CEA-R-3420

8.2

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

CEA-R-3420

ÉTUDE DE PROBLÈMES DE FILTRAGE DE BRUIT DE FOND EN SPECTROMÉTRIE NUCLÉAIRE, AMÉLIORATION DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT ET DES CARACTÉRISTIQUES DE L'IMPULSION MISE EN FORME PAR LE DISPOSITIF DU PRÉDICTEUR OPTIMUM

par

Jerzy BENDA

CENTRE D'ÉTUDES NUCLÉAIRES DE SACLAY

Rapport CEA-R-3420

1968

Ea

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N-SACLAY B.P. n°2, 91-GIF-sur-YVETTE-France

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR - INGÉNIEUR

PAR

Jerzy BENDA

PREMIÈRE THÈSE

Étude de problèmes de filtrage de bruit de fond en spectrométrie nucléaire, amélioration du rapport signal sur bruit et des caractéristiques de l'impulsion mise en forme par le dispositif du prédicteur optimum

DEUXIÈME THÈSE

Les mémoires associatives

Soutenues le 26-5-1967 devant la Commission d'Examen

Mme	N. MARTY	Président
MM.	B. PICINBONO J. POTTIER	Examinateurs

CEA-R-3420 — BENDA Jerzy

ÉTUDE DE PROBLÈMES DE FILTRAGE DE BRUIT DE FOND EN SPECTROMÉTRIE NUCLÉAIRE, AMÉLIORATION DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT ET DES CARACTÉRISTIQUES DE L'IMPULSION MISE EN FORME PAR LE DISPOSITIF DU PRÉDICTEUR OPTIMUM.

Sommaire :

Les mesures en spectrométrie nucléaire ont pour but la détermination précise de l'énergie des particules. Le pouvoir de résolution d'une chaine de spectrométrie est une caractéristique importante. Deux phénomènes principaux concourent à limiter ce pouvoir de résolution : les fluctuations statistiques du détecteur et le bruit de fond.

Pour un bruit de fond donné, la théorie des filtres permet de calculer des réseaux susceptibles de modifier le rapport signal sur bruit. Le système proposé permet d'améliorer de 10,5 pour cent ce rapport lorsqu'on se place dans les conditions optimales.

Les résultats expérimentaux confirment les prévisions.

Le dispositif prédicteur permet aussi un raccourcissement de l'impulsion dans le temps.

1968 52 pages

Commisseriat à l'Energie Atomique — France

CEA-R-3420 — BENDA Jerzy

A STUDY OF FILTERING PROBLEMS OF BACKGROUND NOISE IN NUCLEAR SPECTROMETRY, IMPROVEMENT OF SIGNAL TO NOISE RATIO, AND OF PULSE CHARACTERISTICS PRODUCED BY THE OPTIMUM PREDICTOR DEVICE

Summary :

The purpose of nuclear spectrometry is the precise measurement of particles energy.

The resolving power of a spectrometer design is an importent factor. Two main phenomena ere involved in the limitation of this resolving power : The stetistical fluctuations of the detector itself, and the background noise.

For a given noise, the theory of filters enables the calculation of networks specielly designed the for improvement of signel to noise ratio.

The proposed system should lead to an improvement of 10.5 per cent of this ratio. Experiments have confirmed this theoreticel estimation.

The predictor device elso makes possible the obtaining od shortened pulses.

1968 52 pages

Commissariat à l'Energie Atomique — France

TABLE DES MATIERES

I - Introduction

II - Principe du dispositif de filtrage étudié

III - Le bruit de fond en sortie de l'amplificateur

III.1 - Réponse en fréquence de la mise en forme
III.2 - Le spectre de fréquence du bruit en sortie du préamplificateur
III.3 - Spectre de puissance du bruit en sortie du préamplificateur.

IV - Calcul du prédicteur optimal

IV.1 - Minimisation de l'erreur quadratique moyenne
IV.2 - La réponse indicielle du prédicteur optimal.

V - Amélioration théoriquement apportée par le prédicteur

V.1 - L'erreur optimale
V.2 - Le rapport bruit à signal
V.3 - Prédiction par un atténuateur
V.4 - Conclusion

VI - Expérimentation

VI.1 - Description de la chaîne de spectrométrie
VI.2 - Dispositif du prédicteur
VI.3 - L'appareillage de mesures
VI.4 - Principe de la mesure de l'amélioration du rapport bruit à signal
VI.5 - Tracé des droites de Henry
VI.6 - Evaluation des erreurs de mesures
VI.7 - Résultats expérimentaux

VII - Applications

Annexe I

Annexe II

Bibliographie

I - INTRODUCTION

Les mesures de spectrométrie en physique atomique ont pour objet la détermination précise de l'énergie de particules émises au cours de réactions nucléaires ou accélérés par un processus physique quelconque. Un spectre est le tracé de la fonction $N = f(E)\,\Delta E$ qui représente le nombre N de particules d'énergie comprise entre E et $E + \Delta E$ détectées en un temps donné. Il est généralement formé de nombreux pics, d'amplitude plus ou moins grande, que les physiciens veulent résoudre en «raies».

Le dispositif expérimental utilisé pour ces mesures est le plus souvent une «chaîne de spectrométrie» qui comprend essentiellement :

- Un détecteur dans lequel les particules perdent leur énergie au cours de collisions successives avec les atomes qui le constituent, en donnant naissance à une quantité de charge électrique proportionnelle à cette énergie.

- Un ensemble électronique qui amplifie le signal obtenu sur le détecteur (charge, tension ou courant) et permet de le mesurer et de le classer.

De même qu'en optique, le pouvoir de résolution d'une chaîne de spectrométrie est une caractéristique capitale que l'on s'efforce de rendre aussi bonne que possible. Deux phénomènes principaux concourent à limiter ce pouvoir de résolution :

- D'une part, les fluctuations provenant du caractère statistique du processus de détection au sein du détecteur qui fait que deux particules de même énergie ne libèrent pas exactement la même quantité de charge.

- D'autre part, le bruit de fond électrique propre au détecteur et à l'amplificateur, qui existe en permanence et se superpose aux signaux.

On ne peut rien contre le premier phénomène, sinon rechercher des détecteurs qui donnent une meilleure statistique de détection. Quant au bruit de fond électrique, ce sont des progrès technologiques dans la réalisation des détecteurs et des composants des amplificateurs qui permettront, avant tout, de diminuer sa valeur. Cependant, pour un bruit de fond donné, la théorie des filtres donne la possibilité de calculer des réseaux capables d'améliorer le rapport signal à bruit et de diminuer ainsi les effets du bruit de fond.

La théorie du filtrage optimal a été, bien sûr, appliquée à ce problème, et l'on connaît (1) (2) (3) quelle réponse indicielle devrait avoir le filtre optimal. Malheureusement, ce filtre n'est pas physiquement réalisable, car sa réponse devrait, dans le temps, précéder l'arrivée du signal ! Des essais ont été faits pour réaliser des filtres s'approchant de ce filtre optimal, mais les circuits proposés (3) sont trop complexes pour pouvoir être efficacement mis en œuvre dans un laboratoire de physique nucléaire.

D'ailleurs, avant qu'aient été mis au point les détecteurs à semi-conducteurs, les fluctuations dues au processus de détection étaient généralement si fortes dans les détecteurs utilisés (compteurs à gaz, scintillateurs) que la contribution du bruit de fond électrique à l'élargissement des raies des spectres relevés était négligeable.

