PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

ANALYSES ANGULAIRES
EN MECANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE

par

Pierre MOUSSA

DIRECTION DE LA PHYSIQUE

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA - R - 3608

1968

Ma*

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N. - SACLAY B.P. n°2, 91 - GIF-sur-YVETTE - France

CEA-R-3608 - MOUSSA Pierre

ANALYSES ANGULAIRES EN MECANIQUE QUANTIQUE
RELATIVISTE

Sommaire. - On décrit un formalisme permettant de tenir compte de l'invariance relativiste, dans l'analyse angulaire des amplitudes de réaction entre particules de spin quelconque. Suivant Wigner, les états à une particule sont introduits à l'aide des représentations du groupe de Lorentz inhomogène. Pour effectuer les analyses angulaires, on étudie la réduction du produit de deux représentations du groupe de Lorentz inhomogène. Les coefficients de Clebsch-Gordan correspondants sont calculés dans les couplages suivants : couplage l-s, couplage d'hélicité, couplage multipolaire, couplage symétrique pour plus de deux particules. Les particules de masse nulle et de masse non nulle sont traitées simultanément.

./.

CEA-R-3608 - MOUSSA Pierre

ANGULAR ANALYSES IN RELATIVISTIC QUANTUM
MECHANICS

Summary. - This work describes the angular analysis of reactions between particles with spin in a fully relativistic fashion. One particle states are introduced, following Wigner's method, as representations of the inhomogeneous Lorentz group. In order to perform the angular analyses, the reduction of the product of two representations of the inhomogeneous Lorentz group is studied. Clebsch-Gordan coefficients are computed for the following couplings : l-s coupling, helicity coupling, multipolar coupling, and symmetric coupling for more than two particles. Massless and massive particles are handled simultaneously. On the way

./.

au passage, on introduit les amplitudes spinorielles et on construit les champs libres, on rappelle comment des hypothèses d'analyticité permettent d'établir des théorèmes de convergence pour les développements angulaires. Enfin on fournit un substitut à la notion de "portée du potentiel", d'où résulte la présence à basse énergie des facteurs dits "de barrière centrifuge". La présence de ces facteurs n'avait jamais été déduite d'hypothèses compatibles avec l'invariance relativiste.

968

182 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

we construct spinorial amplitudes and free fields ; we recall how to establish convergence theorems for angular expansions from analyticity hypothesis. Finally we substitute these hypothesis to the idea of "potential radius", which gives at low energy the usual "centrifugal barrier" factors. The presence of such factors had never been deduced from hypothesis compatible with relativistic invariance.

968

182 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7^e.

PLAN DE CLASSIFICATION

1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS	8. PHYSIQUE
2. BIOLOGIE ET MEDECINE	9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES
3. CHIMIE	10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS
4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE	11. SEPARATION DES ISOTOPES
5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE	12. TECHNIQUES
6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX	13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE
-
2. 1 Biologie générale	8. 1 Accélérateurs
2. 2 Indicateurs nucléaires en biologie	8. 2 Electricité, électronique, détection des rayonnements
2. 3 Médecine du travail	8. 3 Physique des plasmas
2. 4 Radiobiologie et Radioagronomie	8. 4 Physique des états condensés de la matière
2. 5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine	8. 5 Physique corpusculaire à haute énergie
	8. 6 Physique nucléaire
	8. 7 Electronique quantique, lasers
3. 1 Chimie générale	10. 1 Protection sanitaire
3. 2 Chimie analytique	10. 2 Contrôle des rayonnements
3. 3 Procédés de séparation	10. 3 Traitement des effluents
3. 4 Radiochimie	
6. 1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux	12. 1 Mécanique des fluides - Techniques du vide
6. 2 Effets des rayonnements sur les matériaux	12. 2 Techniques des températures extrêmes
6. 3 Corrosion	12. 3 Mécanique et outillage
7. 1 Neutronique et physique des réacteurs	13. 1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines
7. 2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité	13. 2 Etudes économiques, programmes
7. 3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs	13. 3 Divers (documentation, administration, législation, etc...)

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2 200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VII^e.

The C.E.A. reports starting with n° 2 200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VII^e.

ORSAY

Série A

N° d'ordre : 390

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

PAR

Pierre MOUSSA

PREMIÈRE THÈSE

Analyses angulaires en mécanique quantique relativiste

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 27 juin 1968 devant la Commission d'examen

M. MEYER Président

MM. LURÇAT
STORA Examineurs

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Direction de la Physique
Département de Physique Nucléaire
Service de Physique Théorique

ANALYSES ANGULAIRES EN MECANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE

par

Pierre MOUSSA

Thèse pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

- Octobre 1968 -

RESUME

On décrit un formalisme permettant de tenir compte de l'invariance relativiste, dans l'analyse angulaire des amplitudes de réaction entre particules de spin quelconque. Suivant Wigner, les états à une particule sont introduits à l'aide des représentations du groupe de Lorentz inhomogène. Pour effectuer les analyses angulaires, on étudie la réduction du produit de deux représentations du groupe de Lorentz inhomogène. Les coefficients de Clebsch-Gordan correspondants sont calculés dans les couplages suivants : couplage $\ell-s$, couplage d'hélicité, couplage multipolaire, couplage symétrique pour plus de deux particules. Les particules de masse nulle et de masse non nulle sont traitées simultanément. Au passage, on introduit les amplitudes spinorielles et on construit les champs libres, on rappelle comment des hypothèses d'analyticité permettent d'établir des théorèmes de convergence pour les développements angulaires. Enfin on fournit un substitut à la notion de "portée du potentiel", d'où résulte la présence à basse énergie des facteurs dits "de barrière centrifuge". La présence de ces facteurs n'avait jamais été déduite d'hypothèses compatibles avec l'invariance relativiste.

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur MEYER a accepté de patronner cette thèse, et je lui exprime ma profonde gratitude.

Je remercie très vivement les Professeurs GOURDIN et LURÇAT d'avoir bien voulu s'intéresser à ce travail.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur le Professeur C. BLOCH de m'avoir accueilli dans le Service de Physique Théorique du C.E.N. Saclay. Je tiens à remercier Monsieur le Professeur A. MESSIAH pour les nombreux conseils qu'il m'a prodigués et en particulier pour l'aide qu'il m'a apportée dans la préparation de la deuxième thèse. J'exprime également toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Louis MICHEL avec qui j'ai pu avoir de fructueuses discussions.

Parmi les membres du Service de Physique Théorique je désire remercier particulièrement E. BREZIN, G. COHEN-TANNOUJJI, C. ITZYKSON, M. JACOB, G. MAHOUX, A. MOREL, H. NAVELET, F. PHAM, J. RAYNAL et H. STERN, ainsi que D.N. WILLIAMS et D. ZWANZIGER.

Je tiens à exprimer tout ma reconnaissance envers M. FROISSART qui m'a toujours efficacement aidé.

Enfin mes remerciements ne pourront jamais être à la hauteur de la contribution de R. STORA, qui a bien voulu me guider tout au long de ce travail.

Enfin je remercie Madame F. LEFEVRE et Madame E. COTTEVERTE qui ont assuré la présentation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

RESUME	I
REMERCIEMENTS	II
TABLE DES MATIERES	III
INTRODUCTION	V
CHAPITRE I - INVARIANCE RELATIVISTE ET REPRESENTATIONS DU GROUPE DE POINCARÉ	1
1) - L'invariance en mécanique quantique	1
2) - Groupe de symétrie ; représentations à une phase près	3
3) - Invariance relativiste et groupe de Poincaré	5
4) - Représentations unitaires du groupe de Poincaré	7
5) - Classification des représentations en fonction de la masse et du spin	11
6) - Opérations discrètes : parité, renversement du sens du temps	22
CHAPITRE II - LES ETATS A UNE PARTICULE : BASES SPINORIELLES, CHAMPS	36
1) - Etats à une particule : vecteurs impropres	36
2) - Amplitudes spinorielles : cas de la masse non nulle	40
3) - Amplitudes spinorielles : cas de la masse nulle	47
4) - Champs libres	58
CHAPITRE III - ETATS A DEUX PARTICULES DE MASSES REELLES NON NULLES, SANS INTERACTION	71
A) - Généralités	71
B) - Couplage ℓ -s	81

C) - Couplage d'hélicité	90
D) - Couplage mixte	99
E) - Changement de couplage	103
F) - Expression des couplages dans les bases spinorielles, action des opérations discrètes	109
G) - Cas de la masse nulle	116
CHAPITRE IV - ETATS A PLUS DE DEUX PARTICULES	122
A) - Couplages classiques pour les systèmes de trois particules	122
B) - Cas général : système à n particules	126
1) - Modèle de la toupie sphérique	126
2) - Passage du modèle de la toupie sphérique aux couplages classiques (Application au calcul des coefficients de recouplage)	132
CHAPITRE V - ANALYSE ANGULAIRE DES REACTIONS ENTRE PARTICULES ELEMENTAIRES	147
1) - Théorie des collisions : la matrice S	147
2) - Invariance relativiste de la matrice S , définition des éléments de matrice réduits	151
3) - Convergence des développements angulaires des réactions à deux corps	156
4) - Décomposition en amplitudes invariantes sans singularités cinématiques	158
5) - Une application : le comportement au seuil des ondes partielles	159
APPENDICE - LES REPRESENTATIONS FINIES DU GROUPE DE LORENTZ	163
REFERENCES	169

INTRODUCTION

La nécessité de tenir compte de l'invariance relativiste des phénomènes physiques est apparue dès les débuts de la mécanique quantique, et a soulevé un certain nombre de difficultés d'interprétation bien connues, à propos notamment de l'équation de Klein-Gordon. Il semble que le problème de l'invariance relativiste en mécanique quantique ait été clairement posé pour la première fois par Dirac, et résolu par Wigner^[1], qui fut le premier à reconnaître que toute mécanique quantique relativiste doit être formulée dans un espace de Hilbert, de représentation unitaire à une phase près du groupe de Lorentz inhomogène. Du point de vue pratique, le résultat essentiel de cette étude est la classification des systèmes physiques suivant leur masse et leur spin. Ce travail fondamental n'épuisait pas le sujet mais ne fut à l'époque que très partiellement complété^[2,3]. Il resta même pratiquement inconnu des physiciens pour diverses raisons, parmi lesquelles on peut voir son caractère mathématique, les circonstances historiques (1939), et surtout le fait que l'effort de la majorité des physiciens portait sur l'extraction de résultats numériques de théories notoirement douées de l'invariance relativiste (par exemple l'électrodynamique quantique). La situation s'est modifiée au moment où les difficultés de l'application de la théorie quantique des champs à l'étude des interactions fortes se sont avérées insurmontables. Il était alors devenu nécessaire de tirer indépendamment de tout modèle dynamique toutes les conséquences de principes généraux^[4], tels que : lois de symétrie (et en particulier celle associée à l'invariance relativiste) unitarité de la matrice S , micro-causalité (en théorie quantique des champs), ou postulats d'analyticité (en théorie de matrice S). Par ailleurs la découverte de la non conservation de la parité dans les interactions faibles a posé à nouveau le problème des symétries dans le domaine des particules élémentaires. La question de l'invariance relativiste fut ainsi à nouveau posée à la lumière de la théorie des groupes. Les premiers à traiter ces problèmes furent des physiciens ayant travaillé en contact avec Wigner, tels Bargmann, Michel, et Wightman^{[5],[6]}.

Le problème des analyses angulaires des réactions à deux particules, posé et résolu depuis longtemps dans le cadre de l'invariance par rotation, reçoit une nouvelle solution invariante relativiste dans la définition des amplitudes d'hélicité par Jacob et Wick^[7].

A la même époque, ce problème est abordé par l'étude de la réduction du produit de représentations du groupe de Lorentz inhomogène (Epstein, Luzzato et Wightman^[8]). Des formules explicites sont données simultanément par Joos^[9], dans le cas du couplage ℓ -s. Leur généralisation au cas de plusieurs représentations est donnée par Mac Farlane et Wick^[10]. L'ensemble de ces résultats était déjà connu de Chou-Kuang-Chao et Shirokov^[11], qui les obtenaient en exprimant les opérateurs moments angulaires au moyen de l'opérateur de position de Newton-Wigner^[12].

Le travail de Wigner ayant d'autre part été généralisé par Mackey^[13] qui fournit entre autres une première étape dans la réduction du produit de deux représentations du groupe de Lorentz inhomogène, Moussa et Stora^[14] établissent tous les résultats précédents, par la méthode des représentations induites^[13], qui est à la base de l'article original de Wigner^[1]. Néanmoins l'application de la méthode des représentations induites développée dans [13] n'a pu être menée à bien par les auteurs qu'après qu'ils eussent traité ce problème par la méthode dite du projecteur de Wigner^[15]. C'est cette dernière méthode (déjà utilisée dans [19]) qui est développée ici en détail. Néanmoins la connaissance de la méthode des représentations induites montre la nécessité d'utiliser un formalisme où l'on peut choisir arbitrairement, pour chacune des particules, les axes de quantification du spin. L'absence d'un tel formalisme "covariant" rendrait les calculs explicites bien plus difficiles. Une version à caractère pédagogique peut se trouver dans [20].

Il est bien clair que ces considérations sont de nature purement cinématique, et qu'elles doivent être complétées par des hypothèses dynamiques, dont

nous avons mentionné les plus simples: micro-causalité en théorie quantique des champs, postulat d'analyticité en théorie de la matrice S analytique. Des hypothèses de ce type assurent en particulier une bonne convergence pour les développements angulaires.

Ces hypothèses dynamiques ne peuvent être raisonnablement formulées que sur des amplitudes dites spinorielles, qui pour avoir été utilisées depuis Dirac, n'ont en fait été définies avec précision qu'assez récemment^[16].

Le problème de la compatibilité de propriétés d'analyticité et de l'invariance relativiste se trouve alors posé, et n'a trouvé jusqu'à présent que des solutions partielles^[17]. La nécessité de résoudre ce problème s'est fait en particulier sentir dans les tentatives d'analyses phénoménologiques des interactions fortes à haute énergie, domaine où les méthodes de théorie des groupes sont utilisées depuis quelques années^[18].

Ces questions qui ne sont pas abordées dans le présent ouvrage, montrent cependant l'importance des méthodes utilisées ici, et que nous n'avons appliquées qu'à une étude exhaustive des problèmes cinématiques.

Dans le chapitre I on discute la forme des représentations unitaires irréductibles à une phase près du groupe de Lorentz inhomogène telles qu'elles ont été construites par Wigner.

Le chapitre II est consacré à la construction des champs libres, opérant dans les espaces de Fock construits à partir des représentations décrites dans le chapitre I, cette construction est fondée sur l'existence des amplitudes spinorielles.

Dans le chapitre III on applique la méthode du projecteur de Wigner à la réduction du produit de deux représentations de masse positive ou nulle

et de spin fini. On calcule les coefficients de Clebsch-Gordan correspondant aux divers modes de couplages (ℓ -s, mixte ou mutipolaire, hélicité), qui sont les éléments fondamentaux des développements angulaires.

Dans le chapitre IV, on étudie diverses réductions possibles du produit de plus de deux représentations et on calcule les coefficients de Clebsch-Gordan correspondants.

Dans le chapitre V, on montre comment s'effectuent les développements angulaires, et on étudie en particulier (moyennant des hypothèses d'analyticité adéquates) la convergence de ces développements ainsi que les "comportements aux seuils" des éléments de matrice réduits de l'opérateur de transition.

Divers détails techniques sont réunis en appendice.

ANALYSES ANGULAIRES EN MECANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE

CHAPITRE I

INVARIANCE RELATIVISTE ET REPRESENTATIONS DU GROUPE DE POINCARÉ

1) - L'invariance en mécanique quantique

Avant d'introduire la notion d'invariance, nous devons rappeler brièvement dans quel cadre nous formulons la mécanique quantique : les observables sont des opérateurs hermitiques bornés d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les états sont représentés par des matrices densité ρ , c'est-à-dire par des opérateurs hermitiques semi-définis positifs, normalisés par la condition $\text{Tr } \rho = 1$. Le nombre $\text{Tr } A\rho$ est alors la valeur moyenne de l'observable A dans l'état ρ . Enfin la valeur moyenne $\text{Tr } \rho\rho'$, de l'opérateur ρ considéré comme observable, dans l'état ρ' , est égale à la probabilité de transition de l'état dont ρ est la matrice densité à l'état dont ρ' est la matrice densité. On appelle état pur, un état dont la matrice densité est de la forme $|\Phi\rangle\langle\Phi|$, où $|\Phi\rangle$ est un vecteur de $\mathcal{H}$. La probabilité de transition de l'état pur représenté par $|\Phi\rangle\langle\Phi|$ à l'état pur représenté par $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ est $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$. Dans cette description, un état pur peut donc soit être représenté par une matrice densité, soit par un ensemble de vecteurs de la forme $\omega|\Phi\rangle$, où ω est un nombre complexe de module 1, mais dont la phase est arbitraire. Un tel ensemble de vecteurs est appelé un rayon (noté $|\underline{\Phi}\rangle$) de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. $|\Phi\rangle$ est alors un représentant du rayon $|\underline{\Phi}\rangle$.

Ou bien l'ensemble des observables est irréductible (seul l'opérateur identité commute avec toutes les observables), ou bien l'espace $\mathcal{H}$ s'écrit comme une somme (ou une intégrale) directe : $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_i$, les observables étant toutes de la forme $O = \sum_i E_i O_i E_i$, où E_i est le projecteur dans $\mathcal{H}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}_i$. Un état pur a une matrice densité de la forme $E_i |\Phi\rangle\langle\Phi| E_i$, et est donc représenté par un vecteur $|\Phi_i\rangle$, qui n'a de composantes non nulles que dans un seul des espaces $\mathcal{H}_i$. Les opérateurs E_i commutent avec toutes les observables O ,

et l'algèbre qu'ils forment est appelée algèbre de supersélection ; les espaces $\mathcal{H}_1$ sont les secteurs de supersélection. Une formulation de ce type est adaptée au cas où certaines observables, (commutant entre elles) commutent avec toutes les autres. Les charges électriques, baryoniques, leptoniques ..., en sont des exemples. Notons qu'on peut formuler la mécanique quantique dans un cadre plus général, où il est possible d'introduire des règles de supersélection non commutatives. Nous ne considérerons pas ce cas dans la suite.

On appelle loi de symétrie $\mathcal{J}$, toute correspondance $A \rightarrow \mathcal{J}A$ entre observables (en particulier entre matrices densité $\rho \rightarrow \mathcal{J}\rho$) conservant la valeur moyenne $\text{Tr}(A\rho) = \text{Tr}(\mathcal{J}A\mathcal{J}\rho)$. Une telle correspondance associe un état pur à un état pur (en effet la matrice densité ρ d'un état pur est caractérisée par la condition $\text{Tr}(\rho^2) = 1$, on a alors $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\mathcal{J}\rho^2) = 1$, $\mathcal{J}\rho$ représente donc bien un état pur). Une loi de symétrie peut donc être représentée dans chaque secteur de supersélection $\mathcal{H}_1$, par une correspondance entre rayons $|\underline{\Phi}_1\rangle \rightarrow |\underline{\mathcal{J}\Phi}_1\rangle$, qui conserve la valeur des probabilités de transition :

$$|\langle \underline{\psi}_1 | \underline{\Phi}_1 \rangle|^2 = |\langle \underline{\mathcal{J}\psi}_1 | \underline{\mathcal{J}\Phi}_1 \rangle|^2 \quad (I.1)$$

Dans la suite, nous nous placerons dans un secteur de supersélection bien déterminé, pour utiliser le théorème suivant, dû à Wigner^[21] :

A toute loi de symétrie $\mathcal{J} : |\underline{\Phi}\rangle \rightarrow |\underline{\mathcal{J}\Phi}\rangle$, vérifiant $|\langle \underline{\Phi} | \underline{\Psi} \rangle|^2 = |\langle \underline{\mathcal{J}\Phi} | \underline{\mathcal{J}\Psi} \rangle|^2$ correspond un opérateur additif $U(\mathcal{J})$ (c'est-à-dire tel que $U(\mathcal{J})(|\underline{\Phi}\rangle + |\underline{\Psi}\rangle) = U(\mathcal{J})|\underline{\Phi}\rangle + U(\mathcal{J})|\underline{\Psi}\rangle$, pour tout $|\underline{\Psi}\rangle$ et $|\underline{\Phi}\rangle$ appartenant à $\mathcal{H}$, tel que $U(\mathcal{J})|\underline{\Phi}\rangle$ est un représentant du rayon $|\underline{\mathcal{J}\Phi}\rangle$, lorsque $|\underline{\Phi}\rangle$ est un représentant arbitraire du rayon $|\underline{\Phi}\rangle$. $U(\mathcal{J})$ est un opérateur unitaire soit linéaire, soit antilinéaire. Enfin $U(\mathcal{J})$ est défini à un facteur multiplicatif de phase près.

2) - Groupe de symétrie ; représentations à une phase près

On a un groupe de symétrie G s'il existe un groupe de lois de symétrie $\mathcal{J}(g)$, paramétré par l'élément g , où g décrit le groupe G . On a donc, en appliquant le théorème de Wigner, une famille d'opérateurs $U(g)$. Les opérateurs $U(g_1 g_2)$ et $U(g_1) U(g_2)$ sont associés à la même loi de symétrie $\mathcal{J}(g_1 g_2)$, et sont donc égaux à une phase près :

$$U(g_1) U(g_2) = \omega(g_1, g_2) U(g_1 g_2) ; |\omega(g_1, g_2)| = 1 \quad (I.2)$$

On appelle représentation unitaire à une phase près du groupe G , un ensemble d'opérateurs unitaires $U(g)$ vérifiant une telle relation. Nous poserons $\eta(g) = \pm 1$ suivant que $U(g)$ est linéaire ou antilinéaire. Deux représentations $U(g)$ et $U'(g)$, dont les "systèmes de facteurs" sont $\omega(g_1, g_2)$ et $\omega'(g_1, g_2)$ sont dites de même type, s'il existe une fonction $\theta(g)$, ($\theta(g)$ nombre complexe de module 1), telle que :

$$\omega'(g_1, g_2) = \omega(g_1, g_2) \frac{\theta(g_1 g_2)}{\theta(g_1) [\theta(g_2)] \eta(g_1)}$$

En particulier, les opérateurs $U(g)$ et $\theta(g)U(g)$ forment des représentations de même type.^[22] Notons également que le système de facteurs doit vérifier la relation d'associativité du produit des opérateurs :

$$[U(g_1) U(g_2)] U(g_3) = U(g_1) [U(g_2) U(g_3)]$$

Les lois de symétrie fournissent une classification des systèmes physiques : ceux-ci sont décrits dans des espaces de Hilbert de représentations (irréductibles pour les systèmes dits élémentaires), à un facteur près du groupe de symétrie. Ces représentations sont caractérisées par :

- $\eta(g)$, c'est-à-dire le caractère linéaire ou antilinéaire de $U(g)$
 - le type du système de facteurs $\omega(g_1, g_2)$
 - une classe de représentations unitairement équivalentes entre elles,
- une fois donnés $\eta(g)$ et le type de la représentation.

Remarques

I - Si G est un groupe de Lie connexe, $\eta(g) = +1$ pour tout g . En effet, dans un voisinage de l'identité, on peut toujours écrire $g = (g_1)^2 = g_1 g_1$. L'opérateur $U(g)$ associé, égal à une phase près à $U(g_1)U(g_1)$, est nécessairement linéaire, et d'autre part tout élément g est le produit d'un nombre fini d'éléments appartenant au voisinage de l'identité considéré

II - S'il existe dans G un élément g dont le carré est l'identité, et si $U(g)$ est antilunitaire, alors on a :

$$U(g)U(g) = \omega \mathbb{1}, \text{ avec } \omega = \pm 1,$$

le signe ± 1 est caractéristique du type de la représentation considérée.

Les représentations à une phase près des groupes de Lie, ont été étudiées en détail par Bargmann^[3]. Il a notamment montré, que pour une large classe de groupes de Lie, les représentations unitaires continues à une phase près de G sont des représentations vraies (c'est-à-dire des représentations de même type que celles dont le système de facteurs est identique à 1) du groupe de recouvrement universel $\bar{G}$ de G . $\bar{G}$ est le plus petit groupe connexe simplement connexe contenant G , qui lui soit localement isomorphe. En particulier G et $\bar{G}$ ont même algèbre de Lie. Ces propriétés sont notamment vérifiées pour presque tous les groupes considérés habituellement en physique (groupes compacts simples, groupe de Lorentz homogène ou inhomogène) à l'exception du groupe de Galilée^[3]. Ceci nous permettra d'ignorer par la suite la présence des systèmes de facteurs $\omega(g_1, g_2)$, à condition de considérer $\bar{G}$ et non G comme le véritable groupe de symétrie. Cette distinction est importante, car elle permet en particulier de comprendre l'existence de particules de spins demi-entiers.

3) - Invariance relativiste et groupe de Poincaré

Nous allons appliquer les résultats qui précèdent au cas de l'invariance relativiste : la formulation des lois de la physique ne doit pas faire intervenir le système de référence utilisé pour repérer les coordonnées d'espace et de temps. Un changement de système de coordonnées, c'est-à-dire une transformation de Lorentz inhomogène induit donc une opération de symétrie. Le groupe de Lorentz inhomogène orthochrone, propre, c'est-à-dire le groupe des transformations linéaires de l'espace temps, conservant la distance, le sens du temps et l'orientation de l'espace, est donc un groupe de symétrie.

Nous utilisons les notations suivantes :

- un quadrivecteur x a pour composantes x^μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$)
- le produit scalaire est : $x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ soit $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$, $g_{00} = +1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$
- une transformation de Lorentz inhomogène orthochrone propre (a, Λ) s'écrit : $x'^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu_\nu x^\nu$; $\Lambda^0_0 > 0$, $\det \Lambda = +1$. La matrice Λ satisfait $g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu$, soit :

$$G = \Lambda^T G \Lambda. \tag{I.3}$$

- Le groupe de Lorentz inhomogène orthochrone propre, noté $\mathcal{P}_+^\uparrow$, encore appelé groupe de Poincaré, admet la loi de groupe :

$$(a, \Lambda)(a', \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda \Lambda'). \tag{I.4}$$

Ces transformations conservent la distance :

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 = g_{\mu\nu} (x - y)^\mu (x - y)^\nu.$$

Wigner^[1] a démontré que les représentations continues à une phase près de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ sont des représentations de $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, (recouvrement universel de $\mathcal{P}_+^\uparrow$) que nous allons introduire.

- On définit $\vec{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$ et $\vec{\varrho}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$, $\mathbb{1}$ désignant la matrice unité à deux dimensions, et $\vec{\sigma}$ le vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli. On associe à tout quadrivecteur a les matrices hermitiques à deux dimensions $\tilde{a}$ et $\underline{a}$ définies par :

$$\tilde{a} = \varepsilon_{\mu\nu} a^\mu \vec{\sigma}^\nu = a^0 - \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{I.5})$$

$$\underline{a} = \varepsilon_{\mu\nu} a^\mu \vec{\varrho}^\nu = a^0 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{I.6})$$

- A toute matrice A uni-modulaire à deux dimensions et à coefficients complexes ($A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$) est associée une transformation linéaire sur les matrices hermitiques, ou de façon équivalente sur les quadrivecteurs, par la relation :

$$\tilde{a}' = A \underline{a} A^\dagger \quad (\text{I.7})$$

soit

$$(a'^0 + \vec{a}' \cdot \vec{\sigma}) = A(a^0 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) A^\dagger$$

on a

$$\det \underline{a}' = \det \underline{a} \quad , \quad \text{car} \quad \det A = +1.$$

Or

$$\det \underline{a} = a^{02} - \vec{a}^2 = a_\mu a^\mu.$$

La transformation induite sur les quadrivecteurs $a \rightarrow a'$ est une transformation de Lorentz $a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$, avec

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ A \vec{\varrho}_\nu A^\dagger \vec{\sigma}^\mu \}, \quad (\text{I.8})$$

on a utilisé :

$$a^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \underline{a} \vec{\sigma}^\mu \} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \tilde{a} \vec{\varrho}^\mu \} \quad (\text{I.9})$$

On a $\Lambda^0_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(AA^\dagger) > 0$, donc la transformation est orthochrone. On peut également montrer que $\det \Lambda = +1$. Donc Λ est un élément du groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

- Les matrices uni-modulaires A et $-A$ sont associées à la même transformation de Lorentz $\Lambda(A)$. Le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ constitue donc un recouvrement à deux nappes du groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$; $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ étant un groupe de Lie simplement connexe, est donc le recouvrement universel de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

- Le recouvrement $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ du groupe de Poincaré est construit comme le produit tensoriel d'un groupe abélien à quatre paramètres (groupe des translations à quatre dimensions, ou de façon équivalente, groupe additif des matrices hermitiques à deux dimensions, noté H_2). Donc $(\underline{a}, A) \in \overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ si $a \in H_2$, et $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. La loi de groupes est alors donnée par :

$$(\underline{a}, A) (\underline{a}', A') = (\underline{a} + A \underline{a}' A^\dagger, \Lambda A') \quad (\text{I.10})$$

4) - Représentations unitaires du groupe de Poincaré

Nous allons rappeler la structure des représentations de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ [23]. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{P}_+^\uparrow$ et $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ ont même algèbre de Lie. Au voisinage de l'identité, un élément de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ s'écrit (a, Λ) , avec $\Lambda_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$, le quadrivecteur a^μ et le tenseur antisymétrique $\omega_{\mu\nu}$ étant des quantités infinitésimales. On écrira donc

$$U(a, \Lambda) = 1 + i \left(P_\mu a^\mu + \frac{1}{2} J_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right), \quad (\text{I.11})$$

définissant ainsi les générateurs infinitésimaux P_μ et $J_{\mu\nu}$. On a $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$, et les règles de commutation :

$$\left\{ \begin{array}{l} [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [J_{\mu\nu}, P_\lambda] = i (\varepsilon_{\mu\lambda} P_\nu - \varepsilon_{\nu\lambda} P_\mu) \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i (\varepsilon_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \varepsilon_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + \varepsilon_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - \varepsilon_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}) \end{array} \right. \quad (\text{I.12})$$

La première des lois traduit le fait que les translations commutent entre elles, la deuxième et la troisième indiquent que les opérateurs P_μ et $J_{\mu\nu}$ se transforment respectivement comme un quadrivecteur et un tenseur du deuxième ordre, lorsqu'on effectue une transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} U(\Lambda^{-1}) P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu \\ U(\Lambda^{-1}) J^{\mu\nu} U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma} \end{cases} \quad (I.13)$$

Dans l'algèbre engendrée par les générateurs, on peut trouver deux opérateurs qui commutent avec tous les générateurs : ce sont les opérateurs P^2 et W^2 définis par^[24] :

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ W^2 &= W_\mu W^\mu \\ W_\mu &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma \end{aligned} \quad (I.14)$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur complètement antisymétrique à quatre indices tel que

$\varepsilon_{0123} = +1$. En effet, on a les règles de commutation :

$$\begin{cases} [P_\mu, W_\lambda] = 0 \\ [J_{\mu\nu}, W_\lambda] = i(\varepsilon_{\mu\lambda\nu} W_\nu - \varepsilon_{\nu\lambda\mu} W_\mu) \end{cases} \quad (I.15)$$

L'opérateur W se transforme donc comme un quadrivecteur. En particulier on a :

$$\begin{aligned} [P^2, P_\lambda] &= [P^2, J_{\mu\nu}] = 0 \\ [W^2, P_\lambda] &= [W^2, J_{\mu\nu}] = 0 \end{aligned}$$

Un espace de représentation unitaire irréductible est un espace propre des opérateurs P^2 et W^2 , correspondant aux valeurs propres m^2 et w^2 . On peut montrer qu'il n'existe pas d'autres fonctions des générateurs, qui commutent avec eux, que les opérateurs fonctions de P^2 et W^2 [25]. Notons que dans certaines représentations particulières, certaines opérations du groupe peuvent être représentées par l'identité, les générateurs correspondants étant nuls et commutant donc avec toute l'algèbre. C'est le cas des représentations à impulsion nulle, où les translations sont représentées par l'identité, et des représentations de masse nulle et de spin fini, comme nous le verrons plus loin. Dans ces cas particuliers les valeurs de m^2 et w^2 ne suffisent pas à caractériser la représentation.

Notons les propriétés :

$$W.P = W_\mu P^\mu = 0 \quad (I.16)$$

$$[W_\mu, W_\nu] = -i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^\rho P^\sigma \quad (I.17)$$

$$[W^2, W_\lambda] = 0 \quad (I.18)$$

Cherchons maintenant les valeurs possibles de w^2 , compatibles avec une valeur fixée de m^2 , dans le cas où la représentation considérée est irréductible. Les opérateurs P et W commutent, donc admettent dans $\mathcal{H}$ une décomposition spectrale commune^[26] : à tout vecteur f de $\mathcal{H}$, correspond un ensemble de "composantes" f_p , chaque f_p étant un élément d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}_p$. Le produit scalaire de deux vecteurs f et g de $\mathcal{H}$ s'écrit

$$\langle f, g \rangle = \int \langle f_p, g_p \rangle_p d\mu(p) \quad ,$$

où $\langle f_p, g_p \rangle_p$ est un produit scalaire pris dans l'espace $\mathcal{H}_p$, et $d\mu(p)$ est la mesure invariante sur l'hyperboloïde $p^2 = m^2$ (sur une seule nappe si $m^2 \geq 0$).

On a

$$(U(a)f)_p = e^{ip \cdot a} f_p$$

$$(P_\mu f)_p = p_\mu f_p \quad (I.19)$$

$$(W_\lambda f)_p = w_\lambda(p) f_p \quad (I.20)$$

(Ces deux dernières relations n'ont de sens que si Pf et Wf sont des vecteurs de $\mathcal{H}$; $w_\lambda(p)$ est un opérateur de $\mathcal{H}_p$).

A tout opérateur B de $\mathcal{H}$, est associé un noyau $B(p,p')$ (mesure à valeur opérateur de $\mathcal{H}_p$, dans $\mathcal{H}_{p'}$) défini formellement par :

$$(Bf)_p = \int B(p,p') f_{p'} d\mu(p').$$

En particulier, à toute transformation de Lorentz Λ , est associé un noyau $\Lambda(p,p')$ dont le support est concentré sur $p = \Lambda p'$, en vertu de la relation $U(a)U(\Lambda) = U(\Lambda)U(\Lambda^{-1}a)$; $U(\Lambda)$ est un opérateur borné et on peut alors montrer que $\Lambda(p,p') = \delta(p - \Lambda p') Q_p(\Lambda)$, où $Q_p(\Lambda)$ est un opérateur faisant passer de $\mathcal{H}_p$ à $\mathcal{H}_{\Lambda^{-1}p}$, en conservant le produit scalaire.

Considérons plus particulièrement l'ensemble des transformations de Lorentz laissant le quadrivecteur q invariant, encore appelé petit groupe de q . Au voisinage de l'identité, un élément du petit groupe s'écrit :

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad \text{avec } \omega_{\mu\nu} q^\nu = 0.$$

Soit $\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho s^\sigma$ où s est une quantité infinitésimale définie modulo q (on peut prendre $s \cdot q = 0$). Le petit groupe de q est donc un groupe à trois paramètres :

$$U(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} q^\rho s^\sigma.$$

L'opérateur $Q_q(\Lambda)$ associé, est la restriction à $\mathcal{H}_q$ de l'opérateur

$$\begin{aligned} U(\Lambda) &= 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} p^\rho s^\sigma \\ &= 1 + i W_\lambda s^\lambda. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } Q_q(\Lambda) = 1 + i w_\lambda(q) s^\lambda, \quad \text{avec } q^\lambda w_\lambda(q) = 0.$$

L'opérateur $w_\lambda(q)$ est donc le générateur du groupe des opérateurs unitaires $Q_q(\Lambda)$ obtenus quand Λ décrit tout le petit groupe de q . Autrement dit, $w_\lambda(q)$ engendre le groupe des transformations qui échangent les référentiels où la particule est au repos : il décrit donc le spin de la particule.

Dans la suite nous allons étudier la nature du petit groupe suivant la valeur de m^2 . On peut remarquer tout d'abord qu'à une représentation irréductible de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ correspond une famille de représentations du petit groupe de chaque vecteur q , mais ces représentations sont toutes équivalentes. En particulier elles sont irréductibles : en effet, si la représentation $Q_q(\Lambda)$ du petit groupe de q était réductible, il en serait de même pour toutes les valeurs de q et en conséquence on pourrait réduire la représentation de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ dans $\mathcal{H}$ dont on était parti.

5) - Classification des représentations en fonction de la masse et du spin

Nous avons déterminé les générateurs $w_\lambda(q)$ du petit groupe de q , et montré que $q \cdot w(q) = 0$. On peut décomposer w sur le sous espace orthogonal à q . Mais nous devons ici distinguer plusieurs cas suivant la valeur prise par $q^2 = m^2$.

a) $m^2 > 0$; représentation de masse m réelle (m > 0)

A tout vecteur $q, (q^0 > 0, q^2 = m^2)$, on associe une matrice unimodulaire $[q]$, telle que :

$$[q][q]^\dagger = \frac{1}{m} \underline{q} \quad (I.21)$$

La transformation de Lorentz associée à $[q]$, transforme le vecteur de référence t , de composantes $(1, 0, 0, 0)$, en le vecteur $\frac{q}{m}$. En effet, (I.21) s'écrit :

$$[q] \underline{t} [q]^\dagger = \frac{1}{m} \underline{q} \quad .$$

Appelons $n_i(q)$, $i = 1, 2, 3$, les transformées des vecteurs $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ par la transformation de Lorentz associée à $[q]$. On dit [27] que les vecteurs $\{q/m, n_1(q), n_2(q), n_3(q)\}$ forment une tétrade orthonormée. Comme $q \cdot w(q) = 0$, on peut décomposer $w(q)$ sur les trois vecteurs $n_i(q)$:

$$w(q) = m \{S_1(q)n_1(q) + S_2(q)n_2(q) + S_3(q)n_3(q)\} \quad (I.22)$$

Des relations (I.17), on tire :

$$[S_i(q), S_j(q)] = i \varepsilon_{ijk} S_k(q) \quad , \quad (I.23)$$

avec

$$S_i(q) = -\frac{1}{m} w(q) \cdot n_i(q).$$

L'équation (I.23) nous montre que l'algèbre des générateurs représentant le petit groupe de q est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des rotations, ou de SU_2 . Ce résultat est naturel, car le petit groupe de q et le petit groupe de t (qui est le groupe $SU(2)$), sont isomorphes. En effet si R est une opération du petit groupe de t ($Rt = t$), et $\Lambda(q)$ la transformation de

Lorentz associée à $[q]$, alors la transformation Λ définie par :

$$\Lambda = \Lambda(q) R \Lambda(q)^{-1} \quad (I.24)$$

est une opération du petit groupe de q . La relation (I.24) est bien un isomorphisme entre les petits groupes de t et de q .

Ainsi, l'espace $\mathcal{H}_q$ est un espace de représentation irréductible de SU_2 , de dimension $2s + 1$, où s est le spin de la représentation. Dans $\mathcal{H}_q$ nous allons choisir une base standard, où les opérateurs $S^2(q) = \sum_1 S_1^2(q)$ et $S_3(q)$ sont diagonaux. On décomposera tout vecteur f_q de $\mathcal{H}_q$ sur cette base et on appellera $f_\sigma([q])$, $-s \leq \sigma \leq +s$, les $2s + 1$ composantes obtenues. La valeur propre de S^2 est $s(s+1)$ et la valeur associée de w^2 (cf. I.22) est :

$$w^2 = -m^2 s(s+1) \quad . \quad (I.25)$$

Les phases des diverses composantes sont reliées par :

$$(S_3 f)_\sigma([q]) = \sigma f_\sigma([q])$$

$$\left((S_1 \pm iS_2) f \right)_\sigma([q]) = \sqrt{s(s+1) - \sigma(\sigma \mp 1)} f_{\sigma \mp 1}([q])$$

La notation $f_\sigma([q])$ est utilisée pour rappeler la définition de $S_3(q)$: projection du vecteur W sur $n_3(q)$, défini à l'aide de $[q]$. Des propriétés du groupe des rotations on déduit aisément la loi de transformation de $f_\sigma([q])$ par changement de $[q]$ en $[q]R$, où $R \in (SU_2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} [q]' = [q]R \\ f_\sigma([q]') = \sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^s(R^{-1}) f_{\sigma'}([q]) \end{array} \right. \quad (I.26)$$

La loi de transformation par une opération de $\mathcal{P}_+^\dagger$ se déduit aisément de (I.19), (I.21) et du fait que W_μ est un quadrivecteur :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, A) f_\sigma([q]) = (U(a, A) f)_\sigma([q]) = e^{iqa} f_\sigma([A^{-1}q]') \\ [A^{-1}q]' = A^{-1}[q] \end{array} \right. \quad (I.27)$$

Aq désigne la transformée de q par la transformation de Lorentz associée à la matrice uni-modulaire A. La relation (I.27) signifie simplement que la transformée d'un état "propre" de la projection de W sur $n_3(p)$, est état "propre" de la projection de W sur $A^{-1} n_3(p)$, ce qui est une conséquence de la relation :

$$U(A^{-1}) W^\mu U(A) = \Lambda^\mu_\nu W^\nu .$$

En utilisant la covariance par changement de tétrade (I.26), on peut mettre (I.27) sous une forme où la tétrade choisie (c'est-à-dire la transformation $[A^{-1}q]$) l'est de façon arbitraire :

$$[A^{-1}q]' = [A^{-1}q]R \text{ avec } R = [A^{-1}q]^{-1} A^{-1} [q]$$

soit

$$\begin{cases} (a,A) f_\sigma([q]) = e^{iqa} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^s(R^{-1}) f_{\sigma'}([A^{-1}q]) \\ R^{-1} = [q]^{-1} A [A^{-1}q] . \end{cases} \quad (I.28)$$

La signification géométrique de R est simple, c'est, dans le système propre de q, la transformation qui fait passer des vecteurs $A^{-1}n_1(q)$ à $n_1(A^{-1}q)$.

Reste à écrire le produit scalaire : considérons deux états f et g, de fonctions d'onde respectives $f_\sigma([q])$ et $g_\sigma([q])$, on écrit :

$$\langle f, g \rangle = \int d\mu(q) \sum_\sigma f_\sigma^*([q]) g_\sigma([q]) . \quad (I.29)$$

Enfin $d\mu(q)$ est la mesure invariante sur l'hyperboloïde, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} d\mu(q) = \frac{d^3\vec{q}}{2\omega_q} \\ \omega_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2} . \end{cases} \quad (I.30)$$

La représentation ainsi définie n'est irréductible que si on se restreint à des fonctions définies sur l'une ou l'autre des deux nappes de l'hyperboloïde $q^2 = m^2$; $q^0 > 0$ ou $q^0 < 0$. Les formules précédentes sont valables dans les deux cas, sauf (I.21) qui doit être remplacé par :

$$[q][q]^\dagger = -\frac{1}{m} \underline{q} ,$$

lorsque $q^0 < 0$, [q] transforme alors -t en q. Dans le cas où $q^0 > 0$ la mesure $d\mu(q)$ s'écrit :

$$d\mu(q) = \frac{d^3\vec{q}}{2\omega_q} = \int dq^0 [d^3\vec{q} \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0)]$$

$$\text{pour } q^0 < 0 : d\mu(q) = \int dq^0 [d^3\vec{q} \delta(q^2 - m^2) \theta(-q^0)] .$$

b) $m^2 < 0$: représentations de masse imaginaire : $m = i\mu, \mu > 0$

A tout vecteur $q, (q^2 = -\mu^2)$ on associe une matrice uni-modulaire [q] telle que

$$[q] \sigma_z [q]^\dagger = \frac{1}{\mu} \underline{q} = [q] \underline{z} [q]^\dagger .$$

Donc [q] transforme le vecteur $z = (0,0,0,1)$ en le vecteur q, et les vecteurs $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, respectivement en $n_0(q)$, $n_1(q)$ et $n_2(q)$. Ainsi les vecteurs n_0, n_1, n_2 et q/μ forment une "tétrade" orthonormée. On a alors :

$$w(q) = \mu \{H_0 n_0(q) + H_1 n_1(q) + H_2 n_2(q)\} .$$

Les règles de commutation obtenues sont :

$$[H_1, H_2] = -iH_0 ; [H_0, H_1] = iH_2 ; [H_0, H_2] = -iH_1 .$$

On reconnaît les règles de commutation de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz à trois dimensions $SO(2,1)$ (ou du groupe $SL(2,R)$). Les petits groupes des différents vecteurs q sont isomorphes entre eux. Celui du vecteur z est bien $SO(2,1)$, sous-groupe du groupe de Lorentz; $SL(2,R)$ s'obtient comme petit groupe de y , mais en tant que sous-groupe de $SL(2,C)$.

