the above function F (a, b, c) can be written as follows, according to whether the value "0" or the value "1" is chosen for "F" :

Half truth table (F = 1)

	a	b	c	F
0	0	0	0	F = 1
4	1	0	0	
6	1	1	0	
7	1	1	1	

Half truth table (F = 0)

	a	b	c	F
1	0	0	1	F = 0
2	0	1	0	
3	0	1	1	
5	1	0	1	

A half table only enables one of the canonical forms to be written. The property of duality however makes it adequate to define completely a binary function.

1.5.3 - Short truth tables

These are short truth tables in which certain combinations are grouped in order to take into account some or all of the adjacences which exist between them. These adjacences are indicated in the table by the symbol "ø" which means that the value assumed by the variable may be either "0" or "1".

We can take from the above example various short truth tables, including the following :

	a	b	c	F
0-4	ø	0	0	1
6-7	1	1	ø	

	a	b	c	F
1-5	ø	0	1	0
2-3	0	1	ø	

The adjacence, as we shall see when we study the simplifications, has the effect of eliminating the variable (direct and complemented) in the product or the produal which results from the grouped combinations. A short truth table therefore no longer gives a canonical form but a form which is already simplified. In the case envisaged, we take from the first short truth table :

$$F = \left| \begin{array}{c} \bar{b} \;.\; \bar{c} \\ a \;.\; b \end{array} \right|$$

From the second short truth table we obtain :

$$F = \left| \begin{array}{c|c} b & a \\ \bar{c} & \bar{b} \end{array} \right|$$

1.6 - Transformations of the canonical forms

We shall now examine some simple transformations which the canonical forms can undergo, taking into account the theorems already established.

1.6.1 - Transpositions

We have used the term transposition (1.4) for the passage, for a given function, from the first to the second canonical form or vice versa.

To transpose a function of "n" variables in canonical form, it is recommended that a full truth table be written for this function by entering the "2^n" combinations of values of the variables in a natural binary order.

If a binary function of "n" variables in the first canonical form contains "p" products, when it is transposed it must contain "q" produals, such that : $p + q = 2^n$.

The transposition is consequently a means of simplification when the number of products or produals of a canonical function of "n" variables is greater than "2^{n-1}".

1.6.2 - Complementations

The application of DE MORGAN'S theorem makes it immediately possible to write the complement function of a canonical form. It is only necessary to replace each produal by a product and vice versa, complementing each of the variables. The horizontal lines become vertical columns, the columns become horizontal lines and the variables are complemented. The simplicity of complementation results from the dual aspect of the symbolism adopted.

As an example, the function $f = \left| \begin{array}{c|c|c} x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & x_3 \end{array} \right|$

can easily be complemented in accordance with the method indicated ; and we obtain :

$$\bar{f} = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \;.\; x_2 \;.\; x_3 \\ x_1 \;.\; \bar{x}_2 \;.\; x_3 \\ x_1 \;.\; x_2 \;.\; \bar{x}_3 \end{array} \right|$$

If the function is not in a canonical form, the method of complementation is identical and remains as simple in its application ; this is illustrated by the two following examples :

$$- \quad f_1 = a \left| \begin{array}{c} b \\ \bar{c} \, . \, d \end{array} \right| \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{f}_1 = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ \bar{b} \left| \begin{array}{c} c \\ \bar{d} \end{array} \right. \end{array} \right|$$

$$- \quad f_2 = \left| \begin{array}{c} x_1 \left| \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \end{array} \right. \\ x_2 \cdot x_3 \end{array} \right| \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{f}_2 = \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right|$$

EXERCISES IN APPLICATION RELATIVE TO CHAPTER I

1 - What is the developed algebraic expression of the function $\left| \begin{array}{c} a \, . \, b \\ c \, . \, \bar{d} \end{array} \right|$?

Answer : $c - cd + ab - abc + abcd$

2 - What is the developed algebraic expression of each of the following two functions :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c|c} a & \bar{c} \\ b & d \end{array} \right| , \qquad f_2 = b \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ c \\ d \end{array} \right| \quad ?$$

Answers : $f_1 = a + b - ab - ac - bc + abc + acd + bcd - abcd$

$f_2 = b - ab + abc + abd - abcd$

3 - Starting from the algebraic expression $y = c + b. \ (a - c)$, establish the full truth table for the function "y" and give the two corresponding canonical forms.

Answers :

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

First canonical form

$$y = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \, . \, \bar{b} \, . \, c \\ a \, . \, \bar{b} \, . \, c \\ a \, . \, b \, . \, \bar{c} \\ a \, . \, b \, . \, c \end{array} \right|$$

Second canonical form

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c|c} a & a & a & \bar{a} \\ b & \bar{b} & \bar{b} & b \\ c & c & \bar{c} & c \end{array} \right|$$

4 - Show that the functions $\left|\begin{array}{c|c} \bar{a} & a \\ b & c \end{array}\right|$ and $\left|\begin{array}{ccc} a & . & b \\ \bar{a} & . & c \end{array}\right|$ assume the same algebraic expression ::

Answer : $\left|\begin{array}{c|c} \bar{a} & a \\ b & c \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a \,.\, b \\ \bar{a} \,.\, c \end{array}\right| = ab - ac + c$

5 - Establish the short truth tables for the two binary functions

$$F_1 = \left|\begin{array}{ccc} a & . & \bar{b} \\ \bar{a} & . & c \end{array}\right| \qquad \text{and} \qquad F_2 = \left|\begin{array}{c|c} a & \bar{a} \\ c & \bar{b} \end{array}\right|$$

Show that F_1 and F_2 assume the same full truth table and therefore represent the same function.

Answer :

	a	b	c	$F_1 = F_2$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

6 - It is proposed to produce a two-way system by means of three circuit breakers x_1, x_2, x_3. The circuit is to be closed (F = 1) when the number of values "1" of the variables x_1, x_2, x_3 is odd, and the circuit is to be open (F = 0) when the number of values "1" of the variables is even.

- Write the table relative to the function "F".
- What are the two canonical forms of "F" ?

Answers :

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_2 \,.\, x_3 \\ \bar{x}_1 \,.\, x_2 \,.\, \bar{x}_3 \\ x_1 \,.\, \bar{x}_2 \,.\, \bar{x}_3 \\ x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ x_2 & \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 \\ x_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & x_3 \end{array}\right|$$

7 - Given the following canonical form :

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{a} \,.\, \bar{b} \,.\, \bar{c} \,.\, \bar{d} \\ \bar{a} \,.\, b \,.\, \bar{c} \,.\, \bar{d} \\ \bar{a} \,.\, b \,.\, \bar{c} \,.\, d \\ \bar{a} \,.\, b \,.\, c \,.\, \bar{d} \\ a \,.\, \bar{b} \,.\, \bar{c} \,.\, d \\ a \,.\, \bar{b} \,.\, c \,.\, \bar{d} \\ a \,.\, b \,.\, \bar{c} \,.\, \bar{d} \\ a \,.\, b \,.\, \bar{c} \,.\, d \\ a \,.\, b \,.\, c \,.\, \bar{d} \\ a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array}$$

Which groups the combinations 0, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15, transpose the function "F" so as to obtain a product of six produals

Answer $F = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & a & a & a & \bar{a} & \bar{a} \\ b & b & b & \bar{b} & b & b \\ c & \bar{c} & \bar{c} & \bar{c} & c & \bar{c} \\ \bar{d} & d & \bar{d} & \bar{d} & d & \bar{d} \end{array}\right|$
$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 11 \end{array}$

8 - The following truth table is given :

a	b	c	d	e	f	Φ
0	0	0	∅	∅	∅	│
1	1	∅	∅	∅	1	│
0	∅	∅	∅	0	0	0
∅	∅	∅	1	1	1	│

Write the function " Φ " in the form of a product of produals and indicate the total number of combinations which appear in the half truth table for Φ = 0, giving the decimal number associated with each combination and taking the variables in the order a,b,c,d,e,f.

Answers : $\Phi = \left|\begin{array}{c|c|c|c} a & \bar{a} & a & \bar{d} \\ b & \bar{b} & e & \bar{e} \\ c & \bar{f} & f & \bar{f} \end{array}\right|$

The half truth table relative to Φ = 0 would contain 27 combinations corresponding to the decimal numbers : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 39, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63.

9 - To unlock the safety coil of the access door to the cabin of a high-voltage transformer ($p = 1$ on unlocking), it is required that the circuit-breaker "D" for the supply to the transformer and the isolating switch "S" should be open ($D = S = 0$).

Establish the full truth table of the function "p" and give the two corresponding canonical forms.