Le signal issu du détecteur peut être considéré comme un échelon de tension décroissant avec une grande constante de temps ; deux types de filtres simples ont été universellement utilisés dans les chaînes de spectrométrie, et le sont encore couramment :

- Un filtre passe-bande constitué par une cellule de différentiation CR et une cellule d'intégration RC. Il n'est que 36 % moins bon que le filtre optimal au point de vue rapport signal à bruit, et ses facilités d'emploi l'ont fait adopter dans toutes les expériences où la fréquence de répétition moyenne des événements détectés est assez faible (inférieure à 5.000 événements par seconde par exemple).

- Un filtre à double différentiation par ligne à retard. Il assure aux signaux une mise en forme brève, au détriment du rapport signal à bruit, et son usage est répandu dans les expériences où la fréquence de répétition moyenne des signaux est élevée (jusqu'à 50.000 ou 100.000 événements par seconde).

L'apparition des détecteurs à semi-conducteurs dans lesquels les fluctuations dues au processus de détection sont très faibles, a conduit naturellement à approfondir le problème de filtrage des signaux.

Depuis quelques années, de nombreuses études ont été publiées (4) (5) (6) où sont comparés les mérites des filtres utilisés ou de leurs variantes obtenues par extrapolation du nombre de cellules placées en série. Certains auteurs ont également proposé des filtres passifs nouveaux plus efficaces (7) (8), d'autres étudient la possibilité de faire des filtres non linéaires variables dans le temps (9).

Dans ces recherches, le but poursuivi n'est pas seulement une amélioration du rapport signal à bruit comparé à celui du filtre RC - CR classique, mais aussi une diminution de la durée des signaux afin de permettre des mesures précises lorsque le taux de répétition des impulsions est élevé. La mesure de l'amplitude crête du signal, qui représente l'énergie d'une particule détectée, ne doit pas être perturbée par la «queue» du signal qui l'a précédé.

C'est dans cette double perspective qu'a été étudié le dispositif utilisant un filtre prédicteur qui fait l'objet de cette thèse. On verra qu'il constitue un accessoir complémentaire à un filtre déjà utilisé, et qu'il permet d'améliorer les caractéristiques d'une chaîne de spectrométrie existante par un gain qui peut atteindre 10 % sur le rapport signal à bruit, et par la réduction de la durée des impulsions.

II - PRINCIPE DU DISPOSITIF DE FILTRAGE ETUDIE

L'ensemble électronique qui constitue une chaîne de spectrométrie comprend essentiellement :

- un préamplificateur,
- un amplificateur,
- un codeur d'amplitude lié à un dispositif de mise en mémoire des informations codées.

On associe généralement à l'amplificateur le filtre utilisé pour diminuer l'importance relative du bruit de fond par rapport au signal. A ce filtre, on demande également de donner au signal une forme propre à assurer son codage dans les meilleures conditions. Le codeur mesure la valeur du maximum d'amplitude du signal, qui est proportionnelle à l'énergie perdue dans le détecteur par la particule observée.

Le bruit de fond que l'on peut observer à la sortie de la mise en forme, entre les impulsions et superposé à celles-ci, est issu du détecteur et de l'étage d'entrée du préamplificateur. Etendu à l'origine dans une large bande de fréquence, ce bruit se trouve filtré par la mise en forme, il est donc, ici, corrélé. Ceci signifie que sa valeur à l'instant $t + \alpha$ est partiellement liée aux valeurs qu'il avait à l'instant t et avant cet instant. Il est donc possible de prédire avec plus ou moins d'efficacité, à l'instant t, quelle valeur il aura un temps α plus tard.

Si donc un signal est tel qu'arrivant à l'instant t son maximum se présente à l'instant $t + \alpha$, on peut utiliser l' «histoire» du bruit jusqu'à t pour prédire l'erreur qu'il viendra donner, à l'instant $t + \alpha$, à la mesure du maximum. Il suffit, pour diminuer l'amplitude des fluctuations statistiques du maximum, d'en retrancher la valeur prédite pour le bruit ; on doit ainsi améliorer la résolution de la chaîne. Cette prédiction est possible en utilisant un filtre «prédicteur» dont la théorie du filtrage optimal permet de déterminer les caractéristiques propres à lui assurer la meilleure efficacité possible.

Précisons le raisonnement en considérant le cas particulier de la chaîne de spectrométrie que nous avons utilisée et qui comprenait *(Fig. 1)* :

- un préamplificateur de charges,
- un amplificateur avec mise en forme par circuit différentiateur (RC) et intégrateur (CR) de même constante de temps $\tau = RC = CR$,
- un codeur d'amplitude suivi d'une mémoire intégratrice.

Soit $x(t)$ la fonction (aléatoire) du temps supposée stationnaire et ergodique qui représente les fluctuations de la tension en sortie de l'amplificateur de mise en forme. A condition que le gain de conversion charges-tension du préamplificateur soit assez élevé, et que le premier étage de l'amplificateur soit bien réalisé, $x(t)$ est uniquement le bruit de fond du détecteur et de l'étage d'entrée du préamplificateur filtré par la mise en forme. Il est logique d'admettre, si tous les circuits sont parfaitement linéaires, que la densité de probalité de $x(t)$ suit une loi de Gauss.

En sortie de l'amplificateur, l'amplitude maximale des impulsions, qui représente l'énergie des particules détectées, est variable, mais la forme de ces impulsions reste la même et l'on peut l'exprimer mathématiquement par :

$$S(t) = A\frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où A dépend de l'énergie *(Fig. 2)*.

Le maximum de cette fonction est obtenu pour $t = \tau$ et vaut :

$$S(\tau) = A \times \frac{1}{e}$$

C'est à cet instant que le codeur effectue la mesure, mais il reçoit $S(t) + x(t)$, et il mesure $A/e + x(\tau)$ au lieu de A/e.

Après avoir enregistré l'arrivée d'un grand nombre de particules de même énergie, le contenu de la mémoire intégratrice est une gaussienne centrée sur A/e d'écart type :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_d^2 + \sigma_x^2}$$

σ_d^2 représente la variance (l'écart quadratique moyen) des fluctuations dues au processus de détection des particules dans le détecteur, et σ_x^2 est la valeur quadratique moyenne $\overline{x^2}$ de $x(t)$. Le dispositif utilisant un filtre prédicteur ne permet pas d'agir sur σ_d, mais peut diminuer σ_x.

La théorie permet en effet de déterminer en fonction des propriétés statistiques de $x(t)$, la réponse impulsionnelle d'un filtre prédicteur qui, excité par $x(t)$, fournit une tension $y(t)$ image approximative de $x(t + \alpha)$. Bien sûr, $y(t)$ ne peut être rigoureusement identique à $x(t + \alpha)$, mais la différence $\varepsilon(t + \alpha)$ des deux :

$$\varepsilon(t + \alpha) = x(t + \alpha) - y(t)$$

possède un écart quadratique moyen $\overline{\varepsilon^2}$ plus faible que $\overline{x^2}$.

Si α est égal au temps τ défini ci-dessus, en retranchant la tension $y(t)$ retardée de τ, $y(t - \tau)$, de la tension $A/e + x(\tau)$ reçue par le codeur à l'instant où il analyse le signal, on obtient dans la mémoire intégratrice une gaussienne dont l'écart quadratique moyen est :

$$\sigma'^2 = \sigma_d^2 + \overline{\varepsilon^2}$$

plus faible que σ^2.