On choisit dans $\mathcal{H}_q$ une base standard de représentations de $SL(2,R)$ où les opérateurs H_0 et $H^2 = H_0^2 - H_1^2 - H_2^2$ sont simultanément diagonaux. On considère des fonctions $f_\sigma^j([q])$ définies sur l'hyperboloïde $q^2 = -\mu^2$ par l'intermédiaire de la matrice uni-modulaire $[q]$, avec les propriétés de covariance par rapport au changement de base :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\sigma^j([q]') = \sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^j(M^{-1}) f_{\sigma'}^j([q]) \\ [q]' = [q]M, \quad M \in \text{petit groupe de } z, \text{ isomorphe à } SL(2,R) \end{array} \right.$$

$\mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^j$ est l'élément de matrice de l'opérateur $U(M)$ dans la représentation irréductible de $SL(2,R)$ considérée. Bargmann^[28] a classifié toutes les représentations (unitaires) irréductibles de $SL(2,R)$. On obtient toutes les représentations de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ cherchées en prenant toutes les représentations unitaires de $SL(2,R)$. Notons qu'ici l'espace $\mathcal{H}_q$ est de dimension infinie et l'indice σ varie en prenant des valeurs soit entières, soit demi-entières. La loi de transformation est

$$(a,A) f_\sigma^j([q]) = (U(a,A)f)_\sigma^j([q]) = e^{iq \cdot a} f_\sigma^j([A^{-1}q]')$$

avec $[A^{-1}q]' = A^{-1}[q]$.

On en déduit facilement les formules dans le cas où $[A^{-1}q]$ est quelconque, on obtient une équation analogue à (I.28). Enfin le produit scalaire s'écrit de la même façon que (I.29), mais la somme sur σ s'étend à l'infini, et $d\mu(q) = \int dq^0 (\delta(q^2 - m^2) d^3\vec{q})$, c'est-à-dire

$$d\mu(q) = \int dq^0 \left\{ \delta(q^0 - \sqrt{q^2 + m^2}) + \delta(q^0 + \sqrt{q^2 + m^2}) \right\} \frac{d^3\vec{q}}{2\omega_q}.$$

c) $m^2 = 0$: représentations de masse nulle

A tout vecteur $q, (q^0 > 0, q^2 = 0)$ on associe une matrice uni-modulaire $[q]$, telle que

$$[q](1 + \sigma_z)[q]^\dagger = \underline{q} = [q] \underline{c} [q]^\dagger. \quad (I.31)$$

La transformation de Lorentz associée à $[q]$, transforme le vecteur de référence $c = t + z$, de composantes $(1,0,0,1)$, en le vecteur q . Enfin $[q]$ transforme les vecteurs $t = (1,0,0,0)$, $x = (0,1,0,0)$, $y = (0,0,1,0)$, $z = (0,0,0,1)$ en $n_0(q)$, $n_1(q)$, $n_2(q)$ et $n_3(q)$ respectivement. On a :

$$q = n_0(q) + n_3(q), \quad q \cdot n_1(q) = 0, \quad q \cdot n_2(q) = 0. \quad (I.32)$$

On peut décomposer $w(q)$ sur $n_1(q)$, $n_2(q)$ et q , car $q^2 = 0$

$$w(q) = [W_1(q)n_1(q) + W_2(q)n_2(q) + \lambda(q)q].$$

Les opérateurs $W_1(q)$, $W_2(q)$ et $\lambda(q)$ engendrent l'algèbre de Lie d'une représentation unitaire irréductible du petit groupe de q . Les règles de commutation, déduites de (I.17), sont

$$\left\{ \begin{array}{l} [W_1, W_2] = 0 \\ [W_1, \lambda] = -i W_2 \\ [W_2, \lambda] = +i W_1 \end{array} \right. \quad (I.33)$$

On reconnaît l'algèbre de Lie du groupe Euclidien à deux dimensions (groupe des déplacements du plan), les générateurs W_1 , W_2 sont ceux des translations et λ celui des rotations. On peut vérifier ce résultat en cherchant la nature du petit groupe de n importe quel vecteur lumière (les petits groupes de deux vecteurs lumières différents étant isomorphes), par exemple le vecteur $c = (1,0,0,1)$. Le petit groupe de c est constitué des matrices uni-modulaires M telles que :

$$M(1+\sigma_z) M^\dagger = (1+\sigma_z)$$

soit

$$M \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que les matrices M sont de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & de^{+i\frac{\varphi}{2}} \\ 0 & e^{+i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = M(d, e^{i\varphi/2}). \quad (I.34)$$

On a

$$M(d, e^{i\varphi/2}) M(d', e^{i\varphi'/2}) = M(d+d' e^{-i\varphi}, e^{i\frac{\varphi+\varphi'}{2}}).$$

On reconnaît bien la loi de multiplication d'un groupe de déplacement à deux dimensions : translations représentées par un nombre complexe d , et rotations d'angle φ . Il est intéressant de montrer la forme des transformations de Lorentz associées, celles qui conservent le vecteur $c = t + z$:

$$\begin{cases} \Lambda(M) c = c = (t+z) \\ \Lambda(M)(t-z) = (|d|^2+1)t + (|d|^2-1)z + 2(\text{Re } d)x - 2(\text{Im } d)y \\ \Lambda(M) x = (\text{Re } de^{i\varphi})c + x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ \Lambda(M) y = (\text{Im } de^{i\varphi})c - x \sin\varphi + y \cos\varphi. \end{cases} \quad (I.35)$$

Les transformations correspondant à $a = 0$ sont des rotations (les matrices $M(0, e^{i\varphi/2})$ sont unitaires). Les transformations correspondant à $\varphi = 0$ sont appelées transformations de jauge, il leur correspond des matrices du type :

$$M(d, 1) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les transformations du petit groupe de q sont de la forme :

$$[q] M(d, e^{i\varphi/2}) [q]^{-1}.$$

Les transformations de Lorentz associées se déduisent de (I.35) en remplaçant : $c, t-z, x, y$ et $\Lambda(M)$ respectivement par $q, n_0(q) - n_3(q), n_1(q), n_2(q)$ et $\Lambda([q] M [q]^{-1})$.

On considèrera des fonctions de q , ($q^2 = 0, q^0 > 0$) à valeur dans un espace de représentation $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ unitaire irréductible du groupe euclidien à deux dimensions. On choisira dans cet espace une base où $W^2(q) = W_1^2(q) + W_2^2(q)$ et $\lambda(q)$ sont diagonaux. On aura alors de façon analogue à (I.26) et (I.27),

$$\left\{ \begin{aligned} \text{si } [q]' &= [q] M \\ f_{\sigma'}([q]') &= \sum_{\sigma} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^{(\alpha)}(M^{-1}) f_{\sigma}([q]) \end{aligned} \right. \quad (I.36)$$

$${}^{(a,A)}f_{\sigma}([q]) = (U(a,A)f)_{\sigma}([a]) = e^{iqa} f_{\sigma}([A^{-1}q]')$$

$$\text{avec } [A^{-1}q]' = A^{-1}[q]. \quad (I.37)$$

M est une matrice du type (I.34), $\mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^{(\alpha)}$ désigne l'élément de matrice de la représentation irréductible $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ dans la base considérée. Les représentations du petit groupe sont de deux types : celles pour lesquelles $W^2(q)$ est différent de zéro agissant dans un espace à dimension infinie, et celles pour lesquelles $W^2(q) = 0$ qui agissent dans un espace à une dimension ; les premières ne sont pas utilisées en physique car elles introduisent la notion de spin infini. Celles qui correspondent aux particules observées, (photon, neutrino) sont du deuxième type. Elles sont alors caractérisées par la valeur propre de $\lambda(a)$, seul opérateur de l'algèbre qui n'est pas représenté par zéro. λ est appelé l'hélicité de la représentation. En effet on a alors la relation

$$w^{\mu}(q) = \lambda(q) q^{\mu}.$$

En prenant la composante de temps, on retrouve la définition classique :

$$\lambda(q) = \frac{\vec{J} \cdot \vec{q}}{q^0} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{q}}{|\vec{q}|} .$$

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} f([q]') = e^{i\lambda\varphi} f([q]) \\ [q]' = [q] M(d, e^{i\varphi/2}) \end{cases} \quad (I.38)$$

$f([q])$ n'est en particulier pas modifié, par la transformation de $[q]$ en $[q] M(d, 1)$. Cette propriété est communément appelée invariance de jauge.

L'action des transformations de Lorentz est donnée par :

$$\begin{cases} (a, A) f([q]) = (U(a, A) f)([q]) = e^{iq \cdot a} f([A^{-1}q]') \\ \text{avec } [A^{-1}q]' = A^{-1}[q] \end{cases} \quad (I.39)$$

soit encore

$$\begin{aligned} (a, A) f([q]) &= e^{iq \cdot a} e^{i\lambda\varphi} f([A^{-1}q]) \\ \text{avec } M(d, e^{i\varphi/2}) &= [A^{-1}q]^{-1} A^{-1} [q] . \end{aligned} \quad (I.40)$$

d) Représentations d'impulsion nulle

Nous mentionnons pour mémoire les représentations d'impulsion nulle où les translations sont représentées par l'identité. Ce sont en fait les représentations unitaires du groupe de Lorentz. Dans cette représentation, P_μ et W_μ sont nuls. La seule utilisée en physique est la représentation triviale ($P_\mu = J_{\mu\nu} = 0$), associée à l'état vide.

e) Représentations de $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ et de $\mathcal{P}_+^\uparrow$

Nous avons déterminé dans les paragraphes précédents la forme des représentations de $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$; elles agissent dans des espaces de Hilbert engendrés par des fonctions définies sur une orbite dans l'espace à quatre dimensions ("orbite" désigne l'ensemble des vecteurs se déduisant d'un vecteur donné par

transformation de Lorentz), ces fonctions sont à valeurs dans un espace de représentation unitaire du petit groupe, dont la nature dépend de l'orbite considérée. Dans tous les cas, ces petits groupes sont des sous-groupes de $SL(2, C)$ contenant en particulier les matrices $+1$ et -1 . La représentation du petit groupe considéré peut soit être de type vectoriel, ("spin" entier), dans ce cas la matrice -1 est représentée par l'identité, soit de type spinoriel ("spin" demi entier) dans ce cas la matrice -1 est représentée par la matrice identité multipliée par (-1) . Nous poserons $\tau = 0$ dans le premier cas, et $\tau = 1$ dans le second cas.

On obtient les représentations au signe près du groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ en choisissant une correspondance $\Lambda \rightarrow A(\Lambda)$, et en représentant (a, Λ) par :

$$U(a, \Lambda) = U(a, A(\Lambda)) . \quad (I.41)$$

La correspondance $\Lambda \rightarrow A(\Lambda)$ n'est pas biunivoque, ce qui se traduit par le fait que $A(\Lambda_1)A(\Lambda_2)$ et $A(\Lambda_1\Lambda_2)$ peuvent différer d'un signe :

$$A(\Lambda_1)A(\Lambda_2) = \varepsilon(\Lambda_1, \Lambda_2) A(\Lambda_1\Lambda_2) . \quad (I.42)$$

On obtiendra ainsi une représentation au signe près de $\mathcal{P}_+^\uparrow$:

$$U(a_1, \Lambda_1) U(a_2, \Lambda_2) = \{\varepsilon(\Lambda_1, \Lambda_2)\}^\tau U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) . \quad (I.43)$$

En particulier pour les représentations de masse réelle non nulle, et de spin s ,

on a : $(-1)^\tau = (-1)^{2s}$. Pour les représentations de masse nulle, de spin fini et d'hélicité λ , on a $(-1)^\tau = (-1)^{2\lambda}$.

On peut montrer (Wigner^[1]) que toutes les représentations à une phase près du groupe de Poincaré sont du même type que les représentations de la relation (I.42). On peut donc simplement par changement de la phase de l'opérateur représentant (a, Λ) , se ramener soit à une représentation vraie ($\tau = 0$), soit à une représentation au signe près ($\tau = 1$).

Notons une propriété du système de facteur $\varepsilon(\Lambda_1, \Lambda_2)$ défini par (I.42) : on peut choisir la correspondance $\Lambda \rightarrow A(\Lambda)$ telle que $A(\Lambda^{-1T}) = A^{\dagger-1}(\Lambda)$. En effet ça peut décomposer tout Λ en un produit d'une rotation R suivie d'une transformation de Lorentz pure L , transformant le vecteur t en Λt ; à R on associe une matrice unitaire U et à L une matrice hermitique H , le signe de H étant choisi de façon que $\text{Tr} H > 0$. On a :

$$\Lambda = LR \quad \text{et} \quad A(\Lambda) = H(L)U$$

on a alors $\Lambda^{-1T} = L^{-1T} R^{-1T} = L^{-1} R$. Donc $A(\Lambda^{-1T}) = H(L^{-1})U$, or $H(L^{-1}) = H^{-1}(L)$. Donc $A(\Lambda^{-1T}) = H^{\dagger-1}(L) U^{\dagger-1} = A^{\dagger-1}(\Lambda)$. On obtient alors, pour une correspondance $\Lambda \rightarrow A(\Lambda)$ telle que :

$$A(\Lambda^{-1T}) = A^{\dagger-1}(\Lambda) \quad , \quad (\text{I.44})$$

la relation :

$$\varepsilon(\Lambda_1^{-1T}, \Lambda_2^{-1T}) = \varepsilon(\Lambda_1, \Lambda_2) \quad . \quad (\text{I.45})$$

6) - Opérations discrètes : parité, renversement du sens du temps

Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ complet comprend, outre les transformations orthochrones propres Λ , les opérations Π (parité), T (renversement du sens du

temps), et ΠT (inversion totale) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi x = \underline{x} \quad ; \quad T x = -\underline{x} \quad ; \quad \Pi T x = -x \\ \text{avec } \underline{x} = (x_0, -\vec{x}) \quad , \quad x = (x_0, \vec{x}) \end{array} \right. \quad (\text{I.46})$$

Un élément du groupe de Poincaré complet $\mathcal{P}$, est de la forme (a, L) où $L \in \mathcal{L}$, c'est-à-dire $\Pi L \Pi = L^{-1T}$, $\det L = \pm 1$ et $L^0_0 > 0$ ou < 0 . La loi de groupe s'écrit alors

$$(a, L)(a', L') = (a + La', LL') \quad .$$

Tout élément (a, L) de $\mathcal{P}$ peut s'écrire comme le produit d'un élément (a, Λ) de $\mathcal{P}_+$ par l'un des éléments $(0, \mathbb{1})$, $(0, \Pi)$, $(0, T)$, $(0, \Pi T)$. Nous désignerons plus simplement ces trois derniers éléments par Π , T et ΠT . La loi de groupe s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, \Lambda)(a', \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda \Lambda') \text{ pour } \Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_+^\uparrow \\ \Pi(a, \Lambda)\Pi^{-1} = (\underline{a}, \Lambda^{-1T}) \\ T(a, \Lambda)T^{-1} = (-\underline{a}, \Lambda^{-1T}) \\ \Pi T(a, \Lambda)(\Pi T)^{-1} = (-a, \Lambda) \\ \Pi^2 = T^2 = (\Pi T)^2 = 1 \quad , \quad \Pi T = T\Pi \end{array} \right. \quad (\text{I.47})$$

Nous allons construire les représentations à une phase près du groupe $\mathcal{P}$, c'est-à-dire des relations (I.47). Pour les transformations du sous-groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$, nous choisissons un système de facteurs $\varepsilon(\Lambda_1, \Lambda_2)$ ayant la propriété (I.45). Notons qu'une représentation irréductible du groupe complet $\mathcal{P}$ peut très bien être réductible, quand on la considère comme représentation de $\mathcal{P}_+^\uparrow$, mais les diverses composantes ont même système de facteurs et en particulier même type. Ceci est lié au fait que l'application du théorème de Wigner à l'invariance relativiste interdit de considérer comme état physique une superposition de deux vecteurs appartenant à des espaces de représentations de type différents ; en d'autres termes

le "type" figure parmi les règles de supersélection. Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(a, \Lambda) U(a', \Lambda') = \{\varepsilon(\Lambda, \Lambda')\}^T U(a + \Lambda a', \Lambda \Lambda') \\ U(\Pi) U(a, \Lambda) U^{-1}(\Pi) = U(\underline{a}, \Lambda^{-1T}) \\ U(T) U(a, \Lambda) U^{-1}(T) = U(-\underline{a}, \Lambda^{-1T}) \\ U(\Pi T) U(a, \Lambda) U^{-1}(\Pi T) = U(-a, \Lambda) \end{array} \right. \quad (I.48)$$

Le facteur de phase qui devrait figurer dans le deuxième membre de chacune de ces trois dernières équations doit être identique à 1, car il doit vérifier la loi de groupe :

$$\omega(a, \Lambda) \omega(a', \Lambda') = \omega(a + \Lambda a', \Lambda \Lambda') ,$$

(cette relation est due, pour l'action de Π , et de T , à la propriété (I.45) du système de facteur). $\omega(a, \Lambda)$ est donc une représentation unitaire à une dimension de $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Wigner^[1] a démontré que la seule représentation unitaire à une dimension est la représentation triviale : $\omega(a, \Lambda) = 1$.

Les relations (I.48) sont valables même si on a choisi de représenter certaines des opérations discrètes, Π , T ou (ΠT) par des opérateurs antiunitaires.

Les relations (I.48) nous montrent également qu'une représentation à une phase près de $\mathcal{P}$ peut s'obtenir à partir d'une représentation à une phase près du groupe $\mathcal{P}$ obtenu en faisant agir Π , T et ΠT sur le groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\underline{a}, A)(\underline{a}', A') = (\underline{a} + A \underline{a}' A^\dagger, A A') \\ \Pi(\underline{a}, A) \Pi^{-1} = (\underline{a}, A^{\dagger-1}) \\ T(\underline{a}, A) T^{-1} = (-\underline{a}, A^{\dagger-1}) \\ \Pi T(\underline{a}, A) (\Pi T)^{-1} = (-a, A) \\ \Pi^2 = T^2 = (\Pi T)^2 = 1 \quad \Pi T = T \Pi \end{array} \right. \quad (I.49)$$

Les relations (I.48) montrent que $U(\Pi)$, $U(T)$, $U(\Pi T)$ transforment une représentation $U(a, \Lambda)$ de masse déterminée en une représentation de même masse. Une représentation irréductible de $\mathcal{P}$ a donc une masse déterminée.

Nous choisissons $U(\Pi)$ unitaire, et $U(T)$ et $U(\Pi T)$ antiunitaires, car c'est le choix qui permet d'obtenir des représentations à énergie de signe défini, dont l'utilisation est dictée par l'expérience.

Par un changement de phase, on peut toujours alors se ramener aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^2(\Pi) = 1 \\ U^2(T) = \varepsilon_T \\ U^2(\Pi T) = \varepsilon_{\Pi T} \\ U(\Pi T) = U(\Pi) U(T) \end{array} \right. \quad \text{avec } \varepsilon_T = \pm 1, \varepsilon_{\Pi T} = \pm 1. \quad (I.50)$$

Une conséquence de ces relations est :

$$U(\Pi) U(T) = \varepsilon_T \varepsilon_{\Pi T} U(T) U(\Pi) . \quad (I.51)$$

a) Masse réelle non nulle

Considérons une représentation irréductible $U(a, \Lambda)$ de masse m et de spin s . Nous allons montrer que la représentation $U(\underline{a}, \Lambda^{-1T})$, lui est unitairement équivalente, alors que les représentations $U(-a, \Lambda)$ et $U(-\underline{a}, \Lambda^{-1T})$ lui sont antiunitairement équivalentes. Elles sont en fait unitairement équivalentes à des représentations agissant sur la nappe $q^0 < 0$ de l'hyperboloïde $q^2 = m^2$. On a choisi $U(T)$ et $U(\Pi T)$ antiunitaires pour pouvoir écrire une représentation agissant sur une seule des deux nappes du cône. La représentation $U(\underline{a}, \Lambda^{-1T})$ est définie par :

$$(\underline{a}, \Lambda^{-1T})_{f_\sigma}([q]) = e^{i q \cdot \underline{a}} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^s([q]^{-1} A^{\dagger-1} [\Lambda^T q]) f_{\sigma'}([\Lambda^T q]) ,$$

on a :

$$\Lambda^T q = (\Pi \Lambda^{-1} \Pi) q = \underline{(\Lambda^{-1} q)}$$

$$A \underline{\Lambda^{-1} q} A^\dagger = \underline{q} \quad , \quad \text{donc} \quad A^{+1} = (\underline{q})^{-1} A(\underline{\Lambda^{-1} q})$$

or

$$\underline{q} = [q][q]^\dagger .$$

D'où :

$$A^{+1} = [q]^\dagger^{-1} [q]^{-1} A[\Lambda^{-1} q][\Lambda^{-1} q]^\dagger ,$$

on obtient alors :

$$(\underline{a}, \Lambda^{-1T})_{\sigma} f_{\sigma}([q]) = \mathcal{D}_{\sigma\alpha}^s([q]^{-1}[q]^\dagger^{-1}) \mathcal{D}_{\alpha\sigma}^s([q]^{-1} A[\Lambda^{-1} q])$$

$$\times \mathcal{D}_{\alpha\sigma}^s([\Lambda^{-1} q]^\dagger [\Lambda^{-1} q]) e^{iq \cdot a} f_{\sigma}([\Lambda^{-1} q]) .$$

Cette relation n'est autre que :

$$U(\underline{a}, \Lambda^{-1T}) = \hat{\Pi} U(a, \Lambda) \hat{\Pi}^{-1}$$

avec $(\hat{\Pi} f)_{\sigma}([q]) = \mathcal{D}_{\sigma\alpha}^s([q]^{-1}[q]^\dagger^{-1}) f_{\alpha}([q]) .$

L'opérateur $\hat{\Pi}$ respecte bien la norme car $[q]^{-1} [q]^\dagger^{-1}$ est bien une matrice unitaire.

De même on a :

$$U(-a, \Lambda) = (\hat{\Pi T}) U(a, \Lambda) (\hat{\Pi T})^{-1}$$

avec $(\hat{\Pi T} f)_{\sigma}([q]) = \mathcal{D}_{\sigma\alpha}^s(C) f_{\alpha}^*([q])$

$(\hat{\Pi T})$ est un opérateur antiunitaire et la matrice C est nécessaire pour transformer la représentation $\mathcal{D}^s$ de SU_2 en la représentation complexe conjuguée. C représente physiquement une rotation de π autour de l'axe Oy .

Enfin $U(-\underline{a}, \Lambda^{-1T})$ s'obtient en faisant successivement les deux transformations précédentes.

L'espace de représentation $\mathcal{R}$ du groupe $\mathcal{P}$ se décompose donc éventuellement en plusieurs espaces de représentations $\mathcal{R}_i$ du groupe $\mathcal{P}_+^{\dagger}$: $\mathcal{R} = \oplus \mathcal{R}_i$; les représentations agissant dans chaque $\mathcal{R}_i$ sont équivalentes. On aura donc

$$\begin{cases} (U(\Pi) f)_{\sigma}^i([q]) = \sum_j (A)^{ij} \mathcal{D}_{\sigma\alpha}^s([q]^{-1}[q]^\dagger^{-1}) f_{\alpha}^j([q]) \\ (U(\Pi T) f)_{\sigma}^i([q]) = \sum_j (B)^{ij} \mathcal{D}_{\sigma\alpha}^s(C) f_{\alpha}^{j*}([q]) \\ (U(T) f)_{\sigma}^i([q]) = \sum_j (AB)^{ij} \mathcal{D}_{\sigma\alpha}^s([q]^{-1}[q]^\dagger^{-1}C) f_{\alpha}^{j*}([q]) \end{cases} \quad (I.52)$$

$f_{\sigma}^j([q])$ représente la composante dans l'espace $\mathcal{R}_i$, exprimée sur une base standard, c'est-à-dire une base dans laquelle $U(a, \Lambda)$ s'exprime de la façon indiquée par (I.41) et (I.28).

Les matrices A et B expriment simplement la possibilité pour les opérateurs $U(\Pi)$, $U(T)$ et $U(\Pi T)$ de relier des espaces $\mathcal{R}_i$ différents. A et B sont des matrices unitaires. De (I.50) on tire :

$$\begin{cases} A^2 = 1 \quad ; \quad BB^* = (-1)^{2s} \varepsilon_{\Pi T} \quad ; \quad (AB)(AB)^* = (-1)^{2s} \varepsilon_T \\ AB = BA^* \varepsilon_T \varepsilon_{\Pi T} . \end{cases}$$

Si l'on redéfinit les composantes par la transformation $f_i \rightarrow M_{ij} f_j$, (M : matrice unitaire), A est transformé en MAM^{-1} , et B en MBM^{-1*} à cause de l'antiunitarité de ΠT . Une telle transformation préserve les relations précédentes, on peut donc choisir M de façon à diagonaliser A ; comme $A^2 = 1$, la forme diagonale de A est une matrice réelle. On peut donc récrire (I.52) avec :

$$\begin{cases} A^2 = 1, A \text{ diagonal}; BB^* = (-1)^{2s} \varepsilon_{\Pi T} \\ (AB)(AB)^* = (-1)^{2s} \varepsilon_T; AB = BA \varepsilon_T \varepsilon_{\Pi T} \end{cases}$$

Le facteur $(-1)^{2s}$ provient du fait que $C^2 = -1$ (le carré d'une rotation de π est une rotation de 2π).

Représentation à parité intrinsèque $\varepsilon_T = \varepsilon_{\Pi T}$

La matrice A est diagonale et de carré 1, elle se décompose en la somme directe de deux matrices identité, 1 et -1, à m et n dimensions; B commute avec A , donc se décompose également en deux blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1_m & 0 \\ \hline 0 & -1_n \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_m & 0 \\ \hline 0 & B_n \end{array} \right)$$

La représentation considérée est donc réductible en une somme de deux représentations où A est la matrice identité multipliée par un signe qui est la parité intrinsèque de la représentation. Nous devons alors distinguer deux cas suivant le signe de $BB^* = (-1)^{2s} \varepsilon_{\Pi T} = (-1)^{2s} \varepsilon_T$.

1) $\varepsilon_T = (-1)^{2s}$; type normal

On a $A = \pm 1$, et $BB^* = 1$. B est donc une matrice unitaire symétrique, qu'on peut diagonaliser par une transformation unitaire réelle (donc orthogonale), on peut donc réduire la représentation en une somme de représentations irréductibles, où A et B sont des matrices à une dimension :

$$A = \pm 1, B = \omega; AB = \pm \omega; |\omega| = 1. \quad (I.53)$$

2) $\varepsilon_T = -(-1)^{2s}$; type anormal

On a $A = \pm \mathbb{1}$ et $BB^* = -\mathbb{1}$. B est une matrice unitaire antisymétrique,

qui peut par une transformation orthogonale^[29], être décomposée en blocs à deux dimensions de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

En effet si v est vecteur propre de B avec la valeur propre λ , alors $(-\lambda)$ est valeur propre, v^* étant le vecteur propre associé. Si on prend comme vecteur de base les vecteurs orthogonaux et réels

$$v_{\lambda}^+ = \frac{v + v^*}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad v_{\lambda}^- = \frac{v - v^*}{i\sqrt{2}}$$

la matrice B se décompose en une somme directe de blocs de la forme indiquée.

Une représentation irréductible est donc de la forme

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}; AB = \pm \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette représentation, il y a doublement du nombre de composantes, donc apparition d'un nombre quantique supplémentaire.

Représentation sans parité intrinsèque : $\varepsilon_T = -\varepsilon_{\Pi T}$

Les matrices A et B anticommulent, donc si $|+\rangle$ est vecteur propre de A avec la valeur propre $(+1)$, $B|+\rangle$ est vecteur propre de A avec la valeur propre (-1) . Comme B est unitaire on obtient ainsi tous les vecteurs propres de A (tout vecteur propre $|-\rangle$ est bien de la forme $B^{-1}|+\rangle$). Les matrices A et B simultanément réduites en une somme directe de matrices à deux dimensions sont :

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega' & 0 \end{pmatrix}; |\omega| = |\omega'| = 1$$

Comme $BB^* = (-1)^{2s} \varepsilon_{\Pi T} = -(-1)^{2s} \varepsilon_T$, on a

$$\omega' = (-1)^{2s} \varepsilon_{\Pi T} \omega .$$

Donc dans une représentation irréductible :

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; B = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{2s} \varepsilon_{\Pi T} & 0 \end{pmatrix} .$$

Nous avons ici encore doublement du nombre de composantes.

La seule représentation utilisée en physique est celle qui n'introduit pas de nombre quantique interne : dans cette représentation,

$$\varepsilon_{\Pi T} = \varepsilon_T = (-1)^{2s} .$$

Remarques sur les phases

I - Par un changement de phase global sur les fonctions d'onde, on peut multiplier les matrices B et AB par une phase, sans modifier les relations (I.50). Dans les formules précédentes, en particulier dans (I.53), on peut faire $\omega = 1$.

II - On peut toujours multiplier $U(\Pi)$ par ± 1 , mais on doit prendre le même facteur dans tout le domaine de supersélection considéré. En conséquence, la parité intrinsèque d'une représentation n'est définie que relativement à celle des autres représentations appartenant au même domaine de supersélection.

b) Masse nulle

Nous allons montrer que la représentation $U(\underline{a}, \Lambda^{-1T})$ est unitairement équivalente à une représentation de masse nulle d'hélicité $-\lambda$, si $U(a, \Lambda)$ est

une représentation irréductible de masse nulle et d'hélicité λ , on a :

$$(\underline{a}, \Lambda^{-1T})_f([\underline{q}]) = e^{i\underline{q}\underline{a}} e^{-i\lambda\varphi} \{[\underline{q}]^{-1} A^{\dagger-1} [\Lambda^T \underline{q}]\}_f([\Lambda^T \underline{q}]) .$$

Dans cette formule $[\underline{q}]^{-1} A^{\dagger-1} [\Lambda^T \underline{q}]$ est une matrice de la forme (I.34), $\mp \varphi/2$ étant la phase des éléments diagonaux. Or :

$$[\underline{q}]^{-1} A^{\dagger-1} [\Lambda^T \underline{q}] = \left([\underline{q}]^{-1} [\underline{q}]^{\dagger-1} \underline{c} \right) \left(\underline{c}^{-1} [\underline{q}]^{\dagger} A^{\dagger-1} [\Lambda^{-1} \underline{q}]^{\dagger-1} \underline{c} \right) \left(\underline{c}^{-1} [\Lambda^{-1} \underline{q}]^{\dagger} [\Lambda^{-1} \underline{q}] \right) .$$

Les trois matrices entre parenthèses sont trois matrices du type (I.34). On peut ainsi associer à chacune l'angle φ correspondant. D'autre part, pour toute matrice unimodulaire, $\underline{c}^{-1} \underline{M} \underline{c} = \underline{M}^{-1T}$, donc la deuxième matrice du membre de droite de l'équation ci-dessus est égale à : $\left([\underline{q}] A [\Lambda^{-1} \underline{q}] \right)^*$, on peut donc écrire :

$$\left(U^{\lambda}(\underline{a}, \Lambda^{-1T}) \right) = \hat{\Pi} U^{-\lambda}(a, \Lambda) \hat{\Pi}^{-1} .$$

En effet, $U^{\lambda}(\underline{a}, \Lambda^{-1T})$ est équivalent à une représentation irréductible induite par la représentation complexe conjuguée du petit groupe, c'est-à-dire à une représentation d'hélicité $(-\lambda)$, on a :

$$(\hat{\Pi} f)[\underline{q}] = e^{-i\lambda\varphi} \{[\underline{q}]^{-1} [\underline{q}]^{\dagger-1} \underline{c}\}_f([\underline{q}]) .$$

De même, $U^{\lambda}(-a, \Lambda)$ est antiunitairement équivalent à une représentation de masse nulle, d'énergie positive ($q^2 = 0, q^0 > 0$) et d'hélicité $(-\lambda)$. $U^{\lambda}(-\underline{a}, \Lambda^{-1T})$ est antiunitairement équivalent à $U^{\lambda}(a, \Lambda)$.

Une représentation irréductible de $\mathcal{P}$ est donc caractérisée par une valeur déterminée de la valeur absolue de l'hélicité. Elle contiendra des représentations d'hélicité opposées (sauf dans le cas $|\lambda| = 0$).

1) Hélicité nulle

On a :

$$\begin{cases} (u(\Pi)f)^i([q]) = A^{ij} f^j([q]) \\ (u(\Pi T)f)^i([q]) = B^{ij} f^{j*}([q]) \\ u(T)f^i([q]) = (AB)^{ij} f^{j*}([q]) \end{cases} \quad (I.54)$$

avec

$$\begin{cases} A^2 = 1, & BB^* = \epsilon_{\Pi T} \\ (AB)(AB)^* = \epsilon_T. \end{cases}$$

Un raisonnement analogue à celui fait pour $m^2 > 0$, montre que dans une représentation irréductible, A et B sont donnés par :

$$\begin{cases} \epsilon_T = \epsilon_{\Pi T} = 1 & : A = \pm 1 & B = \omega \\ \epsilon_T = \epsilon_{\Pi T} = -1 & : A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & B = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon_T = -\epsilon_{\Pi T} = -1 & : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & B = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (I.55)$$

$$|\omega| = 1.$$

2) Hélicité non nulle

L'indice i repère maintenant les couples d'hélicité opposés :

$$\begin{cases} (u(\Pi)f)_\lambda^i([q]) = \sum_j A_\lambda^{ij} \exp(-i\lambda\varphi \{[q]^{-1}[q]^{T-1}c\}) f_{-\lambda}^j([q]) \\ (u(\Pi T)f)_\lambda^i([q]) = \sum_j B_\lambda^{ij} f_{-\lambda}^{j*}([q]) \\ (u(T)f)_\lambda^i([q]) = \sum_j (A_{-\lambda} B_\lambda)^{ij} \exp(i\lambda\varphi \{[q]^{-1}[q]^{T-1}c\}) f_\lambda^{j*}([q]) \end{cases} \quad (I.56)$$

avec :

$$\begin{cases} A_{+\lambda} A_{-\lambda} = (-1)^{2\lambda} ; & B_\lambda B_{-\lambda}^* = \epsilon_{\Pi T} \\ (A_{-\lambda} B_\lambda)(A_{-\lambda} B_\lambda)^* = \epsilon_T (-1)^{2\lambda}, \end{cases}$$

$A_\pm$ étant des matrices unitaires, on peut toujours redéfinir les composantes f_λ^i pour $\lambda < 0$, de telle façon que $A_+ = 1$. On aura donc :

$$\begin{cases} A_{+|\lambda|} = 1, & A_{-|\lambda|} = (-1)^{2\lambda} \\ B_{|\lambda|} B_{-|\lambda|}^* = \epsilon_{\Pi T} \\ B_{|\lambda|} B_{|\lambda|}^* = \epsilon_T (-1)^{2\lambda} \end{cases}$$

$B_{|\lambda|}$ est donc unitaire symétrique si $\epsilon_T = (-1)^{2\lambda}$, antisymétrique si $\epsilon_T = -(-1)^{2\lambda}$. On en déduit les formes irréductibles des matrices A, B et AB, définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A^- \\ A^+ & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B^- \\ B^+ & 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} A^- B^+ & 0 \\ 0 & A^+ B^- \end{pmatrix}. \quad (I.57)$$

Dans cette représentation, l'hélicité est diagonalisée, et représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} |\lambda| \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -|\lambda| \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Type normal : $\epsilon_T = \epsilon_{\Pi T} = (-1)^{2|\lambda|}$

Les formes irréductibles de A, B sont à deux dimensions :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{2\lambda} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \omega \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{2\lambda} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad AB = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (I.58)$$

Types anormaux

1) $\varepsilon_T = -\varepsilon_{\Pi T} = (-1)^{2|\lambda|}$ - A et B sont à deux dimensions :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{2\lambda} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ (-1)^{2\lambda} & 0 \end{pmatrix} \quad AB = \omega \begin{pmatrix} (-1)^{2\lambda} & 0 \\ 0 & (-1)^{2\lambda+1} \end{pmatrix} .$$

2) $\varepsilon_T = (-1)^{2\lambda+1}$ - A et B sont à quatre dimensions :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-1)^{2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2\lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \omega(-1)^{2\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{\Pi T} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\Pi T} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Seul le type normal est utilisé pour décrire les particules existantes. Enfin, comme dans le cas de la masse non nulle, on peut redéfinir l'ensemble des états de façon à obtenir $\omega = 1$.

Remarque

Nous n'avons considéré ici que les représentations d'énergie positive. Les représentations d'énergie négative ont une forme absolument identique. La seule différence réside dans la propriété $[p][p]^\dagger = -\frac{p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{m}$, c'est-à-dire la transformation de Lorentz $[p]$ transforme $(-t)$ en p .

Pour récapituler, nous donnons ici les formules indiquant l'action des opérations discrètes, dans le cas du type normal :

Masse non nulle : de (I.52) et (I.53) on tire :

$$\left\{ \begin{aligned} (u(\Pi)f)_\sigma([q]) &= \vartheta_{\sigma\alpha}^s ([q]^{-1}[q]^\dagger)^{-1} f_\alpha([q]) \\ (u(\Pi T)f)_\sigma([q]) &= \vartheta_{\sigma\alpha}^s (C) f_\sigma^*([q]) \\ (u(T)f)_\sigma([q]) &= \vartheta_{\sigma\alpha}^s ([q]^{-1}[q]^\dagger)^{-1} C f_\alpha^*([q]) . \end{aligned} \right. \quad (I.52.bis)$$

Masse nulle : de (I.56) et (I.58) on tire :

$$\left\{ \begin{aligned} (u(\Pi)f)_\lambda([q]) &= (-1)^{\lambda-|\lambda|} \exp(-i\lambda\varphi \{[q]^{-1}[q]^\dagger\}^{-1} C) f_{-\lambda}([q]) \\ (u(\Pi T)f)_\lambda([q]) &= (-1)^{\lambda+|\lambda|} f_\lambda^*([q]) \\ (u(T)f)_\lambda([q]) &= \exp(i\lambda\varphi \{[q]^{-1}[q]^\dagger\}^{-1} C) f_\lambda^*([q]) . \end{aligned} \right. \quad (I.56.bis)$$

CHAPITRE II

LES ETATS A UNE PARTICULE : BASES SPINORIELLES, CHAMPS

1) - Etats à une particule : vecteurs impropres

On utilise couramment, pour décrire les états à une particule, non pas des paquets d'ondes, mais des "états propres" de l'impulsion : ce ne sont pas des fonctions de l'espace de Hilbert : la fonction d'onde d'un tel état est une fonction δ de Dirac.

a) Masse réelle non nulle, représentation de spin s

On définira l'état $|[p], s_3\rangle$ comme l'état dont la fonction d'onde $f_{\sigma}([p])$ est égale à $2p^0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\sigma s_3}$; cet état est "vecteur propre" commun aux opérateurs P^2 , P_{μ} , W^2 et $S_3(p)$ ce dernier étant défini par (I.22). On aura donc :

$$\begin{cases} P_{\mu} |[p], s_3\rangle = p_{\mu} |[p], s_3\rangle \\ -\frac{1}{m} w(p) \cdot n_3(p) |[p], s_3\rangle = s_3 |[p], s_3\rangle \\ -\frac{1}{m} w(p) \cdot (n_1(p) \pm i n_2(p)) |[p], s_3\rangle = \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3 \pm 1)} |[p], s_3 \pm 1\rangle \end{cases} \quad (II.1)$$

avec $\underline{p} = [p] \overset{\circ}{p} [p]^{\dagger}$ et $\overset{\circ}{p} = m t$.

Ces états sont "normalisés" par :

$$\begin{cases} \langle [p], s_3 | [p'], s_3' \rangle = 2\omega_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s_3 s_3'} \\ p^2 = p'^2 = m^2, \quad \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{cases} \quad (II.2)$$

Les phases relatives des états $|[p], s_3\rangle$ pour des valeurs de p différentes sont fixées par :

$$|[p], s_3\rangle = u([p]) |[p^{\circ}], s_3\rangle \quad (II.3)$$

On vérifie en effet que grâce aux règles de commutation des générateurs, le deuxième membre est bien un état propre de P et $S_3(p)$.

La formule du changement de tétrade, se déduit de (I.26) :

$$\begin{cases} |[p]R, s_3\rangle = |[p], s_3'\rangle \mathcal{D}_{s_3' s_3}^s(R) \\ |[p]', s_3\rangle = |[p], s_3'\rangle \mathcal{D}_{s_3' s_3}^s([p]^{-1}[p]') \end{cases} \quad (II.4)$$

La loi de transformation se déduit de (I.28) :

$$\begin{cases} U(a, \Lambda) |[p], s_3\rangle = e^{i\Lambda p \cdot a} |\Lambda[p], s_3\rangle \\ = e^{i\Lambda p \cdot a} |[p], s_3'\rangle \mathcal{D}_{s_3' s_3}^s([\Lambda p]^{-1} \Lambda [p]) \end{cases} \quad (II.5)$$

L'action des opérations discrètes se déduit de (I.52 et 53) :

$$\begin{cases} U(\Pi) |[p], s_3\rangle = \eta |[p], s_3'\rangle \mathcal{D}_{s_3' s_3}^s([p]^{\dagger}[p]) \\ U(\Pi T) |[p], s_3\rangle = \eta |[p], s_3'\rangle \mathcal{D}_{s_3' s_3}^s(c) \\ U(T) |[p], s_3\rangle = |[p], s_3'\rangle \mathcal{D}_{s_3' s_3}^s([p]^{\dagger}[p] c) \end{cases} \quad (II.6)$$

η est la parité intrinsèque de la représentation considérée. $U(T)$ et $U(\Pi T)$ sont antiunitaires.

b) Masse nulle, hélicité λ

On définira de façon analogue, l'état $|[k], \lambda\rangle$ comme l'état dont la fonction d'onde $f_\lambda([q])$ est égale à $2k^0 \delta(\vec{k} - \vec{q})$. L'état $|[k], \lambda\rangle$ est défini par :

$$\begin{cases} P_\mu |[k], \lambda\rangle = k_\mu |[p], \lambda\rangle \\ \lambda(k) |[k], \lambda\rangle = \lambda |[k], \lambda\rangle \\ W_1(k) |[k], \lambda\rangle = W_2(k) |[k], \lambda\rangle = 0. \end{cases} \quad (II.7)$$

Les phases des divers états $|[k], \lambda\rangle$ sont reliées par :

$$|[k], \lambda\rangle = U([k]) |[k^0], \lambda\rangle \quad (II.8)$$

avec maintenant $k^0 = C = (1, 0, 0, 1)$.