Answers :

D	S	p
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$p = \bar{D}\,.\,\bar{S} = \left|\begin{array}{c|c|c} D & \bar{D} & \bar{D} \\ \bar{S} & S & \bar{S} \end{array}\right|$$

10 - Write the complements of the following functions :

$$f_1 = \left|\begin{array}{c} a\,.\,b \\ \bar{c}\,.\,d\,.\,\bar{e} \end{array}\right| , \quad f_2 = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \\ x_2 & x_3 \\ & x_4 \end{array}\right| , \quad f_3 = \left|\begin{array}{c|c|c} a & \bar{a} & \bar{a} \\ \bar{b} & b & b \\ c & \bar{c} & c \end{array}\right|$$

Answers :

$$\bar{f}_1 = \left|\begin{array}{c|c} \bar{a} & c \\ \bar{b} & \bar{d} \\ & e \end{array}\right| , \quad \bar{f}_2 = \left|\begin{array}{c} x_1\,.\,\overline{x_2} \\ x_2\,.\,\overline{x_3}\,.\,\overline{x_4} \end{array}\right| , \quad \bar{f}_3 = \left|\begin{array}{c} \bar{a}\,.\,b\,.\,\bar{c} \\ a\,.\,\bar{b}\,.\,c \\ a\,.\,\bar{b}\,.\,\bar{c} \end{array}\right|$$

11 - Calculate the developed algebraic expression of the function $f = a. \left|\begin{array}{c} \bar{b} \\ \bar{c} \end{array}\right|$. Deduce from this expression a short truth table corresponding to $f = 0$ then the full truth table giving "f". Write "f" in the first canonical form.

Answers : $f = a - abc$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Short truth table

a	b	c	f
0	∅	∅	0
∅	1	1	0

First canonical form

$$f = \left|\begin{array}{c} a\,.\,\bar{b}\,.\,\bar{c} \\ a\,.\,\bar{b}\,.\,c \\ a\,.\,b\,.\,\bar{c} \end{array}\right|$$

CHAPTER II

SIMPLIFICATION OF BINARY FUNCTIONS

By simplification of binary functions we mean the reduction in the number of letter elements ; i.e. the simplification, outside of any technological consideration, of the written symbolic expressions.

The purpose will therefore be in general to find and eliminate the redundant terms : defining as such any term which can be eliminated in a binary function without making any numerical modification to it in relation to the combinations of values of the independant variables.

The simplifications will therefore have to be the demonstrable consequences of the algebraic properties of the products and produals. Amongst the fundamental methods we shall study in particular the simplifications by factorisation and developments, by adjacences, by transpositions and by consensus, which are fundamental and simple methods and prove adequate in the majority of cases.

2.1. - Factorisation and development

The binary set "E_{01}" defines a commutative ring, since "$E_{01} = E_{10}$" and since two internal algebraic laws of composition have been chosen which are the product, "$p = x.y$" and the produal "$\pi = 1 - (1 - x).(1 - y) = \left|\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right|$".

It is useful to demonstrate the algebraic property of distributivity of the produal with respect to the product and vice versa of the product with respect to the produal. This reciprocity, which results from the fundamental property of duality, is an essential and particularly valuable characteristic of binary sets.

2.1.1 - Factorisation in a produal

Let us consider the produal : $F = \left|\begin{array}{c} \Phi\,.\,f_1 \\ \Phi\,.\,f_2 \end{array}\right| = 1 - (1 - \Phi.f_1).(1 - \Phi.f_2)$

The developed algebraic expression is written :

$F = \Phi f_1 + \Phi f_2 - \Phi^2 f_1 f_2$, using the idempotence theorem $\Phi^2 = \Phi$, $F = \Phi f_1 + \Phi f_2 - \Phi f_1 f_2$ which we can write :

$$F = \Phi . \left[1 - (1 - f_1).(1 - f_2) \right] = \Phi . \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right|$$

Thus the reciprocal identity is proved :

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \Phi.f_1 \\ \Phi.f_2 \end{matrix} \right| = \Phi . \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right|}$$

We shall call the passage from the first expression to the second "factorisation", and the passage in the opposite direction "development".

The above identity can be extended to a produal containing any number of products accepting "Φ" as a common factor.

Let the function F = , $F = \left| \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ P_q \\ P_{q+1} \\ . \\ . \\ P_n \end{matrix} \right|$

in which , $P_1 = \Phi.f_1$, $P_2 = \Phi.f_2 \dots$, $P_q = \Phi.f_q$, $q \leqslant n$.

Let us call $P'_{12} = \Phi. \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right|$, the function obtained by factorising "Φ" in the first two products P_1 and P_2.

By grouping "P'_{12}" and "P_3", we can again factorise "Φ" and we find $P'_{123} = \Phi. \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \right|$ and so on up to "P_q". This allows us to write the identity :

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \Phi.f_1 \\ \Phi.f_2 \\ . \\ . \\ \Phi.f_q \\ P_{q+1} \\ . \\ . \\ P_n \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \Phi. \left| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_q \end{matrix} \right| \\ P_{q+1} \\ . \\ . \\ P_n \end{matrix} \right|}$$

2.1.2 - "Dual factorisation" in a product

Let us consider the function $F = \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_2 \end{matrix} \right|$.

The algebraic development of "F" is written :

$$F = \left[1 - (1 - \Phi).(1 - f_1) \right] . \left[1 - (1 - \Phi).(1 - f_2) \right]$$

$$= 1 - (1 - \Phi).(1 - f_1) - (1 - \Phi).(1 - f_2) + (1 - \Phi)^2.(1 - f_1).(1 - f_2)$$

The idempotence etheorem allows us to write $(1 - \Phi)^2 = (1 - \Phi)$, hence the expression for "F" :

$$F = 1 - (1 - \Phi).\left[(1 - f_1) + (1 - f_2) - (1 - f_1).(1 - f_2) \right]$$

$$= 1 - (1 - \Phi).(1 - f_1.f_2) = \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_1 . f_2 \end{matrix} \right|$$

We have thus demonstrated the reciprocal identity :

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \Phi \\ f_1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_2 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_1 . f_2 \end{matrix} \right|}$$

We shall call "dual factorisation" the passage from the first expression to the second and "dual development" the opposite direction.

As for the produal, the above identity can be extended to a product containing any number of produals accepting "Φ" as common "dual factor".

$$\pi = \pi_1 . \pi_2 \dots \pi_q . \pi_{q+1} \dots \pi_n$$

$$\pi_1 = \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_1 \end{matrix} \right|, \quad \pi_2 = \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_2 \end{matrix} \right|, \dots, \quad \pi_q = \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_q \end{matrix} \right|, \quad q \leqslant n .$$

We can gradually put "Φ" as a dual factor in the produals, π_1, π_2, ..., π_q and finally obtain the identity :

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \Phi \\ f_1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_2 \end{matrix} \right| \dots \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_q \end{matrix} \right| . \pi_{q+1} \dots \pi_n = \left| \begin{matrix} \Phi \\ f_1.f_2 \dots f_q \end{matrix} \right| . \pi_{q+1} \dots \pi_n}$$

We have thus demonstrated the distributivity of the produal with respect to the product.

2.2 - Elementary simplifications of the binary functions

The reciprocal property of distributivity of the products and produals will enable us to draw a certain number of consequences and elementary theorems relative to the simplification of the binary functions.

2.2.1 - Simplifications by products made (development)

If factorisation generally supplies a simplified form of the binary functions, the opposite operation by products made can also supply valuable simplifications in the following cases.

Ist case

$$\Phi \left|\begin{matrix} f \\ A.\bar{\Phi} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \Phi . f \\ A . \Phi . \bar{\Phi} \end{matrix}\right| = \Phi . f$$

In the particular case which is often encountered, where A = 1, we can write :

$$\boxed{\Phi \left|\begin{matrix} f \\ \bar{\Phi} \end{matrix}\right| = \Phi . f}$$

2nd case

$$\left|\begin{matrix} \Phi \\ f \left|\begin{matrix} B \\ \bar{\Phi} \end{matrix}\right. \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \Phi \\ f \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} \Phi \\ \bar{\Phi} \\ B \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \Phi \\ f \end{matrix}\right|$$

In the particular case B = 0, we can write

$$\boxed{\left|\begin{matrix} \Phi \\ f . \bar{\Phi} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \Phi \\ f \end{matrix}\right|}$$

2.2.2 - Implications

We know that the necessary and sufficient condition for a binary product to be equal to unity, is that each of the factors is equal to unity.

$$(P = f_1 f_2 \ldots f_n = 1) \Longleftrightarrow (f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1)$$

We can therefore call each factor f_1, f_2, ..., f_n, direct implicant, or implicant of the function "P".

- Any partial function which can be factorised in a given function, will therefore be an implicant of the latter.

We also know that the necessary and sufficient condition for a produal to be zero, is that each dual factor is equal to zero.

$$\pi = \left|\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_n \end{matrix}\right| = 0 \Longleftrightarrow (f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0)$$

- Any partial function which can be dual factorised in a given function will be, by definition, a dual implicant of the latter.

