PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

CEA-R-3427

INSTABILITES DES SOLUTIONS NUMERIQUES D'EQUATIONS INTEGRALES DE FREDHOLM ET VOLTERRA DE PREMIERE ESPECE

RESOLUTION PAR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEFF

APPLICATION AUX SECTIONS EFFICACES PHOTONUCLEAIRES

par

Yves MORICEAU

Centre d'Etudes de Limeil

Rapport CEA-R-3427

1968

Da

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N-SACLAY B.P. n°2, 91-GIF-sur-YVETTE-France

CEA-R-3427 - MORICEAU Yves

INSTABILITES DES SOLUTIONS NUMERIQUES D'EQUATIONS INTEGRALES DE FREDHOLM ET VOLTERRA DE 1ère ESPECE - RESOLUTION PAR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEFF - APPLICATION AUX SECTIONS EFFICACES PHOTONUCLEAIRES

Sommaire. - C'est un fait reconnu mais mal expliqué, que les courbes de sections efficaces photonucléaires dépendent de la résolution numérique adoptée. Beaucoup d'autres solutions physiques extraites d'une équation intégrale de 1ère espèce sont dans ce cas ; elles sont arbitraires et oscillatoires.

Dans la 1ère partie de ce rapport, on montre, dans un cas particulier typique, comment se forment les oscillations.

./.

CEA-R-3427 - MORICEAU Yves

INSTABILITIES IN NUMERICAL SOLUTIONS TO FREDHOLM AND VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND - RESOLUTION BY TCHEBYCHEFF POLYNOMIALS - APPLICATION TO PHOTONUCLEAR CROSS-SECTIONS

Summary. - It is well known, if not well explained, that Photo Cross-Sections curves depend on numerical resolution; as well as many other physical solutions from integral equations of the first kind, they are oscillating.

In the first part of this report, a typical example points out how oscillations are growing.

In the second part, a new method is explained yielding a smooth resolution. From experimental data on equidistant intervals, we build functions expanded in Tchebycheff polynomials ; the solution is of this kind.

./.

Dans la 2ème partie, on présente une méthode originale qui permet d'obtenir une résolution exempte d'oscillations. A partir de données expérimentales à intervalles équidistants, on construit des fonctions développées en polynômes de Tchebycheff ; la solution est de ce type.

Enfin, on montre dans la 3ème partie que les résolutions semi-analytiques de ce problème sont illusoires.

1968 47 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

Then, the third part points out that semi-analytical resolutions of this problem are illusive.

1968 47 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

PLAN DE CLASSIFICATION

1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS

2. BIOLOGIE ET MEDECINE
- 2.1 Biologie générale
- 2.2 Indicateurs nucléaires en biologie
- 2.3 Médecine du travail
- 2.4 Radiobiologie et Radioagronomie
- 2.5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine

3. CHIMIE
- 3.1 Chimie générale
- 3.2 Chimie analytique
- 3.3 Procédés de séparation
- 3.4 Radiochimie

4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE

5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE

6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX
- 6.1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux
- 6.2 Effets des rayonnements sur les matériaux
- 6.3 Corrosion

7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS
- 7.1 Neutronique et physique des réacteurs
- 7.2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité
- 7.3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs

8. PHYSIQUE
- 8.1 Accélérateurs
- 8.2 Electricité, électronique, détection des rayonnements
- 8.3 Physique des plasmas
- 8.4 Physique des états condensés de la matière
- 8.5 Physique corpusculaire à haute énergie
- 8.6 Physique nucléaire
- 8.7 Electronique quantique, lasers

9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES

10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS
- 10.1 Protection sanitaire
- 10.2 Contrôle des rayonnements
- 10.3 Traitement des effluents

11. SEPARATION DES ISOTOPES

12. TECHNIQUES
- 12.1 Mécanique des fluides - Techniques du vide
- 12.2 Techniques des températures extrêmes
- 12.3 Mécanique et outillage

13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE
- 13.1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines
- 13.2 Etudes économiques, programme
- 13.3 Divers (documentation, administration, législation, etc...)

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

- Rapport CEA-R-3427 -

Centre d'Etudes de Limeil

INSTABILITES DES SOLUTIONS NUMERIQUES D'EQUATIONS INTEGRALES DE FREDHOLM ET VOLTERRA DE 1ère ESPECE

RESOLUTION PAR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEFF

APPLICATION AUX SECTIONS EFFICACES PHOTONUCLEAIRES

par

Yves MORICEAU

- Mars 1968 -

INSTABILITES DES SOLUTIONS NUMERIQUES D'EQUATIONS INTEGRALES DE FREDHOLM ET VOLTERRA DE 1ère ESPECE

RESOLUTION PAR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEFF

APPLICATION AUX SECTIONS EFFICACES PHOTONUCLEAIRES

- INTRODUCTION

On n'envisage pas ici la théorie de ces équations intégrales. Cette théorie est bien connue depuis plus d'un demi-siècle, après les travaux de Fredholm et Volterra. On pourra consulter les ouvrages suivants pour la démonstration des grands théorèmes de Fredholm, qui sont à la base de cette théorie [Réf. 1 - 2].

On se place au contraire au point de vue du physicien qui doit résoudre numériquement une équation intégrale de 1ère espèce et qui constate que les solutions sont arbitraires et oscillatoires dans la plupart des cas. Des divergences résultent donc entre les auteurs sur le même sujet, les résolutions dépendant de la méthode mathématique adoptée, du pas numérique choisi pour le passage en machine et en outre, de la précision de la fonction connue.

Appelons $g(x)$ cette fonction qui est donnée par une suite d'expériences pour $x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_m$. Soit $K(y,x)$ un "détecteur" dont on connaît les valeurs pour $x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_m$ et $y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_n$; cette fonction de deux variables est le "noyau" de l'équation intégrale de Fredholm de 1ère espèce :

$$g(x) = \int_a^b K(y,x) \, . \, f(y) \, dy$$ dont la fonction

inconnue est $f(y)$ avec $a \leqslant x \leqslant b$ et $a \leqslant y \leqslant b$

Une remarque importante doit être faite ici : on a envisagé ensemble la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm et de Volterra de 1ère espèce ; en effet, si la théorie diffère pour ces deux équations, la résolution numérique utilisée ici est identique ; il suffit de supposer a = o pour l'équation de Fredholm et K (y,x) = o pour y $\geqslant$ x pour celle de Volterra qui est :

$$g(x) = \int_o^x K(y,x) \cdot f(y)\, dy$$

Toutes deux reviennent à résoudre :

$$g(x) = \int_o^b K(y,x) \cdot f(y)\, dy \qquad \text{avec}$$

$$o \leqslant x \leqslant b \qquad \text{et} \qquad o \leqslant y \leqslant b$$

La présente étude sera divisée en trois parties. Dans la première, renonçant à démontrer dans le cas général le bien-fondé de solutions arbitraires ou oscillatoires, en renvoyant à la littérature [Réf. 3 - 4], on va, sur un exemple typique, montrer la cause de ces oscillations, les analyser et prouver qu'elles proviennent bien de la résolution directe de l'équation intégrale par inversion de matrice (ici triangulaire) quand les données sont fluctuantes et les intervalles de mesures équidistants.

Dans la deuxième partie, qui est la partie la plus importante, on va proposer une solution originale pour la résolution numérique, par les polynômes de Tchebycheff.

La troisième partie est la critique des procédés utilisés pour résoudre semi-analytiquement l'équation intégrale dans le cas des réactions photonucléaires. Cette recherche a été le point de départ de notre étude.

Première Partie

- ILLUSTRATION DES INSTABILITES DUES A UNE RESOLUTION DIRECTE

Les solutions numériques instables tirées d'équations intégrales de 1ère espèce sont assez nombreuses dans la littérature ; si l'on se limite au cas des réactions photonucléaires, on pourra lire les articles suivants qui comparent les divers résultats obtenus [Réf. 5, 6, 7, 8, 9].

On y verra que les expérimentateurs mettent en cause leurs appareils de mesure (variations de g) ou la stabilité de production du spectre de photons (variations de K). En réalité, c'est la résolution numérique adoptée qui est la cause des instabilités résultantes ; elle mène à des divergences entre les auteurs, bien que ceux-ci procèdent avec les mêmes données expérimentales au départ.

Beaucoup d'auteurs se sont contentés de démontrer que du fait de l'imprécision de g (x) on pouvait toujours ajouter à la solution une fonction donnant des oscillations.

En réalité, cela dépend du problème envisagé, ce sont des cas d'espèces. On pourra donc consulter les articles suivants [Réf. 3, 4, 10, 11]. La référence 10 est spécialement importante, elle montre comment les plus petites valeurs propres du noyau sont à l'origine des oscillations. Cependant il nous a paru préférable de choisir un exemple typique déduit, comme on le verra dans la troisième partie, des problèmes de réactions photonucléaires.

On va envisager une équation intégrale de 1ère espèce représentant schématiquement la recherche d'une section efficace photonucléaire, si l'on se limite à la partie principale du spectre de "Bremsstrahlung". On verra plus tard la justification des fonctions simples choisies.

On va d'abord montrer que la résolution numérique directe par la méthode des trapèzes choisie pour l'intégration, donne bien la solution exacte f avec des fonctions analytiques g et K tabulées avec

grande précision. Puis on cherchera la solution du problème avec des valeurs expérimentales g_1, g_2 .... g_n différant des $g(x_1)$, $g(x_2)$ .... $g(x_n)$ précédents d'une quantité alternative très petite. En adoptant la même résolution numérique, on va voir apparaître des oscillations de grande amplitude. Il s'agit de trouver une explication mathématique du phénomène et de calculer les amplitudes d'oscillation.

Soit donc schématiquement, avec $x \equiv E_0$ valeur maximum d'un spectre de "Bremsstrahlung" et $y \equiv E$ énergie photonique ($o < E < E_0$) une "fonction d'excitation" photonucléaire (voir 3ème partie) :

$g(x) = 1 - \cos x$, puis la partie principale du "spectre de Schiff" :

$K(y,x) = \sqrt{x-y}$, et enfin $f(x)$ la "section efficace photonucléaire" à déterminer. On a l'équation de Volterra de 1ère espèce :

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{x-y} \,.\, f(y)\, dy$$ qui est de convolution.

Cherchons d'abord la solution mathématique : on doit dériver cette équation [voir Pogorzelsky - Réf. 2]; on a, en supposant la fonction f bornée et $g(o) = o$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1/2}}$$ équation d'Abel dont la solution est

$$f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \int_0^x \frac{g''(x-y)}{y^{1/2}}\, dy$$

Avec $g(x) = 1 - \cos x$ on a :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\sqrt{y}}\, dy$$

Puis en posant $\sqrt{y} = u$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\cos x \int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\, du + \frac{4}{\pi}\sin x \int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\, du;$$ les intégrales

sont les intégrales de Fresnel $\int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; C(\nu)$

et $\int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; S(\nu)$ avec $\nu = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$

D'où $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left[C(\nu)\cos x + S(\nu)\sin x\right]$

$C(\nu)$ et $S(\nu)$ sont tabulés. On obtient la courbe suivante à tangente verticale à l'origine, maximum à $0{,}3\,\pi$, nulle à $0{,}73\,\pi$, (fig.1).