La figure 3 représente schématiquement le dispositif expérimental qui permet de réaliser cette expérience. A la sortie de l'amplificateur, les fluctuations $x(t)$ de la tension passent dans le prédicteur qui délivre la tension $y(t)$. On impose à cette tension un retard α égal à l'intervalle de temps τ qui sépare l'instant d'arrivée d'une impulsion de l'instant où elle atteint son maximum. $y(t - \alpha)$ est retranché de $x(t)$ dans le circuit différentiel «Diff».

Lorsqu'un signal se présente, il passe également à travers le prédicteur, mais il apparaît sur cette voie du circuit différentiel avec un retard τ, de sorte qu'il ne modifie pas l'amplitude du sommet du signal qui est passé par la voie directe.

Le schéma de principe du dispositif expérimental étant ainsi fixé, il faut maintenant déterminer les caractéristiques du filtre prédicteur optimal, et calculer l'amélioration du rapport signal à bruit que l'on peut théoriquement espérer dans ces conditions. Pour ce faire, il convient d'abord de déterminer les caractéristiques du bruit $x(t)$:

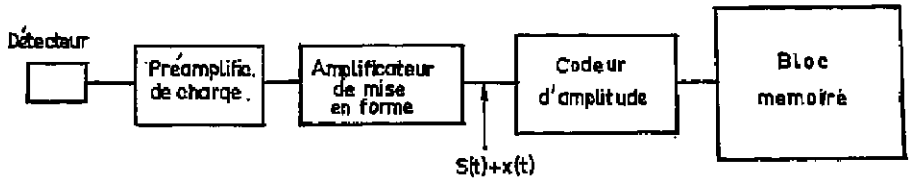


Figure 1

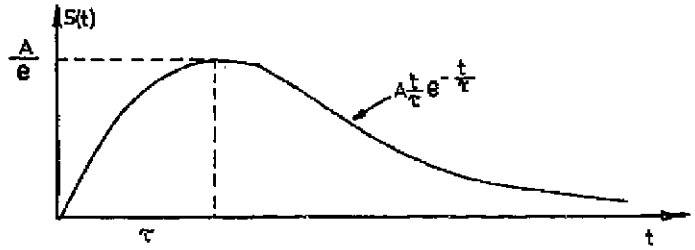


Figure 2

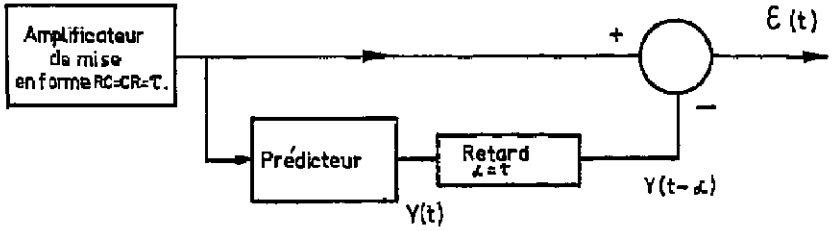


Figure 3

III - LE BRUIT DE FOND A LA SORTIE DE L'AMPLIFICATEUR

La réponse indicielle du prédicteur optimal que l'on recherche dépend de la densité spectrale énergétique du bruit $x(t)$, $\Phi_x(\omega)$, qui est donnée par le produit du carré du module de la réponse en fréquence $R(j\omega)$ du réseau de mise en forme par la densité spectrale énergétique $e^2(\omega)$ du bruit en sortie du préamplificateur. On doit donc chercher comment s'expriment ces deux termes.

III.1 - REPONSE EN FREQUENCE DE LA MISE EN FORME

La fonction de transfert du filtre constitué par une cellule de différentiation CR en série avec une cellule d'intégration RC de même constante de temps $CR = RC = \tau = \frac{1}{a}$ s'exprime par :

$$T(s) = \frac{a\ s}{(s+a)^2}$$

La réponse en fréquence est donc :

$$R(j\omega) = \frac{aj\omega}{(j\omega + a)^2}$$

Le carré du module de cette fonction s'écrit :

$$\left|R(j\omega)\right|^2 = \frac{a^2\,\omega^2}{(\omega^2 + a^2)^2}$$

III.2 - LE SPECTRE DE FREQUENCE DU BRUIT EN SORTIE DU PREAMPLIFICATEUR

Le bruit de fond issu d'un préamplificateur associé à un détecteur semi-conducteur a fait l'objet de nombreuses études qui ont montré que son spectre de fréquence peut être écrit sous la forme générale d'une somme de trois termes :

$$\overline{e^2}(\omega) = A + \frac{B}{\omega} + \frac{C}{\omega^2}$$

(on ne considère pour le moment que des fréquences positives).

Dans cette expression, B représente la constante de l'effet de scintillation (Flicker effect) qui est une donnée expérimentale, et, A et C sont donnés, dans le cas d'un préamplificateur muni à l'entrée d'un transistor à effet de champ par :

$$A = 4\,KT\,\frac{0{,}7}{g_m}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{C_{gs}}{C_T}\right)^2\right]$$

$$C = \frac{1}{4\,\pi^2}\,\frac{1}{C_T^2}\left[2q\,(I_g + I_d) + \frac{4\,KT}{R_T}\right]$$

où :

K est la constante le Boltzmann ($1{,}38.10^{-16}$ erg/°C)

T est la température absolue

g_m est la pente du transistor à effet de champ

C_{gs} est la capacité grille-source du transistor

C_T est la capacité totale du circuit d'entrée y compris la capacité du détecteur et les capacités parasites

q est la charge d'un électron ($1{,}6.10^{-19}$ coulomb)

I_g est le courant de fuite de grille du transistor

I_d est le courant inverse du détecteur

R_T est la résistance équivalente à l'ensemble des résistances qui sont en parallèle dans le circuit d'entrée.

Pratiquement, on a :

$10^{-16} \geqslant A \geqslant 10^{-18}$ Volts ^{2}/ Radian/ seconde

$10^{-13} \geqslant B \geqslant 10^{-15}$ Volts ^{2}

$10^{-5} \geqslant C \geqslant 10^{-8}$ Volts ^{2}/ seconde

III.3.- SPECTRE DE PUISSANCE DU BRUIT EN SORTIE DE L'AMPLIFICATEUR

La densité spectrale énergétique du bruit en sortie de l'amplificateur s'exprime donc sous la forme générale :

$$\Phi_x(\omega) = \left(A + \frac{B}{\omega} + \frac{C}{\omega^2}\right)\frac{a^2\,\omega^2}{(\omega^2 + a^2)^2} = a^2\,\frac{A\omega^2 + B\omega + C}{(\omega^2 + a^2)^2}$$

Si l'on recherche quelle est la contribution de chacun des termes A, B, C, à la puissance du bruit en sortie, on s'aperçoit que la contribution de l'effet de scintillation est négligeable. En effet, en intégrant le spectre de x (t) sur toutes les fréquences, on obtient :

$$\overline{x^2} = \int_0^\infty \Phi_x(\omega)\,d\omega = \frac{a}{8}A + \frac{1}{2}B + \frac{C}{8a}$$

Cette expression permet de voir qu'il existe, pour la mise en forme RC – CR, une constante de temps optimale τ_o qui rend égales les contributions des termes A et C, et qui est déterminée par :

$$\tau_o = \sqrt{\frac{A}{C}}$$

Sa valeur est généralement comprise entre 10^{-5} et 10^{-7} seconde.