Let us consider the product having as factors a produal and one of its dual implicants $F = \Phi . \left|\begin{matrix} \Phi \\ f \end{matrix}\right|$ " 0 " being the neutral elements of the produal, we can write :

$$\Phi = \left|\begin{matrix} \Phi \\ 0 \end{matrix}\right| \quad \text{et} \quad F = \left|\begin{matrix} \Phi \\ 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \Phi \\ f \end{matrix}\right| .$$

By dual factorising " Φ ", we find $F = \left|\begin{matrix} \Phi \\ 0.f \end{matrix}\right| = \Phi$

Similarly, the produal having as dual factors a product and one of its implicants, is written :

$$F' = \left|\begin{matrix} \Phi \\ \Phi . f \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \Phi . 1 \\ \Phi . f \end{matrix}\right| = \Phi . \left|\begin{matrix} 1 \\ f \end{matrix}\right| = \Phi$$

We derive from these equalities the following two theorems :

2.2.3 - Theorems

The product of a binary function and any of its dual implicants, is equal to this dual implicant.

$$\boxed{\Phi . \left|\begin{matrix} \Phi \\ f \end{matrix}\right| = \Phi}$$

The produal of a binary function and any of its direct implicants is equal to this implicant.

$$\boxed{\left|\begin{matrix} \Phi \\ \Phi . f \end{matrix}\right| = \Phi}$$

2.2.4 - Adjacence

Two products "P_1" and "P_2" are called adjacent when it is possible to pass from one to the other by complementing one of the factors and this factor only.

$$P_1 = \left|\Phi . f\right| , \quad P_2 = \left|\bar{\Phi} . f\right|$$

We can also define by duality the adjacence for produals.

Two produals "π_1" and "π_2" are called adjacent when it is possible to pass from one to the other by complementing one of the dual factors and this factor only.

$$\pi_1 = \left|\begin{matrix} \Phi \\ f \end{matrix}\right| , \quad \pi_2 = \left|\begin{matrix} \bar{\Phi} \\ f \end{matrix}\right|$$

2.2.5 - Theorems

The produal of two adjacent products is equal to the common factor of the two products.

$$\left|\begin{matrix}P_1\\P_2\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\Phi\,.\,f\\\bar{\Phi}\,.\,f\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\Phi\\\bar{\Phi}\end{matrix}\right| .\, f = f$$

The product of two adjacent produals is equal to the common dual factor of the two produals.

$$\pi_1 \,.\, \pi_2 = \left|\begin{matrix}\Phi\\f\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}\bar{\Phi}\\f\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\Phi\,.\,\bar{\Phi}\\f\end{matrix}\right| = f$$

The function " Φ " is called "adjacent function" or "adjacent variable" when it is a single variable.

2.3 - General simplification methods using factorisation

Taking into account the property of permutativity of the products and produals, the factorisations are operations which can be carried out in cascade, in any order, but which do not necessarily lead to an optimum form of the binary functions.

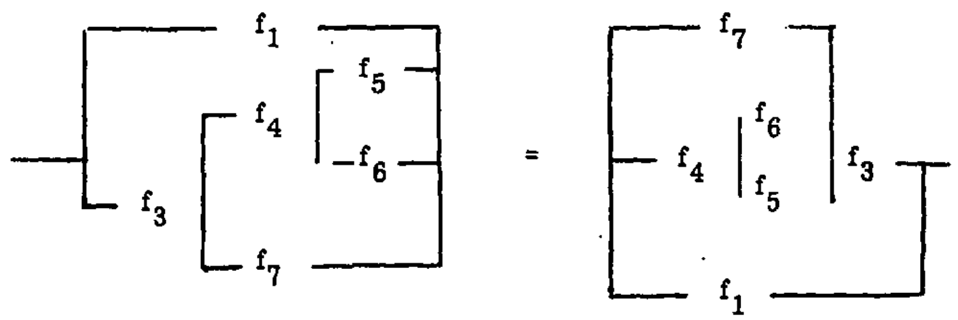
2.3.1 - Examples of simplifications by factorisations

Let us consider the following product of produals :

$$F_1 = \left|\begin{matrix}f_1\\f_3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}f_1\\f_4\\f_7\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}f_1\\f_5\\f_6\\f_7\end{matrix}\right|$$

"F_1" can be written, after dual factorisation of "f_1" then "f_7" :

F_1 =



When the functions do not completely fill the space which they accupy between the two vertical lines which symbolise the produals, it is possible to complete by continuous horizontal lines as indicated in the simplified expressions of the function "F_1" above.

N.B. The vertical line of a produal is equivalent to the symbol (.) of a product. So it may be written :

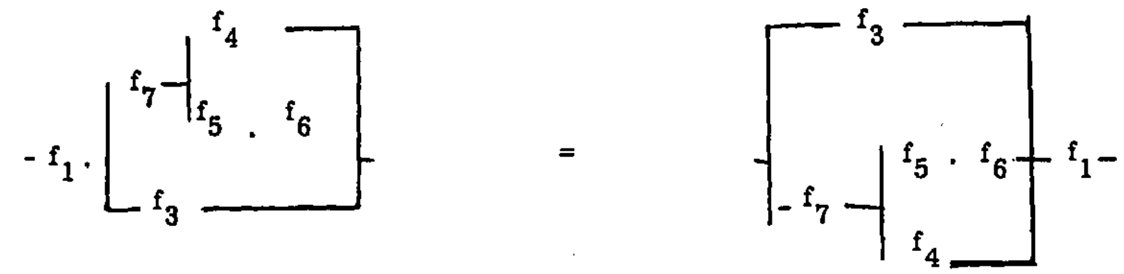
$$\begin{matrix}-a\,|\\ |b\,|\\ |c\,-\end{matrix} = a.b.c$$

Let us also consider the produal of products :

$$F_2 = \left|\begin{matrix}f_1\,.\,f_4\,.\,f_7\\f_1\,.\,f_5\,.\,f_6\,.\,f_7\\f_1\,.\,f_3\ \text{———}\end{matrix}\right|$$

By factorising "f_7" and "f_1" in succession, we obtain :

F_2 =



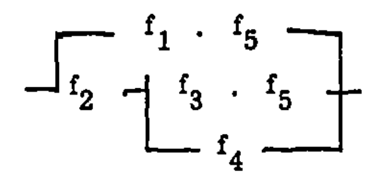
The products and the produals are permutative, the columns or the lines of the binary functions can be permuted between them and therefore the factorisations can be carried out both from the right and from the left for a product, and the dual factorisations can be carried out from the top or from the bottom for a produal.

These factorisations can even be done simultaneously on the right and the left for the first form (product) or at the top and bottom for the second form (produal). This method of procedure introduces a foreign solution.

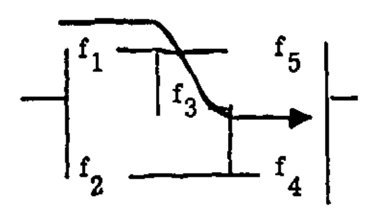
> It is therefore necessary to ensure that the foreign solution introduced into the simplification obtained corresponds to a zero product.

Let us consider the function

$$F = \left|\begin{matrix}f_1\,.\,f_5\\f_2\,.\,f_3\,.\,f_5\\f_2\,.\,f_4\end{matrix}\right| =$$



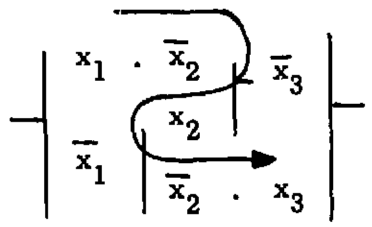
If "f_5" is factorised at the right in this function, the simplification obtained



reveals, along the path indicated by the arrow, the product $f_1.f_3.f_4$ which was not contained initially in the proposed function. This simplification cannot be made if $f_1.f_3.f_4 \neq 0$.

On the other hand we can make a simplification by factorisation on the right and left, in the following function :

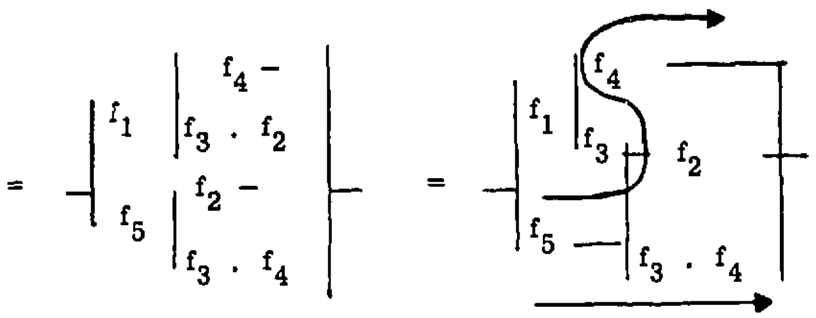
$$\left|\begin{array}{c} x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \\ \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \\ \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \end{array}\right| =$$



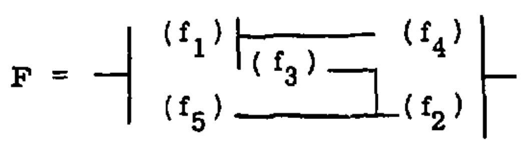
The product $x_1 . \overline{x_2} . x_2 . \overline{x_2} . x_3$ indicated by the arrow is identically zero since it contains in factor two complementary variables x_2 and $\overline{x_2}$. There is therefore no modification introduced in the initial function and the simplification obtained is valid.

Note that in certain cases, the particular solution introduced is redundant and makes it possible to improve the simplification. This is the case of the following function

$$F = -\left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_4 \\ f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \\ f_5 \cdot f_2 \\ f_5 \cdot f_3 \cdot f_4 \end{array}\right|- =$$



The two paths indicated by the arrows correspond to the same product "$f_5 . f_3 . f_4$". The product "$f_3 . f_4$" in dual factor of "f_2" can therefore be eliminated without the function being modified. We thus obtain finally



The symbolism chosen thus makes it possible, by simultaneous factorisations on either side of the binary expressions, to establish close links with topology and to arrive at simple expressions having the appearance of diagrams.