Adoptons, pour résoudre numériquement cette équation intégrale sur IBM 7094, la méthode suivante :

Avec un pas de $\frac{\pi}{n} = T$,

$g_1 = g(T)$, $K_1 = K(T/2)$, $f_1 = f(T/2)$

$g_2 = g(2T)$, $K_3 = K(\frac{3T}{2})$, $f_3 = f(\frac{3T}{2})$

La formule de la moyenne appliquée à l'intégrale donne :

$$\frac{1}{T}\, g_1 = K_1\, f_1$$

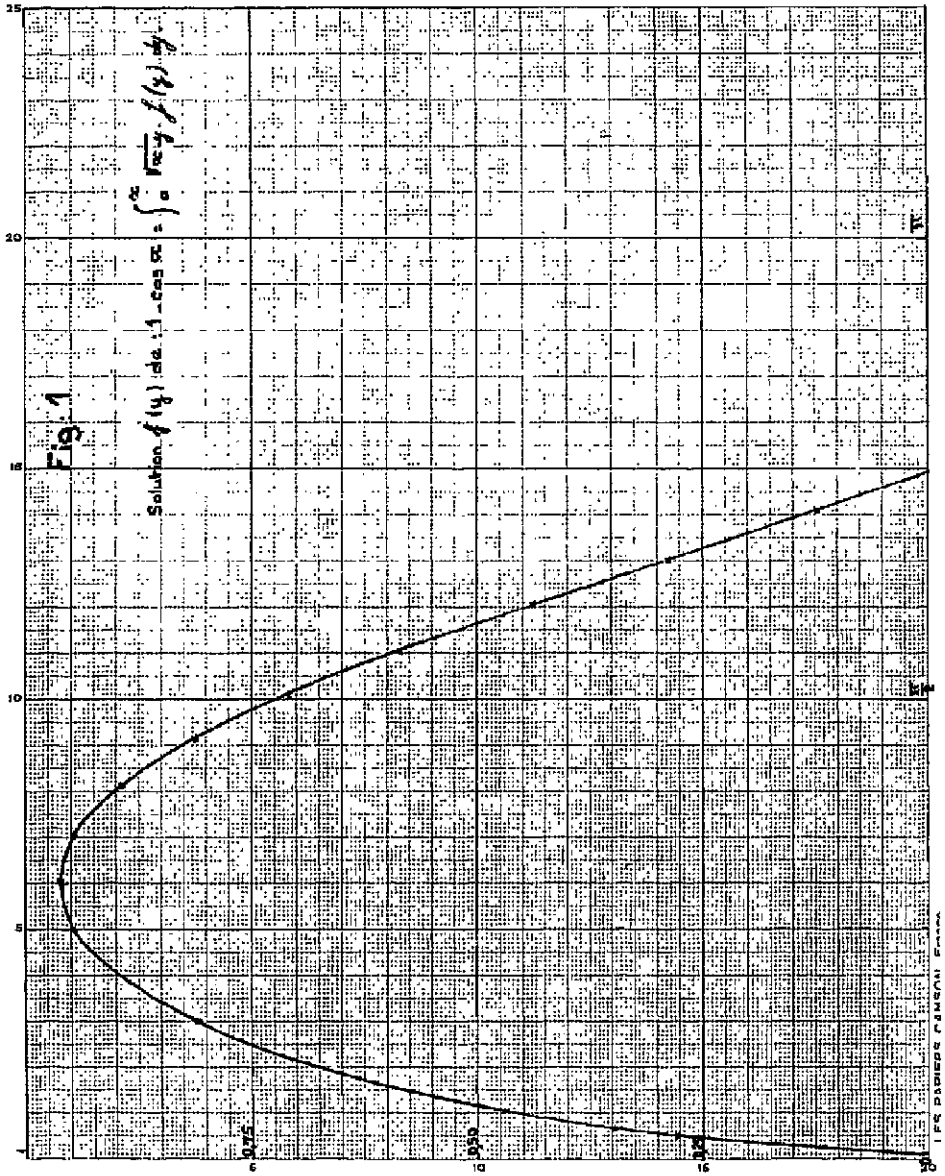
$$\frac{1}{T}\, g_2 = K_3\, f_1 + K_1\, f_3$$

etc...

On résoud le système de proche en proche ; c'est une inversion de matrice triangulaire.

On a choisi un pas de $\frac{\pi}{100}$. On trouve la courbe précédente pour la solution $f(x)$, sans oscillations.

Prenons maintenant $g_n = 1 - \cos x_n \pm 0{,}001$ pour valeurs expérimentales en changeant le signe de l'écart 0,001 à chaque point de mesure (50 points sur l'intervalle o, π). Le cas envisagé est évidemment



un cas extrême, qui ne peut guère se réaliser en pratique ; on a des points expérimentaux alternativement et également répartis autour de la courbe lissée. De plus, c'est une condition très dure imposée à la résolution. Des oscillations vont apparaître malgré la petitesse de l'écart $\pm$ 0,001. La solution donnée par la machine est la suivante, (fig. 2).

Cherchons une explication au phénomène. Avec $g(x) = 1 - \cos x$ on a vu que les erreurs de troncature et d'arrondi dans l'intégration étaient hors de cause ; elles sont à peu près nulles et leur accumulation dans la résolution du système linéaire précédent n'amène pas d'oscillations. C'est donc bien l'introduction de l'écart $\pm$ 0,001 qu'il faut incriminer. Or entre deux points successifs, le calcul machine garde aux fonctions sous le signe somme, une valeur constante ; il réduit les fonctions à des "marches d'escalier". Ceci est justifiable, soit du calcul aux "différences finies", soit de la transformée-en-Z. Utilisons les raisonnements de cette dernière méthode qui est, rappelons-le, la transformation de Laplace appliquée aux fonctions pulsées ou "échantillonnées" [voir Réf. 12].

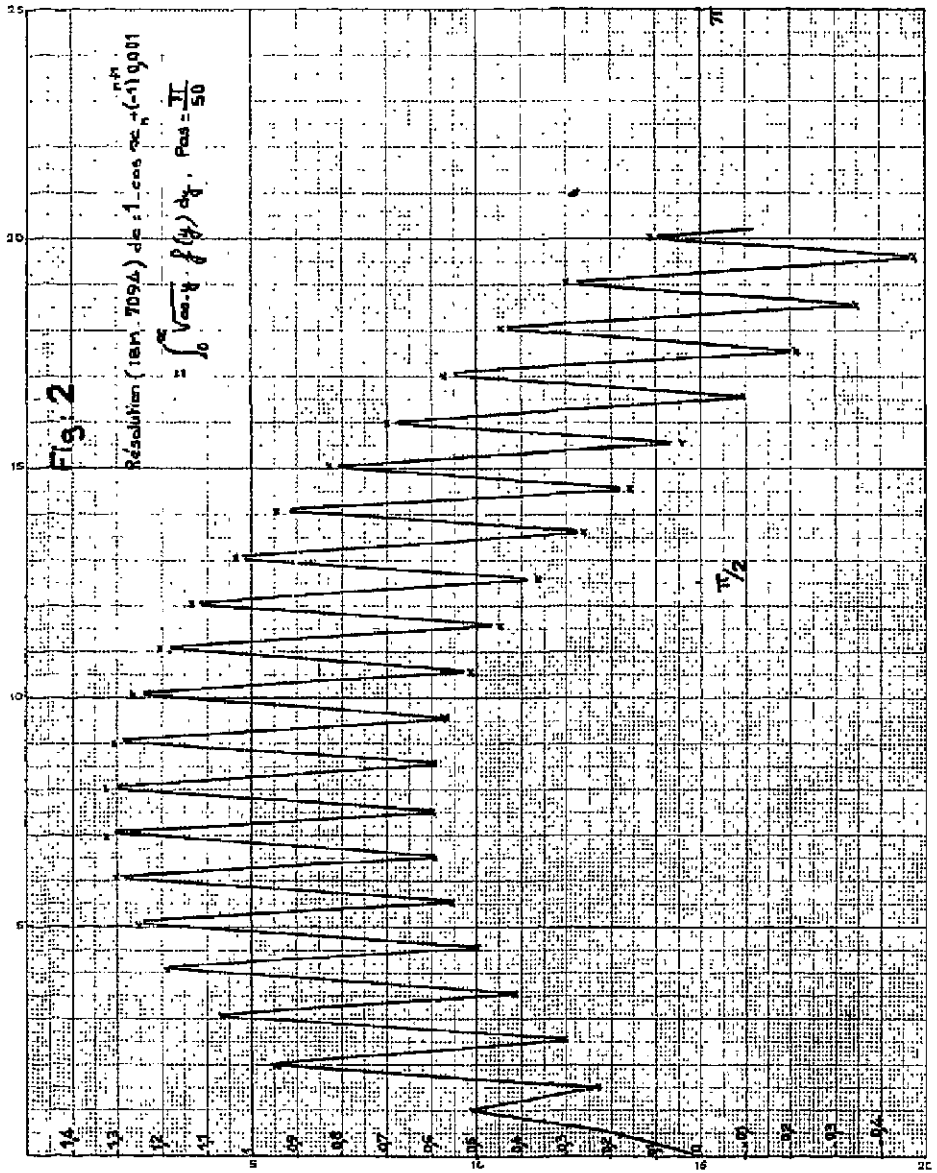
A la solution $f(x)$ qui vient d'être trouvée pour $g(x) = 1 - \cos x$ on doit ajouter maintenant la solution de l'équation :

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^x \sqrt{x-y} \cdot f(y)\, dy$$

où les fonctions sont "échantillonnées" à des intervalles $T = \frac{\pi}{50}$, $\mathcal{E}(x)$ étant l'écart précédent.

Connaissant la "sortie" du système $\mathcal{E}(x_n)$ aux instants $x_n = nT$, soit $(-1)^{n+1}\, 0{,}001$ avec $\mathcal{E}(0) = 0$, puis la "fonction d'entrée" $K(x'_n) = \sqrt{(2n-1)\frac{T}{2}}$, on doit calculer la "réponse impulsionnelle" $f(x'_n)$ aux instants $x'_n = (2n-1)\frac{T}{2}$; car c'est bien ainsi qu'on a procédé pour représenter l'intégrale par la méthode de la moyenne (voir ci-dessus).

Cherchons si une fonction $f(x)$ en forme de créneaux d'amplitude $|f|$ peut convenir, une fois le "régime" établi. On doit prendre le produit de convolution de ces créneaux et de la fonction "échantillonnée" $K(x'_n)$. Ceci donne pour la "sortie" :



$$\mathcal{E}(x_n) = |f| \cdot \left[\sqrt{T/2} - \sqrt{3\,T/2} + \sqrt{5\,T/2} \;------\; + (-1)^{n-1}\sqrt{(2n-1)\,T/2}\right] \cdot T.$$

Comme T est petit, on peut approximer la sortie $\mathcal{E}(x)$ avec $\omega = \frac{\pi}{T}$, par le produit de convolution suivant :

$\mathcal{E}(x) \simeq |f| \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{y} \cdot \cos\omega(x-y) \cdot dy$, en remplaçant les créneaux par un cosinus dont la valeur moyenne sur une 1/2 période est $\frac{2}{\pi}$. Soit encore :

$$|f| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\omega x \int_0^x \sqrt{y} \cdot \cos\omega y \cdot dy + |f| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\omega x \int_0^x \sqrt{y} \cdot \sin\omega y \cdot dy$$

Et puisqu'on ne cherche que les valeurs correspondant à $x_n = nT$, $\omega x_n = n\pi$, on a $\mathcal{E}(x_n) \simeq \pm \frac{\pi}{2} |f| \cdot \int_0^{nT} \sqrt{y} \cdot \cos\omega y \cdot dy$ et en intégrant par parties

$\pm \frac{\pi}{4\omega} |f| \int_0^{nT} \frac{\cos\omega y}{\sqrt{y}}\, dy$. L'intégrale tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}$ (Spirale de Cornu). On doit donc avoir :

$$\pm\, 0{,}001 = \pm\, |f| \cdot \frac{\pi}{4\omega} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \quad \text{d'où } |f| = 0{,}001 \cdot \frac{4\,\omega\sqrt{2\,\omega}}{\pi\sqrt{\pi}}$$

Avec $\omega = 50$ (50 points de mesure sur $0, \pi$), on a $|f| \simeq \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \simeq 0{,}36$

<u>Remarque</u> : Il reviendrait au même d'employer, au lieu du raisonnement précédent, le langage des distributions [Réf. 26, 27]. Cherchons pour $f(x)$ une distribution qui satisfasse l'équation de convolution pour une fonction $\mathcal{E}(x)$ en forme de créneau. On retrouverait les équations précédentes donnant la solution approchée. On sait d'ailleurs que si la solution existe, elle est unique [Réf. 26] .

Ainsi on doit trouver 0,72 moyen de creux à crête dans les oscillations résiduelles de $f(x)$. C'est bien ce que l'on observe sur les ondulations de la courbe précédente.

On a donc, dans ce cas particulier, réussi à établir l'origine des oscillations et à en chiffrer l'amplitude.

On voit en outre que cette ondulation croît, pour un écart ε constant, comme $\omega\sqrt{\omega}$, c'est-à-dire qu'en diminuant le pas numérique, les oscillations vont croître.

Il nous a paru préférable de procéder avec un écart $\varepsilon(x)$ alternatif et constant, plutôt que d'employer des valeurs numériques arrondies de $g(x)$, comme font la plupart des auteurs ; ces valeurs arrondies étant quelconques, l'écart l'est aussi et les oscillations de la solution ne sont pas chiffrables, ni significatives.

Deuxième Partie

- RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES DE PREMIERE ESPECE PAR LA METHODE DES POLYNOMES DE TCHEBYCHEFF

Plusieurs solutions numériques ont été proposées. La méthode de Philipps [Réf. 4] et celle de Burrus [Réf. 32] sont à signaler. La première minimise les dérivées secondes de la solution, la deuxième pose le seul critère que la solution doit être $\gg 0$.