Dans ces conditions, on a :

$$\overline{x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{AC} + \frac{1}{2}B$$

et d'après les ordres de grandeur donnés au paragraphe précédent, on voit que $\sqrt{AC}$ est en général 100 à 1.000 fois supérieur à B, c'est-à-dire que la contribution de l'effet de scintillation à la puissance du bruit en sortie est très faible. Il est donc permis de négliger le terme B dans l'expression de la densité spectrale énergétique, et d'écrire :

$$\overline{e^2}(\omega) = A + \frac{C}{\omega^2}.$$

En fait, on adoptera dans la suite une expression légèrement différente qui permet de simplifier les notations, et qui autorisera une comparaison directe avec certains résultats publiés dans la littérature, en particulier par Blalock (7) :

$$\overline{e^2}(\omega) = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{k^2}{\omega^2}\right)$$

et l'on admet à partir de maintenant que la densité spectrale énergétique s'étend à toutes les fréquences négatives et positives.

On a donc :

$$K = A \qquad k = \sqrt{\frac{C}{A}}$$

et l'on voit que k n'est autre que l'inverse de la constante de temps optimale de la mise en forme RC – CR.

Partant de cette expression de $\overline{e^2}(\omega)$, on obtient pour la densité spectrale énergétique de $x(t)$ la forme suivante :

$$\Phi_x(\omega) = \frac{K}{2} a^2 \frac{\omega^2 + k^2}{(\omega^2 + a^2)^2}$$

que l'on utilisera à l'avenir dans tous les calculs.

IV - CALCUL DU PREDICTEUR OPTIMAL

Le problème qu'il faut résoudre maintenant est de déterminer la réponse indicielle $h_{opt}(t)$ que doit avoir le filtre prédicteur, telle que, $y(t)$ étant sa réponse au signal $x(t)$, la fonction d'erreur :

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t - \alpha)$$

soit minimale en valeur quadratique.

Le bruit $x(t)$ étant par hypothèse stationnaire et ergodique, on cherche à minimiser la valeur moyenne temporelle

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon^2(t)\, dt$$

de $\varepsilon^2(t)$. N'ayant affaire qu'à des fonctions aléatoires stationnaires et ergodiques, on représentera toujours, dans la suite, par une barre horizontale, l'opération :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt.$$

Le calcul du filtre optimal est un calcul classique [10] de la théorie statistique des communications. Néanmoins, il a semblé intéressant d'expliquer ici comment on arrive à montrer que la réponse indicielle du filtre optimal est solution d'une équation intégrale dite «équation de Wiener - Hopf». Le calcul qui permet de résoudre cette équation est reporté en Annexe, car il ne présente pas d'autre intérêt que mathématique.

IV.1 - MINIMISATION DE L'ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE

Soit $h(t)$ la réponse indicielle d'un filtre utilisé comme prédicteur. Au signal $x(t)$, ce filtre répond par $y(t)$.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\, x(t - \tau)\, d\tau$$

L'erreur $\varepsilon(t)$ pour une prédiction en avance de α est :

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t - \alpha) = x(t) - \int_0^{\infty} h(\tau)\, x(t - \alpha - \tau)\, d\tau$$

La valeur quadratique moyenne de $\varepsilon(t)$ que l'on cherche à minimiser est :

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left[x(t) - \int_0^\infty h(\tau)\, x(t-\alpha-\tau)\, d\tau \right]^2}$$

$h(t)$ étant une fonction certaine, l'opération «valeur moyenne» ne porte pas sur elle dans le développement de cette expression qui s'écrit donc :

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2} - 2\int_0^\infty h(\tau)\, \overline{x(t-\alpha-\tau)\, x(t)}\, d\tau$$

$$+ \iint_0^\infty h(\tau)\, h(\sigma)\, \overline{x(t-\alpha-\tau)\, x(t-\alpha-\sigma)}\, d\tau\, d\sigma$$

On observe dans les deux derniers termes l'apparition de la fonction d'autocorrélation : $\varphi_x(\tau)$ de $x(t)$ sous la forme :

$$\varphi_x(\tau+\alpha) = \overline{x(t-\alpha-\tau)\, x(t)}$$

et

$$\varphi_x(\tau-\sigma) = \overline{x(t-\alpha-\tau)\, x(t-\alpha-\sigma)}$$

On a donc :

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2} - 2\int_0^\infty h(\tau)\, \varphi_x(\tau+\alpha)\, d\tau + \iint_0^\infty h(\tau)\, h(\sigma)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\tau\, d\sigma$$

Soit $\eta(t)$ une fonction nulle pour $t < 0$ et quelconque pour $t > 0$. Cette fonction présente les caractéristiques mathématiques de la réponse indicielle d'un filtre physiquement réalisable :

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \eta(t) & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit $h_1(t)$ la réponse indicielle d'un filtre obtenu par une combinaison linéaire de $h(t)$ et de $\eta(t)$:

$$h_1(t) = h(t) + \mu\, \eta(t)$$

(μ est un scalaire quelconque).

En utilisant ce filtre à la place de $h(t)$, on obtient l'erreur quadratique moyenne :

$$\overline{\varepsilon^2} + \delta\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2} - 2\int_0^\infty \left[h(\tau) + \mu\,\eta(\tau) \right] \varphi_x(\tau+\alpha)\, d\tau$$

$$+ \iint_0^\infty \left[h(\tau) + \mu\,\eta(\tau) \right] \left[h(\sigma) + \mu\,\eta(\sigma) \right] \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\tau\, d\sigma$$

La variation $\delta\overline{\varepsilon^2}$ due à $\mu\,\eta(t)$ est donc :

$$\delta\overline{\varepsilon^2} = \mu \iint_0^\infty \eta(\sigma)\, h(\tau)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

$$+ \mu \iint_0^\infty h(\sigma)\, \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

$$+ \mu^2 \iint_0^\infty \eta(\sigma)\, \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

$$- 2\mu \int_0^\infty \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau+\alpha)\, d\tau$$

La fonction d'autocorrélation $\varphi_x(\tau)$ étant une fonction paire, les deux premiers termes de l'expression ci-dessus sont égaux.

On écrira donc :

$$\delta\overline{\varepsilon^2} = 2\mu \iint_0^\infty h(\sigma)\, \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

$$+ 2\mu \iint_0^\infty \eta(\sigma)\, \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

$$- 2\mu \int_0^\infty \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau+\alpha)\, d\tau$$

C'est-à-dire que $\delta \varepsilon^2$ est obtenu sous la forme :

$$\delta \overline{\varepsilon^2} = 2\mu A + \mu^2 B - 2\mu C$$

Si h (t) est la réponse $h_{opt}(t)$ du prédicteur optimal, on doit avoir, suivant un des principaux théorèmes du calcul des variations :

$$\frac{d}{d\mu} (\delta \overline{\varepsilon^2}) \Big|_{\mu = 0} = 0$$

C'est-à-dire :

$$2A - 2C = 0$$

Soit donc :

$$A - C = 0$$

On obtient ainsi :

$$\iint_0^\infty h_{opt}(\sigma)\, \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau - \sigma)\, d\sigma\, d\tau - \int_0^\infty \eta(\tau)\, \varphi_x(\tau + \alpha)\, d\tau = 0$$

qui s'écrit également :

$$\int_0^\infty \eta(\tau) \left[\int_0^\infty h_{opt}(\sigma)\, \varphi_x(\tau - \sigma)\, d\sigma - \varphi_x(\tau + \alpha) \right] d\tau = 0$$

Pour que cette égalité soit vérifiée quelle que soit $\eta(\tau)$, il faut que la fonction :

$$q(\tau) = \int_0^\infty h_{opt}(\sigma)\, \varphi_x(\tau - \sigma)\, d\sigma - \varphi_x(\tau + \alpha)$$

soit nulle pour $\tau \geqslant 0$. Pour $\tau < 0$, cette fonction $q(\tau)$ peut être quelconque.