Note however that these particular simplifications are only of value for circuits using a technology where the elements have isolated controls (electromagnetic relays, optoelectronic relays or transformers). This is not the case for electronic circuits using semiconductors of the diode and transistor type.

2.4 Decomposition of the binary functions with respect to the variables

It is interesting, for the purpose of simplification, to study the different forms which a binary function can assume relative to an independent variable.

2.4.1 - Definitions

We shall say, by definition, that a function is monoform with respect to the variable "x" if this variable appears in the function in only one of its binary forms (direct or complemented).

We shall say in this case that "x" is a monoform variable of the function.

$$f_1 \left|\begin{array}{c} x \\ f_2 \end{array}\right| \quad \text{and} \quad \left|\begin{array}{c} x \cdot \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{array}\right|$$

are monoform functions with respect to the variable "x" on condition that f_1, f_2, Φ_1 and Φ_2 are independent functions of "x".

We shall call biform function with respect to the variables "x" any binary function in which the variable "x" appears in both its two forms (direct and complemented) and we shall say that "x" is a biform variable of the function.

$$\Phi_1 \cdot \left|\begin{array}{c|c} x & \overline{x} \\ f_1 & f_2 \end{array}\right| \quad \text{and} \quad \left|\begin{array}{c} x \cdot f_1 \\ \overline{x} \cdot f_2 \\ \Phi_1 \end{array}\right|$$

are biform functions with respect to the variable "x".

We shall say that a binary function is a monoform product of the variable "x" when "x" or "$\overline{x}$", is a direct implicant of this function

F = x.A is a monoform product of the variable "x".

A monoform produal of the variable "x" accepts this variable or its complement as dual implicant.

$$F' = \left|\begin{array}{c} x \\ B \end{array}\right|$$ is a monoform produal of the variable "x".

We shall call squared biform function, a biform function comprising four terms grouped in a square according to a product of two produals of two dual factors, or according to a produal of two products of two direct factors.

$$\left|\begin{array}{c} \Phi \cdot A \\ \overline{\Phi} \cdot B \end{array}\right| \text{and} \left|\begin{array}{c|c} \Phi & \overline{\Phi} \\ A_1 & B_1 \end{array}\right|$$

are squared biform functions in "Φ"

2.4.2 - Properties of squared biform function *

The squared biform functions have a dual aspect which suggests particular and interesting properties.

Any function can be written in the form of a squared biform function .

$$f_1 \left|\begin{array}{c} \overline{x} \\ f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x \cdot \overline{x} & \overline{x} \\ f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} x & \overline{x} & \overline{x} \\ f_1 & f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x & \overline{x} \\ f_1 & f_1 f_2 \end{array}\right|$$

---

* Boolean algebra cannot show simply the fundamental properties of squared biform functions which have a particular dual symmetry and are extremely useful for the simplification of switching circuits.

$$\left|\begin{array}{c} \bar{x}\cdot\Phi_1 \\ \\ \Phi_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x} & \Phi_1 \\ \bar{x} & \\ x & \Phi_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x} & \Phi_1 \\ & \Phi_2 \\ \multicolumn{2}{c}{x\cdot\Phi_2} \end{array}\right|$$

$$\Phi_1\left|\begin{array}{c|c} x & \bar{x} \\ \\ f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} x\cdot\bar{x} & x & \bar{x} \\ \\ \Phi_1 & f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x & \bar{x} \\ \\ \Phi_1\cdot f_1 & \Phi_1\cdot f_2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c} \bar{x}\cdot f_1 \\ x\cdot f_2 \\ \Phi_1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \bar{x}\cdot f_1 \\ x\cdot f_2 \\ \bar{x} \\ x \,\big|\, \Phi_1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}\,\cdot & f_1 \\ & \Phi_1 \\ & f_2 \\ x\,\cdot & \Phi_1 \end{array}\right|$$

If a squared biform function is in the form of a product of produals

$$P = \left|\begin{array}{c|c} \Phi & \bar{\Phi} \\ A & B \end{array}\right|$$

we can write it in the form of produal of products by making the elementary products.

$$F = \left|\begin{array}{c} \Phi\cdot B \\ A\cdot\bar{\Phi} \\ A\cdot B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \Phi\cdot B \\ A\cdot\bar{\Phi} \\ A.B.\left|\begin{array}{c}\Phi \\ \bar{\Phi}\end{array}\right. \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Phi\,\cdot & \begin{array}{c} B \\ A.B \end{array} \\ \bar{\Phi}\,\cdot & \begin{array}{c} A \\ A.B \end{array} \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c} B \\ A.B \end{array}\right| = B, \qquad \left|\begin{array}{c} A \\ A.B \end{array}\right| = A,$$

$$\left|\begin{array}{c} \Phi\cdot B \\ A\cdot\bar{\Phi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Phi & B \\ A & \bar{\Phi} \end{array}\right|$$

We have thus established the following theorem ; a fundamental and very important theorem which will enable us to make a systematic search for the direct and dual implicants of a function by the consensus method.

2.4.3 - Theorem

A square biform function is not modified by the elimination or the drawing of a vertical median line, provided the complementary factors are arranged along a diagonal of the square corresponding to its symbolic expression.

$$\boxed{\left|\begin{array}{c} \Phi\cdot B \\ A\cdot\bar{\Phi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Phi & B \\ A & \bar{\Phi} \end{array}\right|}$$

The factors " A " and " B " are called simply diagonal factors of the squared biform function.

This theorem thus allows us to pass easily from a produal to a product and vice-versa, without introducing any redundant term.

This justifies the special attention devoted to the study of squared biform functions.

2.5 - Simplifications by the "consensus " method *

Given a squared biform function, we shall term the "consensus" of this function, the product of the non-complementary diagonal terms.

The squared biform function $F = \left|\begin{array}{c|c} \Phi & f_1 \\ f_2 & \bar{\Phi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \Phi\cdot f_1 \\ \bar{\Phi}\cdot f_2 \end{array}\right|$

accepts as "consensus" the product $f_1 . f_2$, and as "dual consensus" the produal $\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right|$.

Proceeding by products formed, we can write :

$$F = \left|\begin{array}{c} \Phi\cdot f_1 \\ \\ f_2\cdot\bar{\Phi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \Phi & f_1 & f_1 \\ f_2 & \bar{\Phi} & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \Phi\cdot f_1 \\ f_2\cdot\bar{\Phi} \\ f_2\cdot f_1 \end{array}\right|$$

The consensus $f_1 . f_2$ is thus a dual implicant of "F" and the dual consensus $\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right|$ is an implicant of " F ". We deduce from this the following theorems.

2.5.1 - Theorems

2.5.1.1. If, amongst the factors of a product, there exists a squared biform function and a term containing as dual factor the dual consensus of this function, the latter term is redundant and can be eliminated.

2.5.1.2. If, amongst the dual factors of a produal, there exists a squared biform function and a term containing as factor the consensus of this function, the latter term is redundant and can be eliminated.

We can write :

$$\left|\begin{array}{c|c} \Phi\cdot f_1 & \begin{array}{c} k \\ f_1 \\ f_2 \end{array} \\ f_2\cdot\bar{\Phi} & \end{array}\right| .f_3\ldots f_n = \left|\begin{array}{c|c|c} \Phi\cdot f_1 & \begin{array}{c} o \\ f_1 \\ f_2 \end{array} & \begin{array}{c} k \\ f_1 \\ f_2 \end{array} \\ f_2\,\bar{\Phi} & & \end{array}\right| .f_3\ldots f_n = \left|\begin{array}{c|c} \Phi\cdot f_1 & f_1 \\ f_2\cdot\bar{\Phi} & f_2 \end{array}\right| .f_3\ldots f_n = \left|\begin{array}{c} \Phi\cdot f_1 \\ f_2\cdot\bar{\Phi} \end{array}\right| .f_3\ldots f_n$$

* Note for reference that a complete consensus theory, in the formalism of Boolean algebra, has been developed by Tison.

Similarly :

$$\left|\begin{array}{c} \Phi \,.\, f_1 \\ f_2 \,.\, \bar{\Phi} \\ k \,.\, f_1 \,.\, f_2 \\ f_3 \\ . \\ . \\ f_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \Phi \,.\, f_1 \\ f_2 \,.\, \bar{\Phi} \\ 1 \,.\, f_2 \,.\, f_1 \\ k \,.\, f_1 \,.\, f_2 \\ f_3 \\ . \\ f_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \Phi \,.\, f_1 \\ f_2 \,.\, \bar{\Phi} \\ f_2 \,.\, f_1 \\ f_3 \\ . \\ . \\ f_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \Phi \,.\, f_1 \\ f_2 \,.\, \bar{\Phi} \\ f_3 \\ . \\ . \\ f_n \end{array}\right|$$

2.5.2. - <u>General rules of " consensus "</u>

Let us give the squared biform function :

$$F = \left|\begin{array}{c} \Phi \\ \\ f_1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} f_2 \\ \\ \bar{\Phi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \Phi \,.\, f_2 \\ \\ f_1 \,.\, \bar{\Phi} \end{array}\right|$$

2.5.2.1. - The consensus "$f_1 f_2$", put in the form of a produal of products, when one of these products appears as a factor in a dual factor term of "F", represents a sufficient condition to assert that this term is redundant and can be eliminated.