Les formules de changement de tétrade (I.38) s'écrivent

$$\begin{cases} |[k]M, \lambda\rangle = |[k], \lambda\rangle e^{-i\lambda\phi\{M\}} \\ |[k]', \lambda\rangle = |[k], \lambda\rangle e^{-i\lambda\phi\{[k]^{-1}[k]'\}} \\ |[k]', \lambda\rangle = |[k], \lambda\rangle \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{|\lambda|} \left([k]^{-1}[k]' \right). \end{cases} \quad (II.9)$$

Dans la troisième formule figure la fonction $\mathcal{D}$ dont l'argument n'est pas une matrice unitaire, mais constitue l'élément de matrice d'une représentation $(|\lambda|, 0)$ non unitaire de $SL(2, C)$. On a en effet la propriété (cf. Appendice 1)

$$\mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{|\lambda|} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a^{2|\lambda|} \text{ ou } d^{2|\lambda|}$$

suivant que λ est positif ou négatif. M est une matrice de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & z \\ 0 & e^{+i\phi/2} \end{pmatrix}.$$

La loi de transformation (I.39) s'écrit :

$$\begin{cases} U(a, \Delta) |[k], \lambda\rangle = |\Delta[k], \lambda\rangle \\ = |[\Delta k], \lambda\rangle e^{-i\lambda\phi\{[\Delta k]^{-1} \Delta[k]\}} \\ = |[\Delta k], \lambda\rangle \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{|\lambda|} \left([\Delta k]^{-1} \Delta[k] \right). \end{cases} \quad (II.10)$$

Pour décrire l'action des opérations discrètes, nous devons considérer simultanément des états d'hélicités opposées : $|[k], \lambda\rangle$ et $|[k], -\lambda\rangle$. On obtient, alors, à partir de (I.56) et (I.58) :

$$\begin{cases} U(\Pi) |[k], \lambda\rangle = (-1)^{\lambda+|\lambda|} e^{i\lambda\phi\{[\underline{k}]^\dagger[k]C\}} |[k], -\lambda\rangle \\ = |[k], -\lambda\rangle \mathcal{D}_{-\lambda, \lambda}^{|\lambda|} \left\{ [\underline{k}]^\dagger[k] \right\} \\ U(\Pi T) |[k], \lambda\rangle = (-1)^{\lambda-|\lambda|} |[k], -\lambda\rangle = |[k], -\lambda\rangle \mathcal{D}_{-\lambda\lambda}^{|\lambda|} (C) \\ U(T) |[k], \lambda\rangle = e^{-i\lambda\phi\{[\underline{k}]^\dagger[k]C\}} |[k], \lambda\rangle \\ = |[k], \lambda\rangle \mathcal{D}_{\lambda, \lambda}^{|\lambda|} \left\{ [\underline{k}]^\dagger[k]C \right\}, \end{cases} \quad (II.11)$$

on remarque la similitude de ces formules avec les formules analogues (II.6), mais, ici il n'y a pas de sommation sur les indices λ .

On peut retrouver les lois de transformation des fonctions d'onde à partir de celles sur les états. Pour cela, il suffit d'utiliser :

$m^2 > 0$, spin s :

$$|\Phi\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} \sum_{s_3} \varphi_{s_3}([p]) |[p], s_3\rangle$$

$$\varphi_{s_3}([p]) = \langle [p], s_3 | \Phi \rangle \quad \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$m^2 = 0$, hélicité $\pm \lambda$:

$$|\Phi\rangle = \int \frac{d^3\vec{k}}{2|\vec{k}|} \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda}([k]) |[k], \lambda\rangle$$

$$\varphi_{\lambda}([k]) = \langle [k], \lambda | \Phi \rangle .$$

(II.12)

La somme sur λ porte sur une seule valeur si on ne tient pas compte de la parité, sur deux valeurs opposées $\pm \lambda$ dans le cas contraire.

2) - Amplitudes spinorielles : cas de la masse non nulle

a) Amplitudes spinorielles $[\vartheta]$

La loi de covariance par changement de tétrade (I.26), s'écrit :

$$\varphi_{s_3}([p]') = \sum_{s_3'} \mathcal{D}_{s_3 s_3'}^s([p]'^{-1}[p]) \varphi_{s_3'}([p]) ,$$

on en déduit que la quantité $\varphi_A([p])$ définie par :

$$\varphi_A([p]) = \sum_{s_3} \mathcal{D}_{As_3}^s([p]) \varphi_{s_3}([p]) ,$$

ne dépend que de p et pas de la matrice unimodulaire $[p]$. On posera donc :

$$\varphi_A(p) = \sum_{s_3} \mathcal{D}_{As_3}^s([p]) \varphi_{s_3}([p]) . \quad (II.13)$$

De même, en vertu de l'unitarité de $[p]'^{-1}[p]$, c'est-à-dire : $[p]'^{-1}[p] = [p]'^{\dagger}[p]^{\dagger^{-1}}$, on peut également définir la quantité $\hat{\varphi}_A(p)$ qui ne dépend que de p , par la relation :

$$\hat{\varphi}_A(p) = \sum_{s_3} \mathcal{D}_{As_3}^s([p]^{\dagger^{-1}}) \varphi_{s_3}([p]) . \quad (II.14)$$

La loi de transformation des amplitudes φ et $\hat{\varphi}$, se déduit de

$$(a, \Lambda) \varphi_A(p) = \mathcal{D}_{As_3}^s([p]) \varphi_{s_3}(\Lambda^{-1}p) e^{ip.a}$$

$$(a, \Lambda) \hat{\varphi}(p) = \mathcal{D}([p]) \mathcal{D}([p]^{-1}\Lambda) \varphi(\Lambda^{-1}p) e^{ip.a} .$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, \Lambda) \varphi(p) = \mathcal{D}^s(\Lambda) \varphi(\Lambda^{-1}p) e^{ip.a} \\ (a, \Lambda) \hat{\varphi}(p) = \mathcal{D}^s(\Lambda^{\dagger^{-1}}) \varphi(\Lambda^{-1}p) e^{ip.a} \end{array} \right. \quad (II.15)$$

φ et $\hat{\varphi}$ sont appelées amplitudes spinorielles de l'état $|\Phi\rangle$. On détermine de façon analogue l'action des opérations discrètes. Pour la parité, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \Pi \varphi_A(p) &= \mathcal{D}_{As_3}^s([p]) \Pi \varphi_{s_3}([p]) \\ &= \mathcal{D}_{As_3}^s([p]) \mathcal{D}_{s_3 s_3'}^s([p]^{-1}[p]^{\dagger^{-1}}) \varphi_{s_3'}([p]) \end{aligned}$$

on en tire les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{\varphi(p)} = \eta \widehat{\varphi}(\underline{p}) \ ; \ \Pi_{\widehat{\varphi}(p)} = \eta \varphi(\underline{p}) \\ \Pi T_{\varphi(p)} = \eta \mathcal{D}^S(C) \widehat{\varphi}^*(p) \ ; \ \Pi T_{\widehat{\varphi}(p)} = \eta \mathcal{D}^S(C) \varphi^*(p) \quad (\text{II.16}) \\ T_{\varphi(p)} = \mathcal{D}^S(C) \varphi^*(\underline{p}) \ ; \ T_{\widehat{\varphi}(p)} = \mathcal{D}^S(C) \widehat{\varphi}^*(\underline{p}) \end{array} \right.$$

on vérifie immédiatement sur ces formules les relations $U(T)^2 = U(\Pi T)^2 = (-1)^{2s}$, car $(\mathcal{D}^S(C))^2 = (-1)^{2s}$.

Les amplitudes φ et $\widehat{\varphi}$ ne sont pas indépendantes : en éliminant $\varphi_{\underline{p}}$ entre (II.13) et (II.14), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A(p) = \mathcal{D}_{AA'}^S \left(\frac{\underline{p}}{m} \right) \widehat{\varphi}_{A'}(p) \\ \widehat{\varphi}_A(p) = \mathcal{D}_{AA'}^S \left(\frac{\underline{p}}{m} \right) \varphi_{A'}(p) \end{array} \right. \quad (\text{II.17})$$

on a utilisé :

$$\frac{1}{m} \underline{p} = [p][p]^\dagger = \frac{1}{m} (p^0 + \vec{p} \vec{\sigma})$$

$$\text{et } \tilde{\underline{p}} = p^0 - \vec{p} \vec{\sigma} .$$

Le produit scalaire de deux états $\langle \psi, \phi \rangle$ s'exprime de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \phi | \psi \rangle = \int \frac{d^3 \underline{p}}{2\omega_p} \sum_{A, A'} \varphi_{A'}^*(p) \mathcal{D}_{AA'}^S \left(\frac{\underline{p}}{m} \right) \psi_A(p) \\ = \int \frac{d^3 \underline{p}}{2\omega_p} \sum_A \varphi_A^*(p) \widehat{\psi}_A(p) . \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

La transformation des fonctions d'onde aux amplitudes spinorielles n'est pas une transformation unitaire. Aussi la forme du produit scalaire n'est

pas la même suivant qu'on l'exprime en fonction des fonctions d'onde ou des amplitudes spinorielles. Néanmoins les deux types d'amplitudes spinorielles peuvent être considérés comme les composantes covariantes et contravariantes d'un même état, ainsi que le montre (II.18).

Afin de donner une forme simple à l'action de la parité, on a l'habitude de considérer des "spineurs de Dirac" à $2(2s+1)$ composantes :

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \widehat{\varphi}(p) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.19})$$

on a alors

$$(a, \Lambda)_{\Phi_\alpha(p)} = e^{ip \cdot a} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\Lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\Lambda^{\dagger-1}) \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \Phi_{\alpha'}(\Lambda^{-1}p) \quad (\text{II.20})$$

$$\Pi_{\Phi_\alpha(p)} = \eta \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \Phi_{\alpha'}(p) \quad (\text{II.21})$$

$$T_{\Phi_\alpha(p)} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(C) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(C) \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \Phi_{\alpha'}^*(p) \quad (\text{II.22})$$

$$(\Pi T)_{\Phi_\alpha(p)} = \eta \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}(C) \\ \mathcal{D}(C) & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \Phi_{\alpha'}^*(p) . \quad (\text{II.23})$$

Enfin on a l'équation de Dirac (cf II.17)

$$\Phi_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}(\frac{\underline{p}}{m}) \\ \mathcal{D}(\frac{\tilde{\underline{p}}}{m}) & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \Phi_{\alpha'}(p) . \quad (\text{II.24})$$

Le produit scalaire s'exprime (cf II.18)

$$\langle \psi | \bar{\psi} \rangle = \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} \Psi_{\alpha}^{*}(p) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \bar{\Phi}_{\alpha'}(p) . \quad (\text{II.25})$$

Remarque

Nous avons considéré ici uniquement les représentations d'énergie positive. Dans le cas d'une représentation d'énergie négative, on peut faire les mêmes calculs, mais on a maintenant

$$[p][p]^{\dagger} = - \frac{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{m} = - \frac{\not{p}}{m} .$$

Il faut donc remplacer $\underline{p}$ et $\tilde{p}$ par $-\underline{p}$ et $-\tilde{p}$ dans les équations (II.17) et (II.18).

Les spineurs sont définis de façon différente de (II.19) :

$$p^0 < 0 : \bar{\Phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ (-1)^{2s} \hat{\varphi}(p) \end{pmatrix} . \quad (\text{II.26})$$

Les formules (II.20), (II.22) et (II.24) sont inchangées, alors que les matrices figurant dans les seconds membres de (II.21) et (II.23) sont multipliées par $(-1)^{2s}$.

L'équation de Dirac (II.24) décrit donc simultanément des représentations d'énergie positive et négative. Avec la définition (II.26), le produit scalaire s'écrit :

$$p^0 < 0 : \langle \bar{\psi} | \psi \rangle = (-1)^{2s} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} \Psi_{\alpha}^{*}(p) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \bar{\Phi}_{\alpha'}(p) . \quad (\text{II.27})$$

Le produit scalaire défini par :

$$\int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} \Psi_{\alpha}^{*}(p) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \bar{\Phi}_{\alpha'}(p)$$

n'est donc pas défini positif quand s est demi entier.

b) Bases spinorielles

Les amplitudes spinorielles introduites précédemment peuvent être considérées comme les composantes d'un état sur deux bases spinorielles bi-orthogonales constituées par des vecteurs impropres :

$$\begin{cases} |p, A\rangle = \sum_{s_3} |[p], s_3\rangle \mathcal{D}_{s_3 A}^s([p]^{-1}) \\ |p, \hat{A}\rangle = \sum_{s_3} |[p], s_3\rangle \mathcal{D}_{s_3 \hat{A}}^s([p]^{\dagger}) . \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Loi de transformation :

$$\begin{cases} U(a, \Lambda) |p, A\rangle = e^{i\Lambda p \cdot a} |\Lambda p, A'\rangle \mathcal{D}_{A' A}^s(\Lambda) \\ U(a, \Lambda) |p, \hat{A}\rangle = e^{i\Lambda p \cdot a} |\Lambda p, \hat{A}'\rangle \mathcal{D}_{\hat{A}' \hat{A}}^s(\Lambda^{\dagger-1}) . \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Produit scalaire :

$$\begin{cases} \langle p, \hat{A} | p', A' \rangle = \delta_{AA'} 2\omega_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\ \langle p, A | p', A' \rangle = \mathcal{D}_{AA'}^s \left(\frac{1}{m} \tilde{p} \right) 2\omega_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\ \langle p, \hat{A} | p', \hat{A}' \rangle = \mathcal{D}_{AA'}^s \left(\frac{1}{m} \underline{p} \right) 2\omega_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') . \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Action des opérations discrètes :

$$\begin{cases} U(\Pi) |p, A\rangle = \eta |p, \hat{A}\rangle \\ U(\Pi) |p, \hat{A}\rangle = \eta |p, A\rangle \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{aligned}
 U(T) |p, A\rangle &= |p, A'\rangle \mathcal{D}_{A', A}^S(C) \\
 U(T) |p, \hat{A}\rangle &= |p, \hat{A}'\rangle \mathcal{D}_{\hat{A}', \hat{A}}^S(C) \\
 U(\Pi T) |p, A\rangle &= \eta |p, \hat{A}'\rangle \mathcal{D}_{A', A}^S(C) \\
 U(\Pi T) |p, \hat{A}\rangle &= \eta |p, A'\rangle \mathcal{D}_{\hat{A}', \hat{A}}^S(C) .
 \end{aligned}
 \tag{II.31}$$

Les amplitudes spinorielles φ et $\hat{\varphi}$ d'un état définies par

$$|\Phi\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} \sum_A \varphi_A(p) |p, A\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} \sum_A \hat{\varphi}_A(p) |p, \hat{A}\rangle \tag{II.32}$$

se calculent à l'aide de :

$$\begin{cases} \varphi_A(p) = \langle p, \hat{A} | \Phi \rangle \\ \hat{\varphi}_A(p) = \langle p, A | \Phi \rangle . \end{cases} \tag{II.33}$$

Pour terminer, nous allons donner la forme des "spineurs de Dirac" associés à l'état $|[p], s_3\rangle$: les deux composantes spinorielles $u_A(q)$ et $\hat{u}_A(q)$ de cet état sont respectivement

$$\begin{aligned}
 u_A(q) &= \langle q, \hat{A} | [p], s_3 \rangle = 2\omega_p \delta(\vec{p}-\vec{q}) \mathcal{D}_{As_3}^S([p]) \\
 \hat{u}_A(q) &= \langle q, A | [p], s_3 \rangle = 2\omega_p \delta(\vec{p}-\vec{q}) \mathcal{D}_{As_3}^S([p]^{\dagger-1}) .
 \end{aligned}$$

Le spineur de Dirac associé est donc :

$$u(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\omega_p \delta(\vec{p}-\vec{q}) \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{As_3}^S([p]) \\ \mathcal{D}_{As_3}^S([p]^{\dagger-1}) \end{pmatrix} .$$

Suivant la convention usuelle, on posera :

$$u_\alpha([p], s_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{As_3}^S([p]) \\ \mathcal{D}_{As_3}^S([p]^{\dagger-1}) \end{pmatrix} \tag{II.34}$$

α est un indice qui prend $2 \times (2s+1)$ valeurs, repérées par les valeurs prises par l'un ou l'autre des indices A figurant dans les matrices $\mathcal{D}$. Ces spineurs sont normalisés à :

$$u_\alpha^*([p], s_3) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} u_{\alpha'}([p], s_3) = \delta_{s_3 s_3'} . \tag{II.35}$$

3) - Amplitudes spinorielles, cas de la masse nulle

La construction des amplitudes spinorielles dans le cas de la masse nulle est due à Zwanziger^[16].

La loi de covariance par changement de tétrade s'écrit :

$$\varphi([k]', \lambda) = \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{|\lambda|}([k]'^{-1}[k]) \varphi([k], \lambda) .$$

a) $\lambda > 0$

On construit la quantité :

$$\begin{aligned}
 \varphi_A^+(k) &= \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|}([k]') \varphi([k]', \lambda) \\
 &= \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|}([k]') \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{|\lambda|}([k]'^{-1}[k]) \varphi([k], \lambda) .
 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de sommation sur λ . On peut en introduire une, à condition d'insérer le projecteur :

$$\mathcal{D}_{mm'}^{|\lambda|} \left(\frac{1+\sigma_3}{2} \right) = \delta_{|\lambda|,m} \delta_{|\lambda|,m'}$$

$$\varphi_A^+(k) = \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|} \left([k]^\dagger \frac{1+\sigma_3}{2} [k]^\dagger [k]^\dagger^{-1} \right) \varphi([k], \lambda)$$

(On a également utilisé le fait que l'on peut remplacer $[k]^\dagger^{-1}[k]$ par $[k]^\dagger [k]^\dagger^{-1}$ à l'intérieur de la matrice $\mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{|\lambda|}$) on a alors :

$$[k]^\dagger \frac{1+\sigma_3}{2} [k]^\dagger = [k] \frac{1+\sigma_3}{2} [k]^\dagger = \frac{k^0 + \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{2}$$

D'où

$$\varphi_A^+(k) = \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|}([k]) \varphi([k], \lambda) ; \lambda = |\lambda| \quad (II.36)$$

L'expression définie en (II.36) ne dépend donc pas de la matrice $[k]$, mais seulement de k , d'où la notation $\varphi_A^+(k)$.

De $(a, \Lambda) \varphi([k], \lambda) = e^{ik \cdot a} \varphi(\Lambda^{-1}[k], \lambda)$,

on tire :

$$\begin{aligned} (a, \Lambda) \varphi_A^+(k) &= \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|}([k]) \varphi(\Lambda^{-1}[k], \lambda) \\ &= \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|}([k]) \mathcal{D}_{\lambda A}^{|\lambda|}([k]^{-1} \Lambda) \varphi_A^+(\Lambda^{-1}k) \end{aligned}$$

On peut sommer sur λ , car la formule (II.36) s'inverse par :

$$\delta_{\lambda\mu} \varphi([k], \lambda) = \sum_A \mathcal{D}_{\mu A}^{|\lambda|}([k]^{-1}) \varphi_A^+(k) \quad (II.37)$$

D'où :

$$(a, \Lambda) \varphi_A^+(k) = \mathcal{D}_{AA}^{|\lambda|}(\Lambda) \varphi_A^+(\Lambda^{-1}k) e^{i\Lambda k \cdot a} \quad (II.38)$$

Le produit scalaire ne s'écrit pas simplement sous une forme indépendante de la tétrade choisie :

$$\int \varphi^*([k], \lambda) \psi([k], \lambda) \frac{d^3 \vec{k}}{2|\vec{k}|} = \int \varphi_A^{+\dagger}(k) \mathcal{D}_{AA}^{|\lambda|}(\tilde{n}) \psi_A^+(k) \frac{d^3 \vec{k}}{2|\vec{k}|} \text{ avec } \tilde{n} = [k]^\dagger^{-1} [k]^{-1}$$

Le deuxième membre n'est indépendant de $[k]$ que grâce à (II.37).

On peut également introduire l'état $|k, \hat{A}, +\lambda\rangle$ par la formule :

$$\langle k, \hat{A}, +\lambda | \bar{\Phi} \rangle = \varphi_A^+(k) \quad (II.39)$$

on a :

$$|k, \hat{A}, +\lambda\rangle = |[k], +\lambda\rangle \mathcal{D}_{\lambda A}^{|\lambda|}([k]^\dagger) \quad (II.39_{bis})$$

On vérifie aisément que le deuxième membre est indépendant de $[k]$. La loi de transformation s'écrit :

$$U(a, \Lambda) |k, \hat{A}, +\lambda\rangle = e^{i\Lambda k \cdot a} |\Lambda k, \hat{A}', +\lambda\rangle \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(\Lambda^{\dagger-1}) \quad (II.40)$$

on a le produit scalaire :

$$\langle k', \hat{A}', +\lambda | k, \hat{A}, +\lambda \rangle = 2|\vec{k}| \delta(\vec{k} - \vec{k}') \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|} \left(\frac{\vec{k}}{2|\vec{k}|} \right) \quad (II.41)$$

On ne peut pas construire, pour $\lambda > 0$, de fonctions d'onde se transformant par $\mathcal{D}(\Lambda^{\dagger-1})$ ni d'état se transformant par $\mathcal{D}(\Lambda)$. D'autre part, et ceci est une autre différence avec le cas $m \neq 0$, les diverses fonctions d'onde $\varphi_A^+(k)$ ne sont pas indépendantes, ainsi que le montre (II.37). La quantité $\sum_A \mathcal{D}_{\mu A}^{|\lambda|}([k]^{-1}) \varphi_A^+(k)$ étant nulle pour $\mu \neq |\lambda|$, satisfait :

$$\sum_{\mu, A} \mathcal{D}_{\alpha\mu}^{|\lambda|} \left(\frac{1+\sigma_3}{2} \right) \mathcal{D}_{\mu A}^{|\lambda|} ([k]^{-1}) \varphi_A^+(k) = \sum_A \mathcal{D}_{\alpha A}^{|\lambda|} ([k]^{-1}) \varphi_A^+(k),$$

soit

$$\mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left([k] \frac{1+\sigma_3}{2} [k]^\dagger [k]^\dagger{}^{-1} [k]^{-1} \right) \varphi_{A'}^+(k) = \varphi_A^+(k).$$

Donc :

$$\mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left(\frac{\tilde{k} \tilde{n}}{2} \right) \varphi_{A'}^+(k) = \varphi_A^+(k) \quad (\text{II.42})$$

n est le transformé de l'axe des temps par $[k]$. On a :

$$(n.k) = (t.\dot{k}) = 1., \text{ et } n^2 = 1.$$

Notons que si les fonctions $\varphi_A^+(k)$ satisfont (II.42) pour un certain n , (lié au choix de la tétrade $[k]$: on dit que l'on décrit la particule dans la jauge de radiation d'axe des temps n), elles satisfont la relation pour tout vecteur n' tel que $n'.k = 1$, en effet on a :

$$\tilde{k} \tilde{n}' \tilde{k} \tilde{n} = 2(n'.k) \tilde{k} \tilde{n}, \text{ car } k^2 = 0.$$

La condition générale est donc :

$$\mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left(\frac{\tilde{k} \tilde{n}}{2(n.k)} \right) \varphi_{A'}^+(k) = \varphi_A^+(k) \quad (\text{II.43})$$

On peut montrer que, réciproquement, si φ^+ satisfait à (II.43) pour un n quelconque, (pas nécessairement du genre temps) il y satisfait également pour tout n (car on a $\tilde{k} \tilde{n} = \tilde{k}(\tilde{n} + \alpha \tilde{k})$ pour tout α), et notamment pour un n satisfaisant $n^2 = n.k = 1$. Ainsi on montre que (II.43) (avec n quelconque, à la restriction près : $n.k \neq 0$) est équivalent à (II.37).

Il n'est pas possible de s'abstraire de cette manière de la nécessité d'utiliser un vecteur extérieur pour exprimer la relation entre les amplitudes spinorielles. Pour le faire, il faut découpler le spin s et l'indice magnétique A ; nous allons montrer que (II.43) est équivalent à :

$$\sum_{\alpha', A} (\tilde{k})_{\alpha\alpha'} \langle \frac{1}{2} \alpha' ; |\lambda| - \frac{1}{2}, M \mid |\lambda|, A \rangle \varphi_A^+(k) = 0 \quad (\text{II.44})$$

pour toute valeur des indices α et M .

En effet, le premier membre est égal à :

$$\begin{aligned} & (\tilde{k})_{\alpha\alpha'} \langle \frac{1}{2} \alpha' ; |\lambda| - \frac{1}{2}, M \mid |\lambda|, A \rangle \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left(\frac{\tilde{k} \tilde{n}}{2(n.k)} \right) \varphi_{A'}^+(k) \\ &= (\tilde{k})_{\alpha\alpha'} (\tilde{k} \tilde{n})_{\alpha', \alpha''} \mathcal{D}_{M, M'}^{|\lambda| - 1/2} \left(\frac{\tilde{k} \tilde{n}}{2(n.k)} \right) \langle \frac{1}{2}, \alpha'' ; |\lambda| - \frac{1}{2}, M' \mid |\lambda|, A' \rangle \varphi_{A'}^+(k) \left(\frac{1}{2(n.k)} \right) \\ &= 0, \text{ car } \tilde{k} \tilde{k} \tilde{n} = k^2 n. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons (II.44) vérifié, et montrons qu'on peut en déduire (II.43). En effet :

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left(\frac{\tilde{k} \tilde{n}}{2(n.k)} \right) \varphi_{A'}^+(k) = \quad (\text{II.45}) \\ & \left(\begin{array}{c} |\lambda| \\ A \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1/2 \dots 1/2 \\ \alpha_1 \dots \alpha_2 |\lambda| \end{array} \right) \left(\frac{\tilde{k} \tilde{n}}{2(n.k)} \right)_{\alpha_1, \alpha_1'} \dots \left(\frac{\tilde{k} \tilde{n}}{2(n.k)} \right)_{\alpha_2, |\lambda| \alpha_2' |\lambda|} \left(\begin{array}{c} |\lambda| \\ A' \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1/2 \dots 1/2 \\ \alpha_1' \dots \alpha_2' |\lambda| \end{array} \right) \varphi_{A'}^+(k) \end{aligned} \right.$$

$\left(\begin{array}{c} |\lambda| \\ A \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1/2 \dots 1/2 \\ \alpha_1 \dots \alpha_2 |\lambda| \end{array} \right)$ est le coefficient de Clebsch-Gordan décrivant le couplage (qui se fait de façon unique) de $2|\lambda|$ spins $1/2$ pour former le spin $|\lambda|$.
D'autre part, on a :

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{n}}{2(n \cdot k)} = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{2(n \cdot k)} + 1$$

et en vertu de (II.44),

$$(\vec{n} \cdot \vec{k})_{\alpha_1 \alpha_1'} \begin{pmatrix} |\lambda| & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ A' & \alpha_1' & \alpha_2' & \dots & \alpha_2' |\lambda| \end{pmatrix} \varphi_{A'}^+(k) = 0$$

car on peut recoupler les $2|\lambda|-1$ spin $1/2$ dont les indices magnétiques $\alpha_2' \dots \alpha_2' |\lambda|$ sont libres, pour former un spin $|\lambda|-1/2$. Donc on peut remplacer partout, dans (II.45), $\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{n}}{2n \cdot k}\right)_{\alpha \alpha'}$ par $\delta_{\alpha \alpha'}$. Ainsi le deuxième membre, après sommation sur les α_1' , se réduit à $\delta_{AA'}$, d'où la relation (II.43).

Remarque

Si l'on prend, dans (II.43), pour vecteur n le vecteur unitaire porté par l'axe des temps, on a :

$$\mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{k}|} \right) \right) \varphi_{A'}^+(k) = \varphi_A^+(k) . \quad (II.46)$$

b) $\lambda < 0$

On ne peut pas construire dans le cas $\lambda < 0$, d'amplitudes $\varphi(p)$ se transformant par $\mathcal{D}(\Lambda)$, ni d'état se transformant par $\mathcal{D}(\Lambda^{\dagger-1})$. On définira cette fois :

$$\widehat{\varphi}_A^-(k) = \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|} \left([k]^{\dagger-1} \right) \varphi \left([k], \lambda \right) \quad \lambda = -|\lambda| . \quad (II.47)$$

La quantité ainsi définie ne dépend que de k . On a les propriétés suivantes :

$${}^{(a, \Lambda)} \widehat{\varphi}_A^-(k) = \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} (\Lambda^{\dagger-1}) \widehat{\varphi}_{A'}^-(\Lambda^{-1}k) e^{i\Lambda k \cdot a} \quad (II.48)$$

$$\delta_{\lambda \mu} \varphi([k], \lambda) = \sum_A \mathcal{D}_{\mu A}^{|\lambda|} \left([k]^{\dagger} \right) \widehat{\varphi}_A^-(k) . \quad (II.49)$$

Le produit scalaire est :

$$\int \varphi^* \left([k], \lambda \right) \psi \left([k], \lambda \right) \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} = \int \widehat{\varphi}_A^{-*}(k) \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left([k][k]^{\dagger} \right) \widehat{\psi}_{A'}^+(k) \frac{d^3 \vec{k}}{2|\vec{k}|} . \quad (II.50)$$

Nous définirons également une base d'état :

$$\begin{cases} |k, A, -|\lambda| \rangle = |[k], -|\lambda| \rangle \mathcal{D}_{\lambda A}^{|\lambda|} \left([k]^{-1} \right) \\ \lambda = -|\lambda| \end{cases} \quad (II.51)$$

on a les propriétés suivantes :

$$U(a, \Lambda) |k, A, -|\lambda| \rangle = e^{i\Lambda k \cdot a} |\Lambda k, A', -|\lambda| \rangle \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|} (\Lambda) \quad (II.52)$$

$$\langle k', A', -|\lambda| | k, A, -|\lambda| \rangle = 2|\vec{k}| \delta(\vec{k} - \vec{k}') \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|} \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) \quad (II.53)$$

on calcule l'amplitude spinorielle de l'état $|\Phi\rangle$, par :

$$\langle k, A, -|\lambda| | \Phi \rangle = \widehat{\varphi}_A^-(k) . \quad (II.54)$$

Les amplitudes spinorielles ne sont pas indépendantes, et satisfont aux conditions suivantes, équivalentes à (II.42) :

$$\mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{n}}{2(n \cdot k)} \right) \widehat{\varphi}_{A'}^-(k) = \widehat{\varphi}_A^-(k) \quad (II.55)$$

$$\sum_{\alpha' A} (\vec{k})_{\alpha \alpha'} \langle \frac{1}{2} \alpha' ; |\lambda| - \frac{1}{2}, M | |\lambda|, A \rangle \widehat{\varphi}_A^-(k) = 0 . \quad (II.56)$$

On peut, dans (II.55) choisir n quelconque (pourvu que $n \cdot k \neq 0$) en particulier si n est l'axe des temps, on a :

$$\mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{k}|} \right) \right) \widehat{\varphi}_{A'}^-(\underline{k}) = \widehat{\varphi}_A^-(\underline{k}). \quad (\text{II.57})$$

c) Introduction de la parité : $\lambda = \pm |\lambda|$

Si l'on introduit les opérations discrètes on doit considérer simultanément deux représentations d'hélicités opposées. On peut donc associer à un état deux types d'amplitudes spinorielles $\varphi_A^+(\underline{k})$ et $\widehat{\varphi}_A^-(\underline{k})$ ayant les propriétés décrites en a) et b). Seule la parité et l'inversion totale va les relier :

$$\text{on posera : } \begin{cases} \langle p, \widehat{A}, +|\lambda| | \underline{\Phi} \rangle = \varphi_A^+(p) \\ \langle p, A, -|\lambda| | \underline{\Phi} \rangle = \widehat{\varphi}_A^-(p). \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Des lois de transformation des amplitudes $\varphi([\underline{k}], \lambda)$ et des relations entre ces amplitudes et les amplitudes spinorielles, on déduit :

$$\begin{cases} \Pi_{\varphi_A^+}(\underline{k}) = \widehat{\varphi}_A^-(\underline{k}) \\ \Pi_{\widehat{\varphi}_A^-}(\underline{k}) = \varphi_A^+(\underline{k}). \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

Montrons par exemple la première relation ($\lambda > 0$) :

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi_A^+}(\underline{k}) &= \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|}([\underline{k}]) \Pi_{\varphi([\underline{k}], \lambda)} = e^{-i\lambda\varphi\{[\underline{k}]^\dagger[\underline{k}]\mathcal{C}\}} \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|}([\underline{k}]) \varphi([\underline{k}], -\lambda) \\ &= \mathcal{D}_{A\lambda}^{|\lambda|} \left([\underline{k}] \frac{1+\sigma_3}{2} [\underline{k}]^\dagger [\underline{k}] [\underline{k}]^\dagger [\underline{k}]^{-1} \mathcal{C} \right) \varphi([\underline{k}], -\lambda), \end{aligned}$$

soit, en posant $[\underline{k}][\underline{k}]^\dagger = \underline{n}$, et en utilisant $\tilde{\underline{k}} = \underline{k}$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi_A^+}(\underline{k}) &= \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\tilde{\underline{k}} \underline{n}) \mathcal{D}_{A'-\lambda}^{|\lambda|}([\underline{k}]^{\dagger-1}) \varphi([\underline{k}], -\lambda) \\ &= \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\tilde{\underline{k}} \underline{n}) \widehat{\varphi}_{A'}^-(\underline{k}) = \widehat{\varphi}_A^-(\underline{k}) \end{aligned}$$

on a utilisé $\mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\mathcal{C}) = +1$.

De façon analogue, on détermine :

$$\begin{cases} \Pi_{\varphi_A^+}(\underline{k}) = \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\mathcal{C}) \widehat{\varphi}_{A'}^{+*}(\underline{k}) \\ \Pi_{\widehat{\varphi}_A^-}(\underline{k}) = \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\mathcal{C}) \varphi_{A'}^{+*}(\underline{k}) \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

$$\begin{cases} T_{\varphi_A^+}(\underline{k}) = \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\mathcal{C}) \varphi_{A'}^{+*}(\underline{k}) \\ T_{\widehat{\varphi}_A^-}(\underline{k}) = \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\mathcal{C}) \widehat{\varphi}_{A'}^{+*}(\underline{k}). \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

Ces formules sont en parfaite analogie avec celles obtenues dans le cas de la masse non nulle. On peut construire des spineurs à $2(2|\lambda|+1)$ composantes

$$\psi_\alpha(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_A^+(\underline{k}) \\ \widehat{\varphi}_A^-(\underline{k}) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.62})$$

on a alors

$${}_{(a,\Lambda)}\psi_\alpha(\underline{k}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\Lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\Lambda^{\dagger-1}) \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}(\Lambda^{-1}\underline{k}) \quad (\text{II.63})$$

$$\Pi_{\psi_\alpha}(\underline{k}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}(\underline{k}) \quad (\text{II.64})$$

$$T_{\psi_\alpha}(\underline{k}) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{C}) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\mathcal{C}) \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}^*(\underline{k}). \quad (\text{II.65})$$

Enfin les "spineurs" $\psi(k)$ satisfont à l'équation de Dirac :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}(\tilde{k}) \\ \mathcal{D}(\underline{k}) & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha}(k) = 0. \quad (\text{II.66})$$

En effet, on a la relation (II.37) pour $\lambda > 0$:

$$\delta_{\mu\lambda} \varphi([k], \lambda) = \sum_A \mathcal{D}_{\mu A}^{|\lambda|} \left([k]^{-1} \right) \varphi_A^+(k),$$

multiplions les deux membres par $\mathcal{D}_{B\mu}^{|\lambda|} \left([k]^{\dagger-1} \left(\frac{1-\sigma_3}{2} \right) \right)$ et sommons sur μ , le

premier membre donne zéro car $\mathcal{D}^{|\lambda|} \left(\frac{1-\sigma_3}{2} \right)$ est le projecteur sur l'hélicité $(-\lambda)$, on a alors :

$$\mathcal{D}_{BA}^{|\lambda|}(k) \varphi_A^+(k) = 0.$$

De façon analogue on montrerait que :

$$\mathcal{D}_{BA}^{|\lambda|}(k) \hat{\varphi}_A^-(k) = 0.$$

Ces deux relations sont équivalentes à (II.66), ce qui montre en particulier qu'on ne peut pas utiliser l'équation de Dirac pour constituer des amplitudes $\hat{\varphi}^+$ et $\hat{\varphi}^-$.

Enfin le produit scalaire de deux états $|\Phi\rangle$ et $|\Psi\rangle$ représentés par les spineurs correspondants est :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \frac{d^3\vec{k}}{2|\vec{k}|} \hat{\Phi}_{\alpha}^*(k) \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\tilde{n}) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\underline{n}) \end{pmatrix}_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha}(k), \quad (\text{II.67})$$

où

$$\tilde{n} = [k]^{\dagger-1} [k]^{-1}$$

$$\underline{n} = [k] [k]^{\dagger}.$$

Enfin, des formules (II.59 à 61) on peut déduire l'action des opérations discrètes sur les vecteurs de la base spinorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\Pi) |p, \hat{A}, +|\lambda\rangle = |p, A, -|\lambda\rangle \\ u(\Pi) |p, A, -|\lambda\rangle = |p, \hat{A}, +|\lambda\rangle \\ u(T) |p, \hat{A}, +|\lambda\rangle = \sum_{A'} |p, \hat{A}', +|\lambda\rangle \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(c) \\ u(T) |p, A, -|\lambda\rangle = \sum_{A'} |p, A', -|\lambda\rangle \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(c). \end{array} \right. \quad (\text{II.68})$$

Remarque

Les représentations de masse nulle considérées jusqu'ici, sont à énergie positive. Pour des représentations d'énergie négative, on peut développer le même formalisme. Mais dans ce cas, $[k]$ transforme le vecteur $(-1, 0, 0, -1)$ en k , c'est-à-dire :

$$[k](1 + \sigma_z)[k]^{\dagger} = -\underline{k}.$$

En d'autres termes, dans toutes les formules où n'apparaît pas explicitement $\underline{k}$, il n'y a aucun changement. Si on continue à poser :

$$\underline{n} = [k][k]^{\dagger},$$

le produit scalaire (II.67) est inchangé, mais on doit modifier d'un signe $(-1)^{2|\lambda|}$ l'un des membres des relations (II.43) et (II.55) qui traduisent l'existence d'un seul état d'hélicité. De toute façon l'équation de Dirac (II.67) reste vérifiée.

4) - Champs libres

Les champs libres sont des opérateurs de l'espace de Fock $\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$. $\mathcal{H}_n$ est le produit tensoriel symétrisé ou antisymétrisé de n espaces de Hilbert isomorphes à l'espace des états à une particule. Le champ a une loi de transformation locale sous l'action des opérations du groupe de Poincaré. Les règles de commutation du champ en deux points différents, qui traduisent son caractère quantique, peuvent se déduire des règles de commutation des opérateurs qui apparaissent dans sa transformée de Fourier, qui sont les opérateurs de création et d'annihilation des états à une particule, et portent donc les nombres quantiques des états à une particule. Pour obtenir une loi de transformation locale sous l'action du groupe de Poincaré, il est nécessaire d'utiliser les états appartenant aux bases spinorielles, car ce sont les seuls dont la loi de transformation ne fait pas explicitement apparaître de dépendance dans l'impulsion^[30].

a) $m \neq 0$

Dans le cas : $m \neq 0$, on introduira les opérateurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} a([p], s_3) |0\rangle = 0 \\ a^\dagger([p], s_3) |0\rangle = |[p], s_3\rangle \\ a^\dagger(p, A) = a^\dagger([p], s_3) \mathcal{D}_{s_3 A}^S([p]^{-1}) = a^\dagger(p, \hat{A}') \mathcal{D}_{A' A}^S\left(\frac{1}{m} \tilde{p}\right) \\ a^\dagger(p, \hat{A}) = a^\dagger([p], s_3) \mathcal{D}_{s_3 A}^S([p]^\dagger) = a^\dagger(p, A') \mathcal{D}_{A' A}^S\left(\frac{1}{m} \tilde{p}\right) \end{array} \right. \quad (\text{II.69})$$

Les opérateurs $a^\dagger(p, A)$ et $a^\dagger(p, \hat{A})$ sont les créateurs respectifs des états $|p, A\rangle$ et $|p, \hat{A}\rangle$. $|0\rangle$ est l'état vide.

Des lois de transformation des états, on déduit :

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) a^\dagger(p, A) U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{i\Lambda p \cdot a} a^\dagger(\Lambda p, A') \mathcal{D}_{AA'}^S(\Lambda) \\ U(a, \Lambda) a^\dagger(p, \hat{A}) U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{i\Lambda p \cdot a} a^\dagger(\Lambda p, \hat{A}') \mathcal{D}_{AA'}^S(\Lambda^{-1}) \end{aligned}$$

Enfin on supposera les règles de commutation suivantes :

$$\left[a(p, A), a(p', A') \right]_{\pm} = \left[a^\dagger(p, A), a^\dagger(p', A') \right]_{\pm} = 0 \quad (\text{II.70})$$

Le signe + correspond à un anticommutateur (statistique de Fermi) et le signe - correspond à un commutateur (statistique de Bose). La règle de commutation habituelle entre les a et les $a^\dagger$ n'est valable que pour des opérateurs correspondant à des états orthogonaux :

$$\left[a([p], s_3), a([p'], s_3') \right]_{\pm} = 2\omega_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s_3 s_3'} \quad (\text{II.71})$$

On en déduit les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[a(p, A), a^\dagger(p', \hat{A}') \right]_{\pm} = 2\omega_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{AA'} \\ \left[a(p, \hat{A}), a^\dagger(p', A') \right]_{\pm} = 2\omega_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{AA'} \end{array} \right. \quad (\text{II.72})$$

Nous allons construire les champs libres dans les cas suivants :

1) un seul type de particule, 2) multiplets non chargés, 3) multiplets chargés.

1) Un seul type de particule

On définit les champs

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \left\{ a(p, \hat{A}) e^{-ipx} + a^\dagger(p, A') \mathcal{D}_{A' A}^S(C) e^{+ipx} \right\} \\ \hat{\varphi}_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \left\{ a(p, A) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(p, \hat{A}') \mathcal{D}_{A' A}^S(C^{-1}) e^{+ipx} \right\} \\ \hat{\varphi}_A(x) = \mathcal{D}_{AA'}^S(C) \varphi_A^\dagger(x) = \varphi_A^\dagger(x) \mathcal{D}_{A' A}^S(C^{-1}) = \mathcal{D}_{AA'}^S \left(\begin{array}{c} \partial_0 - \vec{\partial} \cdot \vec{\sigma} \\ -im \end{array} \right) \varphi_A(x) \end{array} \right. \quad (\text{II.73})$$

on a les lois de transformations :

$$\left\{ \begin{aligned} U(a, \Lambda) \varphi_A(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \varphi_A(\Lambda x + a) \mathcal{D}_{A, A}^S(\Lambda^{-1T}) = \mathcal{D}_{AA'}^S(\Lambda^{-1}) \varphi_A(\Lambda x + a) \\ U(a, \Lambda) \widehat{\varphi}_A(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \widehat{\varphi}_A(\Lambda x + a) \mathcal{D}_{A, A}^S(\Lambda^*) = \mathcal{D}_{AA'}^S(\Lambda^\dagger) \varphi_A(\Lambda x + a) . \end{aligned} \right. \quad (\text{II.74})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle 0 | \varphi_A(x) | p, A' \rangle &= \delta_{AA'} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} \\ \langle 0 | \widehat{\varphi}_A(x) | p, \widehat{A}' \rangle &= \delta_{AA'} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} . \end{aligned} \right. \quad (\text{II.75})$$

Les règles de commutation s'écrivent :

$$\left[\varphi_A(x), \varphi_{A'}(x') \right]_{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_{AA'}^S(C) \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \left(e^{-ip(x-x')}_{\pm} (-1)^{2s} e^{+ip(x-x')} \right) .$$

Le deuxième membre est proportionnel à $\Delta(x-x')$ si $\pm(-1)^{2s} = -1$, c'est-à-dire si on a la relation spin-statistique. Si au contraire $\pm(-1)^{2s} = +1$, le commutateur calculé ne s'annule pas en dehors du cône de lumière. C'est donc la commutativité locale qui assure la relation spin statistique^[32].