Cette équation qui est appelée équation de Wiener-Hopf, permet de trouver $h_{opt}(t)$ connaissant $\varphi_x(\tau)$. Sa résolution donnée en Annexe I fournit la réponse indicielle du filtre optimal.

IV.2 - LA REPONSE INDICIELLE DU PREDICTEUR OPTIMAL

L'expression obtenue pour la réponse indicielle du prédicteur optimal est :

$$h_{opt}(t) = [(k - a)\alpha + 1]\, e^{-a\alpha}\, \delta(t) - \alpha (k - a)^2\, e^{-a\alpha}\, e^{-kt}$$

On reconnaît aisément la réponse obtenue en mettant en parallèle deux filtres :

- un amplificateur (ou un atténuateur) de gain

$$[(k - a)\alpha + 1]\, e^{-a\alpha}$$

- un intégrateur RC ayant la constante de temps $RC = \frac{1}{k}$, suivi d'un amplificateur (ou d'un atténuateur) de gain :

$$\frac{\alpha}{k} (k - a)^2\, e^{-a\alpha}$$

Dans le dispositif expérimental qui est proposé ici, on a toujours $\alpha = \frac{1}{a}$ puisque l'avance apportée par la prédiction doit être égale au temps $\tau = \frac{1}{a}$ que met l'impulsion $S(t) = at\, e^{-at}$ pour atteindre son maximum. On a donc :

$$h_{opt}(t) = \frac{k\alpha}{e}\, \delta(t) - \frac{k\alpha}{e} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^2 k e^{-kt}$$

On aboutit donc à une expression simple, et l'on voit que le filtre correspondant peut être aisément réalisé. Il importe maintenant de déterminer l'amélioration du rapport signal à bruit que l'on est théoriquement en droit d'attendre de ce dispositif.

V - AMELIORATION THEORIQUEMENT APPORTEE PAR LE PREDICTEUR

V.1 - L'ERREUR OPTIMALE

Le calcul du prédicteur optimal fournit en même temps le moyen de déterminer l'erreur quadratique moyenne optimale [Lee p. 435], limite inférieure de l'erreur quadratique moyenne en dessous de laquelle on ne peut parvenir. Elle est donnée par :

$$\overline{\varepsilon^2}_{opt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha} \psi_x^2 (\tau)\, d\tau$$

où $\psi_x(\tau)$ est une fonction qui a déjà été calculée dans le cours de la résolution de l'équation de Wiener-Hopt (Voir Annexe I). On avait :

$$\psi_x(\tau + \alpha) = \int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} \Phi_x + (\lambda)\, e^{j\lambda\alpha}\, e^{j\lambda\tau}\, d\lambda \qquad \sigma_1 < 0$$

On a ici :

$$\psi_x(\tau) = \pi a \sqrt{2} \sqrt{k}\, [(k - a)\, \tau e^{-a\tau} + e^{-a\tau}]$$

On obtient, en appelant γ le rapport de la constante de temps $\tau = \frac{1}{a}$ affichée dans l'amplificateur de mise en forme, à la constante de temps $\tau_o = \frac{1}{k}$, optimale au point de vue rapport signal à bruit en l'absence de l'utilisation du prédicteur ($\gamma = \frac{k}{a}$) :

$$\overline{\varepsilon^2}_{opt} = \frac{1}{4} \pi K k \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} \left[1 - \frac{1}{e^2} \frac{5\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2 + 1} \right]$$

On peut comparer la valeur quadratique moyenne de $x(t)$,

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{4} K k \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma}$$

à $\overline{\varepsilon^2}_{opt}$ en calculant le rapport :

$$\xi = \frac{\overline{\varepsilon^2}_{opt}}{\overline{x^2}} = 1 - \frac{1}{e^2} \frac{5\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2 + 1} = 1 - \frac{5}{e^2} + \frac{4}{e^2} \frac{\gamma + 1}{\gamma^2 + 1}$$

On voit que ce rapport est d'autant plus grand que γ est grand et tend vers une limite $1 - \frac{5}{e^2} = 0{,}324$.

Mais il ne faut pas perdre de vue le but du dispositif qui est d'améliorer le rapport signal à bruit et non de diminuer le bruit seulement. Si d'augmenter γ (c'est-à-dire augmenter $\tau = \frac{1}{a}$ permet effectivement d'améliorer la prédiction du bruit, il n'en reste pas moins que le rapport signal à bruit en sortie de la mise en forme, qui est, lui, optimum pour $a = k$, se dégrade. Il faut donc prendre en considération ce rapport pour déterminer les conditions optimales d'utilisation du dispositif de filtrage avec prédiction.

V.2 - LE RAPPORT BRUIT A SIGNAL

C'est le rapport bruit à signal $(\frac{b}{s})$ plutôt que signal à bruit qui est généralement pris en considération dans la littérature pour exprimer l'efficacité d'un réseau de mise en forme dans une chaîne de spectrométrie [4-6-7]. Le bruit étant déterminé par ses paramètres K et $\overline{k}$ (Blalock)* ou a et g (Tsukuda, Samueli) et par les constantes du filtre, on rapporte son écart type à l'amplitude maximale V_M de la réponse du réseau de mise en forme à un échelon unité. Pour Tsukuda et Samueli, le filtre optimal (physiquement non réalisable) donne le rapport $b/s = \sqrt{ag}$.

Avec les notations adoptées ici, analogues à celles utilisées par Blalock, on aurait :

$$\frac{b}{s} = \sqrt{2\pi}\sqrt{Kk} = 2{,}506\sqrt{Kk} \quad \text{pour le filtre optimal.}$$

On a vu que pour la mise en forme RC – CR $V_M = \frac{1}{e}$. On a donc, pour le rapport $\frac{b}{s}$ sans le dispositif prédicteur :

$$\left(\frac{b}{s}\right)_1 = \frac{\sqrt{\overline{x^2}}}{1/e} = \frac{e}{2}\sqrt{\pi}\ \sqrt{Kk}\ \frac{\gamma^2+1}{\gamma}$$

Ce rapport est minimum pour $\gamma = 1$, $(k = a)$ et vaut :

$$\left(\frac{b}{s}\right)_0 = e\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \sqrt{Kk} = 3{,}4\ \sqrt{Kk}$$

En utilisant le dispositif prédicteur, on obtient :

$$\left(\frac{b}{s}\right)_2 = \frac{\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}}{1/e} = \frac{e}{2}\sqrt{\pi}\ \frac{\gamma^2+1}{\gamma}\ \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}\ \frac{5\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2+1}}\ \sqrt{Kk}$$

* En fait, Blalock écrit la densité spectrale énergétique du bruit $\overline{e^2}(\omega) = K(1 + \frac{K}{\omega^2})$. Nous avons adopté k^2 à la place de k pour avoir une constante homogène à l'inverse d'un temps.

Le rapport :

$$\frac{(b/s)_2}{(b/s)_0} = \sqrt{\frac{\gamma^2+1}{2\gamma}\left(1 - \frac{1}{e^2}\ \frac{5\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2+1}\right)}$$

indique en fonction de $\gamma = k/a$ l'amélioration de performances que l'on peut attendre du dispositif prédicteur. Ce rapport est minimum pour $\gamma = 1{,}63$, il prend alors la valeur 0,9.