On a adopté ici un point de vue différent. On suppose d'abord que le noyau de l'équation intégrale représentant une "fonction de détection", les fonctions $g(x)$ donnée et $f(x)$ à déterminer sont des suites de valeurs expérimentales imparfaitement connues, mais bornées. Il est loisible alors de manipuler une ou plusieurs de ces "fonctions" pour les "lisser" ou leur imposer certains critères.

Pour parvenir à une solution $f(x)$ non oscillatoire, nous "lisserons" la fonction $g(x)$ suivant un critère mathématique, en ne gardant que les premiers polynômes de Tchebycheff de son développement juste indispensables et compatibles avec les erreurs de mesure ; $K(y,x)$ sera lui-même tronqué aux mêmes premiers polynômes.

Les approximations choisies pour représenter la fonction connue $g(x)$ et le noyau $K(y,x)$ sont donc des développements en polynômes de Tchebycheff. On sait que la fonction $g(x)$ ainsi définie fera l'écart minimum avec les valeurs données de la fonction et ceci est bien le lissage que l'on fait instinctivement en traçant une courbe passant au mieux par des points expérimentaux.

Ramenons d'abord les limites a, b de l'intégrale à - 1, + 1 par transformation linéaire. Développons g et K en polynômes de Tchebycheff $T_m(x)$ et $T_n(y)$.

On aura $g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m T_m(x)$ et $K(y,x)$ sera une série double

$$K(y,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} T_m(x) . T_n(y)$$

L'équation intégrale aura une solution et une seule $f(y)$ qui est de la forme $f(y) = \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n'} T_{n'}(y)}{\sqrt{1-y^2}}$ les $\varphi_{n'}$ étant les

coefficients à déterminer. La fonction "poids" dans l'orthogonalisation des polynômes de Tchebycheff est en effet $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

L'équation intégrale est ramenée à :

$$\sum_{m} \sum_{n} \int_{-1}^{1} a_{mn} \frac{\varphi_{n'} T_{n'}(y) T_n(y) T_m(x)\, dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_m b_m T_m(x)$$

En identifiant les coefficients de $T_m(x)$ dans les deux membres et par suite de l'orthogonalité des polynômes de Tchebycheff :

$$\pi a_{m0} \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \varphi_n = b_m$$

En notation matricielle, l'équation intégrale devient donc :

$$|a| \cdot |\phi| = |b| \qquad \text{avec} \qquad \phi_0 = \pi \varphi_0 \quad \phi_{n \neq 0} = \frac{\pi}{2} \varphi_n$$

$|a|$ est la matrice (infinie) des a_{mn}, $|\phi|$ et $|b|$ sont des vecteurs droits.

On limitera cependant le développement de la fonction $g(x)$ au moment où le coefficient b_m deviendra inférieur à l'erreur supposée sur la connaissance de y, puisque $|b_m T_m| \leq |b_m|$ la valeur absolue des polynômes de Tchebycheff étant toujours inférieure à 1, pour la variable comprise entre - 1 et + 1. [1]

Il reste à choisir la méthode de détermination des coefficients b_m et a_{mn} en fonction des valeurs connues de g et K. Mais si l'on utilisait la méthode habituelle d'approximation de fonctions par un développement en polynômes de Tchebycheff, on devrait utiliser les valeurs de

1) Ceci est un critère pratique, en supposant une bonne convergence de la série ; ou bien un filtrage des composantes hautes fréquences.

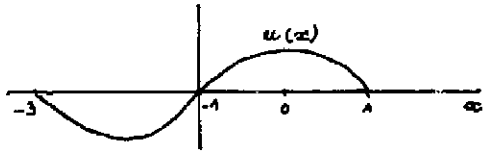
ces fonctions pour les racines des polynômes de Tchebycheff d'ordre n + 1 et m + 1, racines qui ne sont pas équidistantes. Or, dans la plupart des expériences courantes, les valeurs expérimentales ne sont connues qu'en des points équidistants et quelquefois (spectrométrie) les nombres 2 M + 1 et 2 N + 1 des points de mesures en x et y sont inégaux.

Pour ces raisons et pour éviter au départ d'approximer g et K par des polynômes quelconques du n^e ou m^e ordre qui peuvent devenir oscillatoires du fait de leur détermination en des intervalles équidistants (Phénomène de Runge), on a choisi le développement en polynômes de Tchebycheff par la méthode exposée dans Lanczos p. 333, 351, 523 [Réf. 14]. En effet, cette méthode permet, par l'intermédiaire (non utilisé) d'un développement en série de Fourier en sinus, d'utiliser les valeurs connues des fonctions en des points équidistants et non plus pour les racines des polynômes de Tchebycheff du (n + 1) ème ordre. On ramène d'abord $g(x)$ à une fonction $u(x)$ qui s'annule aux extrémités - 1, + 1 :

$$g(x) = u(x) + (\alpha + \beta x), \quad u(-1) = 0 \quad u(1) = 0$$

ce qui donne $\alpha - \beta = g(-1)$, $\alpha + \beta = g(1)$

Ensuite $u(x)$, prolongé par la fonction symétrique par rapport au point (- 1) (voir figure), est développé en série de Fourier autour de $x = -1$; en ce point il y a continuité de la fonction et de sa dérivée, d'où une très bonne convergence de la série (en n^{-3}) en sinus.



Puis, ramenant le développement autour de $x = 0$ on a :

$$u(x) = \sum_k (-1)^k \eta_{2k} \sin(k \pi x) + \sum_k (-1)^k \eta_{2k+1} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi x$$

séparé en développements pair et impair, où η_{2k} et η_{2k+1} sont les coefficients de Fourier calculables en fonction des u_n.

Enfin $\sin k\pi x = 2\sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^{\alpha} J_{2\alpha+1}(k\pi) . T_{2\alpha+1}(x)$ et

$\cos(k+\frac{1}{2})\pi x = 2\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} J_{2\alpha}[(k+\frac{1}{2})\pi] . T_{2\alpha}(x)$ où J sont

des fonctions de Bessel et T les polynômes de Tchebycheff.

On peut donc avoir $u(x)$ en fonction des u_m et des polynômes de Tchebycheff. Or le passage direct est effectué au moyen de la table XII p. 523 [Réf. 14] en série de ces polynômes, soit $u(x) = \sum_i C_i T_i(x)$
Il faut pour cela, employer le procédé suivant :

On divise l'intervalle = 1, + 1 en 2 M + 1 intervalles équidistants et l'on pose, avec $u_k \equiv u(x_k)$:

$u_k + u_{-k} = U_k$, $u_k - u_{-k} = V_k$ avec $k = 0, 1, 2 \ldots, (M-1)$ car

les 2 ordonnées extrêmes sont nulles.

Les coefficients pairs C_{2m} sont évalués en multipliant U_k par les colonnes successives d'un des premiers groupes de la table XII, les coefficients impairs C_{2m+1} en multipliant V_k par les colonnes successives d'un des seconds groupes de la table.
On peut utiliser de 5 à 25 points de division.

En revenant au développement de $g(x)$, on obtient en définitive :

$$g(x) = u(x) + (\alpha + \beta x) = \alpha T_0(x) + \beta T_1(x) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i T_i(x)$$

puisque $T_0(x) \equiv 1$ $T_1(x) \equiv x$ avec $\alpha - \beta = g(-1)$, $\alpha + \beta = g(1)$

et les C_i données comme on vient de l'expliquer.

D'où
$$b_0 = \alpha + C_0$$
$$b_1 = \beta + C_1$$
$$b_m = C_m$$

Il reste à appliquer le même procédé au développement de $K(y, x)$ en série double. Développons d'abord en y pour chaque x_k.

Pour chaque valeur x_k avec $-M < k < M$ on a comme précédemment pour y :

$$K(y, x_k) = \varphi(y, x_k) + (\gamma_k + \delta_k y) \quad \text{et}$$

$$\varphi(-1, x_k) = 0 \qquad \varphi(1, x_k) = 0$$

d'où
$$\gamma_k - \delta_k = K(-1, x_k)$$
$$\gamma_k + \delta_k = K(1, x_k)$$

Pour chaque valeur de k on tire donc γ_k et δ_k et enfin on peut obtenir :

$K(y, x_k) = \gamma_k T_0(y) + \delta_k T_1(y) + \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} T_i(y)$ en calculant

les C_{ik} par la méthode exposée ci-dessus puisqu'on connaît $K(y_{k'}, x_k)$, en chaque point x_k pour tous les $y_{k'}$.

A présent, considérons les coefficients de $T(y)$ précédents comme des fonctions de x :

$$\gamma(x) + c_0(x) = d_0(x)$$
$$\delta(x) + c_1(x) = d_1(x)$$
$$c_2(x) = d_2(x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_i(x) = d_i(x)$$

dont les valeurs pour les x_k viennent d'être déterminées :

$$\gamma(x_k) + c_0(x_k) \equiv \gamma_k + c_{0k} = d_0(x_k)$$
$$\delta(x_k) + c_1(x_k) \equiv \delta_k + c_{1k} = d_1(x_k)$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_i(x_k) \equiv c_{ik} = d_i(x_k)$$

Alors un nouveau développement en polynômes de Tchebycheff donnera :

$$d_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ji}\, T_j(x)$$

En définitive $K(y, x)$ devient successivement :

$$K(y,x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(x) \cdot T_i(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}\, T_j(x) \cdot T_i(y)$$

Les coefficients a_{ji} sont les coefficients a_{mn} de la série double cherchée. Ils forment une matrice $|a|$.

<u>Exemple</u> : On va donner un exemple partiel pour illustrer la méthode. Soit $K_1(Y, X) = \sqrt{Y - X}$ le noyau. On prend comme limites de l'intégrale de l'équation intégrale : $a = 0$, $b = \pi$. En ramenant l'intervalle d'intégration à - 1, + 1, on pose $\frac{Y}{\pi} = y$, $\frac{X}{\pi} = x$

On a à développer en série double de Tchebycheff, la fonction

$K = \sqrt{y - x}$. Développons d'abord en y. On a :

$$K(y, x) = \psi(y, x_k) + \gamma_k + \delta_k y.$$

Prenons 5 points de division en y et en x : $-2 \leq k \leq 2$.

Commençons par la limite inférieure en x, soit $x_{-2} = -1$. On a successivement, comme pour le développement à une variable montré ci-dessus, en faisant $K \equiv g$:

Pour $y_{-2} = 1$, $K(-1,-1) = \psi_{-2} + (\gamma_{-2} - \delta_{-2})$ soit $\gamma_{-2} = \delta_{-2}$ car $K = 0$, $\psi_{-2} = 0$

$y_2 = 1$, $K(1,-1) = \psi_2 + (\gamma_{-2} + \delta_{-2})$ soit $\gamma_{-2} + \delta_{-2} = \sqrt{2}$ car $K = \sqrt{2}$

et $\psi_2 = 0$. D'où $\gamma_{-2} = \delta_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$

Points intermédiaires :

$y_{-1} = -\frac{1}{2}$ $\quad K(-\frac{1}{2}, -1) = \psi_{-1} + (\gamma_{-2} - \delta_{-2}\, \frac{1}{2})$ $\quad$ d'où $\psi_{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$y_0 = 0$ $\quad K(0,-1) = \psi_0 + \gamma_{-2}$ $\quad$ d'où $\psi_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y_1 = \frac{1}{2}$ $\quad K(\frac{1}{2}, -1) = \psi_1 + (\gamma_{-2} + \delta_{-2} \cdot \frac{1}{2})$ $\quad$ d'où $\psi_1 = \frac{\sqrt{3} - 3/2}{\sqrt{2}}$

Maintenant, comme pour le développement à une seule variable exposé précédemment pour g, on a, avec $x_{-2} = -1$, à chercher pour les 5 points $y_{k'} = y_{-2} \cdots y_2$:

$$U_{k'} = \psi_{k'} + \psi_{-k'} \quad \text{et} \quad V_{k'} = \psi_{k'} - \psi_{-k'}$$

D'où $U_0 = 2 - \sqrt{2} = 0{,}586$ $\qquad V_0 = 0$

$$U_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = 0{,}518 \qquad V_1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} = -0{,}189$$

ce qui est suffisant puisque $\psi_{-2} = \psi_2 = 0$

Par suite, on a pour le point $x_{-2} = -1$ le développement suivant de K :

$K = \gamma_{-2} + \delta_{-2} y + \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, T_i(y)$. Or $\gamma_{-2} = \delta_{-2} = 0{,}707$ et les c_i sont calculables par la Table XII (Lanczos p. 523) :