Donc en supposant désormais $\pm(-1)^{2s} = -1$, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\varphi_A(x), \varphi_{A'}(x') \right]_{\pm} &= \mathcal{D}_{AA'}^S(C) i\Delta(x-x') \\ \Delta(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \varepsilon(p^0) e^{ipx} \\ \left[\varphi_A(x), \widehat{\varphi}_{A'}(x') \right]_{\pm} &= \mathcal{D}_{AA'}^S \left(\frac{\partial^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{\sigma}}{im} C \right) i\Delta(x-x') \end{aligned} \right. \quad (\text{II.76})$$

$$\partial^0 = \frac{\partial}{\partial x^0} \quad \vec{\partial} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$$

Si on suppose la loi de transformation des états : $U(\Pi) |p, A\rangle = \eta |p, \widehat{A}\rangle$ où η est un facteur de phase, on n'obtient une loi de transformation locale par parité que si $\eta = \bar{\eta}(-1)^{2s}$. On doit donc prendre η imaginaire pur si s est demi entier (champ de Majorana), on a alors :

$$\left\{ \begin{aligned} U(\Pi) \varphi_A(x) U^{-1}(\Pi) &= \eta^* \widehat{\varphi}_A(\underline{x}) \\ U(\Pi T) \varphi_A(x) U^{-1}(\Pi T) &= \eta^* \varphi_A^\dagger(-x) = \eta \widehat{\varphi}_{A'}(-x) \mathcal{D}_{A, A}^S(C) \\ U(T) \varphi_A(x) U^{-1}(T) &= \varphi_{A'}(-x) \mathcal{D}_{A, A}^S(C) . \end{aligned} \right. \quad (\text{II.77})$$

Dans le cas qui nous intéresse, la conjugaison de charge $\mathcal{C}$ est l'opérateur identité (au signe près car $\mathcal{C}^2 = 1$)

$$\left\{ \begin{aligned} \theta &= \mathcal{C} U(\Pi) U(T) \\ \theta \varphi_A(x) \theta^{-1} &= \eta_C \eta^* \varphi_A^\dagger(-x) . \end{aligned} \right. \quad (\text{II.78})$$

2) Multiplets neutres

On suppose l'existence d'un groupe d'invariance interne compact G , en plus du groupe de Poincaré. Les états à une particule sont alors des vecteurs de base d'une représentation irréductible du groupe G .

$$U(g) |[p], s_3, \mu\rangle = |[p], s_3, \mu'\rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}(g) , \quad (\text{II.79})$$

on a donc un multiplet de représentations du groupe de Poincaré. On supposera de plus les représentations U et U^* du groupe G équivalentes :

$$\mathcal{D}(g) = S \mathcal{D}^*(g) S^{-1} . \quad (\text{II.80})$$

A partir de cette relation, on montre^[31] que $SS^\dagger$ et SS^* commutent

avec toutes les opérations $U(g)$ du groupe $SS^\dagger$ et SS^* sont donc des constantes. S est défini à une constante arbitraire près, on peut fixer cette constante de façon que $SS^\dagger = 1$. On a alors $SS^* = c$, soit $S = cS^T$, donc $c = \pm 1$. On a forcément $c = +1$ si l'espace de représentation est à dimension impaire (exemple représentation de spin entier de SU_2). Enfin, si l'espace est de dimensions paires, on peut avoir soit $c = +1$ (exemple : représentation 8 de SU_3), soit $c = -1$ (représentation de spin demi entier de SU_2).

On peut alors construire les champs :

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{A,\mu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{p}}{2\omega_p} \left\{ a(p, \hat{A}, \mu) e^{-ipx} + a^\dagger(p, \hat{A}', \mu') \mathcal{D}_{A',A}^S(c) S_{\mu',\mu} e^{+ipx} \right\} \\ \hat{\varphi}_{A,\mu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{p}}{2\omega_p} \left\{ a(p, A, \mu) e^{-ipx} + a^\dagger(p, \hat{A}', \mu') \mathcal{D}_{A',A}^S(c^{-1}) S_{\mu',\mu} e^{+ipx} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (II.81)$$

Si l'on calcule le commutateur de $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ on trouve que : $[\varphi(x), \varphi(y)]_\pm$ n'est nul pour des séparations $(x-y)$ du genre espace que si $\pm(-1)^{2S} c = -1$, où c est défini par $S = cS^T$. Si l'on désire, comme cela semble vérifié expérimentalement, préserver la relation spin statistique, la commutativité locale n'est vérifiée que dans le cas où S est symétrique (elle n'est en particulier pas vérifiée pour un boson de spin entier et d'isospin demi entier). Dans la suite nous supposons [33]

$$S = S^T, \quad SS^* = 1. \quad (II.82)$$

Les champs φ et $\hat{\varphi}$ ont, sous l'action du groupe de Poincaré, des lois de transformation analogues à (II.74). Sous l'action du groupe G , on a :

$$\left\{ \begin{aligned} U(g) \varphi_{A,\mu}(x) U(g)^{-1} &= \varphi_{A,\mu'}(x) \mathcal{D}_{\mu',\mu}^*(g) \\ U(g) \hat{\varphi}_{A,\mu}(x) U(g)^{-1} &= \hat{\varphi}_{A,\mu'}(x) \mathcal{D}_{\mu',\mu}^*(g). \end{aligned} \right. \quad (II.83)$$

Sous l'action de la parité :

$$U(\Pi) \varphi_{A,\mu}(x) U^{-1}(\Pi) = \eta^* \hat{\varphi}_{A\mu}(\underline{x}), \quad (II.84)$$

(avec toujours la condition η imaginaire pur si le spin est demi entier). On définira la conjugaison de charge comme l'opérateur unitaire de l'espace de Fock, qui transforme $a^\dagger([p], s_3, \mu)$ en $a^\dagger([p], s_3, \mu') S_{\mu',\mu}$:

$$\mathcal{C} a^\dagger([p], s_3, \mu) \mathcal{C}^{-1} = \eta_c a^\dagger([p], s_3, \mu') S_{\mu',\mu}. \quad (II.85)$$

Cette opération conserve bien les relations de commutation car S est unitaire. On aura de même :

$$\mathcal{C} a([p], s_3, \mu) \mathcal{C}^{-1} = \eta_c^* a([p], s_3, \mu') S_{\mu',\mu}^*.$$

L'opération $\mathcal{C}$ n'est une involution ($\mathcal{C}^2 = 1$) que si l'on a $\eta_c^2 S^2 = 1$. S^2 est donc une phase ; comme par ailleurs $SS^* = 1$, S et S^* sont égaux à une phase près, on peut alors modifier la phase de S de façon à avoir

$$S = S^*, \quad \text{donc } S^2 = 1. \quad (II.86)$$

L'introduction du renversement du sens du temps soulève quelques difficultés : l'opérateur $U(T)$ ne doit pas agir sur les coordonnées internes (relatives au groupe G)

$$U(T) |p, A, \mu\rangle = |p, A', \mu\rangle \mathcal{D}_{A',A}(C). \quad (II.87)$$

Mais comme T est antiunitaire, on vérifie facilement qu'une telle relation n'est pas invariante dans un changement de base dans l'espace de représentation de G . On doit donc supposer cette relation dans une base particulière. Dans les cas d'application pratique, la base dans laquelle $U(T)$ agit suivant (II.87)

diagonalise les opérateurs de supersélection. Notons que $U(T)$ ne commute pas avec les opérations $U(g)$ du groupe G , en effet $U(g)U(T)$ et $U(T)U(g)$ transforment les états à une particule suivant $\mathcal{D}(g)$ et $\mathcal{D}^*(g)$ respectivement.

En règle générale, on supposera donc qu'il existe une base privilégiée où l'on peut définir l'opérateur $U(T)$ antiunitaire, tel que [34] :

$$\begin{cases} U(T) a^\dagger(p, A, \mu) U^{-1}(T) = a^\dagger(\underline{p}, A', \mu) \mathcal{D}_{A', A}^S(C) \\ U(T) a(p, A, \mu) U^{-1}(T) = a(\underline{p}, A', \mu) \mathcal{D}_{A', A}^S(C) \end{cases} \quad (\text{II.87})$$

L'une des conséquences de ces relations est que l'opérateur $\mathcal{E} U(T)$ commute avec les opérations du groupe G , (de même que $\mathcal{E} (U(\Pi) U(T))$).

On peut maintenant déterminer l'action de T sur les champs :

$$\begin{cases} U(T) \varphi_{A, \mu}(x) U(T)^{-1} = \varphi_{A', \mu}(-x) \mathcal{D}_{A', A}^S(C) \\ U(\Pi T) \varphi_{A, \mu}(x) U(\Pi T)^{-1} = \eta^* \widehat{\varphi}_{A', \mu}(-x) \mathcal{D}_{A', A}^S(C) \end{cases}, \quad (\text{II.88})$$

on définira également :

$$\varphi_{A, \mu}^c(x) = \mathcal{E} \varphi_{A, \mu}(x) \mathcal{E}^{-1}, \quad (\text{II.89})$$

on a alors les propriétés :

$$\varphi_{A, \mu}^c(x) = \eta_c \widehat{\varphi}_{A', \mu}^\dagger(x) \mathcal{D}_{A', A}^S(C) .$$

Enfin si $\Theta = \mathcal{E} U(\Pi) U(T)$:

$$\Theta \varphi_{A, \mu}(x) \Theta^{-1} = \eta_c \eta^* \varphi_{A, \mu}^\dagger(-x) . \quad (\text{II.90})$$

3) Multiplets chargés

On suppose maintenant que les particules sont encore décrites par des représentations du groupe compact G n'ayant pas les propriétés utilisées au paragraphe précédent :

- ou bien $\mathcal{D}(g)$ n'est pas équivalente à $\mathcal{D}^*(g)$
- ou bien $\mathcal{D}(g)$ est équivalente à $\mathcal{D}^*(g)$: $\mathcal{D}(g) = S \mathcal{D}^*(g) S^{-1}$,

mais S ne peut pas être choisi de façon à avoir les propriétés : $S = S^* = S^T = S^{-1}$.

On doit alors considérer simultanément deux multiplets associés à des représentations complexes conjuguées du groupe G . Les opérateurs de création correspondant satisferont à :

$$\begin{cases} U(g) a^\dagger(p, A, \mu) U(g)^{-1} = a^\dagger(p, A, \mu') \mathcal{D}_{\mu', \mu}(g) \\ U(g) b^\dagger(p, A, \mu) U(g)^{-1} = b^\dagger(p, A, \mu') \mathcal{D}_{\mu', \mu}^*(g) \end{cases} \quad (\text{II.91})$$

L'opérateur de l'espace de Fock qui interchange les deux types de particules est appelé conjugaison de charge.

$$\begin{cases} \mathcal{E} a^\dagger(p, A, \mu) \mathcal{E}^{-1} = b^\dagger(p, A, \mu) \\ \mathcal{E} a(p, A, \mu) \mathcal{E}^{-1} = a(p, A, \mu) \\ \mathcal{E} \mathcal{E}^\dagger = \mathcal{E}^\dagger \mathcal{E} = 1 \end{cases} \quad (\text{II.92})$$

On définira alors les champs :

$$\begin{aligned} \varphi_{A, \mu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} \left\{ a(p, \widehat{A}, \mu) e^{-ipx} + b^\dagger(p, A', \mu') \mathcal{D}_{A', A}^S(C) e^{ipx} \right\} \\ \widehat{\varphi}_{A, \mu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} \left\{ a(p, A, \mu) e^{-ipx} + b^\dagger(p, \widehat{A}', \mu') \mathcal{D}_{A', A}^S(C^{-1}) e^{ipx} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

liés par :

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_{A,\mu}(x) &= \mathcal{D}_{AA'}^s \left(\frac{\partial^0 - \vec{\partial} \cdot \vec{\sigma}}{-im} \right) \varphi_{A',\mu}(x) \\ \varphi_{A,\mu}(x) &= \mathcal{D}_{AA'}^s \left(\frac{\partial^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{\sigma}}{-im} \right) \widehat{\varphi}_{A',\mu}(x) .\end{aligned}\quad (\text{II.94})$$

La commutativité locale est assurée si on a la relation spin statistique : les opérateurs a et $a^\dagger$ d'une part, b et $b^\dagger$ d'autre part ont les règles de commutation (II.72). Par ailleurs les opérateurs a et $a^\dagger$, commutent ou anticommulent avec b et $b^\dagger$, suivant que le spin est entier ou demi entier ; ces opérateurs correspondent à des particules différentes, aussi leurs relations de commutation est une question de convention. On peut montrer que ce dernier choix est en fait sans conséquences physiques [32].

On définira de même φ^c et $\widehat{\varphi}^c$ en transformant par conjugaison de charge les champs φ et $\widehat{\varphi}$.

On a les lois de transformation :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \varphi, \widehat{\varphi} & \text{se transforment par } \mathcal{D}^*(g) & \text{sous l'action de } G & & & \\ \varphi^c, \widehat{\varphi}^c & " & " & \mathcal{D}(g) & " & " & " \\ \varphi, \varphi^c & " & " & \mathcal{D}(\Lambda^{-1}) & " & " & U(\Lambda) \\ \widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}^c & " & " & \mathcal{D}(\Lambda^\dagger) & " & " & " \end{array} \right. \quad (\text{II.95})$$

Ces lois de transformation sont analogues à (II.74) et (II.83). L'action de la parité n'est locale que si $\eta_a \eta_b = (-1)^{2s}$, c'est-à-dire si la parité relative du système particule antiparticule par rapport au vide est égale à $(-1)^{2s}$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} U(\Pi) \varphi_{A,\mu}(x) U(\Pi)^{-1} &= \eta_a^* \widehat{\varphi}_{A,\mu}(x) \\ U(\Pi T) \varphi_{A,\mu}(x) U(\Pi T)^{-1} &= \eta_a^* \widehat{\varphi}_{A',\mu}(-x) \mathcal{D}_{A'A}(C) \\ U(T) \varphi_{A,\mu}(x) U(T)^{-1} &= \varphi_{A,\mu}(-x) \mathcal{D}_{A'A}^s(C) ,\end{array} \right. \quad (\text{II.96})$$

on a la relation :

$$\varphi_{A,\mu}^c(x) = \widehat{\varphi}_{A',\mu}^\dagger(x) \mathcal{D}_{A'A}^s(C) . \quad (\text{II.97})$$

L'action de TCP s'écrit alors :

$$\theta = \vartheta U(\Pi) U(T)$$

$$\theta \varphi_{A,\mu}(x) \theta^{-1} = \eta_a^* \varphi_{A,\mu}^\dagger(-x) . \quad (\text{II.98})$$

Les relations (II.97) et (II.98) sont valables dans les trois cas (particule unique, multiplet neutre ou chargé) de même que la relation qui lie les champs φ et $\widehat{\varphi}$. Noter que parmi les lois de transformation précédentes les lois de transformation par parité et inversion totale, ne sont pas généralisables telles qu'elles à des champs couplés (qui ne satisfont pas l'équation de Klein-Gordon). On peut remédier à cette situation en introduisant les champs de Dirac à $2(2s+1)$ composantes :

$$\Psi_{\alpha,\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_{A,\mu}(x) \\ \widehat{\varphi}_{A,\mu}(x) \end{pmatrix}$$

et en transcrivant les lois de transformation précédentes en fonction de ces champs.

b) m = 0

On va construire des champs locaux de façon analogue : on introduit des opérateurs de création et d'annihilation $a^\dagger([k],\lambda)$ et $a([k],\lambda)$ ayant

les règles de commutation habituelles :

$$\left[a([\mathbf{k}], \lambda), a^\dagger([\mathbf{k}'], \lambda) \right]_{\pm} = 2|\vec{\mathbf{k}}| \delta(\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{k}}'). \quad (\text{II.99})$$

Si l'hélicité est positive, on peut construire des opérateurs $a^\dagger(k, \hat{A}, +)$ et si l'hélicité est négative, on peut construire des états $a^\dagger(k, A, -)$:

$$\begin{cases} \lambda > 0 : a^\dagger(k, \hat{A}, +) = a^\dagger([\mathbf{k}], \lambda) \mathcal{D}_{\lambda A}^{|\lambda|}([\mathbf{k}]^\dagger) \\ \lambda < 0 : a^\dagger(k, A, -) = a^\dagger([\mathbf{k}], \lambda) \mathcal{D}_{\lambda A}^{|\lambda|}([\mathbf{k}]^{-1}). \end{cases} \quad (\text{II.100})$$

Les relations de commutation sont :

$$\begin{cases} \lambda > 0 : \left[a(k, A, +), a^\dagger(k', A', +) \right]_{\pm} = \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\tilde{\mathbf{k}}) 2|\vec{\mathbf{k}}| \delta(\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{k}}') \\ \lambda < 0 : \left[a(k, A, -), a^\dagger(k', A', -) \right]_{\pm} = \mathcal{D}_{AA'}^{|\lambda|}(\tilde{\mathbf{k}}) 2|\vec{\mathbf{k}}| \delta(\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{k}}'). \end{cases} \quad (\text{II.101})$$

Pour construire un champ local, on doit utiliser deux représentations d'hélicités opposées :

on a alors

$$\begin{cases} \varphi_A^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{\mathbf{k}}}{2|\vec{\mathbf{k}}|} \left\{ a(k, \hat{A}, +) e^{-ikx} + a^\dagger(k, A', -) \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(C) e^{+ikx} \right\} \\ \hat{\varphi}_A^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{\mathbf{k}}}{2|\vec{\mathbf{k}}|} \left\{ a(k, A, -) e^{-ikx} + a^\dagger(k, \hat{A}', +) \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(C^{-1}) e^{+ikx} \right\} \end{cases} \quad (\text{II.102})$$

on a encore :

$$\varphi_A^+(x) = \left\{ \hat{\varphi}_{A'}^-(x) \right\}^\dagger \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(C). \quad (\text{II.103})$$

On ne peut pas en général construire de champ conjugué de charges, c'est-à-dire de champ d'hélicité $+\lambda$ du type $\hat{\varphi}_A^+(x)$. On doit distinguer deux cas :

1) ou bien un opérateur parité est défini sur les états à une particule et alors les états d'hélicité $+\lambda$ et $-\lambda$ sont deux états de la même particule, qui est alors sa propre antiparticule, on a alors $\mathcal{P} = \pm 1$. Dans ce cas les opérateurs $\mathcal{P}$ et $U(\Pi)$ existent indépendamment, c'est le cas du photon,

2) ou bien il n'y a pas d'opérateur parité défini (cas du neutrino). Néanmoins un opérateur que l'on continue, par abus de langage, à appeler $\mathcal{P} U(\Pi)$ peut être défini dans l'espace de Fock. Sur les opérateurs de création, il agit comme suit :

$$\begin{aligned} (C U(\Pi)) a^\dagger(k, \hat{A}, +) (C U(\Pi))^{-1} &= \eta_+ a^\dagger(k, A', -) \\ (C U(\Pi)) a^\dagger(k, A, -) (C U(\Pi))^{-1} &= \eta_- a^\dagger(k, \hat{A}', +). \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

D'où, à condition que $\eta_+ \eta_- = (-1)^{2|\lambda|}$

$$\begin{aligned} (C U(\Pi)) \varphi_A^+(x) (C U(\Pi))^{-1} &= \eta_+ \hat{\varphi}_{A'}^-(x) \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(C^{-1}) \\ (C U(\Pi)) \hat{\varphi}_A^-(x) (C U(\Pi))^{-1} &= \eta_- \varphi_{A'}^+(x) \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(C). \end{aligned} \quad (\text{II.105})$$

L'action du renversement du sens du temps est donnée par :

$$U(T) \varphi_A(x) U(T)^{-1} = \varphi_{A'}(-x) \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(C) \quad (\text{II.106})$$

on a également la loi de transformation pour l'opérateur $\theta = \mathcal{P} U(\Pi) U(T)$:

$$\theta \varphi_A(x) \theta^{-1} = \eta_+ \hat{\varphi}_{A'}^-(x) \mathcal{D}_{A'A}^{|\lambda|}(C)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \varphi_A^+(x) \theta^{-1} = \eta_+ \varphi_A^{+\dagger}(-x) \\ \theta \varphi_A^-(x) \theta^{-1} = \eta_+ \varphi_A^{-\dagger}(-x) . \end{array} \right. \quad (\text{II.107})$$

Le champ que nous avons ainsi construit satisfait bien à la commutativité locale, si, dans (II.101) on satisfait à la relation spin-statistique.

CHAPITRE III

ETATS A DEUX PARTICULES DE MASSES REELLES NON NULLES, SANS INTERACTION

A) - GENERALITES

1) - Produit tensoriel de deux représentations

Un état à deux particules sans interaction est construit comme vecteur du produit tensoriel des espaces de définition des particules constituantes. Un tel état sera par exemple, utilisé comme état initial ou final dans une réaction à deux corps.

Considérons deux particules de masses (réelles positives) m_1 et m_2 . A chaque impulsion p_1 ou p_2 de leur couche de masse respective, associons une transformation de Lorentz représentée respectivement par les matrices unimodulaires $[p_1]$ ou $[p_2]$, c'est-à-dire une tétrade, ainsi que nous l'avons déjà fait. En particulier :

$$\begin{aligned} [p_1] \hat{p}_1 &= p_1 \\ [p_2] \hat{p}_2 &= p_2 \end{aligned}$$

$$\text{où } \hat{p}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On construit alors comme au chapitre précédent les deux bases de représentation $|[p_1], \sigma_1\rangle$ et $|[p_2], \sigma_2\rangle$. Un état à deux particules est obtenu en formant le produit tensoriel :

$$|[p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2\rangle = |[p_1], \sigma_1\rangle \otimes |[p_2], \sigma_2\rangle \quad (\text{III.1})$$

Sur ces états est définie la représentation, avec $A = A(\Delta)$

$$\begin{aligned} U(a, \Delta) |[p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2\rangle &= e^{i\Delta(p_1 + p_2) \cdot a} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2} \vartheta_{\sigma'_1 \sigma_1}^{s_1} \left([\Delta p_1]^{-1} A [p_1] \right) \\ &\quad \vartheta_{\sigma'_2 \sigma_2}^{s_2} \left([\Delta p_2]^{-1} A [p_2] \right) |[\Delta p_1], [\Delta p_2], \sigma'_1, \sigma'_2\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

avec le produit scalaire :

$$\langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [p'_1], [p'_2], \sigma'_1, \sigma'_2 \rangle = 4 \omega_1 \omega_2 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \delta_{\sigma_2 \sigma'_2}$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{\vec{p}_1^2}{p_1^2} + m_1^2}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{\vec{p}_2^2}{p_2^2} + m_2^2}$

2) - Réduction du produit tensoriel - Généralités

Nous allons chercher à réduire la représentation (III.2), c'est-à-dire à écrire (III.1) comme une somme d'états $|[P], j, \mu, \eta\rangle$ où P désignera l'impulsion totale, ([P] représentant sa tétrade associée), j le moment cinétique total, μ l'une de ses composantes (sur $n_3(P)$) et η le ou les paramètres de dégénérescence éventuels.

On pourra alors écrire :

$$|[p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2\rangle = \int dM^2 \int \frac{d^3 \vec{P}}{2\omega_M(P)} \sum_{j\mu\eta} \Phi_{j\mu\eta}(P) |[P], j, \mu, \eta\rangle$$

Le coefficient de Clebsch - Gordan de la décomposition est alors

$$\langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, \eta \rangle$$

Pour calculer ces coefficients et déterminer les paramètres de dégénérescence, nous allons utiliser une méthode due à Wigner [15].

Supposons que l'on ait construit une base complète orthonormée d'un espace de Hilbert, notée $|j\mu\rangle$, sur laquelle agit une représentation unitaire $\mathcal{D}_{\mu\mu}^j(G)$ d'un groupe compact G, chaque sous-espace indexé par une valeur donnée de j étant irréductible. La représentation s'écrit :

$$U(G)|j\mu\rangle = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu'\mu}^j(G) |j\mu'\rangle$$

Un état quelconque $|\Phi\rangle$ s'écrit : $|\Phi\rangle = \sum_{j\mu} \alpha_{j\mu} |j\mu\rangle$

On suppose de plus qu'il existe une mesure notée $\frac{dG}{V(G)}$ invariante à droite et à gauche, sur le groupe G, et normée : $\int_G \frac{dG}{V(G)} = 1$

On peut alors en déduire les relations d'orthogonalité :

$$\int \frac{dG}{V(G)} \mathcal{D}_{\mu'\mu}^{j*}(G) \mathcal{D}_{\nu'\nu}^j(G) = \frac{1}{n(j)} \delta_{jk} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu'\nu'}$$

$n(j)$ désigne la dimension du sous-espace j.

On peut alors vérifier la propriété suivante :

$$n(j) \int \frac{dG}{V(G)} \mathcal{D}_{\mu'\mu}^{j*}(G) U(G)|\Phi\rangle = \alpha_{j\mu} |j\mu'\rangle = \langle j\mu|\Phi\rangle \times |j\mu'\rangle$$

Ceci nous donne la valeur de l'opérateur :

$$n(j) \int \frac{dG}{V(G)} \mathcal{D}_{\mu'\mu}^{j*}(G) U(G) = |j\mu'\rangle \langle j\mu| \tag{III.3}$$

En particulier l'opérateur

$$P_{j\mu} = |j\mu\rangle \langle j\mu| = \int \frac{dG n(j)}{V(G)} \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*}(G) U(G)$$

est le projecteur sur l'état $|j\mu\rangle$, (plus généralement, c'est le projecteur sur le sous-espace $|j\mu\rangle$ si la représentation considérée n'est pas irréductible).

Toutes les conditions requises sont vérifiées pour le groupe des rotations comme pour SU_2 .

Pour le cas du groupe des translations, qui n'est pas compact, on peut construire de façon analogue un projecteur sur les états d'impulsion P (qui ne sont pas dans l'espace de Hilbert !). Il s'écrit :

$$\int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} e^{-i(\mathbb{P}a)} U(a)$$

On peut également construire un opérateur de projection analogue à partir d'une intégration sur le groupe de Poincaré :

Posons :

$$\mathcal{D}_{p,\sigma,p',\sigma'}^{M,s}(a,\Lambda) = 2p^0 e^{ip \cdot a} \delta(\vec{p} - \Lambda \vec{p}') \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^s \left([p]^{-1} \Lambda [p'] \right) .$$

On vérifie aisément la formule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int da d\Lambda \mathcal{D}_{p,\sigma,p',\sigma'}^{M_1,s_1*}(a,\Lambda) \mathcal{D}_{q,\alpha,q',\alpha'}^{M_2,s_2}(a,\Lambda) \frac{(2s_1+1)}{8\pi^2} \\ = 4 p^0 p'^0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta(\vec{p}' - \vec{q}') \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\alpha'\sigma'} \delta(M_1^2 - M_2^2) \delta_{s_1 s_2} . \end{aligned} \quad (III.4)$$

Pour $d\Lambda$ on a utilisé la mesure invariante sur le groupe de Lorentz qu'on peut écrire comme suit : on utilise le paramétrage suivant :

$$\Lambda = \Lambda_P R \quad \text{où } P \text{ est le transformé de l'axe des temps}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{par } \Lambda, \Lambda_P \text{ est, quel que soit } P, \text{ une transforma-}$$

tion amenant P sur P choisie une fois pour toute . Alors R est une rotation définie par $R = \Lambda^{-1} \Lambda$. La mesure invariante utilisée est alors :

$$d\Lambda = \frac{d^3 \vec{P}}{2P^0} dR .$$

La relation (38) n'est autre qu'une relation d'orthogonalité des éléments de matrice. On peut en déduire que l'expression :

$$\mathcal{P}_{P,\mu,P,\mu}^{M,j} = \int \frac{da d\Lambda}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{P,\mu,P,\mu}^{M,j*}(a,\Lambda) U(a,\Lambda) \frac{2j+1}{8\pi^2} \quad (III.5)$$

est un projecteur sur le sous-espace des états $|[P],j,\mu\rangle$. Nous allons l'u-

tiliser pour réduire la représentation(III.2). Dans le cas qui nous occupe, le sous-espace $|[P],j,\mu\rangle$ est dégénéré. Il est nécessaire de construire une base orthogonale de ce sous-espace, ayant la propriété suivante :

$$U(\Lambda) |[P],j,\mu,\eta\rangle = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu,\mu'}^j \left([\Lambda P]^{-1} \Lambda [P] \right) |[P],j,\mu',\eta\rangle \quad (III.6)$$

Pour avoir des bases d'états ayant cette propriété, le plus commode est de construire, pour une valeur de P , par exemple le long de l'axe des temps $\vec{P}$, une base complète de l'espace des vecteurs $[[\vec{P}],j,\mu,\eta\rangle$ et de définir alors

$$|[P],j,\mu,\eta\rangle = U([P]) [[\vec{P}],j,\mu,\eta\rangle \quad (III.7)$$

Nous écrirons dans la suite directement des bases d'états pour toutes les valeurs de P . Elles ont toutes cette propriété qui est aisément vérifiable, et sera en général sous-entendue dans la suite.

3) - Construction des états propres de l'impulsion et du moment cinétique

Sur l'état $|\Phi\rangle$ le plus général, nous allons appliquer le projecteur (III.5).

$$|\Phi\rangle = \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} \Phi_{\sigma_1 \sigma_2} \left([p_1], [p_2] \right) |[p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2\rangle \quad (III.8)$$

Il ne restera plus qu'à rechercher une base orthogonale complète du sous-espace $|[P],j,\mu\rangle$ obtenu :

$$\mathcal{P}_{P,\mu,P,\mu}^{M,j} |\Phi\rangle = \int \frac{da d\Lambda}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{P,\mu,P,\mu}^{M,j*}(a,\Lambda) U(a,\Lambda) |\Phi\rangle .$$

Explicitons l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
 P_{P \mu}^M J |\Phi\rangle &= \int \frac{da d\Lambda}{(2\pi)^4} e^{-i\Lambda P \cdot a} 2P^0 \delta(\vec{P} - \vec{\Lambda P}) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{J*} \left([P]^{-1} A[P] \right) \\
 &\times \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} e^{i\Lambda(p_1 + p_2) \cdot a} \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1} \left([\Delta p_1]^{-1} A[p_1] \right) \\
 &\mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2} \left([\Delta p_2]^{-1} A[p_2] \right) |\Delta p_1, \Delta p_2, \sigma_1', \sigma_2'\rangle \Phi_{\sigma_1' \sigma_2'}([p_1], [p_2])
 \end{aligned}$$

L'intégrale sur a est évidente ($da = d(\Lambda a)$)

$$\begin{aligned}
 P_{P \mu}^M J |\Phi\rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} \delta(P - p_1 - p_2) \Phi_{\sigma_1' \sigma_2'}([p_1], [p_2]) \\
 &\times 2P^0 \int d\Lambda \delta(\vec{P} - \vec{\Lambda P}) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{J*}(\Lambda) \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1}(\Lambda) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2}(\Lambda) |\Delta p_1, \Delta p_2, \sigma_1', \sigma_2'\rangle .
 \end{aligned}$$

Nous effectuons le changement de variable :

$$\begin{aligned}
 p_1 &\rightarrow \Lambda^{-1} p_1 \\
 p_2 &\rightarrow \Lambda^{-1} p_2
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 P_{P \mu}^M J |\Phi\rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} \delta(P - p_1 - p_2) |p_1, p_2, \sigma_1', \sigma_2'\rangle \\
 &\times 2P^0 \int d\Lambda \delta(\vec{P} - \vec{\Lambda P}) \Phi_{\sigma_1' \sigma_2'}([\Lambda^{-1} p_1], [\Lambda^{-1} p_2]) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{J*} \left([P]^{-1} A[P] \right) \\
 &\times \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1} \left([p_1]^{-1} A[\Lambda^{-1} p_1] \right) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2} \left([p_2]^{-1} A[\Lambda^{-1} p_2] \right) .
 \end{aligned}$$

L'intégrale sur Λ ne porte, en fait, que sur le petit groupe de P , à cause de la fonction δ qui figure dans l'intégrand.

On peut écrire :

$$A = [\Lambda P] R [P]^{-1}$$

où $R = [\Lambda P]^{-1} A[P]$ est une rotation.

On voit alors aisément que :

$$\int 2P^0 \delta(\vec{P} - \vec{\Lambda P}) d\Lambda = dR$$

avec $R = [P]^{-1} A[P]$ où Λ appartient au petit groupe de P .

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 P_{P \mu}^M J |\Phi\rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} \delta(P - p_1 - p_2) \sum_{\substack{\sigma_1' \sigma_2' \\ \sigma_1' \sigma_2'}} | [p_1], [p_2], \sigma_1', \sigma_2' \rangle \\
 &\times \int dR \mathcal{D}_{\mu\mu}^{J*}(R) \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1} \left([p_1]^{-1} A[\Lambda^{-1} p_1] \right) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2} \left([p_2]^{-1} A[\Lambda^{-1} p_2] \right) \\
 &\times \Phi_{\sigma_1' \sigma_2'}([\Lambda^{-1} p_1], [\Lambda^{-1} p_2])
 \end{aligned}$$

avec $A = [P] R [P]^{-1}$.

On peut alors passer des variables $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ aux variables $(P, \hat{q})$ associées au centre de masse. Les notations sont données dans la table 1 (p.79).

L'état $P_{P \mu}^M J |\Phi\rangle$ va s'écrire :

$$\begin{aligned}
 P_{P \mu}^M J |\Phi\rangle &= \theta(P^0) \theta(M^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\sqrt{\lambda}}{8 M^2} \int d\Omega \hat{q} \sum_{\substack{\sigma_1' \sigma_2' \\ \sigma_1' \sigma_2'}} | [p_1], [p_2], \sigma_1', \sigma_2' \rangle \\
 &\times \int \Phi_{\sigma_1' \sigma_2'}(P, \hat{q}) I_{\sigma_1' \sigma_2' \sigma_1' \sigma_2'}(\hat{q}) d\Omega_{\hat{q}} .
 \end{aligned}$$

avec

$$I(\hat{a}) = \int dR \delta(\hat{a} - R^{-1}q) \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1}(R_1) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2}(R_2) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j^*}(R)$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_1 &= [p_1]^{-1} A[\Lambda^{-1} p_1] \\ R_2 &= [p_2]^{-1} A[\Lambda^{-1} p_2] \end{aligned} \right. \quad (III.9)$$

$$A = [P] R [P]^{-1}$$

Il nous faut maintenant effectuer dans (III.9) l'intégrale sur R, de façon à découpler les indices $\sigma_1 \sigma_2$ et σ_1', σ_2' couplés par l'intermédiaire des rotations R_1 et R_2 .

On décomposera* alors les fonctions Φ qui donnent une contribution non nulle sur un système de fonctions orthogonales :

$$\Phi = \sum_{\eta} \Phi^{\eta}$$

Les fonctions Φ^{η} sont les composantes irréductibles de la fonction d'onde Φ , dont elles se déduisent par convolution avec les coefficients de Clebsch-Gordan.

Pour simplifier les calculs, et faire apparaître plus clairement les systèmes de fonctions Φ^{η} , il sera commode de faire des choix de tétrades particuliers. Par exemple il nous arrivera de prendre un choix de tétrade $[p_1]$, et $[p_2]$ fonction à la fois de p_1 et p_2 , et non uniquement de p_1 pour $[p_1]$, et de p_2 pour $[p_2]$. Nous ne modifierons pas pour autant la notation, les relations (II.4) nous permettront de restituer les tétrades utilisées dans (III.1) et (III.2).

* En fait dans l'intégrale $I(\hat{a})$ ne figure plus la fonction Φ , mais une fonction $\delta(\hat{a} \dots)$. C'est cette fonction δ que l'on décomposera en utilisant la relation de fermeture du système complet de fonction. Ceci est bien sûr équivalent à décomposer Φ .

TABLE I

$$\begin{aligned} p_1^2 &= m_1^2 \\ p_2^2 &= m_2^2 \end{aligned}$$

- On fait le changement de variable :

$$\left\{ \begin{aligned} p_{12} &= p_1 + p_2 & p_{21} &= p_{12} \\ q_{12} &= \frac{1}{2} \left(p_1 - p_2 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{(p_1 + p_2)^2} (p_1 + p_2) \right) & q_{21} &= -q_{12} \end{aligned} \right.$$

- Les formules inverses sont :

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= p_{12} \left(\frac{p_{12}^2 + m_1^2 - m_2^2}{2 p_{12}^2} \right) + q_{12} \\ p_2 &= p_{12} \left(\frac{p_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2}{2 p_{12}^2} \right) - q_{12} \end{aligned} \right.$$

- On a les propriétés : $q_{12} \cdot p_{12} = 0$

$$q_{12}^2 = \frac{\lambda(p_1^2, p_2^2, p_{12}^2)}{-4 p_{12}^2}$$

où $\lambda(a^2, b^2, c^2) = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2$
 $= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$

- Si $n_1(p_{12}), n_2(p_{12}), n_3(p_{12})$ sont les axes du genre espace de la tétrade de p_{12} , on pose :

$$q_1 = -q_{12} \cdot n_1(p_{12})$$

q_1, q_2, q_3 sont les trois composantes d'un trivecteur de longueur :

$$\vec{q}^2 = -q_{12}^2$$

$\hat{q}$ désigne le vecteur unitaire porté par $\vec{q}$: $\hat{q} = \frac{2\sqrt{p_{12}^2}}{\sqrt{\lambda(p_1^2, p_2^2, p_{12}^2)}} \vec{q}$

- La mesure invariante sur le produit des deux hyperboloïdes peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d^3\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2\omega_2} &= \theta(p_{12}^2 - (m_1 + m_2)^2) \theta(p_{12}^0) \frac{\sqrt{\lambda(p_{12}^2, m_1^2, m_2^2)}}{8 p_{12}^2} d^4 p_{12} d\Omega_{\hat{q}} \\ &= dM^2 \frac{d^3\vec{p}_{12}}{2\omega_{12}} \theta(M^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\sqrt{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)}}{8 M^2} d\Omega_{\hat{q}} \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2} \quad \omega_2 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} \quad \omega_{12} = \sqrt{\vec{p}_{12}^2 + M^2}$$

- Cette expression nous donne le Jacobien de la transformation qui fait passer des variables indépendantes $(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ aux variables indépendantes $(p_{12}, \hat{q})$.

B) - COUPLAGE $l-s$

1) Introduction

En cinématique non relativiste le moment cinétique total d'un système de deux particules est le résultat de la somme de trois moments cinétiques, le moment orbital $\vec{l}$, et les spins $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ des deux particules. Une rotation R intéresse alors de la même manière ces trois moments cinétiques, car ils sont tous repérés par rapport aux mêmes axes, et on obtient un produit $\mathcal{D}^{s_1}(R) \mathcal{D}^{s_2}(R) \mathcal{D}^l(R)$, réductible à l'aide de coefficients de Clebsch Gordan de SU_2 pour former $\mathcal{D}^s(R)$.

En cinématique relativiste, les axes de références diffèrent pour les particules 1, 2, et pour le système composé, mais une rotation dans le système du centre de masse se traduira sur les spins, par deux matrices $\mathcal{D}^{s_1}(R_1) \mathcal{D}^{s_2}(R_2)$. (Voir (III.9)). On aura une situation analogue au couplage $l-s$ non relativiste s'il est possible de trouver des tétrades telles que :

$$R_1 = R_2 = R$$

La réponse à cette question est positive ainsi que le montrent Joos^[9], Chou Kuang Chao et Shirokov^[11] justifiant ainsi après coup de nombreux travaux basés sur l'existence d'un moment orbital en cinématique relativiste.

2) - Choix des tétrades

Nous cherchons des systèmes de tétrades $[p_1]$ et $[p_2]$ tels que les rotations R_1 et R_2 de l'équation (III.9) soient égales à R ,

$$R_1 = R_2 = R ;$$

c'est-à-dire nous cherchons un système $[p]$ tel que quel que soit p et

quel que soit R ,

$$R = [P]^{-1} \Lambda[P] = [p]^{-1} \Lambda[\Lambda^{-1}p]$$

Ce qui s'écrit :

$$\Lambda \left([\Lambda^{-1}p][P]^{-1} \right) \Lambda^{-1} = [p][P]^{-1} .$$

Compte tenu du fait que $\Lambda P = P$, cette relation signifie que la transformation $\Lambda(P,p) = [p][P]^{-1}$, qui amène P sur p , est covariante par conjugaison par le petit groupe de P , propriété que possède en particulier la transformation de Lorentz pure $\Lambda(P \rightarrow p)$. Cherchons toutes les autres solutions en posant :

$$\Lambda(P,p) = \Lambda(P \rightarrow p) \mathring{\Lambda}(P,p) ;$$

on peut vérifier que $\mathring{\Lambda}$ est covariant par conjugaison par le petit groupe de P , et est une opération du petit groupe de P ; posons

$$\pi(p) = \mathring{\Lambda}(P,p) \cdot p .$$

Nous avons $\pi^2 = p^2$ et $\pi \cdot P = p \cdot P$ car $\mathring{\Lambda}(P,p) \cdot P = P$. D'autre part la relation de conjugaison s'écrit, pour toute opération Λ du petit groupe de P ,

$$\pi(p) = \Lambda \pi(\Lambda^{-1}p) ;$$

pour une opération L de l'intersection des petits groupes de P et p , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(p) = L \pi(p) \\ L \cdot P = P \\ L \cdot p = p \end{array} \right.$$

Donc π est invariant par la transformation L , et appartient donc au 2-plan (p,P) . Les conditions $\pi^2 = p^2$ et $\pi \cdot P = p \cdot P$ nous donnent alors deux solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi = p \\ \pi = 2 \left(\frac{p \cdot P}{p^2} \right) P - p . \end{array} \right.$$

Nous pouvons éliminer tout de suite la deuxième solution : plaçons nous dans le système où P est axe des temps; alors $\mathring{\Lambda}$ devient une rotation $\mathring{R}$ ayant la propriété $\mathring{R}(\vec{p}) \vec{p} = -\vec{p}$: c'est donc une rotation de π autour d'un axe perpendiculaire à $\vec{p}$. Mais en conjuguant cette rotation par une rotation R autour de $\vec{p}$:

$$R^{-1} \mathring{R}(\vec{p}) R = \mathring{R}(R^{-1}\vec{p}) = \mathring{R}(\vec{p})$$

on aboutit à une contradiction : les deux axes de la rotation $\mathring{R}$ que l'on peut tirer des deux membres de cette égalité diffèrent d'un angle égal à celui de la rotation R .

$$\text{Donc} \quad \pi(p) = p \quad \dagger$$

ce qui signifie que la transformation $\mathring{\Lambda}(P,p)$ appartient à l'intersection des petits groupes de P et p .