Ceci montre que le système proposé permet d'améliorer de 10,5 % le rapport bruit sur signal lorsqu'on se place dans les conditions optimales. La réponse indicielle du filtre prédicteur est alors :

$$h_{opt}(t) = 0{,}6\ \delta(t) - 0{,}09\ k\, e^{-kt}$$

Mais il est permis de se demander, en considérant combien faible est le gain qu'il faut donner à la voie intégration (0,09) du prédicteur optimum, quel résultat serait obtenu en n'utilisant qu'un atténuateur pour constituer le filtre prédicteur, ce qui rendrait sa réalisation particulièrement simple.

V.3 - PREDICTION PAR UN ATTENUATEUR

Soit m le rapport d'atténuation de l'atténuateur *(Fig. 4)*. Le signal qui sort de la ligne à retard est $m\,x(t-\alpha)$, et l'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$\varepsilon(t) = x(t) - m\,x(t-\alpha).$$

En valeur quadratique moyenne, on aura :

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2} - 2\,m\,\overline{x(t)\,x(t-\alpha)} + m^2\,\overline{x^2}(t-\alpha)$$

Le bruit $x(t)$ étant stationnaire, on a :

$$\overline{x^2}(t-\alpha) = \overline{x^2}$$

et l'on retrouve la fonction d'autocorrélation $\varphi_x(\tau)$ calculée pour un retard α :

$$\varphi_x(\alpha) = \overline{x(t)\,x(t-\alpha)}$$

Transformée de Fourier de $\Phi_x(\omega)$, on calcule aisément :

$$\varphi_x(\tau) = \frac{\pi}{4}\,Ka\left[1 + \frac{k^2}{a^2} + a\,|\tau|\left(\frac{k^2}{a^2} - 1\right)\right]e^{-a(\tau)}$$

d'où, en utilisant toujours le paramètre $\gamma = k/a$ et avec $a\,\alpha = 1$:

$$\varphi_x(\alpha) = \frac{\pi}{4}\,Kk\,\frac{1+\gamma^2}{\gamma}\ \frac{1}{e}\left(1 + \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}\right)$$

On obtient ainsi :

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2}\,(1 + m^2 - 2m\,\frac{2\,\gamma^2}{e\,(\gamma^2 + 1)})$$

Le rapport $\overline{\varepsilon^2}/\overline{x^2}$ est donc le plus faible pour :

$$m = \frac{1}{e}\;\frac{2\,\gamma^2}{\gamma^2 + 1}$$

Dans ces conditions, le rapport $(b/s)_3$ que l'on peut obtenir est :

$$(\frac{b}{s})_3 = \frac{e}{2}\sqrt{\pi}\,\sqrt{K\,k}\,\sqrt{\frac{1 + \gamma^2}{\gamma}\;\left[1 - \frac{1}{e^2}\,(\frac{2\,\gamma^2}{\gamma^2 + 1})^2\right]}$$

$$= (\frac{b}{s})_o \times \sqrt{\frac{1 + \gamma^2}{2\,\gamma}\;\left[1 - \frac{1}{e^2}\,(\frac{2\,\gamma^2}{\gamma^2 + 1})^2\right]}$$

On trouve que l'expression sous le radical est minimale pour $\gamma = 1{,}59$, et qu'alors on a encore une amélioration de 10 % :

$$(\frac{b}{s})_3 = 0{,}9\;(b/s)_c$$

V.4 - CONCLUSION

Ces calculs montrent donc que le dispositif proposé doit permettre d'obtenir une amélioration de 10 % du rapport signal à bruit donné par la mise en forme RC – CR. Il faut maintenant prouver que l'on peut pratiquement approcher ce résultat : c'est dans ce but qu'ont été effectuées les expériences rapportées au chapitre suivant.

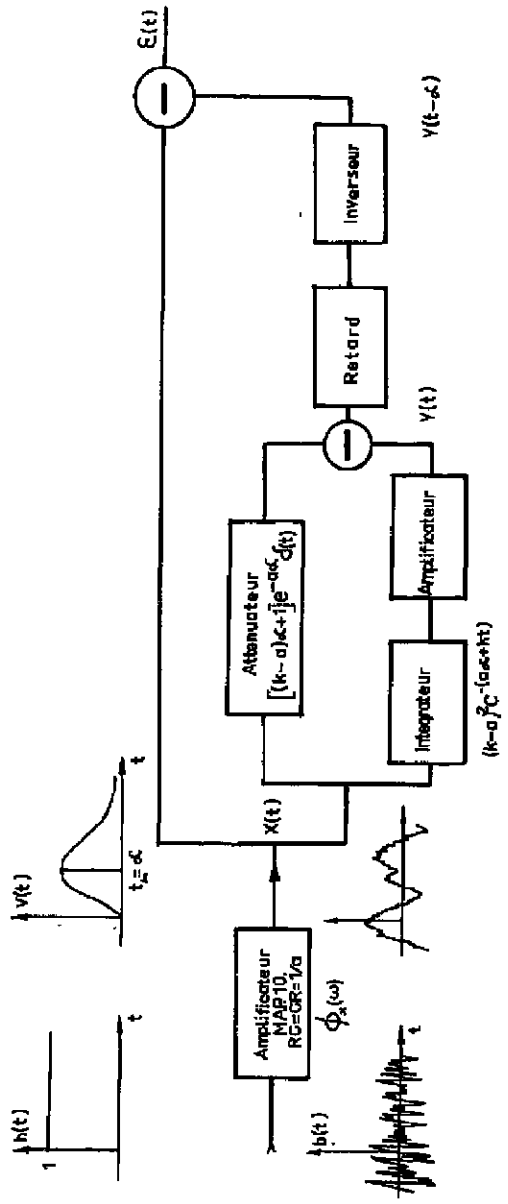


Figure 4
Schéma de principe d'un circuit du prédicteur.

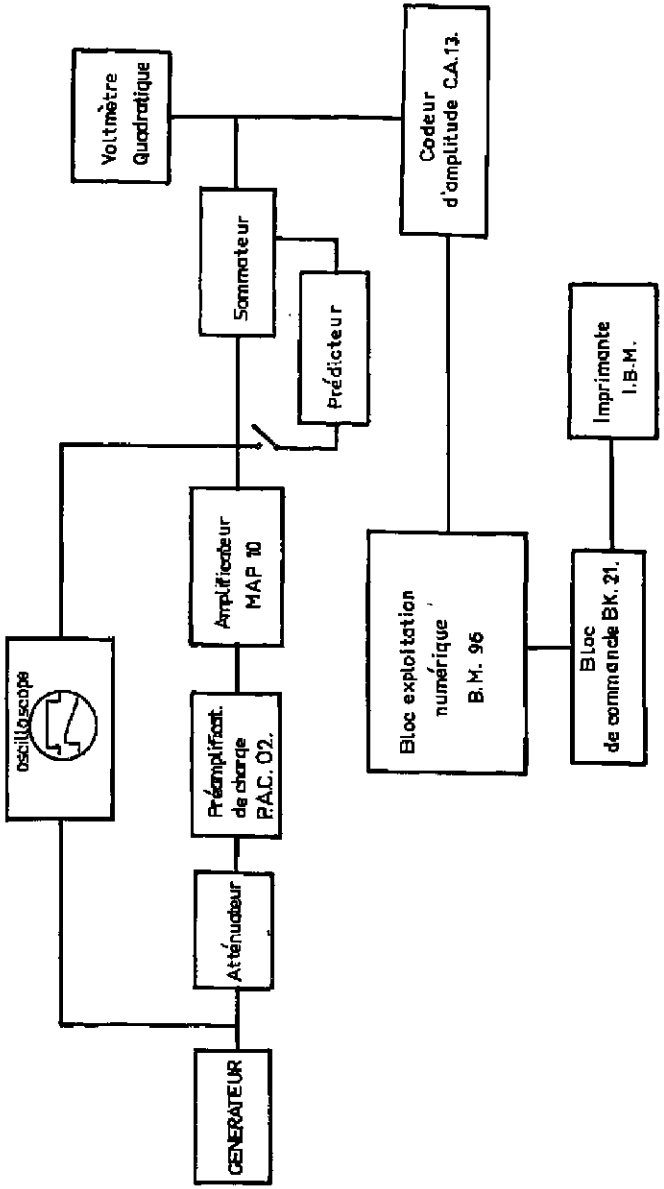


Figure 5

Dispositif expérimental de la chaîne.