2.5.2.2. The dual consensus $\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right|$ put in the form of a product of produals, when one fo these produals appears as a dual factor in a factor term of "F", represents a sufficient condition to assert that this term is redundant and can be eliminated.

Let us assume that the consensus of the squared biform function "F" is put in the form of a produal of "q" products :

$$f_1 \,.\, f_2 = \left|\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ . \\ p_k \\ . \\ . \\ p_q \end{array}\right|$$

and that the dual consensus is put in the form of a product of "r" produals ;

$$\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right| = \pi_1 \,.\, \pi_2 \;\ldots\; \pi_j \;\ldots\; \pi_r$$

If the function "F" is a dual factor of a term of the form "Ap_k", this term is redundant.

In this case we can write :

$$\left|\begin{array}{c} F \\ \\ Ap_k \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} F \\ f_1 \,.\, f_2 \\ Ap_k \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} F \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ p_k \\ . \\ . \\ p_q \\ Ap_k \end{array}\right|$$

"p_k", implicant of "Ap_k", is a dual factor and we know that $\left|\begin{array}{c} p_k \\ Ap_k \end{array}\right| = p_k$ hence :

$$\left|\begin{array}{c} F \\ f_1 \,.\, f_2 \\ Ap_k \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} F \\ f_1 \,.\, f_2 \end{array}\right| = F$$

If the function "F" is a factor of a term of the form $\left|\begin{array}{c} B \\ \pi_j \end{array}\right|$, we can write :

$$F \,.\, \left|\begin{array}{c} B \\ \pi_j \end{array}\right| = F \,.\, \left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} B \\ \pi_j \end{array}\right| = F \,.\, \pi_1 \,.\, \pi_2 \ldots \pi_j \,.\, \left|\begin{array}{c} B \\ \pi_j \end{array}\right| \,.\, \pi_{j+1} \,.\, \ldots \,.\, \pi_r$$

π_j is a dual implicant of the produal $\left|\begin{array}{c} B \\ \pi_j \end{array}\right|$ therefore

$$F \,.\, \left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} B \\ \pi_j \end{array}\right| = F \,.\, \left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right| = F$$

2.5.3 - <u>Example of simplification by consensus</u>

Let us consider the function F_1

$$= \left|\begin{array}{c} B \,.\, C \,.\, F \\ D \,.\, \bar{C} \,.\, F \\ D \,.\, B \,.\, E \\ A \,.\, \bar{C} \\ D \,.\, \bar{A} \\ A \,.\, B \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \\ \bar{F} \end{array}\right|$$

There exists in the first factor of "F_1", two biform variables "C" and "A" and we can show in succession the two squared biform functions

$$\left|\begin{array}{c} C \cdot B \cdot F \\ \begin{array}{c|c} D \cdot F & \\ A & \bar{C} \end{array} \end{array}\right| \quad \text{and} \quad \left|\begin{array}{c} \begin{array}{c|c} & \bar{C} \\ A & B \end{array} \\ D \cdot \bar{A} \end{array}\right| \qquad \text{which accept}$$

$$\left|\begin{array}{c} B \cdot D \cdot F \\ A \cdot B \cdot F \end{array}\right| , \quad \left|\begin{array}{c} D \cdot \bar{C} \\ D \cdot B \end{array}\right| ,$$

for consensus,

$$\left|\begin{array}{c|c} A & \\ D & A \\ B & F \end{array}\right| \quad \text{and} \quad \left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \end{array}\right| \quad \text{for dual consensus respectively.}$$

We see by the consensus of the squared biform function at "A", a consensus equal to $\left|\begin{array}{c} D \cdot B \\ D \cdot \bar{C} \end{array}\right|$, that the terms D $\bar{C}$ F and D B E can be eliminated. We can thus write :

$$F_1 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} A & \begin{array}{c} \bar{C} \\ B \end{array} \end{array} & D \\ D \cdot \bar{A} & \begin{array}{c} B \\ \bar{C} \end{array} \\ B \cdot C \cdot F & \bar{F} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \begin{array}{c|c|} A & \bar{C} \\ D & \begin{array}{c} B \\ \bar{A} \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \\ \bar{F} \end{array} \\ B \cdot C \cdot F & \end{array}\right|$$

The produal $\left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \\ \bar{F} \end{array}\right|$ contains the dual consensus $\left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \end{array}\right|$ hence,

$$F_1 = \left|\begin{array}{c} \begin{array}{c|c} A & \bar{C} \\ D & B \\ & \bar{A} \end{array} \\ B \cdot C \cdot F \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} A \cdot \bar{C} \\ A \cdot B \\ D \cdot \bar{A} \\ B \cdot C \cdot F \end{array}\right|$$

We can still write : $$F_1 = \left|\begin{array}{c|c} A & \bar{A} \\ D & B \\ B \cdot C \cdot F & \bar{C} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} A & A & A & \bar{A} \\ D & D & D & B \\ B & C & F & \bar{C} \end{array}\right|$$

The search for the consensus often leads to the optimun simplification of the binary functions. It is a useful supplement to the methods of simplification by factorisation, transposition and adjacence.

These four methods combined generally enable minimum forms to be obtained when they are judiciously used.

2.6 - Simplifications by adjacence

The simplifications by adjacence are the first which were used in "BOOLEAN" algebra. They were then the easiest to apply and gave rise to different methods like that established

by Quine and Mc Cluskey or those of the Venn and Veitch diagrams which we mention simply for reference.

We shall, on the other hand, develop the Karnaugh diagram method because this diagram is comparable to the lines of a particualr truth table in which the adjacences are topologically grouped or rather correspond to each other by symmetry.

The Karnaugh diagram is in the form of a square or a rectangle, depending on the parity of the number of variables. All the variables are generally divided into two sub-sets containing the same number of variables, to within one unit.

The number of cases of each of the sides of the rectangle or square is made to correspond to the number of combinations of values of these two sub-sets. It is then sufficient to range the combinations of values of the variables in a sequence observing the adjacences by groupings or symmetries, as defined by the following examples :

Case of two variables

A \ B	0	1
0	0	1
1	2	3

Case of three variables

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

It is useful, as done on the examples treated, to mark each case with the decimal equivalent of the binary number associated with the combination of values corresponding to it.

Case of four variables

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Case of five variables

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

To utilize the Karnaugh diagram, in each of the cases of the square or the rectangle one enters the value assumed by the binary function envisaged for the combination of values of the variables which corresponds precisely to this case. Then one forms a short truth table, either with respect to the "0", or with respect to the "1" of the function, depending on which seems simpler, taking into account the possible adjacences which are easily located by means of the particular topological distribution of the diagram. It is then only necessary to establish the function from the short truth table. With a little practice, it is possible to derive the function directly from the diagram in the form of products or produals.

The Karnaugh diagram method is useful and allows rapid simplifications to be made, but has the disadvantage of using only the adjacences as a method of finding the implicants. The choice of groupings and symmetries remains arbitrary and the factorisation or consensus method usefully completes it.

2.6.1. Examples

The variables being arranged in the order A, B, C, D, write with the aid of the Karnaugh diagram the simplified binary function equal to zero for the combinations 3 (0011), 7 (0111), 8 (1000), 9 (1001), 14 (1110) and 15 (1111) of the values of the variables.

The Karnaugh diagram is plotted for the four variables A, B, C and D. "0" is entered in the cases corresponding to 3, 7, 8, 9, 14 and 15 and "1" in the other cases.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	1 $_{1}$	0 $_{3}$	1 $_{2}$
01	1 $_{4}$	1 $_{5}$	0 $_{7}$	1 $_{6}$
11	1 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	0 $_{8}$	0 $_{9}$	1 $_{11}$	1 $_{10}$

By grouping the adjacent cases 3-7, 8-9 and 14-15, one obtains the following short truth table :

Grouped combinations

	A	B	C	D	F
3-7	0	∅	1	1	0
8-9	1	0	0	∅	0
14-15	1	1	1	∅	0

which allows us to write :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} A & \bar{A} & \bar{A} \\ \bar{C} & B & \bar{B} \\ \bar{D} & C & \bar{C} \end{array}\right|$$

But it is also possible to group the adjacent cases 0-1-4-5, 0-2-4-6, 4-5-12-13, 10-11 and one obtains the short truth table relative to the "1" of the binary function.