D'autre part la relation de conjugaison

$$\Lambda \mathring{\Lambda}(\Lambda^{-1}P, \Lambda^{-1}p) \Lambda^{-1} = \mathring{\Lambda}(P,p)$$

montre que l'opération $\mathring{\Lambda}(P,p)$ est une rotation autour du 2-plan (P,p), d'un angle φ qui ne dépend pas de p .

Notons que la transformation $\mathring{\Lambda}(P,p)$ se transformera par conjugaison par le groupe de Lorentz tout entier (de la même façon que $\Lambda(P \rightarrow p)$) à la condition que l'angle φ ne dépende pas de P .

Alors on aura, pour une transformation de Lorentz L quelconque

$$L^{-1} \overset{\circ}{\Lambda}(LP, Lp) L = \overset{\circ}{\Lambda}(P, p)$$

de même que : $L^{-1} \Lambda(LP \rightarrow Lp) L = \Lambda(P \rightarrow p)$.

Désormais nous nous restreindrons à des $\overset{\circ}{\Lambda}$ de cette forme pour des raisons que nous exposerons à la fin de l'étude du couplage l-s (cf. P110). Les auteurs prennent toujours $\varphi = 0$ dans la littérature.

Les tétrades employées sont donc telles que :

$$[p][P]^{-1} = \Lambda(P \rightarrow p) \overset{\circ}{\Lambda}(P, p)$$

soit : $[p] = \Lambda(P \rightarrow p) \overset{\circ}{\Lambda}(P, p) [P]$.

Par la suite nous poserons :

$$\Lambda_{\varphi}(P \rightarrow p) = \Lambda(P \rightarrow p) \overset{\circ}{\Lambda}(P, p) \quad (\text{III.10})$$

où φ est l'angle de la transformation $\overset{\circ}{\Lambda}$.

Les tétrades employées sont donc, pour p_1 et p_2 :

$$\left. \begin{aligned} [p_1] &= \Lambda_{\varphi_1}(P \rightarrow p_1) [P] \\ [p_2] &= \Lambda_{\varphi_2}(P \rightarrow p_2) [P] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.11})$$

Notons que ces tétrades ne sont définies que lorsque les valeurs de p_1 et p_2 sont simultanément connues. La forme de la représentation (III.2) n'en sera pas pour autant modifiée.

3) - Calcul des états de moment cinétique j en couplage l-s

Avec le choix de tétrade (III.11) nous pouvons récrire l'équation (III.9) :

$$I(\hat{a}) = \int dR \delta(\hat{a} - R^{-1}\hat{q}) \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1} (R) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2} (R) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*} (R)$$

Nous allons décomposer δ en utilisant la relation de fermeture des harmoniques sphériques

$$\begin{aligned} \delta(\hat{a} - R^{-1}\hat{q}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} Y_l^{m*}(\hat{a}) \cdot Y_l^m(R^{-1}\hat{q}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m, m'} Y_l^{m*}(\hat{a}) Y_l^{m'}(\hat{q}) \mathcal{D}_{m, m'}^l(R) \end{aligned}$$

Alors dans l'intégrale $I(\hat{a})$ ne figurent plus que quatre matrices rotation :

$$\begin{aligned} I(\hat{a}) &= \sum_{l, m, m'} Y_l^{m*}(\hat{a}) Y_l^{m'}(\hat{q}) \int dR \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1} (R) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2} (R) \mathcal{D}_{m, m'}^l(R) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*} (R) \\ &= \sum_{l, m, m'} Y_l^{m*}(\hat{a}) Y_l^{m'}(\hat{q}) \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle \langle s_1 s_2 \sigma_1' \sigma_2' | s \tau' \rangle \langle l s m \tau | k \nu \rangle \\ &\quad \langle l s m' \tau' | k' \nu' \rangle \int dR \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*} (R) \mathcal{D}_{\nu' \nu'}^k (R) \end{aligned}$$

La dernière intégrale vaut $\frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jk} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu'}$

$$\begin{aligned} I(\hat{a}) &= \sum_{l, m, m'} Y_l^{m*}(\hat{a}) Y_l^{m'}(\hat{q}) \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle \langle s_1 s_2 \sigma_1' \sigma_2' | s \tau' \rangle \langle l s m \tau | j \mu \rangle \\ &\quad \langle l s m' \tau' | j \mu \rangle \times \frac{8\pi^2}{2j+1} \end{aligned}$$

Portons dans (43), il vient :

$$P_P^M J_\mu |\Phi\rangle = \theta(P^0) \theta(M^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\sqrt{\lambda}}{8M^2} \sum_{l,s} \Phi_{ls}^{(\mu)} |ls\rangle$$

avec :

$$\Phi_{ls}^{(\mu)} = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{8\pi^2}{2j+1} \int_{\Phi_{\sigma_1 \sigma_2}(\hat{s})} Y_{l, \hat{s}}^{m*} \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle \langle l s m \tau | j \mu \rangle d\hat{s}$$

et

$$|ls\rangle = \sum_{\sigma_1' \sigma_2'} \int d\Omega(\hat{q}) Y_{l, \hat{q}}^{m'} \langle s_1 s_2 \sigma_1' \sigma_2' | s \tau \rangle \langle l s m' \tau' | j \mu \rangle |[p_1], [p_2], \sigma_1', \sigma_2'\rangle$$

Nous avons donc écrit une base du sous-espace P, j, μ numérotée par les valeurs des nombres l et s :

$$|[P], j, \mu, l, s\rangle = K \int \frac{d^3 p_1}{2\omega_1} \frac{d^3 p_2}{2\omega_2} \delta(P - p_1 - p_2) \sum_m Y_{l, \hat{q}}^m(\hat{q}(p_1, p_2)) \times \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle \langle l s m \tau | j \mu \rangle |[p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2\rangle$$

K est une constante que l'on fixera en écrivant que ces états sont normalisés à $\delta(P - P')$. Il est facile de vérifier que pour différentes valeurs des indices discrets on obtient des états orthogonaux :

$$\begin{aligned} \langle [P'], j', \mu', l', s' | [P], j, \mu, l, s \rangle &= \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \\ &= \delta(P^2 - P'^2) 2\sqrt{P^2 + P'^2} \delta(\vec{P} - \vec{P}') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \end{aligned}$$

Le calcul de la normalisation n'offre plus de difficultés. Les choix de phases

qui y sont faits conduisent à

$$\begin{aligned} \langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, l, s \rangle &= \frac{2M\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}} \delta(P - p_1 - p_2) \\ &\times \sum \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle \langle l s m \tau | j \mu \rangle Y_{l, \hat{q}}^m \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} [p_1] &= \Lambda_{\varphi_1}(P \rightarrow p_1) [P] \\ [p_2] &= \Lambda_{\varphi_2}(P \rightarrow p_2) [P] \end{aligned} \quad (III.12)$$

4) - Couplage l - s avec des tétrades quelconques.

Les formules (II.4) nous permettent immédiatement de calculer l'état $|l, s\rangle$ dans la base utilisant les tétrades quelconques. La formule du coefficient de Clebsch-Gordan correspondant est alors :

$$\begin{aligned} \langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, l, s \rangle &= \frac{2M\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}} \delta(P - p_1 - p_2) \\ &\times \sum \langle s_1 s_2 \tau_1 \tau_2 | s \tau \rangle \langle l s m \tau | j \mu \rangle Y_{l, \hat{q}}^m \mathcal{D}_{\sigma_1 \tau_1}^{s_1} \left([p_1]^{-1} \Lambda_{\varphi_1}(P \rightarrow p_1) [P] \right) \\ &\times \mathcal{D}_{\sigma_2 \tau_2}^{s_2} \left([p_2]^{-1} \Lambda_{\varphi_2}(P \rightarrow p_2) [P] \right) \end{aligned} \quad (III.13)$$

Sur cette formule on vérifie facilement la condition (III.6) ou (III.7) en utilisant le fait que $\Lambda_{\varphi}(P \rightarrow p)$ se transforme par conjugaison par le groupe de Lorentz tout entier :

$$\Lambda_{\varphi}(P \rightarrow p) \Lambda^{-1} = \Lambda_{\varphi}(\Delta P \rightarrow \Delta p)$$

On peut remarquer qu'il existe une infinité de couplages l -s identiques, suivant les valeurs données aux angles φ_1 et φ_2 . Les valeurs habituelles sont arbitrairement prises égales à zéro.

Le passage de l'une à l'autre de ces valeurs de l'angle φ n'est pas simple car la transformation $\hat{\Lambda}(P,p)$ est représentée par $e^{-i\lambda\varphi}$, où λ est l'opérateur d'hélicité $-\frac{W \cdot h(p)}{m}$ (voir chapitre suivant); cet opérateur n'est pas invariant par parité. Plus précisément si P est l'opérateur parité,

$$P \lambda P^{-1} = -\lambda$$

soit
$$P e^{-i\lambda\varphi} P^{-1} = e^{+i\lambda\varphi} .$$

Les angles φ qui conduisent aux propriétés de transformation par parité du couplage l -s ordinaire doivent être tels que $e^{2i\lambda\varphi} = 1$.

En particulier φ peut être pris égal à π pour toutes les particules à hélicité entière.

Plus généralement, supposons défini un système de paramètres de dégénérescence d'indices η . Il est possible d'écrire immédiatement d'autres systèmes, repérés par les mêmes indices η .

Si le coefficient de Clebsch-Gordan définissant le premier système est :

$$\Phi_{\sigma_1 \sigma_2}^{\eta P j \mu}([p_1], [p_2]) = \langle [p_1], [p_2], \sigma_1 \sigma_2 | [P], j, \mu, \eta \rangle \quad , \quad (III.14)$$

on peut déterminer d'autres systèmes définis par les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma_1 \sigma_2}^{\eta P j \mu}([p_1], [p_2]) &= \langle [p_1], [p_2], \sigma_1 \sigma_2 | [P], j, \mu, \eta \rangle_{(\varphi_1, \varphi_2)} \\ &= \Phi_{\sigma_1 \sigma_2}^{\eta P j \mu} \left(\hat{\Lambda}_{\varphi_1}^{\eta P j \mu}(P, p_1)[p_1], \hat{\Lambda}_{\varphi_2}^{\eta P j \mu}(P, p_2)[p_2] \right) . \end{aligned} \quad (III.15)$$

La transformation unitaire qui relie la base Φ^η et la base Ψ^η n'est en général pas diagonale dans le paramètre de dégénérescence, sauf dans la base d'hélicité (voir chapitre suivant) où elle se réduit à un simple changement de phase dans l'état $|P j \mu\rangle$.

En conclusion, on peut dire qu'il existe un couplage l -s privilégié (par suite de l'usage exclusif qui en a été fait à cause de ses bonnes propriétés de transformation par parité).

C) - COUPLAGE D'HELICITE

1) - Introduction. Vecteur d'hélicité

Cette forme de couplage, due à Jacob et Wick^[7], a été particulièrement féconde ces dernières années. Il nous a paru utile de la réexposer dans ce cadre. Il convient également de citer les travaux de Chou Kuang Chao et Shirokov^[11] qui ont également obtenu certaines formules. Les définitions de spin et de phase qu'ils utilisent sont différentes de celles utilisées par Jacob et Wick, que nous adopterons.

Choisir la base d'hélicité revient à faire un choix particulier pour les vecteurs n_1, n_2, n_3 sur lesquels on va mesurer le spin de la particule ; le vecteur n_3 adopté est le vecteur d'hélicité h dans un référentiel d'axe des temps n fixé une fois pour toutes. Si l'impulsion de la particule est p , le vecteur $h(p)$ normé à $h^2(p) = -1$, possède les deux propriétés suivantes :

- Il appartient au 2-plan n, p ,
- Il est orthogonal à p .

Ces conditions le déterminent au signe près. Il n'est malheureusement pas possible de déterminer le signe à prendre par une condition supplémentaire invariante par transformation de Lorentz. Ceci est lié à la discontinuité que possède le vecteur h lorsque p coïncide avec l'axe des temps n .

Le calcul de $h(p)$ est évident :

$$h(p) = \pm \frac{n - \frac{(n \cdot p)p}{m^2}}{\sqrt{\frac{(n \cdot p)^2}{m^2} - 1}} \quad (\text{III.16})$$

où m est la masse de la particule.

On peut déterminer le signe de $h(p)$ par la condition :

$$h(\vec{p}) \cdot \vec{p} > 0$$

ce qui donne en posant :

$$\begin{aligned} \text{ch } \varphi &= \frac{p^0}{m} \\ \text{sh } \varphi &= \frac{|\vec{p}|}{m} \end{aligned}$$

$$h(p) = \frac{1}{\text{sh } \varphi} \left(\frac{p}{m} \text{ch } \varphi - n \right) \quad (\text{III.17})$$

Les composantes de $h(p)$ sont, dans le système où n est axe des temps :

$$\begin{cases} \vec{h}(p) = \frac{p^0}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \\ h^0(p) = \frac{|\vec{p}|}{m} \end{cases}$$

2) - Hélicité dans un référentiel d'axe des temps n

C'est par définition l'opérateur

$$\lambda(p) = - \frac{W(p) \cdot h(p)}{m} \quad (\text{III.18})$$

En utilisant les formules (I.14) et (III.17), il vient :

$$\lambda = + \frac{1}{2m \text{sh } \varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} p^\sigma \left(\frac{p}{m} \text{ch } \varphi - n \right)^\mu = - \frac{1}{2|\vec{p}|} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} p^\sigma n^\mu$$

D'où :

$$\lambda = - \frac{1}{2|\vec{p}|} \varepsilon_{0ijk} J^{ij} p^k$$

or

$$- \frac{1}{2} \varepsilon_{0ijk} J^{ij} = J^k$$

On trouve la formule bien connue :

$$\lambda = \frac{\vec{J} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (\text{III.19})$$

3) - Système de deux particules : Hélicité dans le système barycentrique

Pour décrire les états de spin de la particule 1, nous utilisons une tétrade définie de la manière suivante :

$$[p_1] = \Lambda(P \rightarrow p_1) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] \quad , \quad (III.20)$$

$\Lambda(n_3, q)$ est une transformation du petit groupe de P , qui amène $n_3(P)$ sur q . Il est facile de vérifier que la transformation $\Lambda(P \rightarrow p_1)$ amène q_{12} sur $h(p_1)$. Le troisième vecteur d'espace $n_3(p_1)$ de la tétrade représentée par (III.20) est donc le vecteur d'hélicité dans le système d'axe des temps P , associé à p_1 . L'intérêt d'une telle base pour les états de spin est que

$$\frac{1}{m_1} W_{1 \cdot n_3(p_1)} = \frac{1}{m_1} \frac{W_{1 \cdot P}}{\sqrt{\frac{(P \cdot P)^2}{M^2 m_1^2} - 1}} = \lambda_1$$

sera invariant par transformation de Lorentz.

Le nombre quantique λ_1 pourra donc être utilisé pour indexer les diverses représentations irréductibles.

Pour décrire les états de spin de la particule 2, nous pourrions utiliser :

$$[p_2] = \Lambda(P \rightarrow p_2) \Lambda(n_3, q_{12}) [P]$$

mais il est facile de voir que le troisième vecteur d'espace de la tétrade associée à p_2 est égal à $-h(p_2)$, vecteur d'hélicité associé à p_2 , dans le système d'axe des temps P . Par convention on prendra

$$[p_2] = \Lambda(P \rightarrow p_2) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] Y \quad , \quad (III.21)$$

où Y est une rotation d'angle π autour de l'axe Oy du système d'axe associé à $\hat{p}$. Les deux vecteurs d'espace $n_1(p_2)$ et $n_3(p_2)$ sont alors de sens opposé à ceux que l'on avait précédemment.

On peut alors calculer :

$$R_1 = [p_1]^{-1} \Lambda[\Lambda^{-1} p_1]$$

avec $\Lambda = [P] R [P]^{-1}$.

On vérifie bien que R_1 est une rotation autour de Oz :

$$R_1 = [P]^{-1} \Lambda^{-1}(n_3, q_{12}) \Lambda^{-1}(P \rightarrow p_1) \Lambda \Lambda(P \rightarrow \Lambda^{-1} p_1) \Lambda(n_3, \Lambda^{-1} q_{12}) [P] \quad .$$

La covariance des transformations de Lorentz pures nous permet d'écrire :

$$\Lambda \Lambda(P \rightarrow \Lambda^{-1} p_1) = \Lambda(\Delta P \rightarrow p_1) \Lambda = \Lambda(P \rightarrow p_1) \Lambda$$

car Λ est une opération du petit groupe de P . D'où :

$$R_1 = [P]^{-1} \Lambda^{-1}(n_3, q_{12}) \Lambda \Lambda(n_3, \Lambda^{-1} q_{12}) [P]$$

$$R_1 = [P]^{-1} \Lambda^{-1}(n_3, q_{12}) [P] [P]^{-1} \Lambda [P] [P]^{-1} \Lambda(n_3, \Lambda^{-1} q_{12}) [P] \quad .$$

Soit : $R_1 = R^{-1}(\hat{q}) R R(R^{-1} \hat{q})$.

On a posé $R(\hat{q}) = [P]^{-1} \Lambda(n_3, q_{12}) [P]$. $R(\hat{q})$ est une rotation qui amène Oz sur $[P]^{-1} q_{12}$ quadri-vecteur dont la composante de temps est nulle (car $P \cdot q_{12} = 0$). Les angles qui définissent la direction de ce vecteur sont précisément ceux qui repèrent $\hat{q}$ sur la sphère unité.

La rotation R_2 est reliée de façon évidente à R_1 , ainsi que le montre la comparaison de (III.20) et (III.21).

On a

$$R_2 = Y^{-1} R_1 Y$$

R_2 et R_1 sont deux rotations autour de Oz , d'angles opposés. Les éléments de matrice de ces rotations sont :

$$d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(R_2) = d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(-\pi) d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(R_1) d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(\pi)$$

Avec $d_{\lambda \lambda'}^{s_2}(\pm \pi) = (-1)^{s_2 \mp \lambda} \delta_{\lambda, -\lambda'}$

Or $d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(R_1)$ est diagonale car R_1 est une rotation autour de Oz .

$$\begin{aligned} d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(R_2) &= (-1)^{s_2 + \lambda_2} \delta_{\lambda_2 - \lambda_2} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(R_1) (-1)^{s_2 - \lambda_2} \delta_{\lambda_2 - \lambda_2} \\ &= \delta_{\lambda_2 \lambda_2} (-1)^{2(s_2 - \lambda_2)} d_{-\lambda_2 - \lambda_2}^{s_2}(R_1) \end{aligned}$$

$s_2 - \lambda_2$ est toujours entier et $(-1)^{2(s_2 - \lambda_2)} = +1$.

Donc $d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(R_2) = \delta_{\lambda_2 \lambda_2} d_{-\lambda_2 - \lambda_2}^{s_2}(R_1)$

Avant de poursuivre le calcul, nous pouvons dire un mot sur l'opération $\Lambda(n_3, q)$, ou ce qui revient au même, sur la rotation $R(q)$. L'état propre du moment cinétique total que nous allons écrire semble formellement dépendre du choix de $\Lambda(n_3, q)$, mais en fait il n'en est rien ainsi que nous le verrons plus tard. Pour l'instant disons simplement que $\Lambda(n_3, q)$ est une opération du petit groupe de $P = p_1 + p_2$, qui amène $n_3(P)$ sur q où q est un quadrivecteur orthogonal à P .

Nous récrivons maintenant l'intégrale $I(\hat{a})$ de (III.9)

$$\begin{aligned} I_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_1 \lambda_2}^{j^*}(\hat{a}) &= \int dR \delta(\hat{a} - R^{-1}q) d_{\lambda_1 \lambda_1}^{s_1}(R_1) d_{\lambda_2 \lambda_2}^{s_2}(R_2) d_{\mu\mu}^{j^*}(R) \\ &= \int dR (\hat{a} - R^{-1}q) d_{\lambda\lambda}^{s_1}(R_1) d_{\mu\mu}^{j^*}(R) \delta_{\lambda_1 \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} \delta_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}$$

On a utilisé les relations entre R_1, R_2 et le fait que $d(R_1)$ est diagonale.

Or $R_1 = R^{-1}(q) R R^{-1}(q)$

Nous pouvons alors utiliser la relation de fermeture :

$$\delta(\hat{a} - R^{-1}q) = \sum_{k \nu} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} d_{\nu\lambda}^k(R(\hat{a})) \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} d_{\nu\lambda}^{k^*}(R(R^{-1}q))$$

Portons dans $I(\hat{a})$:

$$I(\hat{a}) = \sum_{k \nu} \frac{2k+1}{4\pi} d_{\nu\lambda}^k(R(\hat{a})) \int dR d_{\lambda\nu}^k(R^{-1}(q)R) d_{\mu\mu}^{j^*}(R) dR$$

On a utilisé le fait que :

$$d_{\nu\lambda}^{k^*}(R(R^{-1}q)) = d_{\lambda\nu}^k(R^{-1}(R^{-1}q))$$

et, tenant compte de ce que R_1 est une rotation autour de Oz ,

$$d_{\lambda\lambda}^{s_1}(R^{-1}(q) R R^{-1}(q)) d_{\lambda\nu}^k(R^{-1}(R^{-1}q)) = d_{\lambda\nu}^k(R^{-1}(q) R R^{-1}(q) R^{-1}(R^{-1}q))$$

Soit (nous ne récrivons pas les symboles de Kronecker portant sur les indices de spin) :

$$I(\hat{a}) = \sum_{k \nu} \frac{2k+1}{4\pi} d_{\nu\lambda}^k(R(\hat{a})) d_{\lambda\alpha}^k(R^{-1}(q)) \int dR d_{\alpha\nu}^k(R) d_{\mu\mu}^{j^*}(R) dR$$

La dernière intégrale donne $\frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{jk} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\mu\nu}$.

Soit, en portant dans (III.9) on constate que $P_P^M J |\Phi\rangle$ se sépare en une somme d'états $|[P]j\mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$

$$P_P^M J |\Phi\rangle = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \psi_{\lambda_1, \lambda_2} |[P]j\mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

avec

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2} = \frac{1}{K} \int \Phi_{\lambda_1, \lambda_2}(P, \hat{a}) \frac{2J+1}{4\pi} \mathcal{D}_{\mu\lambda}^J(R(\hat{a})) d\Omega \hat{a}$$

$$|[P]j\mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle = K \theta(P^0) \theta(M^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\sqrt{\kappa}}{8M^2} \int d\Omega \hat{q} \mathcal{D}_{\lambda\mu}^J(R^{-1}(\hat{q})) |[p_1], [p_2], \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

avec $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, et $\kappa = \lambda(m_1^2, m_2^2, M^2)$

K est un coefficient de normalisation que nous fixerons par la relation

$$\langle P' J' \mu', \lambda_1', \lambda_2' | P J \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \delta(P - P') \delta_{JJ'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{\lambda_2 \lambda_2'}$$

Nous voyons que l'état $|Pj\mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ n'a de composante que sur les états $|[p_1], [p_2], \lambda_1, \lambda_2\rangle$ de même hélicité.

Suivant Jacob et Wick^[7], nous ne choisirons pas K réel positif, mais $K = (-1)^{s_2 - \lambda_2} K'$ où K' est réel positif. Ce choix de phase a pour but de simplifier les propriétés de transformation par parité de l'état $|[P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$. On s'apercevra en particulier que c'est ce choix de phase qui donne les formules les plus simples de changement de couplage (passage du couplage l-s à l'hélicité). Nous pouvons dans ces conditions écrire le coefficient de Clebsch-Gordan, après avoir calculé la normalisation :

$$\langle [p_1], [p_2], \lambda_1, \lambda_2 | [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = (-1)^{s_2 - \lambda_2} \delta(P - p_1 - p_2) \frac{2M\sqrt{2}}{\kappa^{1/4}} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\lambda}^{J*}(R(\hat{q}))$$

(III.22)

avec

$$[p_1] = \Lambda(p_1 \leftarrow P) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] \\ = \Lambda(p_1 \rightarrow P) [P] R(\hat{q})$$

$$[p_2] = \Lambda(p_2 \leftarrow P) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] Y \\ = \Lambda(p_2 \rightarrow P) [P] R(\hat{q}) Y$$

(III.22)

et

$$\kappa = \lambda(m_1^2, m_2^2, M^2)$$

4) - Couplage d'hélicité dans des bases de spins quelconques

Les formules (III.22) et (II.4) nous permettent de déterminer les coefficients de Clebsch-Gordan dans des bases de spins quelconques. Nous utilisons les couplages les plus généraux (cf (III.10) et (III.15))

$$\langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{2M\sqrt{2}}{\kappa^{1/4}} \delta(P - p_1 - p_2) \times \\ \times \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\lambda}^{J*}(R(\hat{q})) (-1)^{s_2 - \lambda_2} \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{s_1}(R_1) \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2}(R_2)$$

(III.23)

avec :

$$R_1 = [p_1]^{-1} \Lambda_{\varphi_1}(P \rightarrow p_1) \Lambda(n_3, q_{12}) [P]$$

$$R_2 = [p_2]^{-1} \Lambda_{\varphi_2}(P \rightarrow p_2) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] Y$$

$$R(\hat{q}) = [P]^{-1} \Lambda(n_3, q_{12}) [P]$$

Sur cette formule deux faits sont clairs :

1) la dépendance en φ_1 et φ_2 de l'état $|[P]j\mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ est de la forme $e^{-i(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)}$, soit une simple phase. En couplage d'hélicité :

l'ambiguïté dans le choix des angles φ revient à une ambiguïté dans la phase de l'état $|[P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$.

2) L'état $|[P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ ne dépend pas du choix de l'opération $R(\hat{q})$ (ou de $\Lambda(n_3, q_{12})$) : modifier cette tétrade revient à multiplier R_1 ou R_2 à droite par une rotation autour de Oz d'angles respectifs $+\theta(\hat{q})$ et $-\theta(\hat{q})$ qui peut dépendre de $\hat{q}$: mais en addition, $R(\hat{q})$ est également multiplié à droite par le même angle et il en résulte une phase $e^{i(\lambda - \lambda_1 + \lambda_2)\theta(\hat{q})}$, en fait égale à 1 car $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. En particulier il est commode pour certains calculs de choisir pour $R(\hat{q})$ la rotation pure $R(Oz \rightarrow \hat{q})$ dont les angles d'Euler sont $\varphi, \theta, -\varphi$; θ et φ étant les coordonnées sphériques du vecteur $\hat{q}$.

D) - COUPLAGE MIXTE

1) - Introduction

L'un des intérêts du couplage d'hélicité est de pouvoir être utilisé sans changements dans le cas où certaines masses sont nulles. Il est toujours commode dans le cas où l'énergie cinétique est grande devant la masse au repos. Dans certains problèmes - par exemple transition γ pour les noyaux -, certaines particules sont lourdes, d'autres ont une masse nulle ou sont très relativistes. Un couplage utilisant la base d'hélicité pour les particules de masse nulle ou de grande vitesse et la base du couplage $l-s$ pour les particules lourdes est utile dans ce cas. Il existe en théorie relativiste et conduit à ce que l'on a l'habitude d'appeler un couplage multipolaire.

2) - Bases de spin utilisées

Les états de spin de la particule 1 sont décrits dans la base d'hélicité dans le système barycentrique, ceux de la particule 2 sur la base utilisée dans le couplage $l-s$.

$$\text{Soit : } \begin{cases} [p_1] = \Lambda_{\varphi_1}(p_1 \leftarrow P) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] \\ [p_2] = \Lambda_{\varphi}(p_2 \leftarrow P) [P] \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

3) - Calcul du couplage

L'intégrale $I(\hat{a})$ de (III.9) s'écrit alors :

$$I(\hat{a}) = \int dR \delta(\hat{a} - R^{-1}\hat{q}) \mathcal{D}_{\sigma_1^1 \sigma_1}^{s_1}(R_1) \mathcal{D}_{\sigma_2^1 \sigma_2}^{s_2}(R) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*}(R)$$

avec
$$\begin{cases} R_1 = [P]^{-1} \Lambda^{-1}(q_{12}, n_3) \Lambda(\Lambda^{-1}q_{12}, n_3) [P] \\ R = [P]^{-1} \Lambda [P] \end{cases}$$

Utilisant les mêmes notations et la même méthode de calcul que dans le cas de l'hélicité, il vient :

$$I(\hat{a}) = \sum_{\sigma_1 \sigma_1' \sigma_2 \sigma_2'} \frac{2k+1}{4\pi} \mathcal{D}_{\nu\sigma_1}^k(R(\hat{a})) \int dR \mathcal{D}_{\sigma_1\nu}^k(R^{-1}(R^{-1}\hat{q})) \mathcal{D}_{\sigma_1'\sigma_1}^{s_1}(R_1) \mathcal{D}_{\sigma_2'\sigma_2}^{s_2}(R) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*}(R)$$

De plus $R_1 = R^{-1}(\hat{q})R R(R^{-1}\hat{q})$ est une rotation autour de Oz : on peut réunir les deux premières matrices rotation sous l'intégrale en une seule

$$\begin{aligned} I(\hat{a}) &= \sum_{k\nu} \frac{2k+1}{4\pi} \mathcal{D}_{\nu\sigma_1}^k(R(\hat{a})) \delta_{\sigma_1'\sigma_1} \int dR \mathcal{D}_{\sigma_1\nu}^k(R^{-1}(\hat{q})R R(R^{-1}\hat{q}) R^{-1}(R^{-1}\hat{q})) \\ &\quad \times \mathcal{D}_{\sigma_2'\sigma_2}^{s_2}(R) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*}(R) \\ &= \sum_{k\nu} \frac{2k+1}{4\pi} \mathcal{D}_{\nu\sigma_1}^k(R(\hat{a})) \delta_{\sigma_1'\sigma_1} \mathcal{D}_{\sigma_1'\alpha}^k(R^{-1}(\hat{q})) \int dR \mathcal{D}_{\alpha\nu}^k(R) \mathcal{D}_{\sigma_2'\sigma_2}^{s_2}(R) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*}(R) \\ &= \sum_{k\nu} \frac{2k+1}{4\pi} \mathcal{D}_{\nu\sigma_1}^k(R(\hat{a})) \delta_{\sigma_1'\sigma_1} \mathcal{D}_{\sigma_1'\alpha}^k(R^{-1}(\hat{q})) \langle ks_2 \alpha \sigma_2' | j\mu \rangle \langle ks_2 \nu \sigma_2 | j\mu \rangle \frac{8\pi^2}{2j+1} \end{aligned}$$

Portons ce résultat dans l'équation (43), il vient :

$$P_{\mu}^M j | \Phi \rangle = \sum_{k\lambda_1} \psi_{k\lambda_1} | [P], j\mu, k, \lambda_1 \rangle$$

avec :

$$\psi_{k\lambda_1} = \frac{1}{K} \int \Phi_{\lambda_1 \sigma_2} (P, \hat{a}) \frac{2k+1}{4\pi} \frac{8\pi^2}{2j+1} d\Omega_{\hat{a}} \sum_{\nu} \langle ks_2 \nu \sigma_2 | j\mu \rangle \mathcal{D}_{\nu\lambda_1}^k(R(\hat{a}))$$

$$\begin{aligned} |[P], j\mu, k\lambda_1 \rangle &= K \theta(P^0) \theta(M^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\sqrt{\lambda}}{8M^2} \int d\Omega_{\hat{q}} \sum_{\alpha} \mathcal{D}_{\lambda_1 \alpha}^k(R^{-1}(\hat{a})) \times \\ &\quad \times \langle ks_2 \alpha \sigma_2 | j\mu \rangle |[p_1], [p_2], \lambda_1, \sigma_2 \rangle \end{aligned}$$

La normalisation est fixée par :

$$\langle [P'], j', \mu', k', \lambda_1' | [P], j, \mu, k, \lambda_1 \rangle = \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{kk'}$$

D'où le coefficient de Clebsch-Gordan associé au couplage mixte :

$$\begin{cases} \langle [p_1], [p_2], \lambda_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, k, \lambda_1 \rangle = \\ = \delta(P - p_1 - p_2) \frac{2M\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}} \sum_{\alpha} \langle ks_2 \alpha \sigma_2 | j\mu \rangle \mathcal{D}_{\alpha\lambda_1}^{k*}(R(\hat{q})) \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \end{cases} \quad (III.25)$$

avec
$$\begin{aligned} [p_1] &= \Lambda_{\phi_1}(p_1 \leftarrow P) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] \\ [p_2] &= \Lambda_{\phi_2}(p_2 \leftarrow P) [P] \end{aligned}$$

4) - Couplage avec des tétrades quelconques

Les formules (III.25) et (II.4) nous permettent de déterminer le coefficient de Clebsch-Gordan dans des bases de spin quelconques

$$\begin{aligned} \langle [p_1], [p_2], \sigma_1 \sigma_2 | [P], j\mu, k, \lambda_1 \rangle &= \\ = \sum_{\tau_2 \alpha} \frac{2M\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}} \delta(P - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \langle ks_2 \alpha \tau_2 | j\mu \rangle \mathcal{D}_{\alpha\lambda_1}^{k*}(R(\hat{q})) \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{(s_1)}(R_1) \\ &\quad \times \mathcal{D}_{\sigma_2 \tau_2}^{(s_2)}(R_2) \end{aligned} \quad (III.26)$$

avec

$$R_1 = [p_1]^{-1} \Delta_{\varphi_1} (P \rightarrow p_1) \Delta(n_3, q_{12}) [P]$$

$$R_2 = [p_2]^{-1} \Delta_{\varphi_2} (P \rightarrow p_2) [P] \quad .$$

(III.26)

Comme dans le cas du couplage d'hélicité, l'état $[[P]j, \mu, k, \lambda_1\rangle$ ne dépend pas du choix particulier de l'opération $\Delta(n_3, q_{12})$. Enfin sa dépendance en φ_1 est une simple phase. La dépendance en φ_2 est compliquée.

E) - CHANGEMENT DE COUPLAGE

1) - Caractère complet des divers modes de couplage

Il est facile de vérifier que les transformations définies par les coefficients de Clebsch-Gordan (III.13), (III.23) ou (III.26) sont unitaires :

En effet des bases d'états $[[P], j, \mu, \eta\rangle$ où η désigne le paramètre de dégénérescence sont orthonormées :

$$\langle [P], j, \mu, \eta | [P'], j', \mu', \eta' \rangle = \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\eta\eta'}$$

et d'autre part elles sont complètes, c'est-à-dire que l'opérateur

$$\sum_{j\mu\eta} \int | [P], j, \mu, \eta \rangle d^4P \langle P j \mu \eta |$$

est l'opérateur identité.

On voit après quelques manipulations de coefficients de Clebsch-Gordan que ce résultat est du aux relations de fermeture pour les fonctions angulaires utilisées,

$$\delta(\hat{q} - \hat{q}') = \sum_{j\mu} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \vartheta_{\mu\lambda}^{j*} (R(\hat{q})) \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \vartheta_{\mu\lambda}^j (R(\hat{q}'))$$

qui se ramènent à la formule habituelle des harmoniques sphériques dans le cas $\lambda = 0$.

Nous pouvons écrire les formules d'unitarité pour les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int \frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d\vec{p}_2}{2\omega_2} \langle [P], j, \mu, \eta | [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 \rangle \langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [P'], j', \mu', \eta' \rangle$$

$$= \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\eta\eta'} \quad (III.27)$$

$$\sum_{j\mu\eta} \int dP \langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, \eta \rangle \langle [P], j, \mu, \eta | [p_1'], [p_2'], \sigma_1', \sigma_2' \rangle$$

$$= 2\omega_1 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1') 2\omega_2 \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_2') \delta_{\sigma_1 \sigma_1'} \delta_{\sigma_2 \sigma_2'} \quad (\text{III.27})$$

$\delta_{\eta\eta'}$ désigne soit $\delta_{ll'} \delta_{ss'}$ (couplage $l-s$)
 $\delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{\lambda_2 \lambda_2'}$ (couplage d'hélicité)
 $\delta_{kk'} \delta_{\lambda_1 \lambda_1'}$ (couplage mixte)

2) - Changements de couplages

Les bases d'états correspondant aux divers modes de couplage étant orthonormées et complètes, il est intéressant de connaître les formules de passage de l'une à l'autre. Pour les déterminer il suffit de multiplier les transformations orthogonales du type (III.27).

a) Passage du couplage $l-s$ à l'hélicité

Pour calculer $\langle [p_1'], j', \mu', \lambda_1 \lambda_2 | [P], j, \mu, l, s \rangle$, nous intercalons une décomposition de l'identité sur une base d'états où le spin est mesuré sur les tétrades du couplage $l-s$, soit :

$$\langle [p_1'], j', \mu', \lambda_1 \lambda_2 | [P], j, \mu, l, s \rangle = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int \langle [p_1'], j', \mu', \lambda_1 \lambda_2 | [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 \rangle$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d\vec{p}_2}{2\omega_2} \langle [p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, l, s \rangle$$

Une fonction $\delta(P - P')$ résulte de la conservation de l'énergie impulsion. Pour la définition de l'état en couplage d'hélicité on a choisi pour $R(\hat{q})$

la rotation pure amenant Oz sur $\hat{q}$.

Enfin on a pris $[p_1] = \Lambda(P \rightarrow p_1) [P]$

$[p_2] = \Lambda(P \rightarrow p_2) [P]$

Il vient :

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 | l s \rangle = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int \frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d\vec{p}_2}{2\omega_2} \frac{8M^2}{\sqrt{\lambda}} \delta(P - P') \delta(P - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{2j'+1}{4\pi}}$$

$$\times \mathcal{D}_{\mu'\lambda}^{j'}(R(\hat{q})) (-1)^{s_2 - \lambda_2} \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{s_1}(R_1) \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2}(R_2) \sum_{m \tau} \langle l s m \tau | j \mu \rangle \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle Y_{lm}^m(\hat{q})$$

Utilisant les valeurs de $[p_1]$ et $[p_2]$ dans l'expression de R_1 et R_2 de l'équation (III.23), on obtient :

$$R_1 = [P]^{-1} \Lambda(n_3, a_{12}) [P] = R(\hat{q})$$

$$R_2 = [P]^{-1} \Lambda(n_3 \rightarrow a_{12}) [P] Y = R(\hat{q}) \times Y$$

où Y est une rotation de π autour de l'axe Oy.

Il vient :

$$\mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2*}(R_2) = \sum_{\mu_2} \mathcal{D}_{\sigma_2 \mu_2}^{s_2*}(R(\hat{q})) \mathcal{D}_{\mu_2 \lambda_2}^{s_2*}(Y)$$

$$= \mathcal{D}_{\sigma_2, -\lambda_2}^{s_2*}(R(\hat{q})) (-1)^{s_2 - \lambda_2} ;$$

d'où :

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 | l s \rangle = \delta(P - P') \int d\Omega_{\hat{q}} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \mathcal{D}_{\mu'\lambda}^{j'}(R(\hat{q})) \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{s_1*}(R(\hat{q})) \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2*}(R(\hat{q}))$$

$$\times \langle l s m \tau | j \mu \rangle \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle Y_{lm}^m(\hat{q})$$

Tenant compte de ce que

$$Y_{\ell}^m(\hat{q}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{m0}^{\ell*} \left(R(\hat{q}) \right)$$

on a quatre matrices de rotation intéressant la même rotation. On les couple à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan, puis on intègre sur les variables angulaires et il reste une somme sur six coefficients de Clebsch-Gordan. Grâce aux relations d'orthogonalité utilisées deux fois on obtient $\delta_{jj'}$, $\delta_{\mu\mu'}$, et deux coefficients de Clebsch-Gordan.

D'où la formule :

$$\left\langle [P'], j', \mu', \lambda_1, \lambda_2 \mid [P], j, \mu, \ell, s \right\rangle = \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2j+1}} \langle s_1 s_2 \lambda_1 - \lambda_2 \mid s \ell \rangle \langle \ell s_0 \lambda \mid j \lambda \rangle \quad (\text{III.28})$$

b) Passage du couplage mixte au couplage d'hélicité

On procède de façon analogue en intercalant l'unité mesurée sur une base de spin qui est celle adaptée au couplage mixte.

$$\begin{aligned} \left\langle [P'], j', \mu', k, \lambda_1' \mid [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle = \\ \sum_{\sigma_2} \int \frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d\vec{p}_2}{2\omega_2} \left\langle [P'], j', \mu', k, \lambda_1' \mid [p_1] [p_2] \lambda_1 \sigma_2 \right\rangle \left\langle [p_1] [p_2] \lambda_1 \sigma_2 \mid [P] j \mu \lambda_1 \lambda_2 \right\rangle = \\ \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \sum_{\sigma_2^m} \int d\Omega_{\hat{q}} \delta(P - P') \mathcal{D}_{m\lambda_1}^k \left(R(\hat{q}) \right) \langle k s_2 m \sigma_2 \mid j', \mu' \rangle \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \\ \times \mathcal{D}_{\mu\lambda}^{j*} \left(R(\hat{q}) \right) \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^s \left(R(\hat{q}) \right) \end{aligned}$$

Après couplage des matrices rotation, puis intégration sur $\hat{q}$, et utilisation

de l'orthogonalité des coefficients de Clebsch-Gordan, il vient :

$$\left\langle [P'], j', \mu', k, \lambda_1' \mid [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle = \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \sqrt{\frac{2k+1}{2j+1}} \langle k s_2 \lambda_1 - \lambda_2 \mid j \lambda \rangle \quad (\text{III.29})$$

c) Passage du couplage mixte au couplage ℓ -s

On intercale l'identité décomposée cette fois sur les états propres de l'impulsion totale, du moment cinétique total, et des hélicités.

$$\begin{aligned} \left\langle [P'], j', \mu', k, \lambda_1' \mid [P] j \mu \ell s \right\rangle = \\ \sum_{JM \lambda_1 \lambda_2} \int \left\langle [P'], j', \mu', k \lambda_1' \mid [P''] JM \lambda_1 \lambda_2 \right\rangle d^4 P'' \left\langle [P''] JM \lambda_1 \lambda_2 \mid [P] j \mu \ell s \right\rangle \end{aligned}$$

En utilisant (III.28) et (III.29) il vient :

$$\left\langle [P'], j', \mu', k, \lambda_1' \mid [P] j \mu \ell s \right\rangle = \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \sqrt{\frac{2k+1}{2j+1}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2j+1}} \times \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \langle s_1 s_2 \lambda_1' - \lambda_2 \mid s \ell \rangle \langle \ell s_0 \lambda \mid j \lambda \rangle \langle k s_2 \lambda_1' - \lambda_2 \mid j \lambda \rangle \quad (\text{III.30})$$

Si on utilise les coefficients $6j$ de Wigner ou les coefficients W de Racah, il vient :

$$\begin{aligned} \left\langle [P'] j', \mu', k, \lambda_1' \mid [P], j, \mu, \ell, s \right\rangle = \\ \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \sqrt{(2\ell+1)(2s+1)} (-1)^{j+s_1+s_2+\ell} \langle \ell s_1 \sigma \lambda_1' \mid k \lambda_1 \rangle \begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ j & \ell & k \end{Bmatrix} \\ = \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \sqrt{(2\ell+1)(2s+1)} \langle \ell s_1 \sigma \lambda_1' \mid k \lambda_1 \rangle W(s_1 s_2 \ell \mid j \mid s k) \quad (\text{III.31}) \end{aligned}$$

Remarque : On a donné les coefficients de changements de couplages uniquement dans le cas où dans les équations (III.13), (III.23) et (III.26) on a fait $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, cas d'usage courant. Dans les autres cas des phases sont à prévoir dans (III.28) et (III.29) ce qui entraîne un résultat beaucoup plus compliqué pour (III.31).