VI - EXPERIMENTATION

N'ayant pu disposer du matériel nécessaire pour mesurer la densité spectrale énergétique du bruit en sortie du préamplificateur (et n'ayant pas disposé non plus du temps nécessaire pour concevoir et réaliser ce matériel), nous n'avons pas entrepris d'effectuer un contrôle systématique des conclusions auxquelles a conduit la théorie exposée dans les chapitres précédents. Cette théorie est en effet entièrement basée sur l'hypothèse affirmant que la densité spectrale énergétique du bruit s'exprime par $\overline{e^2}(\omega) = K\left(1 + \frac{k^2}{\omega^2}\right)$; toute expérience destinée à vérifier la théorie doit donc commencer par une mesure du spectre de puissance pour s'assurer qu'il a effectivement la forme admise. Sinon, ce ne serait qu'un moyen détourné de vérifier, a posteriori, que la densité spectrale a bien cette forme (ou toute autre forme conduisant aux mêmes résultats). On serait de plus en droit d'expliquer toute contradiction entre la théorie et l'expérience par le fait que la densité spectrale n'est pas rigoureusement celle admise par hypothèse.

Ces difficultés nous ont amenés à assigner d'étroites limites aux buts des expériences que nous avons entreprises. Nous avons seulement cherché à mettre en évidence dans quelques cas particuliers une amélioration de la résolution due à l'emploi du filtre prédicteur. Les résultats obtenus prouvent que le dispositif proposé améliore effectivement la résolution, mais il est bien certain que cela ne permet pas d'affirmer que l'expérience confirme (ou infirme la théorie) ; d'autres mesures bien plus précises et plus nombreuses devraient être entreprises dans ce but.

VI.1 - DESCRIPTION DE LA CHAINE DE SPECTROMETRIE

L'amélioration attendue de la résolution ne peut porter que sur le bruit de fond purement électronique de la chaîne, aussi n'avons-nous pas fait d'expériences sur un spectre d'énergie réel ; nous avons simplement utilisé un générateur d'impulsions pour simuler des raies dans une chaîne de spectrométrie sans détecteur, où le bruit de fond observé était donc issu uniquement de l'étage d'entrée du préamplificateur. Nous avons constitué un ensemble avec les éléments suivants :

- un préamplificateur de charges PACO2 ou PQO1 (standard CEA),
- un amplificateur MAP 10 (standard CEA),
- un codeur d'amplitude CA 13 (Intertechnique) associé à un bloc mémoire BM 96 (Intertechnique) suivi d'un dispositif d'impression des résultats.

Le préamplificateur de charges PACO2 est une version prototype du PSC 20 (standard CEA), étudiée et réalisée au Département d'Electronique Générale à Saclay. Un transistor à effet de champ type 2N3823 constitue l'élément actif de son étage d'entrée et lui donne une résolution électronique équivalente voisine de 1 keV.

Le préamplificateur de charges PQO1 (standard CEA) comporte à l'entrée un tube électronique E 810 F, et sa résolution électronique équivalente est de 2,5 keV environ.

Le MAP10 est un amplificateur de gain maximal égal à 1.000, muni d'une mise en forme CR-RC, dont les constantes de temps peuvent prendre des valeurs 0,1 - 0,3 - 1 - 3 et 10 microsecondes. La Fig. 4 représente le dispositif expérimental de la chaîne.

VI.2 - DESCRIPTION DU DISPOSITIF PREDICTEUR

La figure 5 montre le bloc-diagramme du filtre qui réalise la réponse indicielle h (t) du prédicteur optimal :

$$h(t) = m_1 \ \delta(t) - m_2 \ ke^{-kt}$$

Le signal qui entre en E atteint simultanément l'atténuateur qui réalise la fonction $m_1 \ \delta(t)$, l'intégrateur qui réalise ke^{-kt} et le circuit différentiel «Diff» où est soustrait le bruit prédit, retardé dans la ligne à retard, du bruit existant en E. En sortie de l'intégrateur, le signal est amplifié (ou atténué) dans l'inverseur de gain m_2. Le signal atténué et le signal intégrés sont mélangés dans l'additionneur qui attaque la ligne à retard.

La figure 6 montre le schéma électrique de l'ensemble. On a cherché à réaliser des circuits stables et linéaires ayant un bruit propre aussi faible que possible. Le montage de base utilisé est celui de l'amplificateur différentiel.

Les résistances R_1 et R_2 sont ajustées pour obtenir le rapport d'atténuation $R_2 (R_1 + R_2) = m_1$. La capacité C et les résistances R_3 et R_4 déterminent la constante de temps d'intégration : $C \frac{R_3 \ R_4}{R_3 + R_4}$. Le gain de l'inverseur est ensuite ajusté par la résistance R_5 pour obtenir le gain global m_2 sur cette voie.

Nous avons utilisé deux lignes à retard à constantes réparties d'impédance caractéristique égale à 1.000 Ω :

- l'une de 3,65 m de long donnait un retard de 1 µs,
- l'autre de 23 m donnait 3 µs.

On a vérifié au voltmètre quadratique que la tension de bruit issue de l'ensemble était bien inférieure à 0,1 % de la tension de bruit existant en sortie de l'amplificateur. On s'est assuré également que la bande passante de l'ensemble était largement supérieure à celle des signaux à transmettre.

Enfin, les parasites extérieurs qui viennent toujours se superposer aux signaux dans ce genre de montages très sensibles ont été à peu près complètement éliminés en blindant soigneusement les circuits et en choisissant judicieusement les points de réunion des différentes masses.

VI.3 - L'APPAREILLAGE DE MESURE

C'est à l'aide d'un voltmètre quadratique type S 400 A RMS Voltmeter (Hewlett - Packard) que nous avons mesuré l'écart - type $\sqrt{\overline{x^2}}$ ou $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$ du bruit.

Le générateur d'impulsions était un «Datapulse 106 A». Il attaquait l'étage d'entrée du préamplificateur de charges à travers un atténuateur et une capacité de 2 µF, par des impulsions rectangulaires de durée suffisante pour simuler l'apparition d'un échelon de charges.

Un oscilloscope Tektronix type 585 permettait d'observer les différents signaux et de mesurer précisément leur amplitude à l'aide d'un tiroir loupe type «W».

VI.4 - PRINCIPE DE LA MESURE DE L'AMELIORATION DU RAPPORT BRUIT A SIGNAL

Nous avons utilisé deux méthodes pour mesurer l'amélioration du rapport signal à bruit.