$c_0 = U_0 \times 0{,}0515 + U_1 \times 0{,}261 = 0{,}1652$

$c_2 = U_0 \times (-0{,}198) + U_1 \times (-0{,}073) = -0{,}1538$

de même $c_4 = 0{,}0175$ et $c_6 = 0{,}0074$

$c_1 = V_1 \times 0{,}284 = -0{,}0536$

$c_3 = V_1 \times 0{,}333 = 0{,}063$

$c_5 = 0{,}00984$

D'où $K_{-2} = (0{,}707 + 0{,}707 \cdot y) + 0{,}1652 - 0{,}0536 \cdot y - 0{,}1538 \cdot T_2(y)$
$+ 0{,}063 \cdot T_3(y) - 0{,}0175 \cdot T_4(y) - 0{,}0098 \cdot T_5(y) + 0{,}0074 \cdot T_6(y)$
$+ \cdots\cdots$

On peut continuer avec le point $x_{-1} = -\frac{1}{2}$, on aura :

Pour $y_{-2} = -1$ $\quad K \equiv 0 = \psi_{-2} + \gamma_{-1} - \delta_{-1}$ $\quad$ d'où $\gamma_{-1} = \delta_{-1}$

$y_2 = 1 \quad K = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \Psi_2 + \gamma_{-1} + \delta_{-1}$ d'où $\gamma_{-1} = \delta_{-1} = 0{,}614$

puisque $\Psi_{-2} = \Psi_2 = 0$

$y_{-1} = -\frac{1}{2} \quad K = 0 = \Psi_{-1} + 0{,}614\,(1-\frac{1}{2})$ d'où $\Psi_{-1} = -0{,}307$

$y_0 = 0 \quad K = \sqrt{\frac{1}{2}} = \Psi_0 + 0{,}614$ d'où $\Psi_0 = 0{,}093$

$y_1 = \frac{1}{2} \quad K = 1 = \Psi_1 + 0{,}614\,(1+\frac{1}{2})$ d'où $\Psi_1 = 0{,}08$

et $U_0 = 2\,\Psi_0 = 0{,}186 \qquad V_0 = 0$

$U_1 = 0{,}08 - 0{,}307 = -0{,}227 \qquad V_1 = 0{,}08 + 0{,}307 = 0{,}387$

On en tire K_{-1} comme ci-dessus. On pourrait continuer pour avoir K_0, K_1 et K_2.

En définitive, on aura pour les 5 points x_k, pour chaque polynôme de Tchebycheff, 5 coefficients numériques. Ces 5 coefficients $d_i\,(x_k)$ vont nous permettre comme ci-dessus, en les considérant comme des valeurs particulières d'une fonction de x de les développer en polynômes de Tchebycheff de la variable x.

On obtiendra ainsi la série double cherchée.

Ces calculs, s'ils peuvent paraître longs, sont très faciles à programmer, car ils reviennent à des produits de matrices au moyen de la Table XII citée.

Arrivé à ce stade, on est en mesure de résoudre l'équation intégrale qui revient à l'équation matricielle $|a|\,.\,|\phi| = |b|$ avec les notations précédemment utilisées.

Examinons maintenant quelle peut être l'allure des coefficients des polynômes de Tchebycheff ainsi trouvés.

Les points de mesure sont en nombre 2 N + 1 en y et 2 M + 1 en x. Quels que soient ces nombres, la série de Tchebycheff est illimitée ; cependant la table XII (Lanczos) ne permet d'utiliser que 25 points de division au maximum et les polynômes de Tchebycheff jusqu'à T_{12}.

Examinons la décroissance des coefficients b_m pour la fonction connue $g\,(x)$. On les arrêtera, comme on l'a dit, dès que ceux-ci deviendront inférieurs à l'erreur admise sur g. Prenons un exemple, soit 0,01 l'erreur de mesure sur g. Choisissons 2 M + 1 = 15 points de mesure. Les coefficients peuvent décroître assez vite pour que l'on puisse s'arrêter par exemple à T_4. Mais s'il se trouve pour T_3 un coefficient $b_3 < 0{,}01$, doit-on le prendre en compte ou l'annuler ? Si l'on considère que l'oscillation en g qui est inférieure à $0{,}01\,T_3(x) \leqslant 0{,}01$ est au compte des erreurs de mesure, on mettra zéro. Ceci est même préférable dans le cas d'une matrice $|a|$ "mal conditionnée" (déterminant quasi nul) ; cette composante de "bruit" imprudemment gardée pourrait sortir amplifiée dans la solution en f et provoquer des oscillations (voir Lanczos, p. 167). Dans notre exemple présent, on arrêtera la matrice $|a|$ à une matrice carrée 5 x 5 dont les termes sont a_{00} ----- a_{55}, en mettant de plus 0 à la place du coefficient b_3 pour $g\,(x)$.

Examinons la matrice $|a|$. Ses termes peuvent décroître très vite suivant les lignes, et lentement suivant les colonnes ou inversement. Ceci signifie que la mesure physique correspondant au noyau K est mal adaptée à la résolution du problème.

Si donc on annule les termes inférieurs à une certaine valeur, on aura une matrice formée de peu de colonnes et beaucoup de lignes, ou l'inverse. Supposons le premier cas qui seul est intéressant, le deuxième donnant un système sous-déterminé. On pourra encore obtenir des résultats acceptables avec la méthode proposée si, au lieu de résoudre avec la matrice $|a|$ qui est rectangulaire, donnant un système d'équations linéaires surdéterminé, on utilise une matrice $|\tilde{A}|\,.\,|A|$ matrice carrée et symétrique où $|\tilde{A}|$ est la transposée de $|A|$ et définie de la façon suivante.

Multiplions l'équation proposée :

$$\sum_m \sum_n \int_{-1}^{1} a_{mn} \frac{\Psi_n' T_n'(y) \cdot T_n(y) \cdot T_m(x)}{\sqrt{1-y_2}}\, dy = \sum_m b_m T_m(x)$$

par $\sum_m \sum_n a_{mn} \frac{T_m(x) \cdot T_n(y)}{\sqrt{1-x^2}}$ et intégrons sur x de - 1 à + 1

En égalant les coefficients de $T_n\,(y)$ dans les 2 membres, on a :

$$\sum_m A_{hm} A_{mn} \varphi_m = \sum_m A_{nm} b_m ,$$ la matrice $|A|$ étant simplement déduite de $|a|$ en tenant compte des facteurs d'orthogonalisation π et $\frac{\pi}{2}$ pour m et n nuls ou non nuls.

Ainsi les coefficients φ_m du développement en Tchebycheff de la fonction inconnue seraient tirés de l'équation matricielle :

$$|\tilde{A}| \cdot |A| \cdot |\varphi| = |\tilde{A}| \cdot |b|$$ ce qui est d'ailleurs la résolution en moindres carrés de l'équation en $|\phi|$: $|A| \cdot |\varphi| = |b|$ quand b est entaché d'erreurs ; l'équation précédente est appelée Inverse généralisé. Enfin, on adoptera le point de vue de C. Lanczos [Réf. 14 - p. 168] concernant l'amplification du "bruit" : c'est le rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre de la matrice $|\tilde{A}| \cdot |A|$ qui va décider de l'influence de ce "bruit" ajouté aux éléments b_m. On voit donc comment est transposé ici le problème des valeurs propres de la matrice $|K|$ étudié par [Réf. 10, en particulier], la matrice $|K|$ étant simplement formée des valeurs $K(y_n, x_m)$ et utilisée dans la résolution directe comme dans la première partie. Les difficultés envisagées ici n'intervenant pas dans les exemples qui vont suivre, on laissera de côté ce point de vue.

On va donc simplement arrêter le développement de $g(x)$ au polynôme $T_m(x)$ et tronquer la matrice $|a|$ après la ligne et la colonne $m+1$. On aura à inverser la matrice $|a|$:

$$|\phi| = |a^{-1}| \cdot |b|$$ d'où $\varphi_0 \dots \varphi_n$ et la fonction cherchée sera :

$$f(y) = \frac{\varphi_0 T_0(y) + \dots \varphi_m T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}}$$ Pour les points $y = \pm 1$ on pose arbitrairement $f(y) \equiv 0$. On pourrait d'ailleurs imposer au numérateur précédent d'être nul pour $y = \pm 1$.

<u>Applications</u> :

On va maintenant traiter deux exemples significatifs et les discuter pour justifier la méthode proposée.

Prenons d'abord l'exemple de la première partie :

$$\int_0^x \sqrt{x-y} \cdot f(y)\, dy = 1 - \cos x$$ qui est une équation de Volterra (de convolution) ; mais en prenant $a = 0$, $b = \pi$ et en supposant $K(y, x)$ le noyau égal à 0 dès que $y \geqslant x$, cette équation se ramène, pour sa résolution numérique, à une équation de Fredholm pour laquelle la méthode précédente s'applique :

$$\int_0^\pi K(y,x) \cdot f(y)\, dy = g(x)$$ On fera d'abord un changement de variables qui ramènera l'intervalle $0, \pi$ à $-1, +1$ et on choisira 25 points de mesure en x et y.

Prenons le cas où l'on superpose à $g(x)$ un écart alternatif $\pm$ 0,01, écart 10 fois plus fort que celui supposé précédemment dans la première partie. Dans ce cas, l'inversion directe de la matrice donnerait de telles oscillations qu'on a cru bon de ne pas les tracer, avec la méthode de la première partie ; cette valeur $\pm$ 0,01 est en fait une condition très dure et peu réaliste.

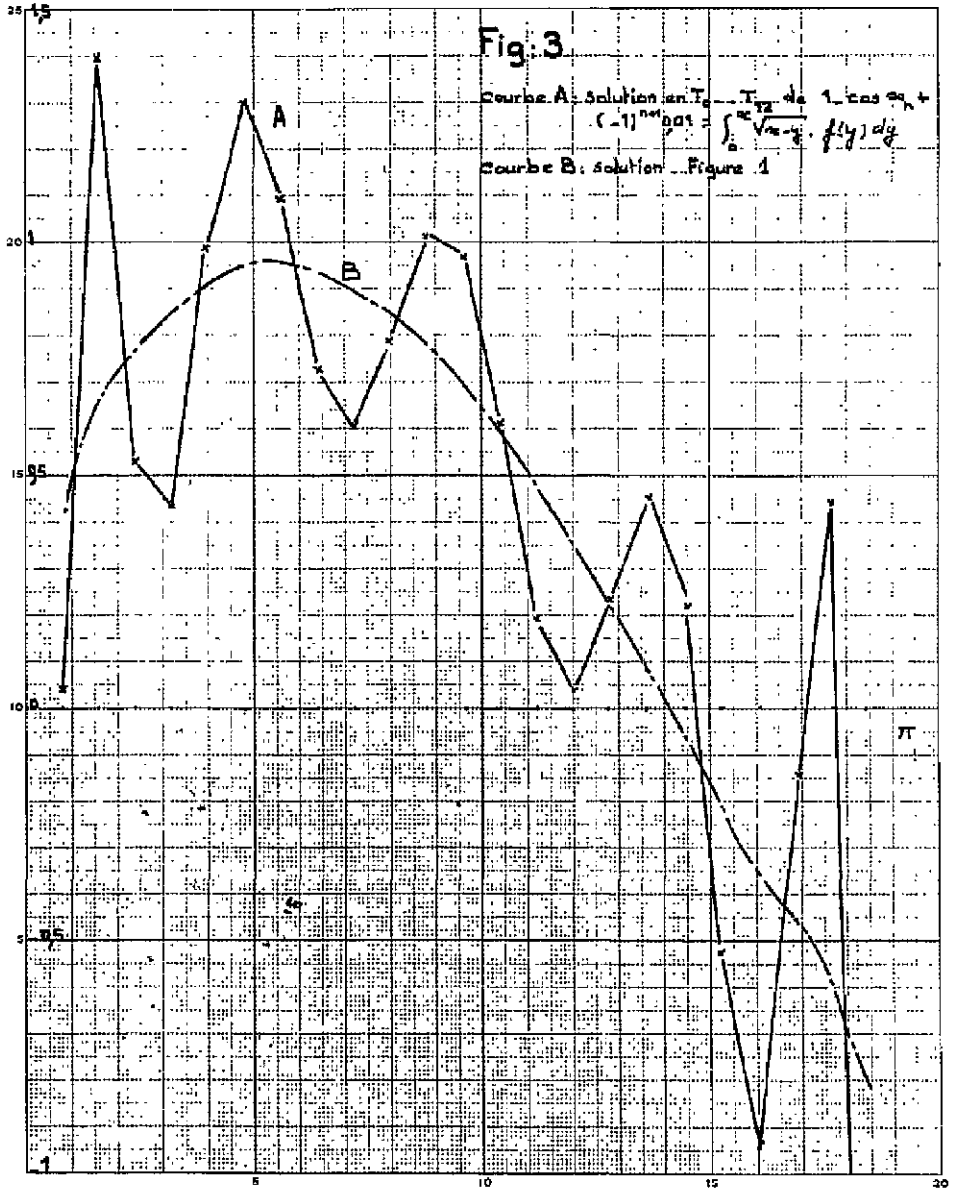
Employons la méthode des polynômes de Tchebycheff.