Gouped combinations

	A	B	C	D	F
0-1-4-5	0	∅	0	∅	1
0-2-4-6	0	∅	∅	0	1
4-5-12-13	∅	1	0	∅	1
10-11	1	0	1	∅	1

Which gives :

$$F = \left|\begin{array}{l} \bar{A} \cdot \bar{C} \\ \bar{A} \cdot \bar{D} \\ B \cdot \bar{C} \\ A \cdot \bar{B} \cdot C \end{array}\right|$$

Using the properties of squared biform functions one can write in succession :

$$\left|\begin{array}{l} \bar{A} \cdot \bar{C} \\ \bar{A} \cdot \bar{D} \\ \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \\ A \cdot B \cdot \bar{C} \\ A \cdot \bar{B} \cdot C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{A} & \begin{array}{c} \bar{C} \\ \bar{D} \\ B.\bar{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} B.\bar{C} \\ C.\bar{B} \end{array} & A \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \bar{A} & & A \\ B & \bar{C} & \bar{C} \\ C & \bar{B} & \bar{D} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \bar{A} & \bar{A} & A \\ B & \bar{B} & \bar{C} \\ C & \bar{C} & \bar{D} \end{array}\right|$$

The Karnaugh diagram proves really useful in the case where the binary functions are incompletely defined and present a certain number of combinations of available variables which are never realised and for which we can attribute to the function both the value "1" and the value "0" according to the possible simplifications.

Let us give for example a function of five variables x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 arranged in reverse order of indices to make the powers of "2" of the associated binary numbers correspond to them.

It is a question of writing the binary function "F" equal to unity for the combinations 1-3-7-8-10-12-17-20.

The available combinations are as follows :

0 - 5 - 6 - 9 - 11 - 14 - 16 - 18 - 21 - 22

The function is equal to zero for the combinations which have not been considered, i.e. :

2 - 4 - 13 - 15 - 19 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - 31

The data enable us to plot the following Karnaugh diagram :

$x_5 x_4$ \ $x_3 x_2 x_1$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	∅ 0	1 1	1 3	0 2	∅ 6	1 7	∅ 5	0 4
01	1 8	∅ 9	∅ 11	1 10	∅ 14	0 15	0 13	1 12
11	0 24	0 25	0 27	0 26	0 30	0 31	0 29	0 28
10	∅ 16	1 17	0 19	∅ 18	∅ 22	0 23	∅ 21	1 20

We can derive from the diagram the short truth table relative to the values "1" of the function "F" by making the best use of the available combinations marked by the symbol " Φ ".

Grouped combinations	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	F
1 - 3 - 5 - 7	0	0	∅	∅	1	1
8 - 10 - 12 - 14	0	1	∅	∅	0	1
16 - 17 - 20 - 21	1	0	∅	0	∅	1

d'où $$F = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_4 \cdot x_1 \\ \bar{x}_5 \cdot x_4 \cdot \bar{x}_1 \\ x_5 \cdot \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_5 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_4 \cdot x_1 \\ \bar{x}_1 \cdot x_4 \end{array} \right. \\ \bar{x}_4 . \bar{x}_2 \cdot x_5 \end{array}\right|$$

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_4 \\ x_4 & \bar{x}_4 & \bar{x}_5 & \bar{x}_5 \\ x_5 & x_5 & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \bar{x}_4 & \bar{x}_4 & \bar{x}_2 \\ x_4 & \bar{x}_1 & \bar{x}_5 & \bar{x}_5 \\ x_5 & & & \end{array}\right|$$

We can also draw up a short truth table relative to the zeros of the function "F" by using the available combinations.

Grouped combinations	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	F
0 - 2 - 4 - 6	0	0	∅	∅	0	0
9-11-13-15-25-27-29-31	∅	1	∅	∅	1	0
24-25-26-27-28-29-30-31	1	1	∅	∅	∅	0
18-19-22-23-26-27-30-31	1	∅	∅	1	∅	0

hence $$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_4 & \bar{x}_2 \\ x_4 & \bar{x}_4 & \bar{x}_5 & \bar{x}_5 \\ x_5 & & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x_1 & \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_5 \\ x_4 & \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \\ x_5 & \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_5 \end{array}\right|$$

We can also write " F " in the form :

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_1 \cdot x_4 \\ \bar{x}_5 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_4 \\ x_5 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \end{array}\right| = \left\{\begin{array}{c} \bar{x}_5 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot x_4 \\ x_1 \end{array}\right. \\ x_5 . \bar{x}_2 \end{array}\right| \bar{x}_4 \Bigg|$$

2.7 - Simplifications by transposition, factorisation and adjacence

We have confirmed above that the transposition, the factorisation and the adjacence methods are means which enable simplifications to be made on the binary functions.

The method which we propose combines these three means effectively and systematically. It makes it possible to simplify a binary function put in a canonical form with the greatest speed.

We know that a canonical form is generally a square biform function when one of the variables has been partially factorised.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left|\begin{array}{c} x_i \cdot G \\ H \cdot \bar{x}_i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x_i & G \\ H & \bar{x}_i \end{array}\right|$$

If "F" is a canonical form, "H" and "G" are also canonical forms which no longer contain the variable "x_i".

$$\left|\begin{array}{l} G = G(x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ H = H(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{array}\right.$$

They are also square biforms therefore and the residual diagonal functions are still canonical forms on which it is thus possible to make transpositions.

Let "p" be the number of elementary products or produals of a canonical function. The total number of letter variables which appear in the function is equal to "p.n" if "n" designates the number of independent variables.

The total number of letter variables which appear after the partial factorisation of the variable "x_i" is equal to :

p. (n-1) + 2, if "x_i" is a biform variable

and p. (n-1) + 1, if "x_i" is a monoform variable

A binary function can be simplified by carrying out in succession, partial factorisation, transposition and reduction by adjacence.

Let us suppose that the canonical function of "n" variables F $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ containing "p" terms such that $p = 2^{n-1} - m$ ("m" whole, positive, less than 2^{n-1}), is written in the form of a square biform function by partial factorisation of the variable "x_i" so that the two diagonal functions "H" and "G" contain p_o and p_1 terms respectively (products or produals).

We must have $p_o + p_1 = p = 2^{n-1} - m$. The "$p_o$" and "$p_1$" terms each contain the (n-1) variables $(x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

2.7.1 - <u>If $p_o < 2^{n-2}$ and $p_1 < 2^{n-2}$, no transposition can be envisaged</u>

If there exists a number "a" ($a < p_o$ and $a < p_1$) of adjacences relative to the variable "x_i", i.e. a number "a" of terms common to the functions "H" and "G", it is possible to carry out a simplification by adjacence, the total reduced number of letter variables being equal to :

$N_1 = (p-a).(n-1) + 2$ when p_o and p_1 are both different from zero.

and $N_1 = p.(n-1) + 1$, in the case where one of the values p_o or p_1 is zero as well as "a".

The simplification by adjacence, relative to the variable "x_i" after partial factorisation, therefore provides a reduction in the letter variables equal to :

$$\Delta N_1 = p.(n-1) + 2 - (p-a).(n-1) - 2$$

$$\boxed{\Delta N_1 = a.(n-1)}$$

2.7.2 - <u>Let us assume on the other hand $2^{n-2} < p_o$</u>

($p_o = 2^{n-2} + k$, k whole, positive and less than 2^{n-2}).

Under these conditions the diagonal function "H" which comprises $p_o = 2^{n-2} + k$ terms can be transposed and the number of terms after transposition is equal to

$$p_2 = 2^{n-1} - p_o = 2^{n-2} - k$$

The total number of letter variables which appear in the function "F" thus simplified, is then equal to :

$N_2 = (p_2 + p_1).(n-1) + 2$ when "x_i" is biform

$N_2 = p_2.(n-1) + 1$ when "x_i" is monoform.

The simplification by transposition after partial factorisation of the variable "x_i" thus provides a reduction in the letter variables equal to :

$$\begin{aligned}\Delta N_2 &= p.(n-1) + 2 - (p_2 + p_1).(n-1) - 2\\ &= (p - p_2 - p_1).(n-1) = (p_o - p_2).(n-1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta N_2 = 2k.(n-1)}$$

"ΔN_2" is a maximum when "k" is a maximum and we note that :

$$\begin{aligned}|p_o - p_1| &= |2p_o - (p_o + p_1)| = |2p_o - p|\\ &= |2.(2^{n-2} + k) - 2^{n-1} + m| = |2k + m|\end{aligned}$$

It is therefore only necessary, to obtain the optimum simplification by transposition, to carry out partial factorisation with respect to one of the variables or the variable for which the modulus of the difference $|p_o - p_1|$ is a maximum.

2.7.3 - <u>Theorem</u>

When a binary function put in canonical form is simplified by partial factorisation of a variable, followed by a reduction by transposition, the simplification is optimum when the partial factorisation has been carried out with respect to a variable for which the modulus of the difference $|p_o - p_1|$ is a maximum. In this formula "p_o" can represent the number of times that the variable is written in direct form, and "p_1" the number of times that it is written in complemented form in the function before factorisation.

2.7.4 - <u>Practical method</u>

To carry out a simplification by transposition, factorisation and adjacence in practice, the procedure is as follows :

The function is first written in canonical form if it was not so, and it is transposed to the case where the number of terms (elementary products or produals) is greater than "2^{n-1}" (n being the number of variables). Then one calculates for each variable the modulus $|p_o - p_1|$. The squared biform function is written relative to the variable, or to one of the variables "x_i" which corresponds to the maximum of the modulus $|p_o - p_1|$. "H" and "G" being the diagonal functions of the squared biform function obtained, one determines the number "a" of terms common to these diagonal functions.