F) - EXPRESSION DES COUPLAGES DANS LES BASES SPINORIELLES, ACTION DES OPERATIONS DISCRETES

1) - Expression du couplage ℓ -s dans les bases spinorielles

Nous avons introduit les bases spinorielles au chapitre II, pour les états à une particule. On peut faire de même pour les états à deux particules $|[p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2\rangle$ et pour l'état $|[P], j, \mu, \ell, s\rangle$ on définira par exemple :

$$|p_1, p_2, A_1, A_2\rangle = |[p_1], [p_2], \sigma_1, \sigma_2\rangle \mathcal{D}_{\sigma_1 A_1}^{s_1}([p_1]^{-1}) \mathcal{D}_{\sigma_2 A_2}^{s_2}([p_2]^{-1})$$

$$|[P], j, A, \ell, s\rangle = |[P], j, \mu, \ell, s\rangle \mathcal{D}_{\mu, A}^j([P]^{-1}) .$$

On peut ainsi calculer le coefficient de Clebsh-Gordan dans la base spinorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle p_1, p_2, \hat{A}_1, \hat{A}_2 | P, j, A, \ell, s \rangle = \sum_{B_1, B_2} \mathcal{D}_{A_1 B_1}^{s_1}(\Lambda_{\varphi_1}(P \rightarrow p_1)) \\ \mathcal{D}_{A_2 B_2}^{s_2}(\Lambda_{\varphi_2}(P \rightarrow p_2)) \langle s_1 s_2 B_1 B_2 | s B \rangle \langle \ell s C B | J A \rangle \\ \frac{2 M \sqrt{2}}{\lambda^{1/4}} \left(\frac{+2}{\sqrt{\lambda}} \right)^\ell Y_\ell^C(p_1, p_2) , \end{array} \right. \quad (III.32)$$

$Y_\ell^C(p_1, p_2)$ est l'harmonique sphérique solide construit avec le semi bivecteur $\vec{e}(p_1, p_2)$. Dans le calcul précédent, on obtient en fait l'expression :

$$\sum_m \mathcal{D}_{mC}^\ell([P]^{-1}) Y_\ell^m(\hat{q}) , \quad (III.33)$$

on vérifie aisément que :

1) l'expression (III.33) ne dépend pas en fait de la tétrade [P] associée à P. C'est donc uniquement une fonction des vecteurs P et q_{12} , c'est-à-dire une fonction de p_1 et p_2 .

2) Cette fonction de p_1 et p_2 est covariante par transformation de Lorentz, c'est-à-dire à même loi de transformation que la fonction $Y_\ell^C(p_1, p_2)$

$$Y_\ell^C(\Lambda p_1, \Lambda p_2) = \sum_i Y_\ell^{C'}(p_1, p_2) \mathcal{D}_{C', C}^\ell(\Lambda^{-1}). \quad (\text{III.34})$$

3) Il suffit donc de se placer dans un système particulier pour trouver le coefficient de proportionnalité. On choisit comme système particulier celui où P est axe des temps : l'expression (III.33) vaut alors simplement $Y_\ell^C(\hat{q})$ et la fonction $Y_\ell^C(p_1, p_2)$ vaut $(+Mq)^\ell Y_\ell^m(\hat{q})$. q est la longueur de l'impulsion relative dans le centre de masse on a :

$$Mq = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}.$$

D'où la relation :

$$\sum_m \mathcal{D}_{mC}^\ell([P]^{-1}) Y_\ell^m(\hat{q}) = \left(\frac{+2}{\sqrt{\lambda}}\right)^\ell Y_\ell^C(p_1, p_2). \quad (\text{III.35})$$

La relation (III.32) permet de vérifier facilement les lois de covariance des états $|P, j, A, \ell, s\rangle$

$$U(\Lambda) |P, j, A, \ell, s\rangle = |\Lambda P, j, A', \ell, s\rangle \mathcal{D}_{A', A}^j(\Lambda).$$

Pour le faire, on utilise la propriété de covariance des fonctions $\Lambda_\varphi(P \rightarrow p_2)$:

$$\Lambda^{-1} \Lambda_\varphi(P \rightarrow p) \Lambda = \Lambda_\varphi(\Lambda P \rightarrow \Lambda p).$$

On voit également que l'on pourrait définir des états $|P, j, A, \ell, s\rangle$ d'un nouveau type, en mettant, à la place des fonctions $\mathcal{D}_{A, B}^{s_1}(\Lambda_{\varphi_1}(P \rightarrow p_1))$ n'importe quelle fonction de (P, p_1) , ayant la propriété de covariance analogue :

$$\mathcal{D} \left(\Lambda_\varphi(\Lambda p \rightarrow \Lambda p_1) \right) = \mathcal{D}(\Lambda^{-1}) \mathcal{D} \left(\Lambda_\varphi(P \rightarrow p_1) \right) \mathcal{D}(\Lambda).$$

En particulier, la matrice identité (donc indépendante de P et p_1 !) à la covariance indiquée. Néanmoins ce type de couplage ℓ -s est d'un maniement peu commode.

Notons l'expression du couplage ℓ -s dans l'autre base spinorielle, (formule analogue à (III.32)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle p_1, p_2, A_1, A_2 | P j \hat{A} \ell s \rangle = \sum_{B_1 B_2} \mathcal{D}_{A_1 B_1}^{s_1} \left(\left[\Lambda_{\varphi_1}(P \rightarrow p_1) \right]^{\dagger^{-1}} \right) \\ \mathcal{D}_{A_2 B_2}^{s_2} \left(\left[\Lambda_{\varphi_2}(P \rightarrow p_2) \right]^{\dagger^{-1}} \right) \langle s_1 s_2 B_1 B_2 | sB \rangle \langle \ell s C B | JA \rangle \\ \frac{2M\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}} \left(\frac{-2}{\sqrt{\lambda}} \right)^\ell \hat{Y}_\ell^C(p_1, p_2), \end{array} \right. \quad (\text{III.36})$$

avec :

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{\lambda}} \right)^\ell \hat{Y}_\ell^C(p_1, p_2) = \sum_m \mathcal{D}_{mC}^\ell([P]^\dagger) Y_\ell^m(\hat{q}). \quad (\text{III.37})$$

2) - Action des opérations discrètes

Pour déterminer l'action de la parité et du renversement du sens du temps, il est commode d'opérer dans les bases spinorielles : on a alors

$$U(\Pi) |p_1, p_2, A_1, A_2\rangle = \eta_1 \eta_2 |p_1, p_2, \hat{A}_1, \hat{A}_2\rangle .$$

Nous nous restreindrons dans la suite au cas $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. On a alors (N étant le facteur de Normalisation) :

$$U(\Pi) |P, j, A, \ell, s\rangle = \int \frac{dp_1}{2m_1} \frac{dp_2}{2m_2} \delta(P - p_1 - p_2) \mathcal{D}_{A_1 B_1}^s \left(\Lambda(P \rightarrow p_1) \right) \mathcal{D}_{A_2 B_2}^{s_2} \left(\Lambda(P \rightarrow p_2) \right) N \langle s_1 s_2 B_1 B_2 | s B \rangle \langle \ell s C B | J A \rangle \eta_1 \eta_2 \hat{Y}_\ell^C(p_1, p_2) |p_1, p_2, \hat{A}_1, \hat{A}_2\rangle .$$

Nous devons faire le changement de variable :

$$(p_1, p_2) \rightarrow (\underline{p}_1, \underline{p}_2) .$$

En appliquant (II.35), on a :

$$Y_\ell^C(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = \mathcal{D}_{mC}^\ell \left([P]^{-1} \right) Y_\ell^m(\hat{q}) \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right)^\ell ,$$

$\hat{q}$ représente la direction de l'impulsion relative de $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ dans leur centre de masse. Si l'on prend la transformation de Lorentz pure transformant l'axe des temps en P , pour définir la tétrade de P (de même pour $\underline{P}$), on a alors :

$$[P] = [P]^{-1} = [P]^\dagger^{-1}$$

et
$$\hat{q} = -\hat{q} .$$

Cette dernière relation se vérifie aisément si on se souvient que le quadri-vecteur $(0, \vec{q})$ dont $\hat{q}$ est la direction, est alors égal :

$$\begin{cases} (0, \vec{q}) &= \Lambda^{-1}(t \rightarrow P) q_{12} \\ (0, \vec{q}) &= \Lambda^{-1}(t \rightarrow \underline{P}) \underline{q}_{12} \end{cases}$$

or $\Lambda(t \rightarrow \underline{P}) = \Pi \Lambda(t \rightarrow P) \Pi$, Π étant l'opération parité. D'où $(0, \vec{q}) = \Pi(0, \vec{q})$.

D'où :

$$\begin{aligned} Y_\ell^C(\underline{p}_1, \underline{p}_2) &= \mathcal{D}_{mC}^\ell \left(\Lambda(t \rightarrow \underline{P})^{-1} \right) Y_\ell^m(-\hat{q}) \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right)^\ell \\ &= \mathcal{D}_{mC}^\ell \left([P]^\dagger \right) (-1)^\ell Y_\ell^m(\hat{q}) \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right)^\ell \end{aligned}$$

$$Y_\ell^C(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = \hat{Y}_\ell^C(p_1, p_2) . \quad (\text{III.38})$$

Enfin, à la relation entre transformation de Lorentz :

$$\Lambda(\underline{P} \rightarrow \underline{p}_1) = \Pi \Lambda(P \rightarrow p_1) \Pi$$

correspond la relation analogue entre matrices uni-modulaires :

$$\Lambda(\underline{P} \rightarrow \underline{p}_1) = \{ \Lambda(P \rightarrow p_1) \}^\dagger^{-1} .$$

En tenant compte de toutes ces relations, l'action de $U(\Pi)$ sur l'état $|P, j, A, \ell, s\rangle$ s'en déduit :

$$U(\Pi) |P, j, A, \ell, s\rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^\ell |P, j, \hat{A}, \ell, s\rangle . \quad (\text{III.39})$$

On a bien la loi de transformation classique. Notons qu'on peut prendre $\varphi = \Pi$ pour les particules de spin entier, car on a alors la relation entre

transformation de Lorentz

$$\Lambda_{\varphi=\pi}(\underline{P} \rightarrow \underline{p}_1) = \Pi \Lambda_{\varphi=\pi}(\underline{P} \rightarrow \underline{p}_1) \Pi$$

à laquelle correspond une relation au signe près pour les matrices uni-modulaires correspondantes :

$$\Lambda_{\pi}(\underline{P} \rightarrow \underline{p}_1) = \pm \left\{ \Lambda_{\pi}(\underline{P} \rightarrow \underline{p}_1) \right\} .$$

Le signe éventuel n'a pas de conséquence pour les spins entiers.

En général, on peut montrer que l'opération parité transformera l'état $|P, j, A, \ell, s\rangle$ défini avec les angles $-\varphi_1$, et $-\varphi_2$. Si les spins sont entiers, le signe apparaissant est seulement $\eta_1 \eta_2 (-1)^\ell$. Si l'un (ou les deux) spins sont demi entier, un signe supplémentaire peut apparaître.

3) - Action de l'inversion totale

Il est plus simple, pour étudier l'action de l'opérateur $U(\Pi T)$ de travailler sur la forme (III.12) des coefficients de couplage. En effet :

$$U(\Pi T) | [p_1], [p_2], \sigma_1 \sigma_2 \rangle = | [p_1], [p_2], \sigma_1' \sigma_2' \rangle \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1}(\mathbf{C}) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2}(\mathbf{C}),$$

avec $[p_1] = \Lambda(\underline{P} \rightarrow \underline{p}_1)[P]$. D'où :

$$U(\Pi T) | P, j, \mu, \ell, s \rangle = \int \frac{dp_1 dp_2}{2\omega_1 2\omega_2} \delta(\underline{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) N$$

$$\langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle \langle \ell s m \tau | j \mu \rangle Y_{\ell}^{m*}(\hat{q})$$

$$| [p_1], [p_2], \sigma_1', \sigma_2' \rangle \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1}(\mathbf{C}) \mathcal{D}_{\sigma_2' \sigma_2}^{s_2}(\mathbf{C}) .$$

En utilisant :

$$Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) = Y_{\ell}^m(\hat{q}) \mathcal{D}_{m, m}^{\ell}(\mathbf{C}) (-1)^{\ell} ,$$

on obtient :

$$U(\Pi T) | P, j, \mu, \ell, s \rangle = (-1)^{\ell} \eta_1 \eta_2 | P, j, \mu', \ell, s \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j(\mathbf{C}) . \quad (\text{III.40})$$

On aura donc les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\Pi) | [P], j, \mu, \ell, s \rangle = \sum_{\mu'} \eta_1 \eta_2 (-1)^{\ell} | [P], j, \mu', \ell, s \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j \left([P]^{\dagger} [P] \right) \\ U(\Pi T) | [P], j, \mu, \ell, s \rangle = \sum_{\mu'} \eta_1 \eta_2 (-1)^{\ell} | [P], j, \mu', \ell, s \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j(\mathbf{C}) \\ U(T) | [P], j, \mu, \ell, s \rangle = \sum_{\mu'} | [P], j, \mu', \ell, s \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j \left([P]^{\dagger} [P] \mathbf{C} \right) . \end{array} \right. \quad (\text{III.41})$$

On peut faire des calculs analogues dans le cas des autres modes de couplages. Nous donnerons simplement les résultats :

Couplage d'hélicité

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\Pi) | [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^{j-s_1-s_2} | [P], j, \mu', -\lambda_1, -\lambda_2 \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j \left([P]^{\dagger} [P] \right) \\ U(\Pi T) | [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^{j-s_1-s_2} | [P], j, \mu', -\lambda_1, -\lambda_2 \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j(\mathbf{C}) \\ U(T) | [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \sum_{\mu'} | [P], j, \mu', \lambda_1, \lambda_2 \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j \left([P]^{\dagger} [P] \mathbf{C} \right) . \end{array} \right. \quad (\text{III.42})$$

Couplage mixte

$$\left\{ \begin{aligned} u(\Pi) |[P], j, \mu, k, \lambda_1 \rangle &= \eta_1 \eta_2 (-1)^{k-s_1} |[P], j, \mu', k, -\lambda_1 \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j \left([P]^\dagger [P] \right) \\ u(\text{III}) |[P], j, \mu, k, \lambda_1 \rangle &= \eta_1 \eta_2 (-1)^{k-s_1} |[P], j, \mu', k, -\lambda_1 \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j (C) \\ u(\text{T}) |[P], j, \mu, k, \lambda_1 \rangle &= |[P], j, \mu', k, \lambda_1 \rangle \mathcal{D}_{\mu', \mu}^j \left([P]^\dagger [P] C \right) . \end{aligned} \right. \quad (\text{III.43})$$

G) - CAS DE LA MASSE NULLE

Nous allons voir que le produit de deux représentations dont une au moins appartient à la masse nulle, se traite de façon analogue au cas déjà étudié où les deux masses sont différentes de zéro, à condition d'utiliser pour les particules de masse nulle, les jauges de radiation dans le système du centre de masse qui possèdent des propriétés analogues à celles des tétrades d'hélicité pour une particule de masse non nulle. Nous ne traiterons que le cas où l'impulsion totale n'est pas de carré nul (l'impulsion totale ne pouvant être du genre lumière que sur le bord du spectre, dans le cas où les deux masses sont nulles). On peut utiliser pour effectuer la réduction, le formalisme résumé dans la formule (III.9) à condition de remplacer pour les particules de masse nulle les matrices de rotation par les $e^{-i\lambda\varphi}$ correspondants.

Néanmoins, il est facile de voir que si l'on choisit les jauges de radiation dans le système du centre de masse, d'une façon analogue aux tétrades d'hélicité pour le cas d'une masse non nulle, la phase $e^{-i\lambda\varphi}$, s'identifie alors à la matrice $\mathcal{D}_{\lambda', \lambda}^{s_1}(R_1)$ qui apparaît dans (III.9) pour une masse non nulle, et l'intégrale sur le groupe des rotations se fait de la même façon et conduit aux mêmes résultats.

Pour cela, il faut convenir de choisir les axes $n_1(p_1)$ et $n_2(p_1)$ comme transformés des axes $n_1(P)$ et $n_2(P)$ par $\Lambda(n_3(P), q_{12})$ (opération du petit groupe de P amenant $n_3(P)$ sur q_{12}),

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{aligned} P &= p_1 + p_2 \\ q_{12} &= \frac{1}{2} \left(p_1 - p_2 - \frac{m_1^2}{M^2} P \right) \quad \text{si } m_2 = 0 \\ q_{12} &= \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \quad \text{si } m_1 = m_2 = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{III.44})$$

Les vecteurs $n_1(p_1)$ et $n_2(p_1)$ sont bien les mêmes vecteurs que les vecteurs 1 et 2 d'une tétrade d'hélicité associée à une particule de masse non nulle, l'impulsion est dans le plan (p_1, p_2) . Il est clair alors qu'une rotation $\Lambda(P)$ du petit groupe de P se traduira par une phase qui est la même dans le cas d'une particule de masse nulle, que dans le cas d'une particule massive repérée en hélicité puisqu'elle repère dans les deux cas la même rotation : la rotation d'angle φ autour du 2-plan P, p , qui amène respectivement

$$\Lambda(P) n_1(p_1) \text{ et } \Lambda(P) n_2(p_2) \text{ sur } n_1(\Lambda(P)p_1) \text{ et } n_2(\Lambda(P)p_2)$$

En d'autres termes, on peut identifier le facteur $e^{-i\lambda_1\varphi}$ au facteur $\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_1'}^{s_1}(R_1) = e^{-i\lambda_1\varphi} \delta_{\lambda_1 \lambda_1'}$ qui apparaît dans (III.9) si la masse de la particule 1 n'est pas nulle. R_1 est bien alors une rotation autour de Oz comme le montre l'expression :

$$R_1 = [P]^{-1} \Lambda^{-1}(n_3, q_{12}) \Lambda(P) \Lambda(n_3, \Lambda^{-1}(P) q_{12}) [P] ,$$

obtenue en calculant $R_1 = [p_1]^{-1} \Lambda(P) [\Lambda^{-1}(P)p_1]$ avec les tétrades d'hélicité définies par (III.20).

Le calcul du coefficient de couplage reste donc le même que celui d'un couplage d'hélicité :

on suppose $m_1 = 0$, et m_2 différent ou égal à zéro ,

$$\langle [p_1], [p_2], \lambda_1, \lambda_2 | [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = (-1)^{s_2 - \lambda_2} \frac{2M\sqrt{2}}{\sqrt{M^2 - m_2^2}} \mathcal{D}_{\mu\lambda}^{j*} (R(\hat{q})) \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \delta(P - p_1 - p_2) \quad (\text{III.45})$$

avec

$$\begin{cases} R(\hat{q}) = [P]^{-1} \Lambda(n_3(P), q_{12}) [P] \\ \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \\ [p_1] = \Lambda(\pi_1 \rightarrow p_1) \Lambda(n_3(P), q_{12}) [P] \\ [p_2] = \Lambda(P \rightarrow p_2) \Lambda(n_3(P), q_{12}) [P] \quad \text{si } m_2 \neq 0 \\ \quad = \Lambda(\pi_2 \rightarrow p_2) \Lambda(n_3(P), q_{12}) [P] \quad \text{si } m_2 = 0 \end{cases}$$

Pour les particules de masse nulle, on a choisi pour $\hat{p}$ le vecteur de composantes (1,0,0,1) c'est-à-dire $\hat{p} = \frac{\hat{p}}{M} + n_3(\hat{p})$. Enfin, π_1 et π_2 sont deux vecteurs du genre lumière définis comme suit :

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{P}{M} + q_{12} \frac{2M}{M^2 - m_2^2} = \frac{2M}{M^2 - m_2^2} p_1 \quad (\text{si } m_1 = 0) \\ \pi_2 = \frac{P}{M} + q_{12} \frac{2}{M} = \frac{2}{M} p_2 \quad \text{quand } m_1 = m_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

Enfin $\Lambda(\pi_1 \rightarrow p_1)$ est la transformation de Lorentz pure dans le 2-plan du genre temps contenant P et p_1 , telle que $\Lambda(\pi_1 \rightarrow p_1)\pi_1 = p_1$, ce qui est possible car les vecteurs π_1 et p_1 sont colinéaires. Ceci détermine bien de façon unique cette transformation, l'angle hyperbolique φ qui lui est associé, étant donné par $e^\varphi = \frac{p_1}{\pi_1}$.

On vérifie alors aisément que $[p_1]$ transforme bien $\hat{p}$, $n_1(\hat{p})$, $n_2(\hat{p})$ dans les axes voulus p_1 , $\Lambda(n_3(P), q_{12}) n_1(P)$ et $\Lambda(n_3(P), q_{12}) n_2(P)$ (propriété analogue pour $[p_2]$ dans le cas $m_2 = 0$).

Si on veut exprimer l'état $|[P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ par son produit scalaire sur des états $|[p_1], [p_2], \lambda_1, \sigma_2\rangle$, on obtient dans le cas où $m_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \langle [p_1], [p_2], \lambda_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \\ = \frac{2M\sqrt{2}}{\sqrt{M^2 - m_2^2}} \delta(P - p_1 - p_2) \sum_{\lambda, \lambda_2} \delta_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\lambda}^{j*} (R(\hat{q})) (-1)^{s_2 - \lambda_2} e^{-i\lambda_1 \varphi_1} \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2} (R_2) \\ R_2 = [p_2]^{-1} \Lambda(P \rightarrow p_2) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] \quad \text{Y} \\ \varphi_1 \text{ est l'angle de la rotation associée à l'opération du petit groupe de } p_1 \\ \text{égale à : } [p_1]^{-1} \Lambda(\pi_1 \rightarrow p_1) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Une relation analogue s'obtient dans le cas où $m_2 = 0$,

la phase $e^{-i\lambda_2 \varphi_2} \{ [p_2]^{-1} \Lambda(\pi_2 \rightarrow p_2) \Lambda(n_3, q_{12}) [P] \}$ remplaçant alors la matrice $\mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2}$.

Comme dans le cas du couplage d'hélicité des particules massives, on vérifie aisément que l'état $|[P], j, \mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ ne dépend pas du choix particulier effectué pour $\Lambda(n_3, q_{12})$. Enfin, dans le cas $m_1 = 0$, et $m_2 \neq 0$, on peut effectuer un couplage mixte : le spin de la particule massive est décrit dans une tétrade analogue à celles utilisées en couplage $l-s$. Le coefficient de couplage s'écrit comme suit :

$$\langle [p_1], [p_2], \lambda_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, k, \lambda_1 \rangle = \delta(P - p_1 - p_2) \frac{2M\sqrt{2}}{\sqrt{M^2 - m_2^2}} \sum_{\alpha} \langle k s_2 \alpha \sigma_2 | j \mu \rangle \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\alpha\lambda}^{k*} (R(\hat{q})) \quad (\text{III.48})$$

$$\text{avec } \begin{cases} [p_1] = \Lambda(\pi_1 \rightarrow p_1) \Lambda(n_3, a_{12}) [P] \\ [p_2] = \Lambda(P \rightarrow p_2) [P] \\ R(\hat{q}) = [P]^{-1} \Lambda(n_3, a_{12}) [P] \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Si l'on utilise des tétrades (ou triades) quelconques, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} & \langle [p_1], [p_2], \lambda_1, \sigma_2 | [P], j, \mu, k, \lambda_1 \rangle \\ &= \delta(P - p_1 - p_2) \frac{2M\sqrt{2}}{\sqrt{M^2 - m_2^2}} \sum_{\alpha \sigma_2'} \langle k \ s_2 \ \alpha \ \sigma_2' | j \ \mu \rangle \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\alpha \lambda}^{k*} (R(\hat{q})) \\ & \quad \times \mathcal{D}_{\sigma_2 \sigma_2'}^{s_2} (R_2) e^{-i\lambda_1 \phi_1} \end{aligned} \right. \quad (\text{III.50})$$

$$\text{avec } \begin{cases} R_2 = [p_2]^{-1} \Lambda(P \rightarrow p_2) [P] \\ \phi_1 \text{ est l'angle associé à l'opération du petit groupe de } p_1 \text{ égal} \\ \text{à : } [p_1]^{-1} \Lambda(\pi_1 \rightarrow p_1) \Lambda(n_3, a_{12}) [P] \end{cases}$$

Nous avons vu que le cas d'une masse nulle se traite exactement de façon analogue au cas des particules massives en couplage d'hélicité.

On peut établir la relation entre le couplage mixte et les développements multipolaires considérés habituellement, en utilisant la formule suivante, valable pour k entier et $\lambda > 0$:

$$\sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{m, \varepsilon \lambda}^{k*} (R(\hat{q})) = \frac{[\vec{e}(\hat{q})]^{\otimes \lambda} \cdot [\vec{e}_q(\hat{q})]^{\otimes \lambda}}{\sqrt{(k-\lambda+1)(k-\lambda+2)\dots(k+\lambda)}} Y_m^k(\hat{q})$$

avec $\vec{e}(\hat{q}) = \vec{e}_1(q) - i \varepsilon \vec{e}_2(q)$, $\varepsilon = \pm 1$.

$\vec{e}_1(q)$ et $\vec{e}_2(q)$ sont les transformés respectifs des vecteurs unitaires de l'axe Ox et Oy par $R(\hat{q})$.

$$\vec{e}_q = \frac{1}{i} \vec{q} \times \vec{v}_q$$

$$\text{Enfin } \vec{x}^{\otimes \lambda} \cdot \vec{y}^{\otimes \lambda} = \prod_{i_1, \dots, i_\lambda} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\lambda} y_{i_1} \dots y_{i_\lambda}$$

Dans le cas du spin 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{m, \pm 1}^k (R(\hat{q})) &= \frac{(\vec{e}_1(q) \mp i \vec{e}_2(q)) \cdot \vec{e}_q}{\sqrt{k(k+1)}} Y_k^m(\hat{q}) \\ &= \frac{\vec{e}_2(q) \cdot \vec{e}_q}{\sqrt{k(k+1)}} Y_k^m(\hat{q}) \pm i \frac{e_1(\vec{q}) \cdot (\hat{q} \times \vec{e}_q)}{\sqrt{k(k+1)}} Y_k^m(\hat{q}) \end{aligned}$$

qui sont bien les combinaisons des harmoniques sphériques vectoriels correspondant aux états d'hélicité.

CHAPITRE IV

ETATS A PLUS DE DEUX PARTICULES

A) - COUPLAGES CLASSIQUES POUR LES SYSTEMES DE TROIS PARTICULES

Du point de vue de l'invariance relativiste, un système de trois particules peut être décrit par le produit tensoriel de trois représentations du groupe de Poincaré, définies par les masses m_1 , m_2 et m_3 , et les spins s_1 , s_2 et s_3 .

Un procédé classique pour réduire ce produit consiste d'abord à réduire le produit des deux premières représentations en une somme d'irréductibles, dont on couple chaque terme avec la troisième. Ce procédé est utilisé couramment pour le groupe des rotations et a le désavantage d'opérer de façon dissymétrique. D'autre part, les coefficients de recouplage dont de tels procédés ne manqueront pas de nécessiter l'utilisation, sont assez compliqués, car en dehors de la partie rotationnelle, ils comportent des termes cinématiques dus à la non coïncidence du centre de masse total et du centre de masse partiel de deux des trois particules.

Nous allons donner divers exemples de ces couplages :

a) Couplage $l-s$

Nous couplons d'abord les deux particules 1 et 2 pour former l'état $[[p_{12}], j_{12}, \mu_{12}, l_{12}, s_{12}]$ en utilisant (III.13); les tétrades utilisées $[p_1]$ et $[p_2]$ sont quelconques. Nous couplons ensuite les représentations (12) et (3) et appliquons à nouveau (III.13). Il vient ($M(12)$ est la masse de la représentation formée avec les particules 1 et 2):

$$\langle [p_1], [p_2], [p_3], \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | [p_{(12)3}] j_{(12)3} \mu_{(12)3} l_{(12)3} s_{(12)3} M_{(12)} J_{(12)} l_{(12)} s_{(12)} \rangle$$

$$= \frac{2M_{123} \sqrt{2}}{\lambda^{1/4} \binom{2}{m_{12}, m_3, m_{123}}} \cdot \frac{2M_{12} \sqrt{2}}{\lambda^{1/4} \binom{2}{m_1, m_2, m_{12}}} \sum \langle j_{12} s_3 \mu_{12} \tau_3 | s_{123} \tau_{123} \rangle$$

$$\langle l_{123} s_{123} m_{123} \tau_{123} | j_{(12)3} \mu_{(12)3} \rangle Y_{l_{(12)3}}^{m_{(12)3}}(\hat{q}_{(12)3}) \langle s_1 s_2 \tau_1 \tau_2 | s_{12} \tau_{12} \rangle Y_{l_{12}}^{m_{12}}(\hat{q}_{12})$$

$$\langle l_{12} s_{12} m_{12} \tau_{12} | j_{12} \mu_{12} \rangle \mathcal{D}_{l_{12} \tau_{12}}^{s_{12}} \left([p_{12}]^{-1} \Lambda(p_{123} \rightarrow p_{12}) [p_{123}] \right)$$

$$\mathcal{D}_{\sigma_1 \tau_1}^{s_1} \left([p_1]^{-1} \Lambda(p_{12} \rightarrow p_1) [p_{12}] \right) \mathcal{D}_{\sigma_2 \tau_2}^{s_2} \left([p_2]^{-1} \Lambda(p_{12} \rightarrow p_1) [p_{12}] \right)$$

$$\times \delta(p_{(12)3} - p_1 - p_2 - p_3) \delta((p_1 + p_2)^2 - M_{(12)}^2) \mathcal{D}_{\sigma_3 \tau_3}^{s_3} \left([p_3]^{-1} \Lambda(p_{123} \rightarrow p_3) [p_{123}] \right)$$

En choisissant $[p_{12}] = \Lambda(p_{123} \leftarrow p_{12}) [p_{123}]$, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \langle [p_1], [p_2], [p_3], \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | [p_{123}], j_{123}, \mu_{123}, l_{(12)3} s_{(12)3} m_{12}^2, j_{12} l_{(12)} s_{(12)} \rangle \\ & = \frac{8 M_{12} M_{123} \delta(p_{123} - p_1 - p_2 - p_3) \delta(m_{12}^2 - (p_1 + p_2)^2)}{\lambda^{1/4} \binom{2}{m_1, m_2, m_{12}} \lambda^{1/4} \binom{2}{m_{12}, m_3, m_{123}}} \sum \langle s_1 s_2 \tau_1 \tau_2 | s_{12} \tau_{12} \rangle \times \\ & \langle l_{12} s_{12} m_{12} \tau_{12} | j_{12} \mu_{12} \rangle \times \langle j_{12} s_3 \mu_{12} \tau_3 | s_{(12)3} \tau_{(12)3} \rangle \times \langle l_{(12)3} s_{(12)3} m_{(12)3} \tau_{(12)3} | j_{(12)3} \mu_{(12)3} \rangle \\ & \times Y_{l_{12}}^{m_{12}}(\hat{q}_{12}) Y_{l_{(12)3}}^{\mu_{(12)3}}(\hat{q}_{(12)3}) \mathcal{D}_{\sigma_1 \tau_1}^{s_1} \left([p_1]^{-1} \Lambda(p_{12} \rightarrow p_1) \Lambda(p_{123} \rightarrow p_{12}) [p_{123}] \right) \\ & \times \mathcal{D}_{\sigma_2 \tau_2}^{s_2} \left([p_2]^{-1} \Lambda(p_{12} \rightarrow p_2) \Lambda(p_{123} \rightarrow p_{12}) [p_{123}] \right) \mathcal{D}_{\sigma_3 \tau_3}^{s_3} \left([p_3]^{-1} \Lambda(p_{123} \rightarrow p_3) [p_{123}] \right). \end{aligned} \right.$$

Les notations sont évidentes, sauf en ce qui concerne $\hat{q}_{12}$ et $\hat{q}_{(12)3}$

- $\hat{q}_{12}$ est la direction de l'impulsion relative q_{12} des deux particules 1 et 2, mesurée dans le système associé au centre de masse de ces deux particules.

- $\hat{q}_{(12)3}$ est la direction mesurée dans le système du centre de masse total, du vecteur impulsion relative de (1,2) et (3), c'est-à-dire :

$$q_{(12)3} = \frac{1}{2} \left(p_{12} - p_3 - \frac{m_{12}^2 - m_3^2}{m_{123}} p_{123} \right)$$

On peut également définir $\hat{q}_{12}$ comme la direction mesurée dans le système du centre de masse total, du vecteur :

$$q'_{12} = \Lambda(p_{12} \rightarrow p_{123}) q_{12}, \text{ (vecteur qui est bien orthogonal à } p_{123}\text{).}$$

b) Couplage en hélicité

On procède de façon analogue : on peut écrire le coefficient de Clebsch-Gordan en appliquant deux fois la formule (III.23)

$$\begin{aligned} & \langle [p_1], [p_2], [p_3], \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | [p_{123}], J_{123}, \mu_{123}, J_{12}, M_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{12} \rangle \\ = & \frac{8 M_{12} M_{123} \delta(p_{123} - p_1 - p_2 - p_3)}{(\lambda(m_1^2, m_2^2, m_{12}^2) \lambda(m_{12}^2, m_3^2, m_{123}^2))^{1/4}} \sqrt{\frac{2J_{12} + 1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\lambda_{12}, (\lambda_1 - \lambda_2)}^{J_{12}*} (R(\hat{q}_{12})) \\ \times & \sqrt{\frac{2J_{123} + 1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu_{123}, (\lambda_{12} - \lambda_3)}^{J_{123}*} (R(\hat{q}_{(12,3)})) \times (-1)^{s_2 - \lambda_2 + s_3 - \lambda_3} \\ \times & \mathcal{D}_{\sigma_3 \lambda_3}^{s_3} \left([p_3]^{-1} \Lambda(p_{123} \rightarrow p_3) \Lambda(n_3, q_{12,3}) [p_{123}] Y \right) \\ \times & \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{s_1} \left([p_1]^{-1} \Lambda(p_{12} \rightarrow p_1) \Lambda(n_3(p_{12}), q_{12}) \Lambda(p_{123} \rightarrow p_{12}) \Lambda(n_3, q_{12,3}) [p_{123}] \right) \\ \times & \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2} \left([p_2]^{-1} \Lambda(p_{12} \rightarrow p_2) \Lambda(n_3(p_{12}), q_{12}) \Lambda(p_{123} \rightarrow p_{12}) \Lambda(n_3, q_{12,3}) [p_{123}] Y \right) \\ \times & \delta \left(m_{12}^2 - (p_1 + p_2)^2 \right) \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Rappelons quelques notations :

- $q_{12,3}$ est défini au paragraphe précédent.

- $\Lambda(n_3, q_{12,3})$ désigne une opération du petit groupe de p_{123} amenant $n_3(p_{123})$ sur $q_{12,3}$, et :

$$R(\hat{q}_{12,3}) = [p_{123}]^{-1} \Lambda(n_3, q_{12,3}) [p_{123}]$$

- $\Lambda(n_3(p_{12}), q_{12})$ est une opération du petit groupe de p_{12} amenant $n_3(p_{12})$ sur q_{12} et :

$$R(\hat{q}_{12}) = [p_{12}]^{-1} \Lambda(n_3, q_{12}) [p_{12}]$$

avec $[p_{12}] = \Lambda(p_{12} \leftarrow p_{123}) \Lambda(n_3, q_{12,3}) [p_{123}]$.

Les choix des deux opérations $\Lambda(n_3(p_{123}), q_{12,3})$ et $\Lambda(n_3(p_{12}), q_{12})$ sont arbitraires.

En remarque nous pouvons dire que ces expressions (couplage l -s et hélicité), se simplifient notablement si on choisit les bases de spin appropriées pour les trois particules, de façon à faire disparaître les matrices rotation d'indices s_1, s_2 et s_3 . Ces bases de spin sont malheureusement assez compliquées et rompent la symétrie entre les trois particules.

Toute combinaison entre les divers modes de couplages est possible et donne lieu à des formules analogues. Si on dispose de plus de trois particules, on peut procéder par couplages successifs, et ainsi écrire des formules analogues : les impulsions de chacune des particules doivent être repérées dans le système du centre de masse total, après y avoir été ramenées par une suite de transformation de Lorentz convenables (avec ou sans "rotation" supplémentaire suivant le mode de couplage utilisé).

Enfin si l'on désire les formules les plus simples, il faut modifier les bases de spins appropriées pour toutes les particules, toutes les fois que l'on y joint une particule supplémentaire.

B) - CAS GENERAL : SYSTEME A n PARTICULES

1) - Le modèle de la toupie sphérique

Pour un système à n particules, on peut procéder par couplages successifs, mais cette méthode devient très lourde lorsque le nombre de particules augmente. Il est possible de procéder d'une façon complètement différente, et beaucoup plus symétrique. L'idée tient dans la remarque suivante : si l'on dispose de plus de deux particules, on peut attacher rigidement au système des impulsions, un système d'axes dont les divers vecteurs de base se transformeront comme les impulsions par une transformation de Lorentz. En conséquence, la projection du moment cinétique total, de même que la projection du moment cinétique propre de chaque particule sur de tels axes seront invariants de Lorentz, et pourront être utilisés pour lever la dégénérescence. Déjà utilisé en mécanique non relativiste dans les problèmes de physique nucléaire, ce procédé a été introduit assez récemment en mécanique relativiste, en particulier par M. Kummer^[36]. Pour trois particules, des versions directement utilisables pour les analyses phénoménologiques ont été données en particulier par Berman et Jacob^[37].

Nous étudions un système de n particules, c'est-à-dire la représentation du groupe de Poincaré (produit tensoriel de n représentations irréductibles). Une transformation de Poincaré est représentée par :

$$U(a, \Lambda) | [p_1], [p_2], \dots, [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle \\ = \prod_1 \left\{ \sum_{\sigma_1'} \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{(s_1)} \left([\Delta p_1]^{-1} \Lambda [p_1] \right) e^{i \Delta p_1 \cdot a} \right\} \times | [\Delta p_1] \dots [\Delta p_n], \sigma_1' \dots \sigma_n' \rangle.$$

A cause des lois de transformation par translation, l'état $| [p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle$ n'a de composantes que sur les vecteurs indexés par l'impulsion $P = \sum p_i$, (donc tels que $M^2 = (\sum p_i)^2$).

Le spectre du carré de l'impulsion totale commence à la valeur propre $(m_1 + m_2 + \dots + m_n)^2$.

$$\text{A tout quadrivecteur } P \text{ tel que } P^0 > 0 \text{ et } P^2 \geq \sum_1 (m_i^2),$$

nous associons une transformation de Lorentz $[P]$ interprétée comme celle amenant le système de base désigné par $[\hat{P}]$ sur la tétrade de P . $\hat{P}$ est un vecteur de référence, par exemple porté par l'axe des temps. Nous pouvons alors définir une relation d'équivalence entre deux systèmes d'impulsions $(p_1, \dots, p_n)$ et $(p_1', \dots, p_n')$: $(p_1, p_2, \dots, p_n) \sim (p_1', p_2', \dots, p_n')$ s'il existe une transformation de Lorentz amenant p_1 sur p_1' , ..., p_n sur p_n' . Choisissons dans chaque classe d'équivalence un représentant $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)$ tel que :

$$\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \dots + \hat{p}_n = \hat{P}.$$

Appelons $\Lambda(p_1, \dots, p_n)$ la transformation de Lorentz qui fait passer simultanément de $\hat{p}_1$ à p_1 , ... et de $\hat{p}_n$ à p_n . Cette transformation est en général unique sauf dans le cas où tous les quadrivecteurs sont dans le même demi-plan, ce qui n'arrive que sur les bords du "diagramme de Dalitz" multidimensionnel.

Notons que les classes d'équivalence sont repérées par les invariants de Lorentz que l'on peut construire avec ces n impulsions. Il y en a $3n - 6$ indépendants, dont la masse totale. Le "diagramme de Dalitz" est donc à $3n - 7$ dimensions si la masse totale est fixée (pour $n \geq 3$).

La rotation $R(p_1, \dots, p_n)$ est définie par :

$$\Lambda(p_1, \dots, p_n) = [P] R(p_1, \dots, p_n),$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(p_1, \dots, p_n) \hat{p}_1 = p_1, \dots, \Lambda(p_1, \dots, p_n) \hat{p}_n = p_n \\ \hat{p}_1 + \dots + \hat{p}_n = \hat{P} \\ p_1 + \dots + p_n = P \end{array} \right. \quad (IV.3)$$

La transformation $\Lambda(p_1, \dots, p_n)$ jouit de la propriété évidente suivante :

$$\Lambda(Lp_1, Lp_2, \dots, Lp_n) = L \Lambda(p_1, \dots, p_n)$$

pour toute transformation* de Lorentz L .

Maintenant, nous attachons à chaque particule d'impulsion $\hat{p}_1$ une tétrade définie par la transformation de Lorentz $[\hat{p}_1]$, et nous décidons alors d'attacher à tout système d'impulsion $(p_1, \dots, p_n)$ un système de tétrades $[p_1], \dots, [p_n]$ défini par

$$[p_1] = \Lambda(p_1, \dots, p_n) [\hat{p}_1] \quad (IV.4)$$

Ces tétrades particulières ont la propriété :

$$[Lp_1] = L [p_1] \quad (IV.5)$$

pour toute transformation de Lorentz L .

Nous pouvons alors définir les états $[[P], j, \mu\rangle$ par l'application de l'opérateur de projection sur l'état le plus général à n particules, c'est-à-dire en généralisant de façon évidente la formule (III.7) :

$$P_{P\mu}^{Mj} |\Phi\rangle = \int \frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2\omega_2} \dots \frac{d^3\vec{p}_n}{2\omega_n} \delta(P - p_1 - p_2 - \dots - p_n) |[p_1], \dots, [p_n], \sigma_1' \dots \sigma_n'\rangle \\ \times \int \Phi_{\sigma_1' \sigma_2' \dots \sigma_n'} \left(\Lambda^{-1} p_1, \dots, \Lambda^{-1} p_n \right) \mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{S_1}(R_1) \dots \mathcal{D}_{\sigma_n' \sigma_n}^{S_n}(R_n) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*}(R) dR \quad ,$$

où

$$\begin{cases} \Lambda = [P] R [P]^{-1} \\ R_1 = [p_1]^{-1} \Lambda [\Lambda^{-1} p_1] \end{cases}$$

* En toute rigueur, il convient de préciser le signe des matrices de $SL(2,C)$.
Entre matrices 2×2 , un signe supplémentaire peut intervenir dans la relation.

Si on utilise les tétrades indiquées précédemment, on voit (cf. (IV.5)) que toutes les rotations R_1 se réduisent à l'identité, et que les matrices rotations $\mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{S_1}$ prennent la valeur $\delta_{\sigma_1' \sigma_1}$. Néanmoins, on peut remarquer que le

membre de droite sera certainement nul si $(\Sigma S_1 + j)$ n'est pas entier ; en effet, la multiplication de R par une rotation de 2π laisse l'intégrale invariante et multiplie l'intégrand par $(-1)^{2(j + \Sigma S_1)}$.

On est donc ramené à calculer :

$$P_{P\mu}^{Mj} |\Phi\rangle = \int \frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d\vec{p}_2}{2\omega_2} \dots \frac{d\vec{p}_n}{2\omega_n} \delta(P - \Sigma p_i) |[p_1] \dots [p_n], \sigma_1, \dots, \sigma_n\rangle \\ \times \int \Phi_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \left([P] R^{-1} [P]^{-1} [P] R(p_1, \dots, p_n) \hat{p}_1, \dots \right) \mathcal{D}_{\mu\mu}^{j*}(R) dR \quad .$$

Posons $\rho = R^{-1} R(p_1, \dots, p_n)$.