Un écart $\pm$ 0,01 supposé sur g devrait nous obliger à annuler tous les coefficients b_m inférieurs à 0,01. Laissons-les provisoirement. La matrice colonne des coefficients b_m pour $g(x) \pm 0{,}01$ est la colonne de gauche suivante. La colonne du milieu correspond à des écarts $\pm$ 0,001 et la colonne de droite correspond à $g(x)$ rigoureux $= 1 - \cos x$ (calculs IBM 7094). On a 13 polynômes de Tchebycheff : T_0, T_1, T_2, ... T_{12}.

	$g(x) \pm 0{,}01$	$g(x) \pm 0{,}001$	$g(x)$
Coef. de T_0 :	0,32424296	0,32345777	0,32337054
	0,36653607	0,36653607	0,36653608
	$0{,}15773871 \times 10^{-2}$	$0{,}15778925 \times 10^{-3}$	$0{,}55964148 \times 10^{-7} \simeq 0$
	$-0{,}44692009 \times 10^{-1}$	$0{,}44692008 \times 10^{-1}$	$-0{,}44692010 \times 10^{-1}$
	$0{,}10807490 \times 10^{-2}$	$0{,}10807401 \times 10^{-3}$	$-0{,}82981933 \times 10^{-9} \simeq 0$
	$0{,}14254404 \times 10^{-2}$	$0{,}14254404 \times 10^{-2}$	$0{,}14254404 \times 10^{-2}$
	$0{,}29238456 \times 10^{-3}$	$0{,}29237789 \times 10^{-4}$	$-0{,}88028829 \times 10^{-9} \simeq 0$
	$-0{,}26075991 \times 10^{-4}$	$-0{,}26075991 \times 10^{-4}$	$-0{,}26076217 \times 10^{-4}$
	$-0{,}66576265 \times 10^{-3}$	$-0{,}66576824 \times 10^{-4}$	$-0{,}97002218 \times 10^{-9} \simeq 0$
	$0{,}19384992 \times 10^{-4}$	$0{,}19384917 \times 10^{-4}$	$0{,}19384691 \times 10^{-4}$
	$-0{,}15254422 \times 10^{-2}$	$-0{,}15254355 \times 10^{-3}$	$0{,}23158173 \times 10^{-9} \simeq 0$
	$0{,}37195583 \times 10^{-4}$	$0{,}37195771 \times 10^{-4}$	$0{,}37195168 \times 10^{-4}$
T_{12} :	$-0{,}18734657 \times 10^{-2}$	$-0{,}18734501 \times 10^{-3}$	$0{,}11647778 \times 10^{-8} \simeq 0$

Résolvons donc pour le moment avec 13 coefficients et une matrice 13 x 13 pour voir ce qu'il advient. On obtient la courbe ci-dessous oscillatoire (courbe A), mais déjà très améliorée par rapport à ce qu'elle serait en résolvant comme dans la première partie (méthode des trapèzes pour l'intégration et système linéaire d'équations).

A présent, prenons le critère admis dans notre méthode, c'est-à-dire ne gardons que les 1er, 2ème et 4ème coefficients en b_m ; tous les autres étant inférieurs à 0,01, on les pose égaux à o. On résoud avec la matrice 4 x 4 prélevée dans le coin supérieur gauche (4 premières lignes et 4 premières colonnes) de la matrice 13 x 13 donnée par le calcul machine pour les coefficients a_{mn} .

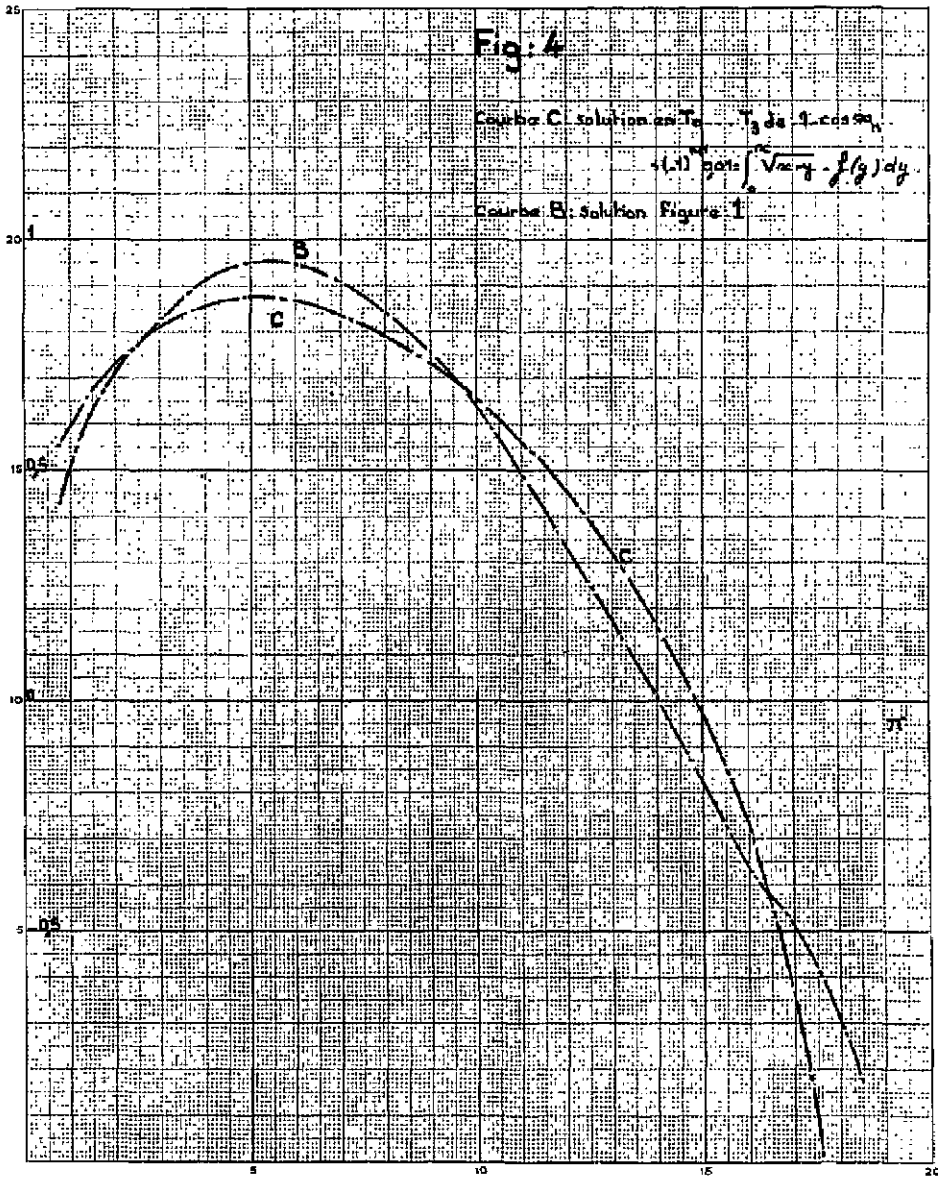


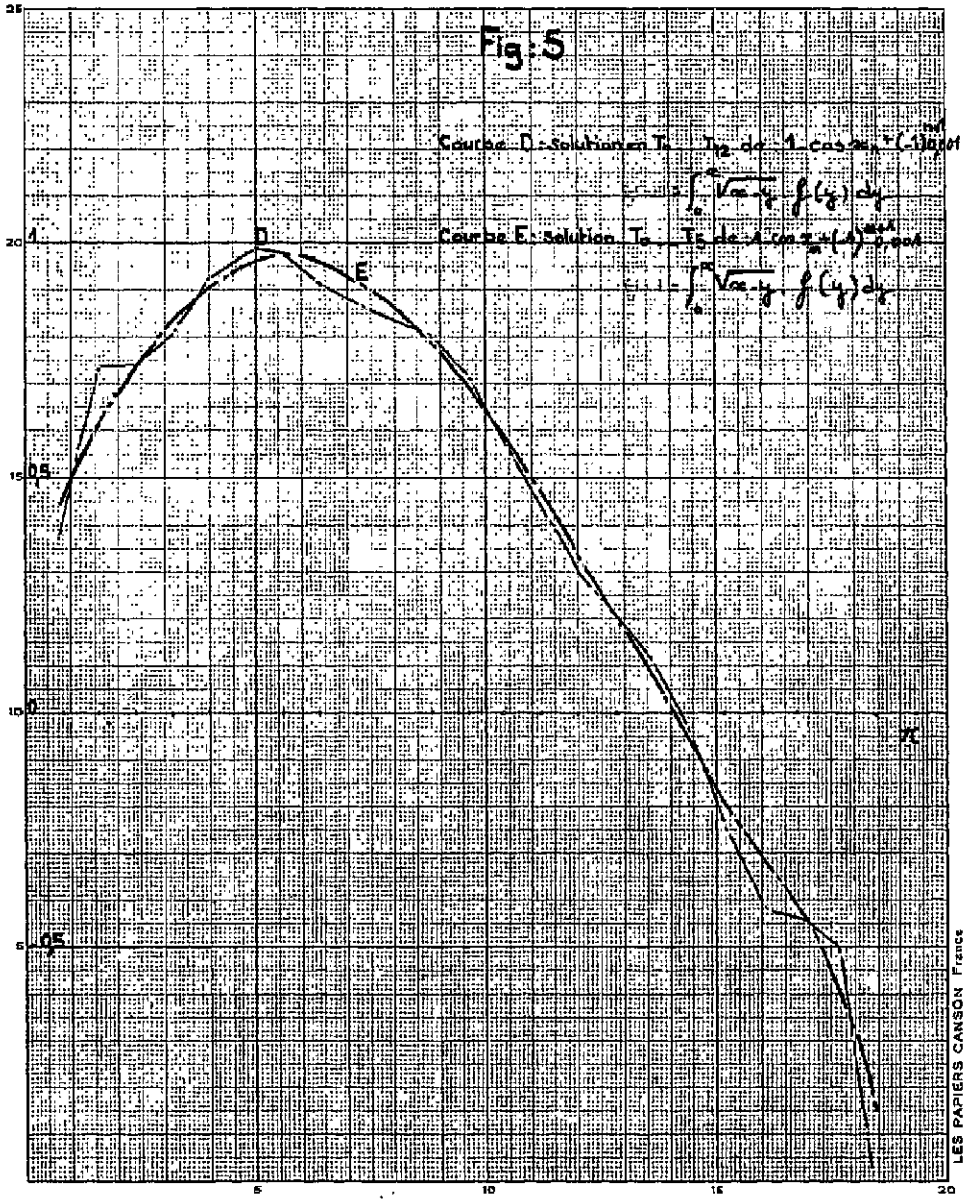
Examinons la colonne n° 1 ci-dessus des coefficients b_m qui nous sert à résoudre présentement et comparons-la à la colonne n° 3. On voit que tronquer les colonnes 1 ou 3 en gardant seulement les 4 premiers termes et annulant le 3ème revient presque au même et doit donner des solutions très voisines. Autrement dit, résoudre avec $g(x) \pm 0{,}01$ alterné est identique à résoudre avec $g(x)$ rigoureux connu à 0,01 près. D'ailleurs avec des oscillations quelconques d'amplitude 0,01 autour de $g(x)$, on aurait encore la même résolution.

La solution donnée par la machine est alors la suivante (Courbe C). La solution pour $g(x)$ rigoureux est rappelée (Courbe B) ; elle peut être obtenue soit par la résolution mathématique soit par l'inversion directe, solutions envisagées dans la première partie, ou bien encore en résolvant par la méthode actuelle (Tchebycheff) en gardant 13 polynômes représentant $g(x)$ rigoureux. La limitation à T_{12} est d'ailleurs due uniquement à l'insuffisance de la table XII (Lanczos).