If "H" and "G" cannot be reduced by transposition, one simplifies by adjacence by writing.

$$\left|\begin{array}{c} x_i \;.\; H_1 \\ G_1 \;.\; \overline{x}_i \\ J_1 \end{array}\right| \quad \text{or} \quad \left|\begin{array}{c|c} x_i & H_1 \\ G_1 & \overline{x}_i \end{array}\right| K_1$$

according to the circumstances.

"H_1" and "G_1" being obtained from the functions "H" and "G" by eliminating the commom terms in the latter. J_1 and K_1 thus represent respectively and according to the circumstances, the produal or the product of the terms common to "G" and "H". When one of the diagonal functions, "H" for example, can be reduced by transposition, i.e. the number of terms it comprises is equal to $2^{n-2} + k$, one calculates "k" which is compared to the number of adjacences "a".

If $2\ k \leq a$, one proceeds as previously.

If $a < 2\ k$ the function "H" is transposed but one writes "G_1" and "J_1" or "K_1" taking the adjacences into account.

By calling "H_t" the transposed function of "H" ($H_t = H$), one obtains :

$$\left|\begin{array}{c} x_i \cdot H_t \\ \\ G_1 \cdot \bar{x}_i \\ \\ J_1 \end{array}\right| \qquad \text{or} \qquad \left|\begin{array}{c|c} x_i & H_t \\ \\ G_1 & \bar{x}_i \end{array}\right| K_1$$

depending on the circumstances.

The simplification is continued by repeating the same operations for the canonical forms H_t, H_1, G_1, J_1 or K_1 until the number of variables is exhausted.

2.7.5 - Examples

Simplify the function F (a,b,c,d) equal to unity for the combinations of binary values which correspond to the numbers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13 of the four variables a, b, c, d arranged in alphabetical order.

The function, written in the first canonical form, would comprise ten products, whereas the total number of combinations of values of the four variables is equal to $2^4 = 16$.

We can therefore simplify by transposition by writing the function in the second canonical form which comprises the 16 - 10 = 6 complementary combinations 0, 1, 8, 11, 14 and 15.

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & \bar{a} & a & \bar{a} & a & \bar{a} \\ b & b & b & \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ c & c & c & c & \bar{c} & \bar{c} \\ d & d & \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} \\ \\ 0 & 1 & 8 & 11 & 14 & 15 \end{array}\right|$$

The calculation of the moduli $|p_o - p_1|$ gives :

- for "a" $|p_o - p_1| = 0$
- for "b" $|p_o - p_1| = 0$
- for "c" $|p_o - p_1| = 2$
- for "d" $|p_o - p_1| = 2$

We can therefore dual factorise "c" or "d". Let us establish the squared biform function relative to "d" for example.

$$F = \left|\begin{array}{cc|cccc} \multicolumn{2}{c|}{d} & \multicolumn{4}{c}{\bar{d}} \\ a & \bar{a} & a & \bar{a} & a & \bar{a} \\ b & b & b & \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ c & c & c & c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right|$$

We find that there is an adjacence, indicated by the arrows, but that the diagonal functions are not open to simplification by transposition.

We therefore write :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} & d & \left|\begin{array}{c|c|c} \bar{a} & a & \bar{a} \\ \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right. \\ a & \bar{a} & \\ b & b & \\ c & c & \bar{d} \end{array}\right|$$

Without there being any need to calculate the values of the moduli $|p_o - p_1|$, we see that $\bar{b}$ can be dual factorised in the diagonal function :

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar{a} & a & \bar{a} \\ \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} & \bar{b} & \\ a & a & \bar{a} \\ c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right|$$

$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar{a} & a & \bar{a} \\ c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right|$ can be simplified by transposition.

This function is equal to the complement of the produal $\left|\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\right|$ which does not appear in it and which corresponds to the fourth possible combination of the two variables "a" and "c".

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar{a} & a & \bar{a} \\ c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right| = \overline{\left|\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\right|} = \bar{a} \cdot \bar{c}$$

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} a & d & \bar{b} \\ b & \bar{a} & \bar{a}.\bar{c} \\ c & b & \bar{d} \\ & c & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} c & \bar{b} \\ a.d & \bar{a}.\bar{c} \\ b & \bar{d} \end{array}\right|$$

2.8 - Square functions

The property of square biform functions which makes it possible to pass very simply from a product to a produal or vice-versa, can be extended to a square function under certain conditions.

We shall look for the general conditions which the terms f_1, f_2, f_3 and f_4 of a square function must satisfy so that the identity :

$$\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_2 \\ f_4 \cdot f_3 \end{array}\right|$$

is verified.

This identity put in algebraic form is written :

$$\left[\,1-(1-f_1)\,.\,(1-f_4)\,\right]\,.\,\left[\,1-(1-f_2)\,.\,(1-f_3)\,\right] = 1-(1-f_1 f_2)\,.\,(1-f_4 f_3)$$

Which gives after simplification :

$$f_1.f_3.\,(1-f_2)\,.\,(1-f_4) + f_2.f_4.\,(1-f_1)\,.\,(1-f_3) = 0$$

. Theorem

The necessary and sufficient condition for the identity $\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_2 \\ f_4 \cdot f_3 \end{array}\right|$ to be confirmed, is that the terms f_1, f_2, f_3 and f_4 which appear in the square functions, simultaneously confirm the two identities :

$$f_1.f_3.\overline{f_2}.\overline{f_4} = 0 \quad \text{and} \quad f_2.f_4.\overline{f_1}.\overline{f_3} = 0$$

Note that the "biform" square functions correspond to the two particular cases where :

$$(f_1 \cdot f_3 = 0\ ,\quad \overline{f_1} \cdot \overline{f_3} = 0) \quad \text{or} \quad (f_1 = \overline{f_3})$$

$$\text{and} \quad (f_2 \cdot f_4 = 0\ ,\quad \overline{f_2} \cdot \overline{f_4} = 0) \quad \text{or} \quad (f_2 = \overline{f_4})$$

Amongst the numerous possible solutions, it is useful to keep those which correspond respectively to the relations :

$$f_1 \cdot f_3 = f_2 \cdot f_4 = 0$$

$$\text{and} \quad \overline{f_1} \cdot \overline{f_3} = \overline{f_2} \cdot \overline{f_4} = 0 \qquad \text{or} \qquad \left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_2 \\ f_4 \end{array}\right| = 1$$

If, in a binary function put into "squared" form, the products of the diagonal terms are respectively zero or their produals respectively equal to unity, we can write :

$$\boxed{\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_2 \\ f_4 \cdot f_3 \end{array}\right|}$$

The above conditions are confirmed in particular when :

$$f_1 = A_o.\,\Phi_o,\ f_2 = A_1.\,\Phi_1,\ f_3 = B_o.\overline{\Phi}_o \ \text{et}\ f_4 = B_1.\,\overline{\Phi}_1$$

or when : $\quad f_1 = \left|\begin{array}{c} A_o \\ \Phi_o \end{array}\right|,\quad f_2 = \left|\begin{array}{c} A_1 \\ \Phi_1 \end{array}\right|,\quad f_3 = \left|\begin{array}{c} B_o \\ \overline{\Phi}_o \end{array}\right| \ \text{et}\ f_4 = \left|\begin{array}{c} B_1 \\ \overline{\Phi}_1 \end{array}\right|$

This involves different equalities which it is interesting to use during simplifications ; such as the following equalities :

$$\left|\begin{array}{c} \Phi_o \,.\, a_1 \,.\, a_2 \cdots a_p \,.\, \overline{\Phi}_1 \\ \Phi_1 \,.\, b_1 \,.\, b_2 \cdots b_q \,.\, \overline{\Phi}_o \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Phi_o \,.\, a_1 \,.\, a_2 \cdots a_i & a_{i+1} \cdots a_p \,.\, \overline{\Phi}_1 \\ \Phi_1 \,.\, b_1 \,.\, b_2 \cdots b_j & b_{j+1} \cdots b_q \,.\, \overline{\Phi}_o \end{array}\right|$$

$$\forall \ (i,\ j)$$

$$\text{or} \quad \left|\begin{array}{c|c} \Phi_o & \Phi_1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_p & b_q \\ \overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_o \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Phi_o & \Phi_1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_{j+1} \\ a_{i+1} & b_{j+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_p & b_q \\ \overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_o \end{array}\right| \qquad \forall \ (i\ ,\ j)$$

The products and the produals being permutative, the respective permutations of the factors or dual factors make it possible to obtain other equalities of the same form, provided complementary terms are always written at the ends of the diagonals of the square functions.

EXERCISES IN APPLICATION RELATIVE TO CHAPTER 2

1 - The following half truth table is given :

	A	B	C	D	F
3	0	0	1	1	
9	1	0	0	1	
11	1	0	1	1	1
13	1	1	0	1	
15	1	1	1	1	

Write the function "F" in canonical form and then simplify it by using the Karnaugh diagram.

Check the simplification by the method of transposition, factorisation and adjacence.

Answer : $F = D \cdot \begin{vmatrix} A \\ \bar{B}.C \end{vmatrix}$

2 - Consider the produal of the products of four variables A, B, C, D (first canonical form) which correspond to the combinations (4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15).

Transpose the function (second canonical form).

Simplify it using the method of transposition, factorisation and adjacence.

Check the simplification by the Karnaugh method.