L'intégrale sur R devient :

$$\sum_{\nu} \left\{ \int \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \left([P] \rho \hat{p}_1, \dots, [P] \rho \hat{p}_n \right) \mathcal{D}_{\mu\nu}^j(\rho) \right\} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*} \left(R(p_1, \dots, p_n) \right) d\rho \quad .$$

Or Φ , fonction définie sur l'ensemble des rotations ρ , est décomposable sur les représentations de ces rotations, par exemple sur les $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{j*}(\rho)$.

D'où :

$$P_{P\mu}^{Mj} |\Phi\rangle = \int \sum_{\nu} \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^{\nu j \mu} \left([P], \mathcal{J} \right) |[P], j, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n\rangle d\mathcal{J} \quad ,$$

avec

$$\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^{\nu j \mu} \left([P], \mathcal{J} \right) = \frac{1}{N} \int \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \left([P] \rho \hat{p}_1, \dots, [P] \rho \hat{p}_n \right) \mathcal{D}_{\mu\nu}^j(\rho) d\rho \quad .$$

Cette fonction ne dépend que de $[P]$ et des variables (J) qui définissent la classe d'équivalence du système des impulsions $(\vec{p}_1)$, c'est-à-dire les variables du "diagramme de Dalitz". Ces variables peuvent s'exprimer en fonction par exemple des invariants $s_{1j} = (p_1 + p_j)^2$, (qui ne sont pas tous indépendants). Enfin dJ désigne l'élément de volume du "diagramme de Dalitz".*

$$|[P], j, \mu, \nu; J; \sigma_1 \dots \sigma_n\rangle = N \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \dots \frac{d^3 \vec{p}_n}{2\omega_n} \delta(J(p_1, \dots, p_n) - J) \delta(P - p_1 - \dots - p_n) \times \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*}(R(p_1, \dots, p_n)) |[p_1], \dots, [p_n], \sigma_1, \dots, \sigma_n\rangle$$

N est une normalisation à calculer de façon que :

$$\langle [P'], j', \mu', \nu'; J'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n | [P], j, \mu, \nu; J; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle = \delta(P - P') \delta_{JJ'} \delta_{\mu\mu'} \times \delta_{\nu\nu'} \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \dots \delta_{\sigma_n \sigma'_n} \delta(J' - J) \quad (IV.6)$$

Calculons ce produit scalaire, il vient immédiatement

$$\frac{1}{|N|^2} \langle | \rangle = \delta(P - P') \delta(J - J') \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \dots \delta_{\sigma_n \sigma'_n} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \dots \frac{d^3 \vec{p}_n}{2\omega_n} \delta(P - p_1 - \dots - p_n) \times \delta(J(p_1, \dots, p_n) - J) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*}(R(p_1, \dots, p_n)) \mathcal{D}_{\mu'\nu'}^{j'}(R(p_1, \dots, p_n))$$

L'intégrale se calcule en faisant le changement de variables

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) \rightarrow (J, R(p_1, p_2, \dots, p_n), P) \text{ dont } N(J) \text{ est le Jacobien :}$$

$$\theta(P^0) d^4 P N(J) dJ dR(p_1, \dots, p_n) = \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \dots \frac{d^3 \vec{p}_n}{2\omega_n} \quad (IV.7)$$

* Si le nombre de particules est supérieur à trois, les tri-impulsions dans le centre de masse total forment un solide dont l'orientation est invariante. Il y a donc dans ce cas une variable discrète supplémentaire prenant deux valeurs (les deux orientations possibles).

d'où :

$$\langle | \rangle = \delta(P - P') \delta(J - J') \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \dots \delta_{\sigma_n \sigma'_n} N(J) |N|^2 \int dJ \delta(J - J(p_1, \dots, p_n)) \times \int dR \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*}(R) \mathcal{D}_{\mu'\nu'}^{j'}(R) = \delta(P - P') \delta(J - J') \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \dots \delta_{\sigma_n \sigma'_n} N(J) |N|^2 \frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$$

Donc : $N = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi N(J)}} \quad (\text{on convient de choisir } N \text{ réel positif})$

On obtient le coefficient de Clebsch-Gordan :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle [p_1], \dots, [p_n], \sigma'_1 \dots \sigma'_n | [P], j, \mu, \nu; J; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(J)}} \delta(P - p_1 - \dots - p_n) \\ &\times \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \dots \delta_{\sigma_n \sigma'_n} \delta(J - J(p_1, \dots, p_n)) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*}(R(p_1, \dots, p_n)) \end{aligned} \right. \quad (IV.8)$$

Les coefficients précédents expriment les composantes de l'état

$|[P], j, \mu, \nu; J; \sigma_1 \dots \sigma_n\rangle$ sur une base particulière pour lesquels les spins sont décrits dans les axes des tétrades adaptées au mode de couplage considéré, définies en (70).

Nous pouvons exprimer les composantes de $|[P], j, \mu, \nu; J; \sigma_1 \dots \sigma_n\rangle$ sur une base quelconque, le coefficient de Clebsch-Gordan est alors donné par :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle [p_1], \dots, [p_n], \tau_1 \dots \tau_n | [P], j, \mu, \nu; J; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(J)}} \delta(P - p_1 - \dots - p_n) \delta(J - J(p_1, \dots, p_n)) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*}(R(p_1, \dots, p_n)) \\ &\times \mathcal{D}_{\tau_1 \sigma_1}^{s_1}([p_1]^{-1} \wedge (p_1, \dots, p_n) [\vec{p}_1]) \dots \mathcal{D}_{\tau_n \sigma_n}^{s_n}([p_n]^{-1} \wedge (p_1, \dots, p_n) [\vec{p}_n]) \end{aligned} \right. \quad (IV.9)$$

L'interprétation des nombres quantiques figurant dans la formule est simple : μ et ν désignent les projections du moment cinétique total sur $n_3(P) = [P]n_3(\hat{p})$ et sur $\Lambda(p_1, \dots, p_n) n_3(\hat{p})$ respectivement. Ce dernier axe reste rigidement lié aux impulsions $p_1, \dots, p_n$ lorsque celles-ci varient. De même, $\tau_1, \dots, \tau_n$ sont les projections des spins sur les axes $[p_i]n_3(\hat{p})$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ celles sur les axes : $\Lambda(p_1, \dots, p_n)[\hat{p}_i]n_3(\hat{p})$, qui sont rigidement liés au système des impulsions. Enfin, la fonction d'onde de l'état $[P], j, \mu, \nu; \tau_1, \dots, \tau_n$ sur la base définie par $[p_i] = \Lambda(p_1, \dots, p_n)[\hat{p}_i]$ adaptée à ce mode de couplage, est essentiellement $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*}(R(p_1, \dots, p_n))$. Ceci n'est rien d'autre que la fonction d'onde de la toupie sphérique. On peut appeler ce mode de couplage "couplage de la toupie".

2) - Passage du modèle de la toupie sphérique aux couplages classiques

a) Un exemple : trois particules en couplage d'hélicité

Nous montrerons, pour le cas des systèmes à trois particules, comment on peut déduire les formules de passage des couplages classiques à celui de la toupie. Ce calcul est en fait très simple dans son principe ; il est possible de choisir des systèmes d'axes associés à chaque particule, fixés au système des impulsions et dont le troisième axe est par exemple le vecteur d'hélicité utilisé dans les couplages habituels. La transformation unitaire qui réalise le changement de couplage est alors diagonale dans les hélicités.

Nous allons traiter complètement un exemple et déterminer les formules de passage du couplage d'hélicité décrit par la formule (IV.2) à un couplage du type (IV.9). Pour préciser ce second mode de couplage, il nous faut définir divers paramètres :

- nous choisirons comme invariants indépendants les quantités m_{12} , avec $m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2$ et par exemple $m_{23} = (p_2 + p_3)^2$.

- enfin, nous décidons de choisir pour $[\hat{p}_1], [\hat{p}_2]$ et $[\hat{p}_3]$, les transformations de Lorentz décrivant les tétrades d'hélicité appropriées :

$$\begin{cases} [\hat{p}_1] = \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_1) \Lambda(n_3(\hat{p}_{12}), \hat{q}_{12}) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{12}) \Lambda(n_3, \hat{q}_{12,3}) [\hat{p}_{123}] \\ [\hat{p}_2] = \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_2) \Lambda(n_3(\hat{p}_{12}), \hat{q}_{12}) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{12}) \Lambda(n_3, \hat{q}_{12,3}) [\hat{p}_{123}] \gamma \\ [\hat{p}_3] = \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_3) \Lambda(n_3, \hat{q}_{123}) [\hat{p}_{123}] \gamma \end{cases} \quad (IV.10)$$

(On a choisi $\hat{p}_{123}$ le long de l'axe des temps et $[\hat{p}_{123}] = 1$).

Nous pouvons alors écrire, en multipliant les deux transformations unitaires représentées par (IV.2) et (IV.9) :

$$\begin{aligned} & \langle [P], j, \mu, \nu; m_{12}^2, m_{23}^2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | p_{123} j_{123} \mu_{123} j_{12} m_{12}^2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{12} \rangle \\ &= \frac{8 m_{12} m_{123} \delta(p - p_{123}) \delta(m_{12}^2 - m_{12}'^2)}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_{12}^2)^{1/4} \lambda(m_{12}^2, m_3^2, m_{123}^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2j_{12}+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j_{123}+1}{4\pi}} (-1)^{s_2 - \lambda_2 + s_3 - \lambda_3} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{2\pi N(m_{12}, m_{23})}} \int \frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d\vec{p}_2}{2\omega_2} \frac{d\vec{p}_3}{2\omega_3} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \delta(m_{12}^2 - (p_1 + p_2)^2) \delta(m_{23}^2 - (p_2 + p_3)^2) \\ & \times \mathcal{D}_{\lambda_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)}^{j_{12}^*}(R(\hat{q}_{12})) \mathcal{D}_{\mu_{123} \lambda_{12} - \lambda_3}^{j_{123}^*}(R(\hat{q}_{12,3})) \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\nu}^j(R(p_1, p_2, p_3)) \\ & \times \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{s_1} \left([\hat{p}_1]^{-1} \Lambda^{-1}(p_1, p_2, p_3) \Lambda(p_{12} \rightarrow p_1) \Lambda(n_3(p_{12}), q_{12}) \Lambda(p_{123} \rightarrow p_{12}) \Lambda(n_3, q_{12,3}) \right. \\ & \quad \left. \times [\hat{p}_{123}] \right) \\ & \times \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2} \left([\hat{p}_2]^{-1} \Lambda^{-1}(p_1, p_2, p_3) \Lambda(p_{12} \rightarrow p_2) \Lambda(n_3(p_{12}), q_{12}) \Lambda(p_{123} \rightarrow p_{12}) \Lambda(n_3, q_{12,3}) \right. \\ & \quad \left. \times [\hat{p}_{123}] \gamma \right) \\ & \times \mathcal{D}_{\sigma_3 \lambda_3}^{s_3} \left([\hat{p}_3]^{-1} \Lambda^{-1}(p_1, p_2, p_3) \Lambda(p_{123} \rightarrow p_3) \Lambda(n_3, q_{12,3}) [\hat{p}_{123}] \gamma \right) \quad (IV.11) \end{aligned}$$

Dans la formule qui précède, l'élément différentiel peut s'écrire

$$\frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \frac{d\vec{p}_2}{2\omega_2} \frac{d\vec{p}_3}{2\omega_3} = d^4 p_{123} dm_{12}^2 dm_{23}^2 dR(p_1, p_2, p_3) \cdot N(m_{12}, m_{23}) \cdot$$

D'autre part, nous pouvons vérifier que les trois matrices $\mathcal{D}^{s_1}$, $\mathcal{D}^{s_2}$ et $\mathcal{D}^{s_3}$ portent sur des rotations autour de Oz, à cause de (IV.10) et comme la formule ci-dessus peut s'écrire avec n'importe quel choix d'opérations

$\Lambda(n_3(p_{123}), q_{12,3})$ et $\Lambda(n_3(p_{12}), q_{12})$. Il est facile de voir que le choix suivant est le plus simple :

$$\left\{ \begin{aligned} \Lambda(n_3(p_{123}), q_{12,3}) &= \Lambda(p_3 \rightarrow p_{123}) \Lambda(p_1, p_2, p_3) [\hat{p}_3] Y^{-1} [p_{123}]^{-1} \\ \Lambda(n_3(p_{12}), q_{12}) &= \Lambda(p_1, p_2, p_3) \Lambda(\hat{p}_1 \rightarrow \hat{p}_{12}) [\hat{p}_1] Y [\hat{p}_3]^{-1} \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_3) \\ &\quad \times \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda^{-1}(p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \right. \quad (IV.12)$$

Alors, les rotations intervenant dans $\mathcal{D}^{s_1}$, $\mathcal{D}^{s_2}$ et $\mathcal{D}^{s_3}$ sont réduites à l'unité. Il reste à calculer les rotations $R(\hat{q}_{12})$ et $R(\hat{q}_{12,3})$:

$$\begin{aligned} R(\hat{q}_{12,3}) &= [p_{123}]^{-1} \Lambda(n_3(p_{123}), q_{12,3}) [p_{123}] \\ &= [p_{123}]^{-1} \Lambda(p_3 \rightarrow p_{123}) \Lambda(p_1, p_2, p_3) [\hat{p}_3] Y^{-1} \\ &= [p_{123}]^{-1} \Lambda(p_1, p_2, p_3) \Lambda(\hat{p}_3 \rightarrow \hat{p}_{123}) [\hat{p}_3] Y^{-1} \\ &= R(p_1, p_2, p_3) \Lambda(\hat{p}_3 \rightarrow \hat{p}_{123}) [\hat{p}_3] Y^{-1} \end{aligned}$$

En remplaçant $[\hat{p}_3]$ par sa valeur tirée de (74) :

$$R(\hat{q}_{12,3}) = R(p_1, p_2, p_3) \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3})$$

$\Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3})$ est un opérateur du petit groupe de $\hat{p}_{123}$, donc une rotation qui, en fait, est égale à $[\hat{p}_{123}]^{-1} \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3}) [p_{123}] = R(\hat{q}_{12,3})$.

Calculons maintenant $R(\hat{q}_{12})$

$$R(\hat{q}_{12}) = [p_{12}]^{-1} \Lambda(n_3(p_{12}), q_{12}) [p_{12}]$$

avec $[p_{12}] = \Lambda(p_{12} \leftarrow p_{123}) \Lambda(n_3(p_{12,3}), q_{12,3}) [p_{123}]$.

En remplaçant les divers termes par leurs valeurs tirées de (IV.12) et en explicitant les divers $[p_1]$, $[p_2]$ ou $[p_3]$ qui peuvent intervenir, on obtient :

$$\begin{aligned} R(\hat{q}_{12}) &= \Lambda^{-1}(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3}) \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(n_3(\hat{p}_{12}), q_{12}) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{12}) \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3}) \\ R(\hat{q}_{12}) &= R(\hat{q}_{12}) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer l'expression (IV.11) :

l'intégrale ne porte, en fait, que sur $dR(p_1, p_2, p_3)$:

$$\begin{aligned} \int dR(p_1 p_2 p_3) \mathcal{D}_{\mu\nu}^j \left(R(p_1 p_2 p_3) \right) \mathcal{D}_{\mu_{123}}^{j*} \lambda_{12}^{-\lambda_3} \left(R(p_1 p_2 p_3) R(\hat{q}_{12,3}) \right) \\ = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_j j_{123} \delta_{\mu \mu_{123}} \mathcal{D}_{\nu}^{j*} \lambda_{12}^{-\lambda_3} \left(R(\hat{q}_{12,3}) \right) \end{aligned}$$

On peut démontrer que N ne dépend pas de m_{12} ni de m_{23} , plus précisément $N = \frac{1}{8 m_{123}}$. Ce résultat est bien connu et exprime

le fait que la densité de l'espace de phase est constante lorsqu'elle est exprimée en fonction de variables habituelles de Dalitz.

Le coefficient de recouplage (IV.11) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & \langle [P], J, \mu, \nu, m_{12}^2, m_{23}^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | [p_{123}], J_{123}, \mu_{123}, J_{12}, m_{12}^2, \lambda_{12}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \\
 &= \frac{8 m_{12} m_{123} \delta(p - p_{123}) \delta(m_{12}^2 - m_{12}^{\prime 2})}{(\lambda(m_1, m_2, m_{12}) \lambda(m_{12}, m_3, m_{123}))^{1/4}} \delta_J J_{123} \delta_\mu \mu_{123} (-1)^{s_2 - \lambda_2 + s_3 - \lambda_3} \\
 &\times \delta_{\lambda_1 \sigma_1} \delta_{\lambda_2 \sigma_2} \delta_{\lambda_3 \sigma_3} \sqrt{\frac{2J_{12} + 1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\lambda_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)}^{J_{12}^*} \left(R_{\hat{q}_{12}} \right) \mathcal{D}_{\nu \lambda_{12} - \lambda_3}^{J_{123}^*} \left(R_{\hat{q}_{12,3}} \right) \\
 &\times 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(8 m_{123}^2)}} \quad (IV.13)
 \end{aligned}$$

avec

$$R_{\hat{q}_{12,3}} = \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3})$$

$$R_{\hat{q}_{12}} = \Lambda^{-1}(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3}) \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(n_3(\hat{p}_{12}), \hat{q}_{12}) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{12}) \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{12,3})$$

Dans la formule ci-dessus, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ représentent les projections respectives des trois particules sur des axes liés aux systèmes, mais dont le troisième axe est le vecteur d'hélicité correspondant. Il est facile de récrire cette formule en fonction des bases de spins les plus générales liées au système, et la seule modification de la formule est le remplacement des symboles Kronecker par des matrices de rotation, d'indices s_1, s_2, s_3 , soit :

$$\begin{aligned}
 & \langle [P], J, \mu, \nu, m_{12}^2, m_{23}^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | [p_{123}], J_{123}, \mu_{123}, J_{12}, m_{12}^2, \lambda_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle \\
 &= \frac{4 \sqrt{\pi} m_{12} \delta(p - p_{123}) \delta(m_{12}^2 - m_{12}^{\prime 2})}{\lambda^{1/4}(m_1, m_2, m_{12}) \lambda^{1/4}(m_{12}, m_3, m_{123})} \delta_J J_{123} \delta_\mu \mu_{123} (-1)^{s_2 - \lambda_2 + s_3 - \lambda_3} \\
 &\times \sqrt{\frac{2J_{12} + 1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\lambda_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)}^{J_{12}^*} \left(R_{\hat{q}_{12}} \right) \mathcal{D}_{\nu \lambda_{12} - \lambda_3}^{J_{123}^*} \left(R_{\hat{q}_{12,3}} \right) \quad (IV.14) \\
 &\times \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{s_1} \left([p_1]^{-1} [p_1] \right) \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2} \left([p_2]^{-1} [p_2] \right) \mathcal{D}_{\sigma_3 \lambda_3}^{s_3} \left([p_3]^{-1} [p_3] \right)
 \end{aligned}$$

$[p_1] \dots [p_3]$ sont donnés par (IV.10) et $[p_1]^\prime \dots [p_3]^\prime$ définissent les axes sur lesquels sont quantifiés les indices $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dans la position standard $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_3)$ *

b) Méthode générale

L'examen de la formule (IV.14) montre que le coefficient de recouplage est, aux facteurs cinématiques près, le coefficient de couplage donné par la formule (IV.2)

$$\langle [p_1]^\prime, [p_2]^\prime, [p_3]^\prime, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 | [p_{123}], J, \nu, J_{12}, m_{12}^2, \lambda_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$$

Nous allons montrer que ce résultat est général : en effet, considérons l'état $|[P], J, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle$ défini par les équations (73), on a :

$$\begin{aligned}
 |[P], J, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle &= \int \frac{d\vec{p}_1}{2\omega_1} \dots \frac{d\vec{p}_n}{2\omega_n} \delta(p - p_1 - \dots - p_n) \delta(\mathcal{J} - \mathcal{J}(p_1, \dots, p_n)) \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\mathcal{J})}} \sqrt{\frac{2J + 1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{J^*} \left(R(p_1, \dots, p_n) \right) |[p_1], \dots, [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle
 \end{aligned}$$

Les indices $\sigma_1 \dots \sigma_n$ représentent les projections du spin de chacune des particules sur des axes liés au système, et sont invariants par transformation de Lorentz. En particulier :

$$\begin{aligned}
 |[p_1], \dots, [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle &= u \left(\Lambda(p_1, \dots, p_n) \right) |[p_1]^\circ, \dots, [p_n]^\circ, \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle \\
 &= u \left([p_1 + \dots + p_n] \right) u \left(R(p_1, \dots, p_n) \right) |[p_1]^\circ, \dots, [p_n]^\circ, \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle
 \end{aligned}$$

où R est une rotation, car on a supposé $\hat{p}_1 + \dots + \hat{p}_n = \hat{p}$ porté par l'axe des temps.

On peut en déduire :

$$\begin{aligned} |[P], j, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle &= \int d(p_1 + \dots + p_n) d\mathcal{J}(p_1, \dots, p_n) dR(p_1, \dots, p_n) N(\mathcal{J}) \\ &\times \delta(p - p_1 - \dots - p_n) \delta(\mathcal{J} - \mathcal{J}(p_1, \dots, p_n)) \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\mathcal{J})}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*} \left(R(p_1, \dots, p_n) \right) \\ &\times u \left([p_1 + \dots + p_n] \right) u \left(R(p_1, \dots, p_n) \right) |[p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle \\ &= u([P]) \sqrt{\frac{N(\mathcal{J})}{2\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int dR \mathcal{D}_{\mu\nu}^{j*}(R) u(R) |[p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle \end{aligned}$$

Remarquons que $[p_1], \dots, [p_n]$ ne dépend que des invariants $\mathcal{J}$, et de la masse totale P^2 . Si maintenant, nous cherchons à établir une formule du type (IV.13), nous faisons le produit scalaire de l'état $|[P], j, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle$ avec un état $|[P'], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle$, obtenu en faisant la réduction du produit tensoriel par les procédés classiques, c'est-à-dire par couplages successifs (l -s ou hélicité); η désignera par exemple un ensemble de nombres quantiques du type :

$$m_{12}^2, j_{12}, l_{12}, s_{12}; m_{123}^2, j_{123}, l_{123}, s_{123}, \text{ etc...}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \langle [P], j, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \\ = \sqrt{\frac{N(\mathcal{J})}{2\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \langle [p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | \int dR \mathcal{D}_{\mu\nu}^j(R) u \left(R^{-1}[P]^{-1} \right) |[P'], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \end{aligned}$$

Mais on connaît la loi de transformation de l'état $|[P], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle$

$$u \left(R^{-1}[P]^{-1} \right) |[P'], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle = \sum_{\mu''} \mathcal{D}_{\mu''\mu}^{j'} \left([R^{-1}([P]^{-1}.P')]^{-1} R^{-1}[P]^{-1}[P'] \right) |[R^{-1}([P]^{-1}.P')] j', \mu'', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle$$

On en tire :

$$\begin{aligned} \langle [P], j, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle &= \sqrt{\frac{N(\mathcal{J})}{2\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int dR \mathcal{D}_{\mu\nu}^j(R) \\ &\sum_{\mu''} \mathcal{D}_{\mu''\mu}^{j'} \left([R^{-1}([P]^{-1}.P')]^{-1} R^{-1}[P]^{-1}[P'] \right) \langle [p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [R^{-1}([P]^{-1}.P')] j', \mu'', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \end{aligned}$$

Dans le membre de droite de cette équation figure un coefficient de Clebsch-Gordan qui contient une fonction δ de conservation de l'énergie impulsion ; ce coefficient est égal à :

$$\begin{aligned} \langle [p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [R^{-1}[P]^{-1}.P'], j', \mu'', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \\ = \delta \left(\sum p_1 - R^{-1}([P]^{-1}.P') \right) \langle [p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \end{aligned}$$

(Nous convenons de noter avec une double barre, ce qui reste de l'expression du coefficient lorsque l'on en a ôté la fonction δ de conservation de l'énergie impulsion). Comme $\sum p_1$ est porté par l'axe des temps, on a à cause de l'invariance par transformation de Lorentz de la fonction δ ,

$$\delta \left(\sum p_1 - R^{-1}([P]^{-1}.P') \right) = \delta \left([P]R \sum p_1 - P' \right) = \delta(P - P') \quad ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle [P], j, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \\ = \sqrt{\frac{N(\mathcal{J})}{2\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sum_{\mu''} \int dR \mathcal{D}_{\mu\nu}^j(R) \mathcal{D}_{\mu''\mu}^{j'}(R^{-1}) \langle [p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu'', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \\ = \sqrt{\frac{N(\mathcal{J})}{2\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sum_{\mu''} \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu''} \delta_{\nu\nu''} \frac{8\pi^2}{2j+1} \langle [p_1] \dots [p_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu'', \nu'; \mathcal{J}'; \sigma'_1 \dots \sigma'_n \rangle \end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\langle [P], j, \mu, \nu; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu', \eta' \rangle$$

$$= \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \sqrt{\frac{8\pi^2 N(\mathcal{J})}{2j+1}} \langle [\hat{p}_1] \dots [\hat{p}_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [[\hat{P}], j, \nu, \eta] \rangle \quad (IV.15)$$

avec

$$\langle [\hat{p}_1] \dots [\hat{p}_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [\hat{P}], j, \nu, \eta \rangle = \delta \left(\hat{P} - \sum_1^n \hat{p}_1 \right) \langle [\hat{p}_1] \dots [\hat{p}_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [[\hat{P}], j, \nu, \eta] \rangle$$

Le véritable coefficient de changement de couplage est donc :

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \sqrt{2\pi N(\mathcal{J})} \langle [\hat{p}_1] \dots [\hat{p}_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [[\hat{P}], j, \nu, \eta] \rangle$$

On déduit facilement (IV.14), (IV.15) dans le cas des systèmes à trois particules,

η désigne alors les paramètres nécessaires au couplage d'hélicité :

$$(m_{12}^2, j_{12}, \lambda_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

c) Une application : calcul des coefficients de recouplage.

Considérons un système de n particules et deux couplages classiques dans lesquels les diverses particules figurent dans un ordre différent. Soient η et η' les ensembles de paramètres de dégénérescence correspondant aux deux processus de couplage. Pour calculer le coefficient de recouplage, nous devons évaluer le produit scalaire :

$$\langle [P], j, \mu, \eta | [P'], j', \mu', \eta' \rangle = \int d^4\pi d\mathcal{J} \sum_{J, M, \Delta} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \langle [P], j, \mu, \eta | [\pi], J, M, \Delta; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle$$

$$\langle [\pi], J, M, \Delta; \mathcal{J}; \sigma_1 \dots \sigma_n | [P'], j', \mu', \eta' \rangle$$

En utilisant la formule (79), ce produit scalaire vaut :

$$\langle [P], j, \mu, \eta | [P'], j', \mu', \eta' \rangle = \delta(P - P') \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \langle M^2, j, \eta | M^2, j, \eta' \rangle \quad (IV.16)$$

Le coefficient de recouplage s'écrit alors :

$$\langle M^2, j, \eta | M^2, j, \eta' \rangle = \frac{8\pi^2}{2j+1} \sum_{\Lambda, \sigma_1 \dots \sigma_n} \int N(\mathcal{J}) d\mathcal{J} \langle [[\hat{P}], j, \Lambda, \eta] | [\hat{p}_1] \dots [\hat{p}_n], \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle$$

$$\langle [\hat{p}_1] \dots [\hat{p}_n], \sigma_1 \dots \sigma_n | [[\hat{P}'], j, \Lambda, \eta'] \rangle \quad (IV.17)$$

Un coefficient de recouplage s'exprime donc en fait comme un intégrale portant sur les invariants d'une somme de produits de deux coefficients de Clebsh-Gordan particuliers. Si les paramètres η désignent ceux d'un système de couplage l -s ou d'hélicité successifs, une grande partie des invariants $\mathcal{J}$ sont fixés : les invariants $\mathcal{J}$ sont au nombre de $3n - 7$ et η en contient $n - 2$ de même que η' . Les invariants contenus dans η et η' sont indépendants les uns des autres dans tous les cas intéressants, c'est-à-dire lorsque le coefficient de recouplage à n particules n'est pas réductible à d'autres relatifs à un nombre inférieur de particules. Il restera donc alors une intégrale sur $3n - 7 - 2(n - 2) = n - 3$ invariants.* En particulier, dans le cas où $n = 3$, tous les invariants sont fixés et le coefficient de recouplage à trois particules se déduit immédiatement de la formule (IV.17).

De façon générale, la somme sur les indices de spins $\sigma_1 \dots \sigma_n$ figurant dans (IV.17) s'effectue aisément, car chacun des deux coefficients figurant à droite contient une matrice de rotation par particule, du type :

$$D_{\mu_1 \sigma_1}^{s_1} \left([[\hat{p}_1]_{\eta}^{-1} [\hat{p}_1]] \right),$$

où $[[\hat{p}_1]_{\eta}]$ désigne la tétrade associée à $\hat{p}$ et adaptée au mode de couplage η .

* si $n > 3$. Il reste à effectuer la somme sur les deux orientations possibles.

La somme sur σ_1 est de la forme :

$$\sum_{\sigma_1} \mathcal{D}_{\mu_1 \sigma_1}^{s_1} \left([\hat{p}_1]_{\eta}^{-1} [\hat{p}_1] \right) \mathcal{D}_{\sigma_1 \mu_1'}^{s_1} \left([\hat{p}_1]^{-1} [\hat{p}_1]_{\eta'} \right) = \mathcal{D}_{\mu_1 \mu_1'}^{s_1} \left\{ [\hat{p}_1]_{\eta}^{-1} [\hat{p}_1]_{\eta'} \right\}$$

Les indices μ_1 ou μ_1' désignent soit des hélicités, soit dans le cas du couplage $l-s$ des indices magnétiques couplés pour former des "spin" totaux.

La somme sur Λ se fait de façon analogue dans le cas du couplage d'hélicité (voir (IV.18)). Dans le cas du couplage $l-s$, il faut utiliser les techniques habituelles des calculs utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan du groupe des rotations.

d) Coefficient de Racah en couplage d'hélicité (cf Wick [10])

Ecrivons à titre d'exemple, le coefficient de recouplage en hélicité pour trois particules : nous appliquons (IV.17) en nous explicitant le membre de droite. Il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \langle M^2, J, J_{13}, m_{13}, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_{13} \mid M^2, J, J_{12}, m_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{12} \rangle \\ & = \frac{4 m_{12} m_{13} \sqrt{(2J_{12} + 1)(2J_{13} + 1)} (-1)^{\lambda_2 - \mu_2 + \lambda_3 - \mu_3}}{\left[\lambda(m_1^2, m_2^2, m_{12}^2) \lambda(m_1^2, m_3^2, m_{13}^2) \lambda(m_{12}^2, m_3^2, M^2) \lambda(m_{13}^2, m_2^2, M^2) \right]^{1/4}} \\ & \quad \mathcal{D}_{\mu_{13}^{-\mu_2} \lambda_{12}^{-\lambda_3}}^{J^*} \left(\begin{matrix} -1 & \\ \hat{R}_{(13)2} & \hat{R}_{(12)3} \end{matrix} \right) \mathcal{D}_{\lambda_{12}^{-\lambda_2}}^{J_{12}^*} \left(\hat{R}_{12} \right) \mathcal{D}_{\mu_{13}^{-\mu_1} \mu_3}^{J_{13}} \left(\hat{R}_{13} \right) \\ & \quad \mathcal{D}_{\mu_1 \lambda_1}^{s_1} \left\{ [\hat{p}_1]_{\mu}^{-1} [\hat{p}_1]_{\lambda} \right\} \mathcal{D}_{\mu_2 \lambda_2}^{s_2} \left\{ [\hat{p}_2]_{\mu}^{-1} [\hat{p}_2]_{\lambda} \right\} \mathcal{D}_{\mu_3 \lambda_3}^{s_3} \left\{ [\hat{p}_3]_{\mu}^{-1} [\hat{p}_3]_{\lambda} \right\} \end{aligned} \right. \quad (IV.18)$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{R}_{(12)3} &= \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{(12)3}) \\ \hat{R}_{(13)2} &= \Lambda'(\hat{n}_3, \hat{q}_{(13)2}) \\ \hat{R}_{12} &= \Lambda^{-1}(\hat{n}_3, \hat{q}_{(12)3}) \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(n_3(\hat{p}_{12}), \hat{q}_{12}) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{12}) \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{(12)3}) \\ \hat{R}_{13} &= \Lambda^{-1}(\hat{n}_3, \hat{q}_{(13)2}) \Lambda(\hat{p}_{13} \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(n_3(\hat{p}_{13}), \hat{q}_{13}) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{13}) \Lambda'(\hat{n}_3, \hat{q}_{(13)2}) \\ [\hat{p}_1]_{\lambda} &= \Lambda(\hat{p}_1 \leftarrow \hat{p}_{12}) \Lambda(n_3(\hat{p}_{12}), \hat{q}_{12}) \Lambda(\hat{p}_{12} \leftarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{(12)3}) \\ [\hat{p}_1]_{\mu} &= \Lambda(\hat{p}_1 \leftarrow \hat{p}_{13}) \Lambda'(n_3(\hat{p}_{13}), \hat{q}_{13}) \Lambda(\hat{p}_{13} \leftarrow \hat{p}_{123}) \Lambda'(\hat{n}_3, \hat{q}_{(13)2}) \\ [\hat{p}_2]_{\lambda} &= \Lambda(\hat{p}_2 \leftarrow \hat{p}_{12}) \Lambda(n_3(\hat{p}_{12}), \hat{q}_{12}) \Lambda(\hat{p}_{12} \leftarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{(12)3}) \Upsilon \\ [\hat{p}_2]_{\mu} &= \Lambda(\hat{p}_2 \leftarrow \hat{p}_{123}) \Lambda'(\hat{n}_3, \hat{q}_{(13)2}) \Upsilon \\ [\hat{p}_3]_{\lambda} &= \Lambda(\hat{p}_3 \leftarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(\hat{n}_3, \hat{q}_{(13)2}) \Upsilon \\ [\hat{p}_3]_{\mu} &= \Lambda(\hat{p}_3 \leftarrow \hat{p}_{13}) \Lambda'(n_3(\hat{p}_{13}), \hat{q}_{13}) \Lambda(\hat{p}_{13} \leftarrow \hat{p}_{123}) \Lambda'(\hat{n}_3, \hat{q}_{(13)2}) \Upsilon \end{aligned} \right. \quad (IV.18)$$

Dans le cas des systèmes à trois particules, il est heureusement possible de simplifier cette formule, en fixant les choix arbitraires portant :

- sur la définition du système de vecteurs $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ de référence : nous supposons que dans le système du centre de masse, le plan $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ est orthogonal à l'axe Oy (c'est-à-dire à $n_2(\hat{p})$) ;

- sur la définition des tétrades d'hélicités associées aux diverses impulsions : pour les centres de masse partiels p_{12} et p_{13} nous pouvons supposer que $n_2(\hat{p}_{12}) = \Lambda(\hat{p} \rightarrow \hat{p}_{12}) n_2(\hat{p})$ et $n_3(\hat{p}_{13}) = \Lambda(\hat{p} \rightarrow \hat{p}_{13}) n_2(\hat{p})$. Pour les par-

ticules 1, 2 ou 3, dans les deux modes de couplages, il est possible de choisir le même vecteur $n_2(\hat{p}_1) = \Lambda(\hat{p} \rightarrow \hat{p}_1) n_2(\hat{p})$. Ces choix sont possibles car il existe une direction privilégiée dans le problème, qui est invariante par toutes les transformations de Lorentz du type $\Lambda(\hat{p} \rightarrow \hat{p}_{12})$ ou $\Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_1)$ ou $\Lambda(\hat{p} \rightarrow \hat{p}_1)$ par exemple, cette direction est dans le système du centre de masse, orthogonale au plan des trois impulsions. C'est celle du quadrivecteur $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\nu p_2^\rho p_3^\sigma$.

On voit alors aisément que les arguments des matrices rotations dans (IV.18) sont des rotations autour de Oy . On en déduit en particulier que le coefficient de recouplage (IV.18) est réel. L'interprétation des diverses rotations figurant dans (IV.18) est simple : les rotations d'indices s_1, s_2 et s_3 traduisent la modification des bases de spin appropriées au deux modes de couplages considérés. La rotation R_{12} mesure dans le système approprié, la rotation nécessaire pour amener $n_3(p_{12})$ sur q_{12} , $n_3(p_{12})$ étant le vecteur d'hélicité associé à p_{12} dans le système du centre de masse (même interprétation pour R_{13}). Enfin la rotation d'argument j est reliée au passage de $q_{(12)3}$ à $q_{(13)2}$, qui sont les impulsions relatives des systèmes de particules (12) et (13) dans le système du centre de masse total.

Dans le cas où une ou plusieurs masses sont nulles, on peut faire exactement les mêmes calculs et procéder au même couplage : il suffit de prendre à chaque fois la tétrade définissant une jauge de radiation dans le centre de masse, correspondant à la tétrade d'hélicité analogue dans le cas où la particule n'a pas une masse nulle. Dans le cas du modèle de la toupie sphérique, on associe à chaque particule de masse nulle des axes $n_1(p)$ et $n_2(p)$ rigidement liés aux impulsions.

e) Coefficient de Racah en couplage l - s (cf Mc-Kerrel [41])

On déduit immédiatement la formule :

$$\begin{aligned} & \langle M^2, J, J_{13}, m_{13}^2, l_{(13)2}, s_{(13)2}, l_{13}, s_{13} | M^2, J, J_{12}, m_{12}^2, l_{(12)3}, s_{(12)3}, l_{12}, s_{12} \rangle \\ &= \frac{16\pi^2}{2j+1} \frac{4 m_{12} m_{123}}{\left[\lambda(m_1^2, m_2^2, m_{12}^2) \lambda(m_1^2, m_3^2, m_{13}^2) \lambda(m_{12}^2, m_3^2, M^2) \lambda(m_{13}^2, m_2^2, M^2) \right]^{1/4}} \\ & \sum \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s_{12} \tau_{12} \rangle \langle l_{12} s_{12} m_{12} \tau_{12} | j_{12} \mu_{12} \rangle \langle j_{12} s_3 \mu_{12} \sigma_3 | s_{(12)3} \tau_{(12)3} \rangle \\ & \langle l_{(12)3} s_{(12)3} m_{(12)3} \tau_{(12)3} | j \mu \rangle \langle s_1 s_3 \theta_1 \theta_3 | s_{13} \tau_{13} \rangle \langle l_{13} s_{13} m_{13} \tau_{13} | j_{13} \mu_{13} \rangle \\ & \langle j_{13} s_2 \mu_{13} \theta_2 | s_{(13)2} \tau_{(13)2} \rangle \langle l_{(13)2} s_{(13)2} m_{(13)2} \tau_{(13)2} | j \mu \rangle \\ & Y_{l_{12}}^{m_{12}}(\hat{q}_{12}) Y_{l_{(12)3}}^{m_{(12)3}}(\hat{q}_{(12)3}) Y_{l_{13}}^{m_{13}}(\hat{q}_{13}) Y_{l_{(13)2}}^{m_{(13)2}}(\hat{q}_{(13)2}) \\ & \mathcal{D}_{\theta_1 \sigma_1}^{s_1} \left(\Lambda(\hat{p}_{13} \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(\hat{p}_1 \rightarrow \hat{p}_{13}) \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_1) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{12}) \right) \\ & \mathcal{D}_{\theta_2 \sigma_2}^{s_2} \left(\Lambda(\hat{p}_2 \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(\hat{p}_{12} \rightarrow \hat{p}_2) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_{12}) \right) \\ & \mathcal{D}_{\theta_3 \sigma_3}^{s_3} \left(\Lambda(\hat{p}_{13} \rightarrow \hat{p}_{123}) \Lambda(\hat{p}_3 \rightarrow \hat{p}_{13}) \Lambda(\hat{p}_{123} \rightarrow \hat{p}_3) \right) \end{aligned} \quad (IV.19)$$

Les transformations figurant dans les matrices d'argument s_1, s_2, s_3 sont bien des rotations, car $\hat{p}_{123}$ est l'axe des temps. On peut vérifier que ce sont en fait des rotations autour de la normale au plan contenant les trois

vecteurs tri-impulsions $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ dans le système du centre de masse total. L'angle de telles rotations est calculé en appendice.

Comme dans le cas du couplage d'hélicité, cette formule peut être simplifiée par un choix adéquat du système du centre de masse.

On peut soit choisir :

- l'axe Oy du système du centre de masse perpendiculaire au plan des tri-impulsions. Tous les Y_l^m figurant dans la formule, portent sur des arguments (θ, φ) avec $\varphi = 0$ et toutes les rotations $\mathcal{D}^{s_1}$ deviennent des rotations autour de Oy . On met ainsi en évidence la réalité du coefficient de recouplage. C'est le système d'axes qui est toujours choisi dans la littérature.

- l'axe Oz du système du centre de masse perpendiculaire au plan des tri-impulsions : dans la formule ci-dessus, toutes les dépendances en variables angulaires prennent alors la forme d'exponentielles

$$e^{-i m_{12} \varphi_{12}} \quad \text{ou} \quad \delta_{\sigma_3 \theta_3} e^{-i \sigma_3 \varphi_3}$$

Enfin, on peut modifier à volonté l'expression (IV.19) en changeant le type du couplage, c'est-à-dire en la reliant à (IV.18) à l'aide des coefficients de passage du couplage $l-s$ à l'hélicité. Une façon simple d'effectuer ces changements est d'utiliser l'identité suivante,

$$\sum_{m \tau} \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s \tau \rangle \langle l s m \tau | j \mu \rangle Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (IV.20)$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda} (-1)^{s_2 - \lambda} \langle s_1 s_2 \lambda_1 - \lambda_2 | s \lambda \rangle \langle l s 0 \lambda | j \lambda \rangle \mathcal{D}_{\mu \lambda}^{j*}(R) \mathcal{D}_{\sigma_1 \lambda_1}^{s_1}(R) \mathcal{D}_{\sigma_2 \lambda_2}^{s_2}(RY)$$

où R est une rotation d'angles d'Euler φ, θ, γ ; la formule ci-dessus est vraie pour toute valeur de γ , et Y est la rotation de $+\pi$ autour de l'axe Oy .

CHAPITRE V

ANALYSE ANGULAIRE DES REACTIONS ENTRE PARTICULES ELEMENTAIRES

1) - Théorie des collisions : la matrice S

Nous allons introduire la matrice S par une méthode qui n'est peut être pas la plus générale, mais qui permet de formuler clairement les propriétés d'invariance.

On suppose que la description des systèmes physiques s'effectue dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, dans lequel agit une représentation à une phase près d'un groupe de symétrie G .

On aura construit dans $\mathcal{H}$ une théorie des collisions si on peut trouver dans $\mathcal{H}$ deux ensembles complets d'états $|\alpha, "in">$ représentant tous les états initiaux possibles pour une réaction (cibles, faisceaux etc ...) et $|\beta, "out">$ représentant tous les états pouvant être produits dans une réaction. α et β représentent deux ensembles de nombres quantiques définissant les états préparés ou produits.

On fera l'hypothèse que tout état initial peut être produit comme résultat d'une collision précédente, hypothèse qui correspond bien à la situation expérimentale. Ainsi états initiaux et finaux sont représentés par des nombres quantiques de même nature, ceci a en particulier pour conséquence l'égalité :

$$|\langle \beta, in | \alpha, in \rangle| = |\langle \beta, out | \alpha, out \rangle|$$

reliant des états dont on a supposé qu'ils appartiennent tous au même domaine de supersélection.