Procédons de la même façon avec $g(x) = 1 - \cos x \pm 0{,}001$. On a pour les coefficients b_m la colonne 2 précédente. On constate que le 3ème, le 5ème et tous les coefficients à partir du 7ème sont dix fois plus faibles que ceux de la colonne 1 placés au même endroit. Résolvons néanmoins avec ces 13 coefficients. On trouve (Courbe D) des oscillations dis fois moindres que pour $g(x) \pm 0{,}01$, les solutions semblent bien converger vers la solution correspondant à $g(x)$ rigoureux. De plus, les oscillations résiduelles sont beaucoup moins grandes que celles qu'on a obtenues dans la première partie pour le même cas.

Annulons maintenant, comme on doit le faire, les coefficients b_m inférieurs à 0,001, soit le 3ème, le 5ème et tous les coefficients à partir du 7ème. On remarque encore que cela revient à résoudre avec la colonne 3 tronquée à partir du 7ème coefficient. Puis on utilise la matrice générale tronquée à 6 x 6 dans le coin supérieur gauche. La solution est la suivante, très voisine de la solution pour $g(x)$ rigoureux (Courbe E).





Prenons un deuxième exemple, celui traité par D.L. Philipps [Réf. 4]

$$\int_{-3}^{+3} K(y-x) \cdot f(y)\, dy = g(x) \quad \text{avec}$$

$$K(z) = \begin{cases} 1 + \cos \frac{\pi z}{3} & \text{pour } |z| \leqslant 3 \\ 0 & \text{pour } |z| > 3 \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} (6-|z|)\left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi z}{3}\right) + \frac{9}{2\pi} \operatorname{sign}(z) \cdot \sin \frac{\pi z}{3} & \text{pour } |z| \leqslant 6 \\ 0 & \text{pour } |z| \geqslant 6 \end{cases}$$

avec $\operatorname{sign}(z) = 1$ pour $|z| \geqslant 0$

$\operatorname{sign}(z) = -1$ pour $z < 0$

La solution théorique est $f(x) = K(x)$

Prenons 25 points en x et y et 13 polynômes de Tchebycheff.

Cette fois la décroissance des coefficients b_m du développement de $g(x)$ est très lente et le dernier coefficient est $0,37 \times 10^{-2}$, c'est-à-dire que $g(x)$ utilisé est en fait $g(x)$ rigoureux à $0,37 \times 10^{-2}$ près (voir colonne 2 suivante). Avec cette erreur sur $g(x)$ la solution $f(x)$ est la suivante (Courbe P) ; elle correspond à la solution théorique $K(x)$; on remarque la grande précision du maximum 1,99877, soit 2 à 2.10^{-4} près. On comparera avec les résultats obtenus par la méthode D.L. Philipps (minimisation de l'intégrale $\int_a^b [f''(x)]^2\, dx$).

Aucun tâtonnement n'a été nécessaire.

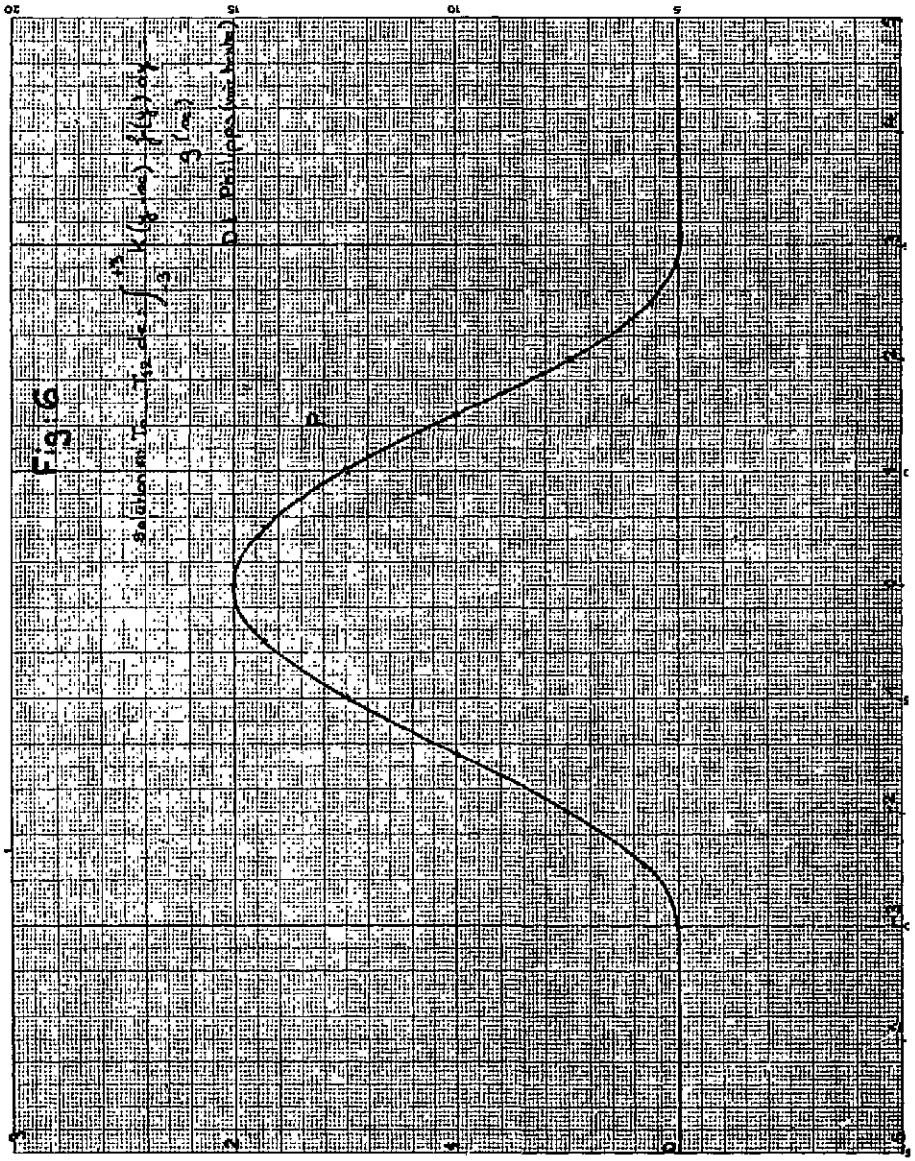


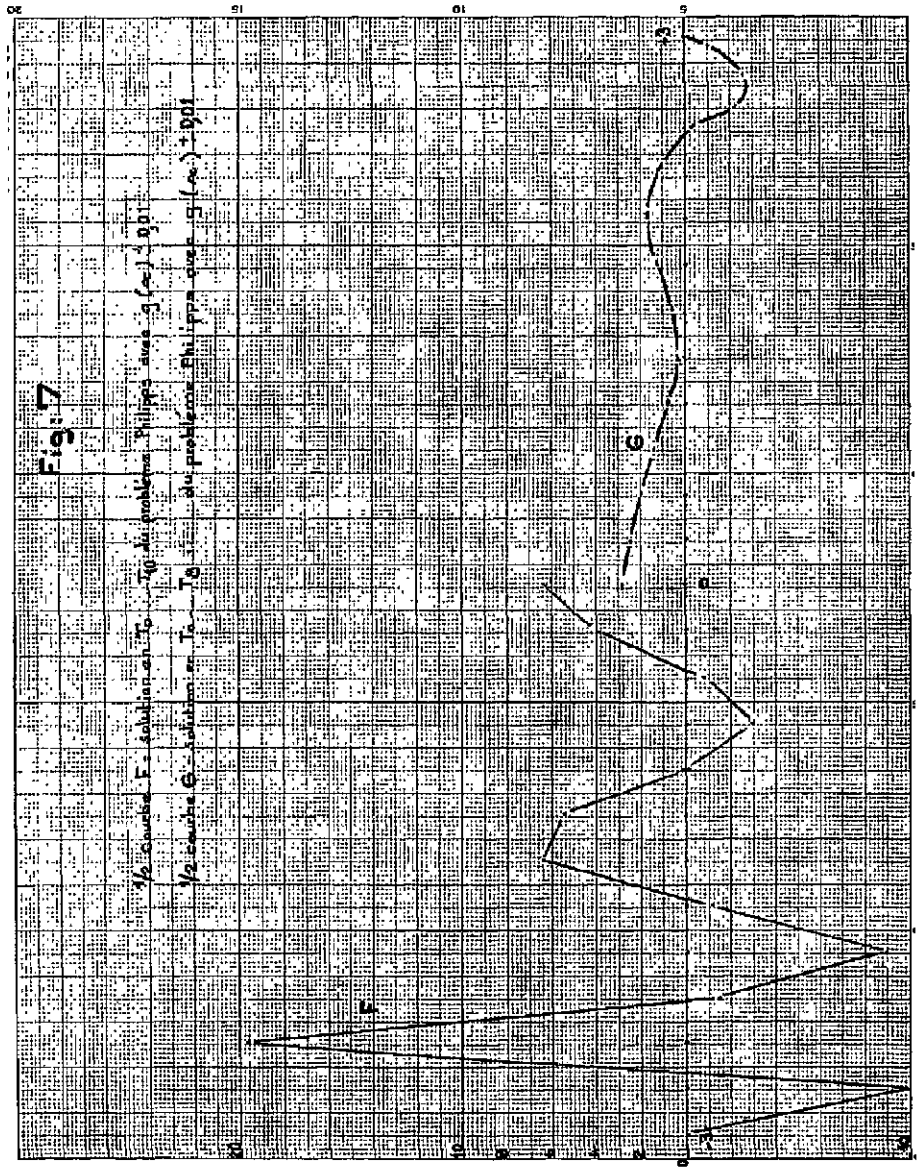
Fig 6

	$g(x) \pm 0{,}01$		$g(x)$
Coef. de T_0 :	0,42143653	Coef. de T_0 :	0,42086402
	$- 0{,}17435538 \times 10^{-7} \simeq 0$		$- 0{,}17435538 \times 10^{-7} \simeq 0$
	$- 0{,}72266154$		$- 0{,}72369664$
	$0{,}30938754 \times 10^{-7} \simeq 0$		$0{,}30938754 \times 10^{-7} \simeq 0$
	0,45920445		0,45849525
	$- 0{,}31703729 \times 10^{-7} \simeq 0$		$- 0{,}31703729 \times 10^{-7} \simeq 0$
	$- 0{,}21212966$		$- 0{,}21232154$
	$0{,}21509702 \times 10^{-7} \simeq 0$		$0{,}21509702 \times 10^{-7} \simeq 0$
	$0{,}71006566 \times 10^{-1}$		$0{,}71443459 \times 10^{-1}$
	$- 0{,}48085388 \times 10^{-8} \simeq 0$		$- 0{,}48085388 \times 10^{-8} \simeq 0$
	$- 0{,}18870526 \times 10^{-1}$		$- 0{,}17869478 \times 10^{-1}$
	$0{,}25095003 \times 10^{-8} \simeq 0$		$0{,}25095003 \times 10^{-8} \simeq 0$
T_{12} :	$0{,}25346506 \times 10^{-2}$	T_{12} :	$0{,}37640821 \times 10^{-2}$

Supposons maintenant, comme ci-dessus, qu'on ait à résoudre avec $g(x) \pm 0{,}01$ alterné ; cas volontairement difficile, qui ne peut se rencontrer en pratique. Les coefficients b_m de $g(x)$ sont un peu différents des précédents surtout le dernier ; colonne n° 1 ci-dessus.

On devrait s'arrêter à T_{10} suivant le critère adopté ici ; le coefficient $- 0{,}1887 \times 10^{-1}$ étant le dernier à être supérieur à 0,01. La solution correspondante $f(x)$ est oscillatoire (voir 1/2 courbe F) ; mais $g(x)$ était très oscillatoire au départ.