Answers : $\pi = \begin{vmatrix} A & A & A & \bar{A} & A \\ B & B & B & B & B \\ C & C & \bar{C} & \bar{C} & \bar{C} \\ D & \bar{D} & D & \bar{D} & \bar{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & B \\ A. & \begin{vmatrix} \bar{C} \\ \bar{D} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

3 - Simplify the following function by the "consensus" method :

$$F = \left| \begin{array}{c|c} A & A \,.\, B \\ \bar{C} & A \,.\, C \,.\, D \\ D & B \,.\, \bar{C} \,.\, D \\ & \bar{B} \,.\, C \,.\, D \end{array} \right|$$

Answers :

$$F = \left| \begin{array}{c} A \,.\, B \\ B \,.\, \bar{C} \,.\, D \\ \bar{B} \,.\, C \,.\, D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} B \,.\, \left| \begin{array}{c} A \\ \bar{C} \,.\, D \end{array} \right. \\ C.D \,.\, \bar{B} \end{array} \right|$$

$$F = \left| \begin{array}{c|c|c|c} A & A & B & B \\ \bar{B} & D & C & D \\ \bar{C} & & & \end{array} \right|$$

4 - The following short truth table is given :

x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	∅	1	0	
0	1	1	∅	∅	
1	0	1	∅	∅	
∅	0	0	1	∅	1
∅	∅	0	1	1	
1	1	∅	1	1	
1	1	1	∅	∅	

- write the function "f" which corresponds to this truth table.
- calculate the "consensus" relative to each squared biform function of each of the variables.
- simplify the function by using the consensus calculated and write it successively in the form of product of produals and in the form of produal of products, confirming that it is square biform in "x_2".

Answers :

- consensus relative to "x_o" - $x_1 . x_2$
- consensus relative to "x_1" - $\left| \begin{array}{c} x_o . x_2 \\ x_o . x_3 . x_4 \end{array} \right|$
- consensus relative to "x_2" - $\left| \begin{array}{c} x_o . \bar{x}_1 . x_3 \\ x_1 . x_3 . x_4 \end{array} \right|$

there is no consensus relative to "x_3" which is monoform.

- consensus relative to "x_4" - $x_o . \bar{x}_1 . \bar{x}_2 . x_3$

simplified function : $f = \left| \begin{array}{c|c} x_o & x_2 \\ x_1 & x_3 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_4 \end{array} \right. \\ \bar{x}_2 & \end{array} \right|$

$$f = \left| \begin{array}{c|c|c} x_o & \bar{x}_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \bar{x}_2 & x_4 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_o \,.\, x_2 \\ x_1 \,.\, x_2 \\ \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_2 \,.\, x_3 \\ \bar{x}_2 \,.\, x_3 \,.\, x_4 \end{array} \right|$$

5 - Simplify the functions :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} A \,.\, B \\ \bar{B} \,.\, \bar{C} \\ C \,.\, A \end{array} \right| , \quad f_2 = \left| \begin{array}{c} A \,.\, B \\ C \,.\, \bar{A} \\ A \,.\, \bar{D} \\ D \,.\, \bar{C} \\ C \,.\, A \end{array} \right|$$

$$f_3 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_2 \\ x_1 \,.\, x_3 \\ x_o \,.\, \bar{x}_1 \,.\, x_2 \\ \bar{x}_o \,.\, \bar{x}_1 \,.\, x_2 \\ x_o \,.\, x_1 \,.\, x_3 \end{array} \right| , \quad f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o \\ \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ x_2 & \bar{x}_1 \end{array} \end{array} \right| \begin{array}{c|c} x_1 & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{array} \Bigg| , \quad f_5 = \left| \begin{array}{c} A \left| \begin{array}{c} \bar{B} \\ C \end{array} \right| \begin{array}{c} B \\ \bar{C} \end{array} \\ A . \bar{B} . C \end{array} \right|$$

Answers :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} A \\ \bar{B} \,.\, \bar{C} \end{array} \right| , \quad f_2 = \left| \begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array} \right| , \quad f_3 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_3 \end{array} \right|$$

$$f_4 = x_o . \left| \begin{array}{c|c} x_1 & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_o \,.\, \bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_2 \\ x_o \,.\, x_1 \,.\, \bar{x}_3 \end{array} \right| , \quad f_5 = A \left| \begin{array}{c} \bar{B} \\ C \end{array} \right|$$

6 - Show that, if a canonical function put in the form of a squared biform function contains no adjacence relative to the partially factorised variable, its consensus is identically zero in the case of the first canonical form (produal of products) and its dual consensus is identically equal to unity in the case of the second canonical form (product of produals).

7 - The six variables (A, B, C, D, E, F) are given in alphabetical order and the product of the produals corresponding to the following combinations :

I (4, 5, 7, 12, 13, 15, 20, 21, 23, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63).

In the binary equivalence of the numbers indicated, the variable "A" is given the weighting "32" and the weightings 16, 8, 4, 2 and 1 are given in succession to the variables B, C, D, E, F.

Simplify the function "I" by factorisation, transposition and adjacence in succession and check the result by the Karnaugh method.

Answer :

$$I = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{D} \\ B.\bar{C} & E.\bar{F} \end{array} \right|$$

8 - Establish the short truth tables relative to the values "0" then to the values "1" of the function $f_1 = \left| \begin{array}{c} A \\ \bar{B}\,.\,\bar{C} \end{array} \right|$

Then establish the full truth table of "f_1" and the two corresponding canonical forms.

Answers :

Short truth tables

A	B	C	f_1
1	∅	∅	1
∅	0	0	1.

A	B	C	f_1
0	1	∅	0
0	∅	1	0

Full truth table

	A	B	C	f_1
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

First canonical form

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} \bar{A}\,.\,\bar{B}\,.\,\bar{C} \\ A\,.\,\bar{B}\,.\,\bar{C} \\ A\,.\,\bar{B}\,.\,C \\ A\,.\,B\,.\,\bar{C} \\ A\,.\,B\,.\,C \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$

Second canonical form

$$f_1 = \left| \begin{array}{c|c|c} A & A & A \\ B & \bar{B} & \bar{B} \\ \bar{C} & C & \bar{C} \end{array} \right|$$

9 - Establish the short truth tables relative to the simplified function $f_4 = x_o . \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 . \bar{x}_2 \\ x_1 . \bar{x}_3 \end{array} \right|$

Deduce from it the first canonical form (produal of products) starting directly from the given form of "f_4".

Answers :

One can write :

$$f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o\,.\,\bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2 \\ x_o\,.\,x_1\,.\,\bar{x}_3 \end{array} \right| = x_o\,.\left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & x_1 \end{array} \right|$$

Which makes it possible to establish the two short truth tables :

x_o	x_1	x_2	x_3	f_4
1	0	0	∅	1
1	1	∅	0	1

x_o	x_1	x_2	x_3	f_4
0	∅	∅	∅	0
∅	1	∅	1	0
∅	0	1	∅	0

To obtain the first canonical form, it is only necessary to multiply the first product of "f_4" by $\left| \begin{array}{c} x_3 \\ \bar{x}_3 \end{array} \right|$ and the second product by $\left| \begin{array}{c} x_2 \\ \bar{x}_2 \end{array} \right|$.

$$f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o\,.\,\bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2\,.\,x_3 \\ x_o\,.\,\bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2\,.\,\bar{x}_3 \\ x_o\,.\,x_1\,.\,x_2\,.\,\bar{x}_3 \\ x_o\,.\,x_1\,.\,\bar{x}_2\,.\,\bar{x}_3 \end{array} \right|$$

10 - Write the function "F" which corresponds to the following short truth table :

A	B	C	D	F
0	∅	∅	0	0
0	1	∅	∅	0
1	∅	1	∅	0
∅	1	1	0	0

Then, simplify it by the consensus method.

Answer :

$$F = \left| \begin{array}{c|c|c|c} A & A & \bar{A} & \bar{B} \\ D & \bar{B} & \bar{C} & \bar{C} \\ & & & D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A & \bar{C} \\ D\,.\,\bar{B} & \bar{A} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A\,.\,\bar{C} \\ \bar{A}\,.\,\bar{B}\,.\,D \end{array} \right|$$

11 - Simplify the following functions :

$$A = \left| \begin{array}{c} x_o\,.\,x_1 \\ x_o\,.\,x_2 \\ x_o\,.\,x_3 \\ \bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2 \end{array} \right| , \quad B = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_o\,.\,x_2\,.\,\bar{x}_3 \\ \bar{x}_o\,.\,x_2\,.\,x_3 \\ x_o\,.\,\bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2 \\ x_o\,.\,x_2\,.\,\bar{x}_3 \\ x_o\,.\,x_2\,.\,x_3 \end{array} \right| , \quad C = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} x_o & x_1 & x_o & \bar{x}_o & \bar{x}_o \\ x_1 & x_2 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_3 & \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 \end{array} \right|$$

Answer :

$$A = \left| \begin{matrix} x_o \\ \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \end{matrix} \right| , \quad B = \left| \begin{matrix} x_2 \\ x_o \cdot \overline{x_1} \end{matrix} \right| , \quad C = x_1$$

Manuscrit reçu le 2 septembre 1968

FIN