Le théorème de Wigner nous montre l'existence d'un opérateur S , n'ayant d'éléments de matrice qu'entre vecteurs appartenant au même secteur de supersélection, pouvant a priori être soit unitaire soit antiunitaire, tel que :

$$\langle \alpha, \text{out} | = \langle \alpha, \text{in} | S . \quad (\text{V.1})$$

L'amplitude de transition $\langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle$ s'écrit alors :

$$\langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{out} | S | \alpha, \text{out} \rangle$$

(la deuxième expression doit être remplacée par $\langle \beta, \text{out} | S | \alpha, \text{out} \rangle^*$ si S est antiunitaire).

Les observables associées aux états "in" et "out" sont reliées par :

$$A_{\text{out}} = S^\dagger A_{\text{in}} S . \quad (\text{V.2})$$

Supposons maintenant que les probabilités de transition sont invariantes dans une transformation $U(g)$, représentant l'élément g du groupe G :

$$|\langle \beta | S | \alpha \rangle|^2 = |\langle \mathcal{E}_\beta | \mathcal{E}_\alpha \rangle|^2$$

avec

$$|\mathcal{E}_\alpha \rangle = U(g) |\alpha \rangle . \quad (\text{V.3})$$

On a donc :

$$|\langle \beta | U^{-1}(g) S U(g) | \alpha \rangle| = |\langle \beta | S | \alpha \rangle| ,$$

on peut alors montrer, en utilisant la linéarité (ou l'antilinearité) de S , que les opérateurs S et $U^{-1}(g) S U(g)$ sont égaux à une phase près :

$$U^{-1}(g) S U(g) = \omega(g) S . \quad (\text{V.4})$$

Appliquons ce résultat à l'invariance relativiste :

$$U^{-1}(a, \Lambda) S U(a, \Lambda) = \omega(a, \Lambda) S .$$

On montre immédiatement (la représentation $U(a, \Lambda)$ étant au signe près) que $\omega(a, \Lambda)$ est une représentation à une dimension du groupe de Poincaré, c'est-à-dire $\omega(a, \Lambda) = 1$ pour tout (a, Λ) . En conséquence, $U(a, \Lambda)$ et S commutent. Appliquant ce résultat à une translation infinitésimale : $U(a) = 1 + i P a$.

On obtient :

$$S i P S^\dagger = i P$$

soit $S P S^\dagger = P$ si S est unitaire

$$S P S^\dagger = -P \text{ si } S \text{ est antiunitaire.}$$

Si on fait l'hypothèse que le spectre de l'opérateur P est entièrement contenu à l'intérieur de la partie d'énergie positive du cône de lumière, on doit donc supposer que S est unitaire. C'est ce que nous ferons dans la suite. On montre, en appliquant successivement $U(g_1)$ et $U(g_2)$ aux deux membres de (V.4) :

$$\omega(g_1, g_2) = [\omega(g_1)]^{\varepsilon(g_2)} \omega(g_2) , \quad (\text{V.5})$$

avec $\varepsilon(g) = \pm 1$ suivant que $U(g)$ est unitaire ou antiunitaire. Si G est un groupe de Lie connexe, alors $U(g)$ est unitaire pour tout g , et $\omega(g)$ est une représentation à une dimension du groupe G . Comme nous l'avons vu dans certains cas (groupe de Poincaré, SU_2 , SU_3 etc ...), la seule représentation unitaire du groupe G à une dimension est la représentation triviale. Ceci n'est pas vrai pour les groupes abéliens par exemple. Néanmoins on peut montrer, en utilisant la propriété dite de "cluster decomposition" de la matrice S , que l'on a toujours [38]:

$$U^{-1}(g) S U(g) = S. \quad (V.6)$$

La propriété de "cluster decomposition" traduit le fait que deux processus physiques se produisant loin l'un de l'autre (dans l'espace) n'ont pas de corrélation c'est-à-dire si l'état initial et l'état final représentent des états localisés au voisinage de deux points dont la distance augmente indéfiniment, alors l'amplitude de transition tend vers le produit des amplitudes de transition correspondant aux deux processus que l'on a ainsi isolés l'un de l'autre.

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle \rightarrow \langle 1' | S | 1 \rangle \langle 2' | S | 2 \rangle .$$

En écrivant l'invariance sous le groupe G de la matrice S , il vient, à la limite :

$$\omega(g) = \omega^2(g),$$

c'est-à-dire $\omega = 1$.

L'équation (V.4) s'écrit alors :

$$U_{in}(g) = U_{out}(g). \quad (V.7)$$

C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas indiqué dans (V.3) si l'opérateur $U(g)$ désignait l'action de l'opération de symétrie sur les états "in" ou "out".

Les considérations précédentes ne s'appliquent pas au renversement du sens du temps, qui transforme un état "in" en un état "out" :

$$U(T) |\alpha, in\rangle = |^T \alpha, out\rangle \quad (V.8)$$

$U(T)$ agit sur les nombres quantiques de la façon indiquée aux chapitres I et II (dans ces deux chapitres nous avons essentiellement traité des états à une particule, pour lesquels aucune distinction n'est nécessaire entre les états "in" et "out", qui sont égaux). On a invariance par renversement du sens du temps si :

$$|\langle \beta_{out} | \alpha_{in} \rangle|^2 = |\langle ^T \alpha_{out} | ^T \beta_{in} \rangle|^2. \quad (V.9)$$

On en déduit alors :

$$U^{-1}(T) S U(T) = \omega(T) S^\dagger. \quad (V.10)$$

Une simple redéfinition de la phase de tous les états "out" permet de modifier la phase de la matrice S de façon à obtenir :

$$\omega(T) = 1. \quad (V.11)$$

2) - Invariance relativiste de la matrice S , définition des éléments de matrice réduits

Nous traitons ici des réactions à deux corps dans l'état initial comme dans l'état final. La méthode est aisément généralisable à des réactions plus compliquées.

L'état initial et l'état final sont caractérisés par l'impulsion et la composante du spin sur des axes appropriés, de chaque particule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{réaction} \quad 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \\ \text{masses} \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4 \\ \text{impulsions} \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \\ \text{spins} \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \\ \text{projections} \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \\ \text{du spin} \end{array} \right. \quad (V.12)$$

Pour exprimer l'invariance relativiste de la matrice S, ou de façon équivalente de l'opérateur de transition T défini par :

$$S = 1 + i T, \quad (V.13)$$

nous allons utiliser une décomposition sur des états intermédiaires, vecteurs de bases des diverses composantes irréductibles contenues dans le produit de représentation constitué par l'état initial comme l'état final :

$$\begin{aligned} & \langle [p_3], \sigma_3, [p_4], \sigma_4 | T | [p_1], \sigma_1, [p_2], \sigma_2 \rangle \\ &= \int_{(m_3+m_4)^2}^{\infty} \frac{dM_{34}^2}{(m_1+m_2)^2} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} \frac{dM_{12}^2}{d\omega_{34}} \int \frac{d^3 \vec{p}_{34}}{2\omega_{34}} \int \frac{d^3 \vec{p}_{12}}{2\omega_{12}} \sum_{\substack{\eta_{34} \eta_{12} \\ J_{34} J_{12} \\ \mu_{34} \mu_{12}}} \\ & \langle [p_3], \sigma_3, [p_4], \sigma_4 | [p_{34}], \mu_{34}; J_{34}, \eta_{34} \rangle \\ & \langle [p_{34}], \mu_{34}, J_{34}, \eta_{34} | T | [p_{12}], \mu_{12}, J_{12}, \eta_{12} \rangle \\ & \langle [p_{12}], \mu_{12}, J_{12}, \eta_{12} | [p_1], \sigma_1, [p_2], \sigma_2 \rangle \quad (V.14) \end{aligned}$$

Le théorème de Wigner Eckart montre que l'élément de matrice :

$$\langle [p_{34}], \mu_{34}, J_{34}, \eta_{34} | T | [p_{12}], \mu_{12}, J_{12}, \eta_{12} \rangle$$

a la forme :

$$\begin{aligned} & \delta^4(p_{34} - p_{12}) \delta_{J_{12}, J_{34}} \delta_{\mu_{12}, \mu_{34}} \tau_{\eta_{34}, \eta_{12}}^{J_{12}}(p_{12}^2) \\ &= \delta(M_{34}^2 - M_{12}^2) 2\omega_{34} \delta(\vec{p}_{34} - \vec{p}_{12}) \delta_{J_{12}, J_{34}} \delta_{\mu_{12}, \mu_{34}} \tau_{\eta_{34}, \eta_{12}}^{J_{12}}(p_{12}^2), \end{aligned} \quad (V.15)$$

$\tau_{\eta_{34}, \eta_{12}}^{J_{12}}(p_{12}^2)$ est appelé élément de matrice réduit.

Les nombres quantiques η désignent les paramètres de dégénérescence introduits au chapitre III dans la réduction du produit de deux représentations irréductibles du groupe de Lorentz inhomogène.

On peut alors effectuer les intégrations dans (V.14), en utilisant les fonctions δ qui traduisent la conservation de l'énergie impulsion dans les coefficients de Clebsch-Gordan. On a, en convenant de noter à l'aide d'une double barre la quantité qui multiplie la fonction δ dans le coefficient de Clebsch-Gordan correspondant,

$$\begin{aligned} & \langle [p_3], \sigma_3, [p_4], \sigma_4 | T | [p_1], \sigma_1, [p_2], \sigma_2 \rangle \\ &= \delta^4(p_1+p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\substack{J, \eta_{12} \\ \eta_{34}}} \tau_{\eta_{12}, \eta_{34}}^{J_{12}}(p^2) \\ & \sum_{\mu} \langle [p_3], \sigma_3, [p_4], \sigma_4 | [P], \mu, J, \eta_{34} \rangle \\ & \langle [P], \mu, J, \eta_{12} | [p_1], \sigma_1, [p_2], \sigma_2 \rangle \quad (V.16) \end{aligned}$$

Dans cette formule, la sommation sur μ peut être effectivement calculée, car l'élément de matrice réduit n'en dépend pas.

Cette sommation peut se calculer effectivement dans les divers modes de couplages. L'un des mérites du couplage d'hélicité est que cette somme s'effectue très simplement. Nous allons réécrire (V.16) dans le cas du couplage ℓ -s et du couplage d'hélicité.

Couplage ℓ, s : Les indices de spin sont mesurés sur les tétrades du couplage ℓ -s introduites au chapitre III.

$$\begin{aligned} & \langle [p_3], \sigma_3, [p_4], \sigma_4 | \tau | [p_1], \sigma_1, [p_2], \sigma_2 \rangle \\ &= \frac{8P^2 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\{\lambda(P^2, m_1^2, m_2^2) \lambda(P^2, m_3^2, m_4^2)\}^{1/4}} \\ & \sum_{J, \mu, \ell_{12}, s_{12}} \langle s_3 s_4 \sigma_3 \sigma_4 | s_{34} \sigma_{34} \rangle \langle \ell_{34} s_{34} m_{34} \sigma_{34} | J \mu \rangle \\ & \sum_{\ell_{34}, s_{34}} \langle s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 | s_{12} \sigma_{12} \rangle \langle \ell_{12} s_{12} m_{12} \tau_{12} | J \mu \rangle \\ & \tau_{\ell_{34}, \ell_{12}}^J (P^2) Y_{m_{12}}^{\ell_{12}*}(\hat{q}_{12}) Y_{m_{34}}^{\ell_{34}}(\hat{q}_{34}) \cdot \\ & s_{34}, s_{12} \end{aligned} \quad (V.17)$$

Couplage d'hélicité : Les indices de spin sont mesurés sur les tétrades d'hélicité introduites au chapitre III :

$$\langle [p_3], \lambda_3, [p_4], \lambda_4 | \tau | [p_1], \lambda_1, [p_2], \lambda_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8P^2 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\{\lambda(P^2, m_1^2, m_2^2) \lambda(P^2, m_3^2, m_4^2)\}^{1/4}} (-1)^{s_2 - \lambda_2 + s_4 - \lambda_4} \sum_J \tau_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}^J (P^2) \\ & \frac{2J+1}{4\pi} d_{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2}^J \left(R^{-1}(\hat{q}_{34}) R(\hat{q}_{12}) \right) \cdot \end{aligned} \quad (V.18)$$

Si l'on choisit pour axes $n_2(p_1)$ et $n_2(P)$ des tétrades d'hélicité de chacune des quatre particules et de la tétrade du centre de masse respectivement, le vecteur unitaire du produit extérieur $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\nu p_2^\rho p_3^\sigma$, alors la rotation figurant dans (V.18) laisse invariant l'axe Oy :

$$d_{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2}^J \left(R^{-1}(\hat{q}_{34}) R(\hat{q}_{12}) \right) = d_{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2}^J(\theta), \quad (V.19)$$

θ est l'angle de diffusion.

Les formules (V.17) et (V.18) fournissent les décompositions en fonctions angulaires des amplitudes de collisions. Notons que les formules (V.17) et (V.18) sont en tout point identiques aux formules non relativistes à l'exception bien sûr du facteur cinématique, lié à la normalisation invariante que nous avons pris pour les états.

La seule différence avec les cas non relativistes réside donc dans l'interprétation des indices magnétiques de spin, qui dans le cas non relativiste sont simplement obtenus par projection des spins sur des axes fixes. Ici on doit attacher les axes de quantification du spin aux impulsions.

Dans le cas d'une réaction élastique, considérée à une énergie où aucun canal inélastique n'est ouvert, on sait que la matrice S restreinte aux états à deux particules est alors unitaire.

Si on définit l'élément de matrice réduit $S_{\eta_{12}, \eta_{34}}^J (P^2)$ de la

même façon que pour l'opérateur de transition $\mathcal{T}$ (cf.V.15), alors S^J , considéré comme une matrice dans l'espace des paramètres de dégénérescence η , est une matrice unitaire :

$$\sum_{\eta'} S_{\eta\eta'}^J (S^{J\dagger})_{\eta'\eta''} = \delta_{\eta\eta''} .$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $e^{2i\delta_J}$ où les δ_J sont les divers déphasages correspondant à "l'onde partielle" J .

L'extension de la relation d'unitarité ci-dessus au cas de plusieurs canaux couplés est immédiate : il suffit d'inclure dans les paramètres η un indice caractérisant le canal, de façon à conserver la condition de fermeture

$$1 = \sum_{\eta} \int | [P], j, \mu, \eta \rangle d^4P \langle [P], j, \mu, \eta | .$$

3) - Convergence des développements angulaires des réactions à deux corps

Dans les formules (V.16) les sommes indiquées portent toutes sur un nombre fini d'indice lorsque J est fixé. Le seul problème est donc la convergence de la somme sur J . Si on ne fait aucune hypothèse supplémentaire, la convergence de cette somme risque d'être lente (convergence de type L^2). Mais faire l'hypothèse que l'amplitude de diffusion possède des propriétés d'analyticité, permet une convergence bien meilleure. Mais ces propriétés d'analyticité sont démontrées en théorie des champs uniquement sur les amplitudes spinorielles, c'est-à-dire les éléments de matrice S pris entre les vecteurs appartenant aux bases spinorielles. On peut aisément en comprendre la raison, en effet, les éléments de matrice S pris entre "états physiques" du type $| [p_1], \sigma_1, [p_2], \sigma_2 \rangle$, dépendent de la base de spin prise pour chacune des particules : si, par un changement de base, on passe de $[p_1]$ à $[p_1]'$, par exemple, l'état considéré sera multiplié par $\mathcal{D}_{\sigma_1' \sigma_1}^{s_1} ([p_1]^{-1} [p_1]')$. Or il n'est pas possible de choisir les matrices unimodulaires $[p_1]$ et $[p_1]'$ en fonction de p_1 , de façon analytique. Cette difficulté n'apparaît pas dans le cas des amplitudes spinorielles qui ne dépendent que des quadrivecteurs moment.

On définira donc des amplitudes spinorielles :

$$\langle p_3, \hat{A}_3, p_4, \hat{A}_4 | T | p_1, A_1, p_2, A_2 \rangle \mathcal{D}_{A_3' A_3}^{s_3} (C) \mathcal{D}_{A_4' A_4}^{s_4} (C) = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) M_{A_3 A_4, A_1 A_2} (p_1, \dots, p_4) . \quad (V.19)$$

L'invariance par transformation de Lorentz sur T , s'écrit :

$$M_{A_3 A_4, A_1 A_2} (\Delta p_1, \dots, \Delta p_4) = M_{A_1' A_2' A_3' A_4'} (p_1, \dots, p_4) \times \mathcal{D}_{A_1' A_1}^{s_1} (\Lambda^{-1}) \mathcal{D}_{A_2' A_2}^{s_2} (\Lambda^{-1}) \mathcal{D}_{A_3' A_3}^{s_3} (\Lambda^{-1}) \mathcal{D}_{A_4' A_4}^{s_4} (\Lambda^{-1}) . \quad (V.20)$$

Revenons à la décomposition (V.18) et (V.19) de l'amplitude d'hélicité. Avec le choix de tétrades effectué, l'amplitude $\langle [p_1], \lambda_1, [p_2], \lambda_2 | \mathcal{T} | [p_3], \lambda_3, [p_4], \lambda_4 \rangle$ ne dépend en fait que des invariants s, t , (ou s et $\cos\theta$) et on l'écrit $\mathcal{T}(s, \cos\theta)$;

$$\text{on a :} \quad s = (p_1 + p_2)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 ,$$

(V.18) est alors la décomposition de $\mathcal{T}(s, \cos\theta)$ en fonctions $d_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4}^J(\theta)$.

On peut montrer^[39] que si l'amplitude spinorielle est analytique dans un domaine convenable, alors $\mathcal{T}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \cos\theta)$ a juste les singularités nécessaires pour compenser celles de $d_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4}^J(\theta)$ (qui ne dépendent pas de J). La décomposition angulaire :

$$\mathcal{T}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \cos\theta) \sim \sum_J \mathcal{T}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^J(s) d_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4}^J(\theta) ,$$

se ramène simplement à la décomposition d'une fonction de $\cos\theta$ en polynôme de Jacobi de la variable $(\cos\theta)$. La somme converge^[40] donc dans une ellipse de foyer $-1, +1$ dans la variable $\cos\theta$, (la plus grande ellipse qui ne contienne aucune des singularités de la fonction $\mathcal{T}(s, \cos\theta)$ (ou $\mathcal{T}(s, t)$) : la convergence ainsi obtenue est rapide.

De la convergence du développement en amplitude d'hélicité on peut déduire la convergence de tous les autres types de développements angulaires, car à J fixé, le nombre de valeurs prises par les paramètres de dégénérescence est fini (égal à $\prod_i (2s_i + 1)$). Le passage de $\tau_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}^J(s)$ à $\tau_{\ell_{12}^{s_{12}} \ell_{34}^{s_{34}}}^J(s)$ se fait donc par action d'une matrice finie.

4) - Décomposition en amplitudes invariantes sans singularités cinématiques

Hepp et Williams^[17] ont démontré que dans l'hypothèse où l'amplitude spinorielle introduite en (IV.19) est une fonction analytique de ses arguments (p_1, p_2, p_3, p_4) dans un domaine appartenant à une classe suffisamment générale, elle peut alors se décomposer sur une base de polynômes ayant les mêmes propriétés de covariance, les coefficients étant des fonctions des invariants $(p_i \cdot p_j, i \neq j)$, analytiques dans l'image dans ces variables du domaine d'analyticité initial. On trouvera dans Williams^[17] la forme précise que doit avoir le domaine. La décomposition s'écrit :

$$M_{A_3 A_4 A_1 A_2}^{\Sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \sum_{s_{12} s_{34}} \langle s_3 s_4 A_3 A_4 | \tau_{34}^A | s_{12} s_{34} \rangle \langle s_1 s_2 A_1 A_2 | \tau_{12}^A | s_{12} s_{34} \rangle \langle \tau_{34} \tau_{12} A_{34} A_{12} | \Sigma A \rangle M_A^{\Sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad (V.21)$$

et

$$M_A^{\Sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \sum_{K^{\pm}} A_{K^{\pm}}^{\Sigma}(s, t) Y^{\Sigma, K^{\pm}}(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad (V.22)$$

avec

$$Y_A^{\Sigma, K^+}(p_1, \dots, p_4) = \langle K^+, \mu, \Sigma - K^+, \nu | \Sigma A \rangle Y_{\mu}^{K^+}(\vec{e}(q, p_1)) Y_{\nu}^{\Sigma - K^+}(\vec{e}(q, p_3))$$

$$Y_A^{\Sigma, K^-}(p_1, \dots, p_4) = \langle K^-, \mu, \Sigma - K^- + 1, \nu | \Sigma A \rangle Y_{\mu}^{K^-}(\vec{e}(q, p_1)) Y_{\nu}^{\Sigma - K^- + 1}(\vec{e}(q, p_3)) \quad (V.23)$$

avec $q = p_2$ ou p_4 . Plus généralement, si on prend pour q une combinaison linéaire des vecteurs (p_1, p_2, p_3, p_4) , les fonctions $A_{K^{\pm}}^{\Sigma}(s, t)$ sont analytiques sauf éventuellement sur la variété $q^2 = 0$, où apparaissent des singularités polaires. Si on prend $q = (p_1 + p_2)$, on peut s'attendre à des singularités cinématiques à $s=0$.

5) - Une application : le comportement au seuil des ondes partielles

Nous allons montrer que des hypothèses d'analyticité très simples permettent de déterminer le comportement au seuil des éléments de matrice réduits en couplage ℓ - s , c'est-à-dire des ondes partielles. Pour cela on exprime tout d'abord l'élément de matrice réduit défini en (V.17), en fonction de l'amplitude spinorielle en utilisant (III.32) et (III.36). Nous décomposerons sur la base des polynômes introduite au paragraphe précédent, équation (V.22), avec $q = p_1 + p_2$, non pas l'amplitude spinorielle mais l'amplitude spinorielle multipliée par les facteurs du type $\mathcal{D}^1(\Lambda(p \rightarrow p_1))$ qui figurent dans (III.32) et (III.36). En effet ces facteurs supplémentaires n'ont pas de singularités dans le voisinage du seuil considéré. Dans la décomposition, apparaissent alors des amplitudes invariantes $A_{K^{\pm}}^{\Sigma}(s, t)$ du type de celles introduites en (V.22). Ces amplitudes invariantes n'ont pas de singularités cinématiques au voisinage du seuil considéré, $s_{12} = (m_1 + m_2)^2$ ou $s_{34} = (m_3 + m_4)^2$ (les seules singularités cinématiques apparaissent à $s=0$ et à $s = (m_1 - m_2)^2$). On supposera les amplitudes $A_{K^{\pm}}^{\Sigma}(s, t)$ analytiques dans un voisinage du seuil, pour tout t compris dans une ellipse (dans la variable $\cos\theta$, cette ellipse est de foyer $(-1, +1)$). On suppose que lorsque s tend vers la valeur qu'il prend au seuil, l'ellipse considérée dans la variable t ne se réduit pas à un segment de droite. Dans la variable $\cos\theta$, l'ellipse s'agrandit alors indéfiniment, ses foyers restant fixés.

On peut alors exprimer les amplitudes invariantes en fonction d'une intégrale de contour dans la variable $\cos\theta = z$, prise sur la plus grande ellipse contenue dans le domaine d'analyticité.

Soit :

$$A_{K^{\pm}}^{\Sigma}(s, z) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{A_{K^{\pm}}^{\Sigma}(s, z') dz'}{z' - z} ,$$

on utilise :

$$\frac{1}{z' - z} = \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) P_{\lambda}(z) Q_{\lambda}(z') ,$$

$Q_\lambda(z)$ est la fonction de Legendre associée correspondant au polynôme de Legendre $P_\lambda(z)$.

On a donc à évaluer l'intégrale :

$$\oint A_{K^\pm}^\Sigma(s, z') dz' Q_\lambda(z') \quad (V.24)$$

Or à une singularité dans la variable t à la position t_0 , correspond au voisinage du seuil des singularités dans la variable $\cos\theta$, à la position $z = z_0$, avec :

$$z_0 = \frac{F(s, t_0)}{|q_{1,2}| |q_{3,4}|}$$

où $F(s)$ est lentement variable en s au voisinage du seuil. Ainsi l'argument de la fonction $Q_\lambda(z)$ va tendre vers l'infini sur tout le contour d'intégration. Or :

$$|Q_\lambda(z)| \sim \frac{1}{|z|^{\lambda+1}} \text{ quand } |z| \rightarrow \infty$$

Si on suppose $A_{K^\pm}^\Sigma(s, t)$ borné dans l'ellipse d'analyticité (uniformément en s dans un voisinage du seuil)*, alors on peut donner une estimation de l'intégrale (V.24).

$$C_\lambda(s) = \frac{1}{2i\pi} \oint A_{K^\pm}^\Sigma(s, z') dz' Q_\lambda(z') \sim C |q_{1,2}|^\lambda |q_{3,4}|^\lambda$$

Cette intégrale est le coefficient de $P_\lambda(z)$ dans la décomposition de $A_{K^\pm}^\Sigma(s, z)$:

$$\begin{aligned} A_{K^\pm}^\Sigma(s, z) &= \sum_\lambda P_\lambda(z) C_\lambda(s) (2\lambda+1) \\ &= \sum_{\lambda, p_2} C_\lambda(s) (2\lambda+1) Y_m^\lambda(\hat{q}_{12}) Y_m^{\lambda*}(\hat{q}_{34}) \end{aligned}$$

*En faisant cette hypothèse on écarte notamment le cas où on a un état lié au seuil.

Si l'on exprime alors $T_{l_{12}l_{34}}^\Sigma(s)$ en fonction des amplitudes $A_{K^\pm}^\Sigma(s, z)$, on doit effectuer les intégrales angulaires. Le plus simple est de se placer dans le système où P est au repos. On a alors des intégrales du type :

$$\int d\Omega_{\hat{q}_{12}} Y_\lambda^m(\hat{q}_{12}) Y_{K^\pm}^{m'}(\hat{q}_{12}) Y_{l_{12}}^{m_{12}}(\hat{q}_{12})$$

accompagnées des coefficients de couplage nécessaire. En résumé :

$$\begin{aligned} T_{l_{12}l_{34}}^\Sigma(s) &= \sum_{\lambda, \Sigma, K^\pm} C(s, \lambda, \Sigma, K^\pm, \dots) \\ &\times \int d\Omega_{\hat{q}_{12}} Y_\lambda^m(\hat{q}_{12}) Y_{K^\pm}^{\mu'}(\hat{q}_{12}) Y_{l_{12}}^{m_{12}}(\hat{q}_{12}) \\ &\times \int d\Omega_{\hat{q}_{34}} Y_\lambda^{m'*}(\hat{q}_{34}) Y_{\Sigma-K^\pm+(1)}^{\mu'*}(\hat{q}_{34}) Y_{l_{34}}^{m_{34}}(\hat{q}_{34}) |\vec{q}_{12}|^{K^\pm+\lambda} |\vec{q}_{34}|^{(\Sigma-K^\pm+(1))+\lambda} \end{aligned}$$

La fonction C indiquée comporte des coefficients de Clebsch-Gordan qui couplent les indices magnétiques. Elle est lentement variable en s , à condition que la singularité la plus proche dans la variable t , soit à distance finie de la région physique. C'est cette hypothèse qui remplace la notion habituelle de portée finie du potentiel.

Les intégrations angulaires font apparaître des coefficients de couplages couplant respectivement les moments cinétiques :

$$\lambda, K^{\pm}, l_{12}$$

et $\lambda, \Sigma - K^{\pm} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_{34}$,

pour former un moment cinétique nul. Les règles de sélection montrent alors que la plus petite valeur permise pour les puissances respectives de $|\vec{q}_{12}|$ et $|\vec{q}_{34}|$ sont l_{12} et l_{34} .

En conclusion :

1) Réaction élastique :

$$|\vec{q}_{12}| = |\vec{q}_{34}| = |\vec{q}| .$$

Le comportement du seuil est alors le même qu'en mécanique quantique non relativiste (théorie du potentiel) :

$$T_{l_{12} l_{34}}^J (s) \sim |q|^{l_{12} + l_{34}} .$$

$$s_{12} s_{34}$$

2) Réaction inélastique : Supposons $m_1 + m_2 < m_3 + m_4$, on considère l'amplitude au voisinage de $s = (m_3 + m_4)^2$, $|\vec{q}_{12}|$ est alors lentement variable et :

$$T_{l_{12} l_{34}}^J (s) \sim |\vec{q}_{34}|^{l_{34}} .$$

$$s_{12} s_{34}$$

Ces considérations donnent une justification aux arguments de barrière centrifuge utilisés dans les analyses phénoménologiques.

APPENDICE

LES REPRESENTATIONS FINIES DU GROUPE DE LORENTZ

A) - RELATION ENTRE SL(2,C) ET LE GROUPE DE LORENTZ

- Matrices de Pauli : $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Produit scalaire : $p \cdot q = g_{\mu\nu} p^\mu q^\nu = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q}$.

- Matrices hermitiques associées à un quadrivecteur :

$$\underline{p} = p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \quad \det \underline{p} = p^2$$

$$\underline{\tilde{p}} = p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \quad \det \underline{\tilde{p}} = p^2$$

$$\underline{p} \underline{\tilde{q}} + \underline{q} \underline{\tilde{p}} = 2p \cdot q .$$

- Transformation de Lorentz associée à une matrice unimodulaire :

$$A \underline{p} A^\dagger = \underline{p}'$$

$$A^{\dagger-1} \underline{\tilde{p}} A^{-1} = \underline{\tilde{p}}' \quad \text{avec } p' = \Lambda(A)p .$$

$$\Lambda(A) = \Lambda(-A)$$

- Transformation de Lorentz pure amenant le vecteur unitaire de p_1 sur le vecteur unitaire de p_2 :

1) $p_1^2 = m_1^2 > 0$, $p_2^2 = m_2^2 > 0$, p_1^0 et p_2^0 sont positifs :

$$\Lambda(p_1 \rightarrow p_2) = \pm \frac{m_1 m_2 + p_2 \tilde{p}_1}{\sqrt{2 m_1 m_2 (m_1 m_2 + p_1 \cdot p_2)}}$$

2) $q_1^2 = -m_1^2 < 0$ $q_2^2 = -m_2^2 < 0$, m_1 et m_2 sont positifs

$$\Lambda(q_1 \rightarrow q_2) = \pm \frac{m_1 m_2 - q_2 \tilde{q}_1}{\sqrt{2 m_1 m_2 (m_1 m_2 - q_1 \cdot q_2)}}$$

- Transformation de Lorentz faisant passer de la tétrade orthonormée (n_0, n_1, n_2, n_3) à la tétrade (n'_0, n'_1, n'_2, n'_3) [42]

$$\Lambda = \pm \frac{1}{D} (n'_0 \tilde{n}_0 - n'_1 \tilde{n}_1 - n'_2 \tilde{n}_2 - n'_3 \tilde{n}_3)$$

D est une constante calculée de façon que $\det \Lambda = +1$.

- Matrice C $C = -1 \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$C A C A^T = -\det A$$

$$C^2 = -1$$

si A est inversible :

$$C A C^{-1} = A^{-1T} \det A$$

$$C \vec{\sigma}^T C^{-1} = -\vec{\sigma}$$

- Transformation de Lorentz complexe : Au couple de matrice unimodulaire (A,B) on fait correspondre la transformation de Lorentz complexe $p' = \Lambda(A,B)p$ par :

$$\begin{aligned} \underline{p}' &= A p B^T \\ \tilde{p}' &= B^{-1T} \tilde{p} A^{-1} \end{aligned}$$

$\Lambda(A,B)$ est réel si $A = B^*$.

B) - REPRESENTATION NON UNITAIRE DU GROUPE DE LORENTZ

On définit la matrice à $(2j+1)$ dimension $\mathcal{D}_{mm}^j(A)$ pour toute matrice A par la formule :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\frac{(a\xi + b\eta)^{j+m} (c\xi + d\eta)^{j-m}}{\sqrt{j+m! j-m!}} = \sum_m \mathcal{D}_{mm}^j(A) \frac{\xi^{j+m} \eta^{j-m}}{\sqrt{j+m! j-m!}}$$

on a :

$$\mathcal{D}^j(A_1 A_2) = \mathcal{D}^j(A_1) \mathcal{D}^j(A_2)$$

$$\mathcal{D}^j(A^T) = \mathcal{D}^{jT}(A)$$

$$\mathcal{D}^j(A^*) = \mathcal{D}^{j*}(A)$$

$$\mathcal{D}^j(\lambda A) = \lambda^{2j} \mathcal{D}^j(A)$$

si A^{-1} existe, $\mathcal{D}^j(A^{-1}) = (\mathcal{D}^j(A))^{-1}$.

- Relation avec les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\mathcal{D}_{m_1 m_1}^{j_1}(A) \mathcal{D}_{m_2 m_2}^{j_2}(A) = (\det A)^{j_1+j_2-j} \sum_{J,M} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \mathcal{D}_{MM}^J(A) \langle JM | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle$$

$$\mathcal{D}_{MM}^J(A) \det(A)^{j_1+j_2-j} = \sum_{m_1 m_1' m_2 m_2'} \langle JM | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle \mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{j_1}(A) \mathcal{D}_{m_2 m_2'}^{j_2}(A) \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \mathcal{D}_{MM}^J(A) (\det A)^{j_1+j_2-j} = \sum_{m_1 m_1' m_2 m_2'} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{j_1}(A) \mathcal{D}_{m_2 m_2'}^{j_2}(A)$$

Si $\det A = 0$, $(\det A)^{j_1+j_2-j}$ doit être remplacé par δ_{j, j_1+j_2} .

Formules explicites

$$1) \quad \vartheta_{mm'}^j \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} a^{m'+m} c^{m'-m} (\det A)^{j-m'} P_{j-m'}^{(m'-m, m'+m)}(x)$$

$$x = \frac{ad+bc}{ad-bc}$$

Enfin $P_n^{(a,b)}(x)$ désigne le polynôme de Jacobi suivant :

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n} \right\}$$

C'est un polynôme à la fois dans les variables a, b , et x .

$$2) \quad \vartheta_{mm'}^j \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{\sum_{k+l=j+m'} \frac{a^k b^{j+m-k} c^l d^{j-m-l}}{k! j+m-k! l! j-m-l!}}$$

3) Décomposition de $\vartheta_{mm'}^{L/2} \left(\frac{\lambda + \vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{2} \right)$ en harmoniques sphériques :

$$\vartheta_{mm'}^{L/2} \left(\frac{\lambda + \vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{2} \right) = \sum_{K,M} \sqrt{\frac{2K+1}{L+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{L+K+1}} K! \sqrt{\frac{L-K!}{L+K!}} \langle KM \frac{L}{2} m | \frac{L}{2} m' \rangle (-1)^L q^{L-K} P_{L-K}^{(-1-L, -1-L)}(\lambda/q) Y_K^M(\vec{q})$$

$P_{L-K}^{(-1-L, -1-L)}(x)$ est le polynôme de Jacobi; enfin $q = \sqrt{\frac{-2}{q}}$.

C) - SEMI BIVECTEURS

On définira les semi bivecteurs $\vec{e}(p,q)$ et $\vec{\tilde{e}}(p,q)$ construit à l'aide des deux quadrivecteurs p, q , par les formules :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{e}(p,q) + p \cdot q = \underline{p} \cdot \vec{q}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\tilde{e}}(p,q) + p \cdot q = \vec{p} \cdot \underline{q}$$

$$\vec{e}(p,q) = q_0 \vec{p} - p_0 \vec{q} + i(\vec{q} \times \vec{p})$$

$$\vec{\tilde{e}}(p,q) = p_0 \vec{q} - q_0 \vec{p} + i(\vec{q} \times \vec{p})$$

$$\vec{\tilde{e}}(p,q) = \vec{e}^*(q,p)$$

on a :

$$\text{si } p' = \Lambda p, \quad q' = \Lambda q, \quad \text{c'est-à-dire } \underline{p}' = \Lambda \underline{p} \Lambda^\dagger$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{e}(p',q') = \Lambda \vec{\sigma} \cdot \vec{e}(p,q) \Lambda^{-1}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\tilde{e}}(p',q') = \Lambda^{\dagger-1} \vec{\sigma} \cdot \vec{\tilde{e}}(p,q) \Lambda^\dagger$$

on a :

$$\vec{e}(p,q) \cdot \vec{e}(r,s) = (r \cdot q)(p \cdot s) - (r \cdot p)(q \cdot s) + i(p, q, r, s)$$

$$i \vec{e}(p,q) \times \vec{e}(r,s) = (p \cdot s) \vec{e}(q,r) + (q \cdot r) \vec{e}(p,s)$$

$$-(q \cdot s) \vec{e}(p,r) - (p \cdot r) \vec{e}(q,s)$$

Relations avec les tenseurs antisymétriques, on pose :

$$F_{\mu\nu}^+(p,q) = p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu + i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho q^\sigma$$

$$F_{\mu\nu}^-(p,q) = -p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho q^\sigma = F_{\mu\nu}^{+*}(q,p)$$

on a alors :

$$\vec{e}^1(p,q) = F_{10}^+(p,q) = \frac{1}{2i} \varepsilon_{1jk} F_{ij}^-(p,q)$$

$$\vec{\tilde{e}}^1(p,q) = F_{10}^-(p,q) = \frac{1}{2i} \varepsilon_{1jk} F_{ij}^+(p,q)$$

- Application aux polynômes covariants $Y_\ell^m(p_1, p_2)$, on considère les polynômes harmoniques :

$$Y_\ell^m(\vec{q}) = q^\ell Y_\ell^m(\hat{q}), \quad q = \sqrt{\vec{q}^2}.$$

Les polynômes covariants dépendant de deux quadrivecteurs sont définis par :

$$Y_\ell^m(p_1, p_2) = Y_\ell^m(\vec{e}(p_1, p_2))$$

$$\hat{Y}_\ell^m(p_1, p_2) = Y_\ell^m(\vec{\hat{e}}(p_1, p_2)).$$

La covariance s'écrit :

$$Y_\ell^m(\Delta p_1, \Delta p_2) = Y_\ell^{m'}(p_1, p_2) \mathcal{D}_{m', m}^\ell(\Delta^{-1})$$

$$\hat{Y}_\ell^m(\Delta p_1, \Delta p_2) = \hat{Y}_\ell^{m'}(p_1, p_2) \mathcal{D}_{m', m}^\ell(\Delta^\dagger).$$

D) - PRODUIT DE TROIS TRANSFORMATIONS DE LORENTZ PURES

Si $u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = 1$, on a :

$$\Lambda(u_3 \rightarrow u_1) \Lambda(u_2 \rightarrow u_3) \Lambda(u_1 \rightarrow u_2) = \frac{1 + u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 + i \vec{\sigma} \cdot \{\vec{e}(u_1, u_2) \times \vec{e}(u_1, u_3)\}}{\sqrt{2(1+u_1 u_2)(1+u_2 u_3)(1+u_3 u_1)}},$$

c'est une rotation dans le système où u_1 est au repos, autour de la normale au plan $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Manuscrit reçu le 1er août 1968

REFERENCES

- [1] - WIGNER - Annals of Mathematics, 40, p. 149, (1939)
- [2] - BARGMANN-WIGNER - Proceedings of the national Academy of the USA, 34, p. 211, (1948)
- [3] - BARGMANN - Annals of Mathematics, 59, p. 1, (1954)
- [4] - STAPP - Physical Review 103, 425 (1956)
Physical Review 125, 2139 (1962)
- WICHMANN - Nordita Publications 1961/1962
- [5] - WIGHTMAN - Cours à l'Ecole d'Ete de Varenna 1958
" Cours à l'Ecole d'Eté des Houches 1960
- BARGMANN, MICHEL, WIGHTMAN (Princeton) non publié
- BARGMANN, MICHEL, TELEGGI - Physical Review Letters 2, 435 (1959)
- BARGMANN WIGHTMAN WIGNER, non publié, reproduit dans "Group Theoretical concept and methods in elementary particle physics" (cours donné par Wigner à l'école d'Eté d'Istanbul 1962)
- [6] - BOUCHIAT, MICHEL - Nuclear Physics, 5, p. 416, (1958)
- [7] - JACOB-WICK - Annals of Physics, 7, p. 404, (1959)
- [8] - EPSTEIN, LUZZATO et WIGHTMAN - non publié, (cité dans Wightman, Cours de l'école des Houches 1960)
- [9] - H. JOOS - Fortschritte der Physik, 10, p.65 (1962). Cet article contient également de nombreuses références

- [10] - Mac FARLANE - Journal of Mathematical Physics, 4, p. 490, (1963)
- WICK - Annals of Physics, 18, p. 65, (1962)
- [11] - CHOU-KUONG-CHAO et SHIROKOV - Soviet Physics JETP, 10, p. 851, (1958)
- [12] - NEWTON-WIGNER - Review of Modern Physics, 21, p. 400, (1949)
- [13] - MACKEY "Theory of group representations" Mimeographed notes, Department of Mathematics, University of Chicago, (1955)
- [14] - MOUSSA, STORA - Lectures in theoretical Physics, Vol. VII A University of Colorado Press, Boulder, p.37 (1965)
- R. STORA - Séminaires à l'Institut Henri Poincaré (1965-1966).
- [15] - WIGNER "Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra" - (Academic Press Inc. New-York 1959)
- [16] - STAPP - Physical Review, 125, p.2139 (1962)
- ZWANZIGER - Physical Review, 133B, p.1036 (1964)
- JOOS - ref.[9]
- [17] - HEPP - Helvetica Physica Acta 36, p. 355 (1963) et 37, p. 55 (1964)
- WILLIAMS - Rapport UCRL - 11113 (1963)
- ZWANZIGER - Lectures in Theoretical Physics, Vol. VII A, University of Colorado Press, Boulder p.190 (1965)
- COHEN-TANNOUDJI, MOREL, NAVELET - Annals of Physics, 46, p. 239(1968) (1968)
- NAVELET - Thèse, Université d'Orsay (1967)
- FOX - Physical Review, Vol.157, p.1493 (1967)
- [18] - TOLLER - Nuovo Cimento, Série X, 53A, p. 671
- [19] - Séminaire sur l'invariance relativiste par FROISSART et STORA - Saclay, Service de Physique Théorique (1962-1963), non publié

- [20] - MOUSSA - STORA - Cours à l'Ecole d'Eté de Hercegovi, (1966), publié dans "Methods in Subnuclear Physics" Gordon and Breach
- STORA - University of Maryland, Technical Report n° 250, (1962)
- [21] - WIGNER, référence^[15]
et BARGMANN - Journal of Mathematical Physics, Vol.5, p.862 (1964)
- [22] - On peut considérer les représentations à une phase près comme des extensions du groupe G par un groupe U(1).
Voir MICHEL - Cours d'Istamboul (1962), cf. référence^[5]
- [23] - Voir références [1], [9] et [14]
- [24] - LUBANSKI - Physica IX, p.310, (1942)
PAULI - Review of Modern Physics 13, p.203, (1941)
- [25] - Une démonstration directe a été donnée par GEORGE (communication privée)
- [26] - L'argument présenté ici n'est qu'une indication de démonstration. Il faudrait étudier avec précision le domaine des générateurs et la définition des noyaux.
Voir GUILLOT - Helvetica Physica Acta, Vol. 41, p.5 (1968)
- [27] - Voir références [6] et [19]
- [28] - BARGMANN - Annals of Mathematics, Vol. 48, p.568 (1947)
SL(2,R) est le petit groupe du vecteur y. Le petit groupe du vecteur z est constitué des matrices $\tilde{M}$ de la forme :
$$\tilde{M} = T^{-1} M T, \text{ avec } M \in SL(2,R) \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
- [29] - C. BLOCH et AML MESSIAH - Nuclear Physics, Vol. 39, p. 95 (1963)
- [30] - S. WEINBERG - Physical Review, Vol. 133, p. B 1318 (1964)
134, p. B 882 (1964)

FIN