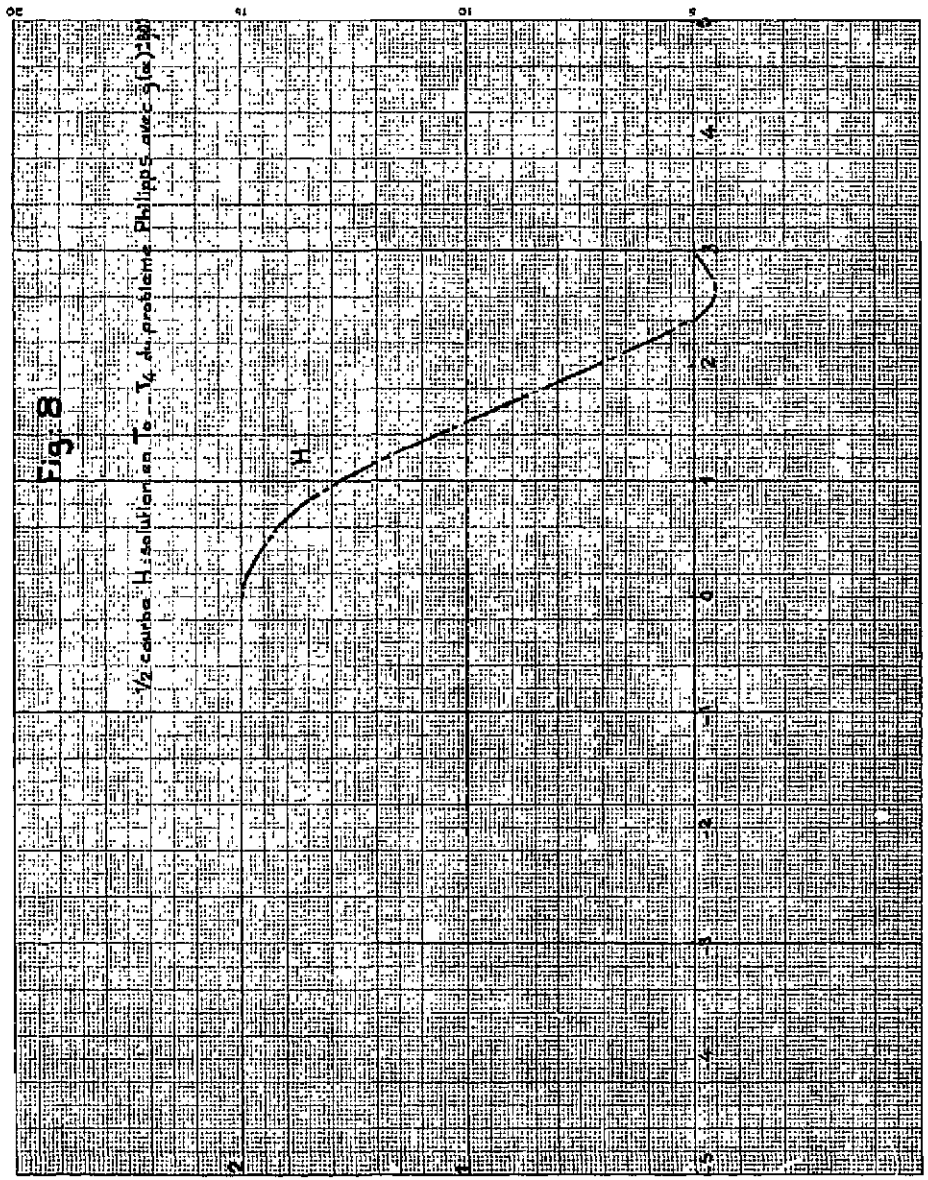
Si l'on ne veut pas retenir une solution aussi ondulante, oscillations provenant de la superposition à la courbe en cloche, théorique, d'un polynôme en T_{12} amplifié par le coefficient $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ on peut raisonner ainsi :



Les valeurs mesurées g_1 ----- g_{25} (qui sont $g(x) \pm 0,01$ alterné, mais on est dans l'ignorance de ce fait avant d'avoir découvert des oscillations cachées dans les données expérimentales) ne sont peut-être connues qu'à 0,07 près, ce qui correspond à g connu à mieux que 1 % près sur le maximum de $g(x)$ qui est 9 ; arrêtons donc le développement de $g(x)$ à T_8. La courbe résultante pour $f(x)$ est alors un peu moins ondulée (voir 1/2 courbe G). Si l'on n'est pas satisfait du résultat, on peut "raboter" encore les aspérités de la courbe $g(x) \pm 0,01$ en diminuant son développement en polynômes de Tchebycheff jusqu'à ce que la solution $f(x)$ ne soit plus guère oscillante. C'est ce qu'on va faire en se limitant à T_4 (soit $g(x)$ connu à 5 % près). La courbe résultante n'accuse plus qu'un léger creux avant les extrémités, soit - 0,08, donc erreur de 5 % (voir 1/2 courbe H et les résultats comparatifs suivants).

	Pour g (x) rigoureux 1/2 courbe P (en T_8)	Pour g (x) ± 0,01 1/2 courbe H (en T_4)
x = 0	f (x) = 2,00000	f (x) = 1,99893
0,25	1,96594	1,96929
0,50	1,86606	1,88126
0,75	1,70714	1,73753
1	1,49997	1,54276
1,25	1,25871	1,30382
1,50	0,999858	1,03029
1,75	0,741180	0,735295
2	0,500324	0,437094
2,25	0,293447	0,162516
2,50	0,133933	- 0,0437026
2,75	0,0319446	- 0,0793757
3	0	0

On voit qus la solution de ce problème est à la discrétion de l'expérimentateur qui peut, par une méthode simple - limitation du développement en polynômes de Tchebycheff de la donnée - agir à sa guise pour restreindre les ondulations de la solution.



Troisième Partie

- CAS DE REACTIONS PHOTONUCLEAIRES

Les sections efficaces de ces réactions sont tirées d'une équation intégrale de 1ère espèce. C'est l'étude de ce cas particulier qui fut à l'origine de notre étude.

Il est bien évident, d'après tout ce qui vient d'être montré, que la résolution que nous préconisons est celle exposée dans la deuxième partie. Mais la résolution généralement adoptée jusqu'ici est la méthode dite "Différence-Photon" [voir Réf. 15, 16, 17].

Elle revient à une inversion de matrice sur les données [Réf. 28, 29] et peut donner lieu à des oscillations dans la solution. Les exemples sont assez nombreux [Réf. 5, 6, 7, 8, 9].

Comme des chercheurs ont proposé des solutions améliorées [voir Réf. 18, 19], c'est l'étude de ce point de vue qui va retenir maintenant notre attention. Leur méthode revient à poser à priori une fonction analytique pour le noyau K. Si la fonction connue $g(x)$ était, elle aussi, représentée par une fonction analytique exacte, le problème serait soluble mathématiquement, noyau dégénéré ou non (voir Théorie de Fredholm et Volterra), [Réf. 1, 2]. Malheureusement $g(x)$ va s'introduire par sa dérivée seconde $g''(x)$ et la solution dépendra d'une façon très aiguë de la fonction choisie pour approximer les données expérimentales g_1 - - - - - - - g_n. La résolution proposée, bien que séduisante, est illusoire. Etudions-la cependant.

Un faisceau monocinétique d'électrons d'énergie cinétique E_0 tombant sur une cible mince, en matériau de nombre atomique élevé, produit un faisceau de photons dont les énergies sont réparties suivant un spectre dit de "Bremsstrahlung" de 0 à E_0. On utilise généralement pour celui-ci la formule dite "Spectre de Schiff" [Réf. 20]. Les utilisateurs [Réf. 21, 22] réduisent cette formule peu maniable à une approximation, qui est d'ailleurs très contestable à l'extrémité E_0 du spectre [Réf. 23].

On peut ramener ensuite cette fonction approximative de deux variables $S(E_0, E)$ où E est l'énergie photonique variable comprise entre 0 et E_0 à un produit de trois fonctions [Réf. 21, 22].

$$S(E_0, E) \equiv P(E_0) . R(E) . (E_0 - E)^{\alpha}$$

Cette réduction d'une fonction S n'est évidemment pas possible dans le cas général ; mais elle est ici numériquement valable.

$P(E_0)$ et $R(E)$ sont tabulées [Réf. 24] ; le coefficient α est de l'ordre de 0,45 (voir tableau à la fin de cette étude).

La "fonction d'excitation" qui représente l'activité de l'échantillon irradié par les photons est la fonction connue $u(E_0)$.
En variant l'énergie cinétique des électrons E_0, on pourra déduire la section efficace $\sigma(E)$ de l'échantillon par la formule :

$$u(E_0) = \int_{E_s}^{E_0} S(E_0, E) . \sigma(E) \, dE$$

où E_s est le seuil de la réaction.
C'est cette équation intégrale de 1ère espèce que l'on résoud généralement par la méthode "Différence - Photon", et que nous suggérons de résoudre par la méthode de la deuxième partie de cette étude.

Employons cependant la méthode semi-analytique qui consiste à prendre pour $S(E_0, E)$ un produit de 3 fonctions ; on a :

$$u(E_0) = \int_{E_s}^{E_0} P(E_0) . R(E) . (E_0 - E)^{\alpha} . \sigma(E) \, dE$$

Posons $\dfrac{u(E_0)}{P(E_0)} = g(E_0)$ et $\sigma(E) . R(E) = f(E)$

On a : $g(E_0) = \int_0^{E_0} (E_0 - E)^{\alpha} . f(E) \, dE$ en prenant l'origine en E_s.

g est connu puisque $P(E_0)$ est tabulé, f est l'inconnue d'où l'on tirera σ puisque $R(E)$ est également tabulé.

D'ailleurs $P(E_0)$ varie peu et $R(E)$ décroît continûment avec E croissant, ceci pour les énergies photoniques utilisables au-dessus du seuil de réaction, où l'on a $g(0) = 0$ par définition du seuil ; de plus $0 < \alpha < 1$.

Le problème revient à résoudre une équation de Volterra de 1ère espèce et de convolution.
Dérivons, comme on l'a fait en première partie, par rapport à E_0 ; on a l'équation d'Abel à résoudre :

$$g'(E_0) = \alpha \int_0^{E_0} \frac{f(E)}{(E_0 - E)^{1-\alpha}} \, dE \qquad \text{avec } 0 < 1 - \alpha < 1$$

La solution est $f(E_0) = \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \left[\dfrac{g'(0)}{E_0^{\alpha}} + \int_0^{E_0} \dfrac{g''(E_0 - E)}{E^{\alpha}} \, dE \right]$

Pour des raisons physiques (σ et f bornés pour $E_0 = 0$) on ne peut envisager que le cas $g'(0) = 0$ qui donne $f(0) = 0$.

Prenons un exemple vraisemblable ; soit $\alpha = \frac{1}{2}$ au lieu de 0,45 et pour $g(E_0)$ une fonction ressemblant à une "fonction d'excitation" réelle (réactions photonucléaires sur le cuivre) soit $g = 1 - \cos E_0$ entre 0 et π au maximum. On a $g'(0) = 0$ et :

$$f(E_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{E_0} \frac{\cos(E_0 - E)}{\sqrt{E}} \, dE.$$

En posant comme en première partie $\sqrt{E} = u$ on a :

$$f(E_0) = \frac{4}{\pi} \cos E_0 \int_0^{\sqrt{E_0}} \cos u^2 \, du + \frac{4}{\pi} \sin E_0 \int_0^{\sqrt{E_0}} \sin u^2 \, du$$

Les intégrales sont les intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{\sqrt{E_0}} \cos u^2 \, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot C(\nu) \, , \qquad \int_0^{\sqrt{E_0}} \sin u^2 \, du \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot S(\nu)$$

où $\nu = \sqrt{\dfrac{2E_0}{\pi}}$

On a donc $f(E_0) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[\cos E_0 . C(\nu) + \sin E_0 . S(\nu) \right]$

On se reportera à la première partie pour l'examen de la courbe obtenue.

Compte tenu du fait qu'on aurait dû prendre $u = g \cdot P$, au lieu de g et que la fonction cherchée est $\sigma = \frac{f}{A}$, on constate que σ est un peu au-dessous de la courbe f mais que son maximum a lieu à peu près au même endroit soit 0,3 π (en avant du point d'inflexion de g, ce qui est un peu différent des résultats expérimentaux).

Jusqu'ici on n'a pris pour g que les deux premiers termes d'un développement en série de Fourier, soit $1 - \cos E_0$. D'une façon plus générale, dans le cas $g'(0) = 0$ qui donne une valeur bornée à $f(0)$, on peut chercher un développement en série de Fourier limité pour g, donc pour f la solution. On se limite par là-même aux solutions satisfaisant aux conditions de Dirichlet.

On va donc continuer le processus amorcé, car il est désormais évident que la solution utilisée brutalement, soit

$$f(E_0) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \int_0^{E_0} \frac{g''(E_0 - E)}{E^{\alpha}} \, dE$$

mènerait, pour le cas de valeurs expérimentales à intervalles discrets en g, à remplacer l'intégrale par une somme portant sur des différences secondes en g ; la précision serait illusoire.

Au contraire, avec un développement limité en série de Fourier, seules interviendront les ordonnées $g_1 \text{-------} g_k$ comme on va le montrer. A priori la méthode semble attractive.

Utilisons la méthode des moindres carrés pour déterminer les coefficients du développement :

$$g(E_0) = b_0 + \sum_{n=1}^{k} b_n \cos n E_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n \sin n E_0$$

où l'intervalle $0, E_0$ de validité est supposé représenter 0,2 π. On s'y ramènera au besoin par un changement de variable linéaire en E_0. Comme on admet $g(0) = g'(0) = 0$ il y a deux relations entre les coefficients a_n b_n b_0. On rendra ensuite minima l'erreur quadratique. On suppose en outre l'intervalle 0, E_0 divisé en k parties égales E_i ; les coefficients sont alors :

$$b_n = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k} g_i \cdot \cos n E_i$$

$$a_n = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k} g_i \cdot \sin n E_i \qquad \text{avec } 0 < n \leqslant \frac{k}{2}$$

Appliquons la formule précédente démontrée plus haut pour $\alpha = \frac{1}{2}$

$$f(E_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{E_0} \frac{g''(E_0 - E)}{\sqrt{E}} \, dE$$

On pourra alors utiliser pour chaque terme de g le procédé employé avec $g = 1 - \cos E_0$ c'est-à-dire que $f(E_0)$ sera donné par une somme de termes de la forme :

$$n\sqrt{n} \left[\cos n E_0 \cdot C(\nu\sqrt{n}) + \sin n E_0 \cdot S(\nu\sqrt{n}) \right]$$

correspondant aux termes en $\cos n E_0$ pour $g(E_0)$ et

$$n\sqrt{n} \left[\cos n E_0 \cdot S(\nu\sqrt{n}) - \sin n E_0 \cdot C(\nu\sqrt{n}) \right]$$

pour les termes en $\sin n E_0$ de $g(E_0)$, où $\nu = \sqrt{\frac{2E_0}{\pi}}$ comme précédemment.

On aura ainsi pour $f(E_0)$ un développement limité en $\cos n E_0$ et $\sin n E_0$ dont les coefficients sont des intégrales de Fresnel. Cette méthode semble donc préférable quand elle est applicable $(g'(0) = 0)$, les imprécisions sur g_i se trouvant "moyennées" dans les sommations a_n et b_n.

<u>Remarque</u> :

On pourrait maintenant serrer de plus près encore cette résolution, puisque $\alpha = 0{,}45$ donne une approximation meilleure. Les intégrales de Fresnel qui s'introduisent dans le développement ci-dessus doivent alors être remplacées par des intégrales de Fresnel plus générales définies par [Réf. 25] avec $\alpha = 1 - a$

$$\int_0^{E_0} \frac{\cos \tau}{\tau^{\alpha}} \, d\tau = \int_0^{\infty} \tau^{a-1} \cdot \cos \tau \, d\tau - \int_{E_0}^{\infty} \tau^{a-1} \cos \tau \, d\tau =$$

$$C(0, a) - C(E_0, a) \doteq \Gamma(a) \cdot \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) - C(E_0, a)$$

avec

$$C(E_0, a) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi a}{2}} \cdot \Gamma(a, i E_0) + \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi a}{2}} \cdot \Gamma(a - i E_0),$$

Ces dernières fonctions étant les fonctions Γ incomplètes.

On aurait des formules similaires pour $\int_0^{\xi_0} \frac{\sin \tau}{\tau^{\alpha}} d\tau$.

En revenant au cas $\alpha = \frac{1}{2}$, cette méthode de résolution qui peut sembler séduisante, en réalité va fournir une solution divergente en $n \sqrt{n}$. On aura des oscillations croissantes si l'on diminue le pas numérique, car n augmente. On doit donc préférer à cette méthode, celle utilisée dans la deuxième partie.

En définitive, on peut donc dire que par cette méthode encore, comme par la méthode de résolution directe de la première partie, les instabilités ou oscillations croissantes dépendent de la largeur du pas et ne sont pas forcément des "résonances" pour la section efficace de résolution.

On doit noter en outre qu'une équation de convolution comme la précédente peut se résoudre autrement que par des méthodes digitales, par exemple au moyen d'une machine analogique. Mais la solution dépendra de la fonction "lissée" représentant g et aussi de la bande passante de la machine utilisée qui certes, éliminera les composantes de "bruit" mais peut atténuer les composantes utiles.

Pour les questions soulevées par la convolution et le filtrage numérique d'une équation intégrale de 1ère espèce, on renverra le lecteur intéressé par ces problèmes délicats aux ouvrages et articles suivants [Réf. 3, 26, 27].

On ajoutera que dans le cas où l'expérimentateur de physique nucléaire peut utiliser un "monochromateur" la résolution de l'équation intégrale pour les sections efficaces photonucléaires ou autres disparait... avec ses difficultés.

CONCLUSION

On doit signaler que la méthode de résolution numérique des équations intégrales de 1ère espèce, telle qu'elle est exposée dans la deuxième partie de cette étude, n'est pas la seule méthode utilisable. Nommons-en deux qui méritent la plus grande attention. Celle de D.L. Philipps [Réf. 4] repose sur le critère suivant ; minimisation des dérivées secondes de la solution : $\int_a^b \left[f''(x) \right]^2 dx$ minimum.

Si le critère peut paraître arbitraire, cette méthode donne de bons résultats qu'on peut comparer à ceux obtenus ici ; il faut cependant faire choix d'une valeur optima pour un paramètre γ .

La deuxième méthode à signaler est celle exposée dans la thèse de Burrus [Réf. 32] qui repose sur le seul critère d'avoir une solution positive ou nulle. Elle a l'inconvénient d'une programmation fort compliquée.

La méthode préconisée ici, par les polynômes de Tchebycheff, donne d'excellents résultats exempts d'oscillations. Sa programmation est relativement aisée.

Cette méthode est souple, car elle permet de s'affranchir de l'obligation d'avoir le même nombre d'intervalles de division pour les variables x et y ; en effet, dans le développement du noyau en série double, rien n'oblige à prendre le même nombre de points de division pour obtenir les développements en $T(x)$ et en $T(y)$. Ceci est précieux par exemple dans les mesures de spectrométrie, ce qui est le cas envisagé par Burrus ; ces mesures sont effectuées au moyen d'analyseurs multicanaux [Réf. 30, 31, 32]. D'autre part, les difficultés provenant d'un noyau singulier (cas de l'équation d'Abel de la première partie) elles aussi disparaissent avec la méthode des polynômes de Tchebycheff envisagée dans cette étude.

En conclusion, on voit que le problème de la résolution numérique des équations intégrales de 1ère espèce étudié ici est d'une portée très générale. On est amené à se poser de multiples questions concernant le calcul numérique, la validité des solutions trouvées à certaines sections efficaces photonucléaires et à bien d'autres problèmes physiques, car ces équations se retrouvent souvent en physique [Réf. 3].

On a montré au début (première partie) sur un exemple typique, la genèse des oscillations d'une solution et on a proposé en deuxième partie une solution numérique à ces problèmes, qui est assez souple pour s'adapter à un grand nombre de cas en physique, et de programmation simple ; ceci grâce à des développements en polynômes de Tchebycheff calculés suivant la méthode proposée par C. Lanczos.

Manuscrit reçu le 30 novembre 1967

Tableau de P, R et $(E_o - E)^{0,45}$ en fonction de l'énergie, tiré de Réf. 24

E_o ou E en mev	P	R	$(E_o - E)^{0,45}$
1			1,
2			1,37
3			1,64
4			1,87
5			2,06
6		83,8	2,24
7	0,259	71,2	2,40
8	0,268	62,1	2,55
9	0,271	55,1	2,69
10	0,272	49,5	2,82
11	0,270	44,7	2,94
12	0,267	40,8	3,06
13	0,265	37,8	3,17
14	0,263	35,4	3,28
15	0,260	33,3	3,38
16	0,256	31,5	3,48
17	0,252	29,9	3,58
18	0,249	28,5	3,67
19	0,246	27,3	3,76
20	0,243	26,3	3,85
21	0,239	25,5	3,94
22	0,235	24,8	4,02
23	0,231	24,2	4,10
24	0,226	23,7	4,18
25	0,222	23,2	4,26
26	0,218	22,7	4,33
27	0,214	22,2	
28	0,210	21,7	
29	0,207	21,2	
30	0,204	20,8	
31	0,200	20,4	
32	0,197		

BIBLIOGRAPHIE

[1] - COURANT R. et HILBERT D.
Methods of mathematical Physics
Interscience, New-York, 1953

[2] - POGORZELSKI W.
Integral Equations and their applications
Pergamon Press, vol.I

[3] - TWOMEY S.
Numerical Filtering to the Integral Equations
Journal of the Franklin Institute 1965, Fevrier, 95

[4] - PHILIPPS D.L.
A technique for the Numerical Solution of certain Integral Equations of the First kind
Journal of the Association for Computing Machinery
1962 Janvier, 9, 1, 84

[5] - SPICER
Presents Status of Photoneutron Cross-sections measurements
Supplemento al Nuovo Cimento, 1964, II, 3, 243

[6] - COOK, BAGLIN, BRADFORD, GRIFFIN
O^{16} (γ, n) O^{15} Cross-sections from Threshold to 65 mev
Physical Review 1966, Mars, 143, 3, 712

[7] - BOLEN, WHITEHEAD
Neutron Photoproduction Cross-sections of Si, P, S.
Physical Review, 1.12.1963, 132, 5, 2251

[8] - MIN, WHITEHEAD
Total Photoneutron Cross-sections of C, Mg.
Physical Review, 25.1.1965, 137,2B, B301.

[9] - HAYWARD E. and STOVALL T.
Photoneutron Production by Li^6, Li^7, B^{10} and O^{16}
Nuclear Physics 1965, Juillet, 241

[10] - BAKER, FOX, MAYERS, WRIGHT
Numerical Solution of Fredholm integral equations of first kind
Computer Journal 1964, 7, 141-148

[11] - TWOMEY S.
On the numerical solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature
Journal of the Association Computing Machinery 1963, Avril, 10, 2, 97

[12] - RAGAZZINI, FRANKLIN
Les systèmes asservis échantillonnés (Sampled Data Control Systems)
Mc. Graw-Hill N.Y. 1958, Dunod Paris

[13] - COOK B.C.
Least Structure Solution of Photonuclear Yield Functions
Nuclear Instruments and methods, 1963, 24,256

[14] - LANCZOS C.
Applied Analysis
Prentice Hall Inc, New-York 1956

[15] - PENFOLD A.S. and LEISS J.E.
Physical Review 1959, 114, 1332

[16] - PENFOLD, LEISS
Determination of Photo Cross-sections from Bremsstrahlung Activation curves
Phys. Rev., 1954, 95, 637 A

[17]- PENFOLD, LEISS
Analysis of Photo-Cross-Sections
Université d'Illinois, 1958, Mai

[18]- GELLER, MUIRHEAD
High Resolution Second-Difference Analysis of Photonuclear Yield curves
Nuclear Instruments and Methods, 1964, Mars, 274

[19]- BOULEGUE G.
Sur le calcul des sections efficaces des réactions photonucléaires induites par le rayonnement de freinage
Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 244, 881

[20]- SCHIFF L.I.
Physical Review, 1946, 70, 87 et 1951, 83, 252

[21]- BALDWIN G.C. et KLAIBER G.S.
Physical Review, 1948, 73, 1159

[22]- BASILE R.
Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 1956, 243, 1759

[23]- HALL H.E., HANSON A.O., JAMNIK G.D.
Physical Review, 1963, 129, 2207

[24]- BOULEGUE G.
Rayonnement de freinage d'un Bétatron de 31 MeV et quelques réactions (γ α)
Thèse de Doctorat, Paris 1958

[25]- ERDELYI
Higher Transcendental Functions
California Institute of Techn. Mac Graw Hill, 2, 149

[26]- SCHWARTZ L.
Méthodes mathématiques pour les sciences physiques
Hermann - Paris, 145 - 137

[27]- HIRSCHMANN I.I., WIDDER D.V.
La transformation de convolution. GAUTHIER VILLARD-PARIS

[28]- KATZ L. et CAMERON A.G.W.
The solution of X-ray activation curves for photonuclear cross-sections
Canadian Journal of Physics, 29, 518

[29]- JOHNS, KATZ, DOUGLAS, HASLAM
Gamma-neutron Cross-sections
Physical Review, 15.12.1950, 1062

[30]- Proceedings of the total absorption Gamma-Ray Spectrometry Symposium
GATLINBURG (Tenn.) 10-11 Mai 1960, 159

[31]- BURRUS W.R. and VERBINSKI V.V.
Recent developments in the Proton-Recoil Scintillation Neutron Spectrometer
OAK RIDGE National Laboratory (Tenn.)

[32]- BURRUS W.R.
Utilization of a priori Information by means of Mathematical Programming in the Statistical Interpretation of Measured Distributions (Thesis)
OAK RIDGE National Laboratory, 1964, 3743

FIN