Dans la première méthode, on mesure l'écart type du bruit en sortie du circuit «Différence» à l'aide du voltmètre quadratique : lorsque l'entrée E du prédicteur est ouverte, on obtient $\sqrt{\overline{x^2}}$, et $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$ lorsqu'elle est fermée. Si l'amplitude maximale, mesurée en sortie du circuit «Différence», des impulsions engendrées dans la chaîne par le générateur reste constante, que le prédicteur soit ou non en usage, le rapport g :

$$g = \frac{\sqrt{\overline{x^2}} - \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}}{\sqrt{\overline{x^2}}}$$

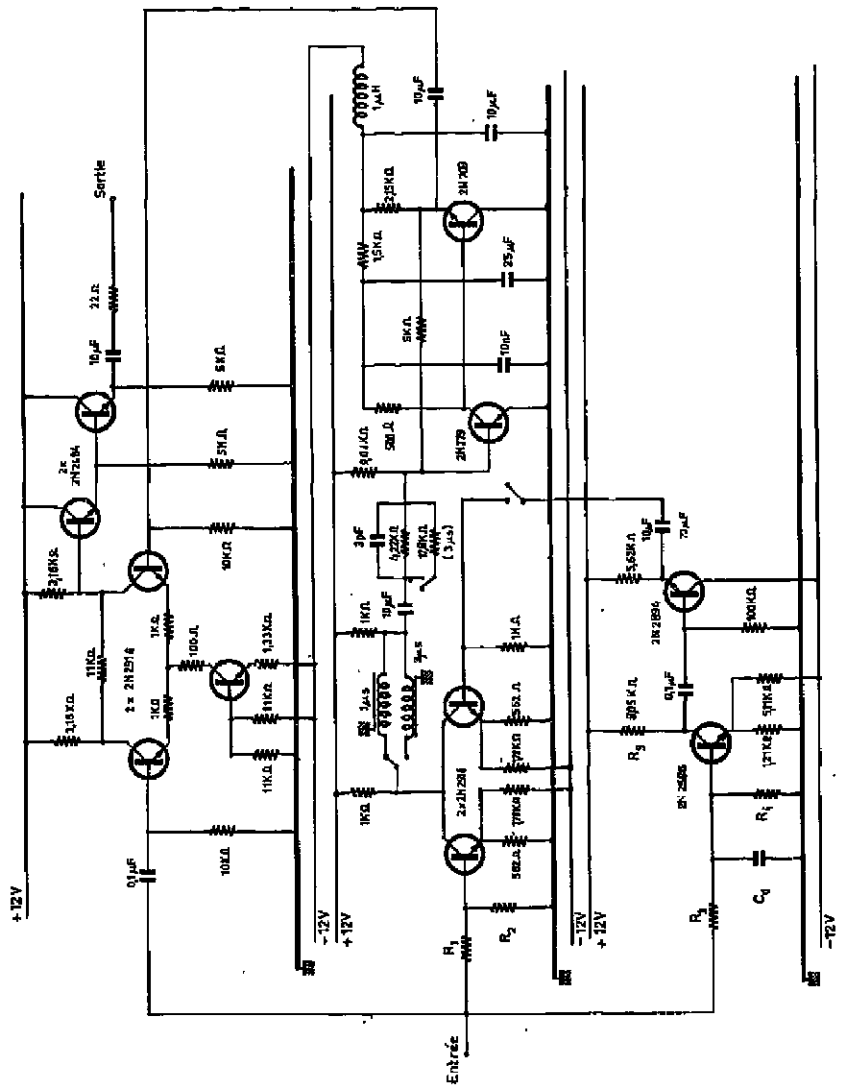
donne l'amélioration du rapport bruit à signal apportée par le prédicteur.

Dans la deuxième méthode, on exploite les possibilités d'enregistrement numérique offertes par l'utilisation du bloc-mémoire. Deux pics engendrés dans la chaîne par le générateur pour deux valeurs de l'atténuation à l'entrée sont enregistrés successivement ; une première expérience est faite avec le prédicteur branché. Soient N_1 et N_1' ($N_1' > N_1$) les numéros d'ordre des canaux du bloc-mémoire où se situent les sommets des pics engendrés par la répétition des signaux d'amplitude S_1 pour N_1 et $S'_1 = \lambda S_1$ pour N'_1, enregistrés sans le prédicteur. La différence $N'_1 - N_1$ est proportionnelle à $S'_1 - S_1 = (\lambda - 1) S_1$. Si n_1 est la largeur à mi-hauteur du pic N_1, le rapport $r_1 = \frac{n_1}{N'_1 - N_1}$ est proportionnel au rapport bruit à signal en l'absence du prédicteur. Cette manipulation, renouvelée en présence du prédicteur, donnera $R_2 = \frac{n_2}{N'_2 - N_2}$. Si l'amplitude du signal S_1 délivré par le générateur reste constante, le rapport :

$$G = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

est une mesure de l'amélioration du rapport signal à bruit apportée par le dispositif prédicteur.

L'enregistrement numérique du contenu des canaux du bloc-mémoire qui renferment chacun des pics permet d'effectuer des calculs nécessaires pour reporter les données sur un papier gausse-arithmétique et tracer les droites de Henry correspondantes.


Sortie
Entrée
+12V
-12V
+12V
-12V
+12V
-12V
2N709
2N729
2N2894
2N2894
2N2894

Dans les mesures au voltmètre quadratique, lorsque la lecture se fait vers le milieu de l'échelle, on peut estimer à 2 pour cent l'erreur relative de chaque mesure. On a donc :

$$\Delta g = 0{,}04$$

ce qui représente une erreur relative importante puisque l'on ne doit pas s'attendre à ce que g excède 0,1 (10 %).

Dans les mesures de G utilisant le tracé des droites de Henry, on a :

$$\Delta G = \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{\Delta r_2}{r_2} = 2\,\frac{\Delta r}{r}$$

L'erreur relative commise dans la mesure de $r = \frac{n}{N - N'}$ est :

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta (N - N')}{N - N'}$$

On peut estimer que n et N – N' sont déterminés à $\frac{2}{10}$ de canal près.

On a donc :

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{2}{10}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N - N'}\right)$$

D'où :

$$\Delta G = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N - N'}\right)$$

Dans nos mesures, nous avions en général n = 12 à 15, et N – N' voisin de 250, ce qui donne une erreur absolue :

$$\Delta G = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{250}\right) \sim 0{,}037.$$

Cette erreur est à peine plus faible que celle obtenue par la méthode du voltmètre quadratique. Elle décroît cependant notablement lorsque n croît.

La méthode des droites de Henry présente l'avantage de fournir une bonne indication du caractère gaussien (ou non) du bruit. De plus, les résultats des mesures sont enregistrés ; ils peuvent donc être réutilisés sans ambiguité. Tableaux VII, VIII, IX, X.

VI.7 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

1°) Mesures au voltmètre quadratique :

Nous avons d'abord observé que la mise en service du prédicteur produisait une diminution inférieure à 1 % de l'amplitude du signal à la sortie du circuit.

a) Dans une première série d'expériences, ignorant la valeur réelle de la constante de temps optimale τ_o correspondant au bruit issu du préamplificateur PACO2 utilisé, nous avons donné au prédicteur la réponse optimale h (t) calculé pour $\tau = \frac{1}{\alpha} = 1\ \mu s$ en supposant successivement que τ_o

avait les valeurs 0,5, 1, 2, 3, 4 et 5 µs, et nous avons mesuré $\sqrt{\overline{x^2}}$ sans le prédicteur, et $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$ avec le prédicteur. Le tableau I donne les valeurs calculées pour les coefficients $m_1 = \gamma \times \frac{1}{e}$ et $m_2 = \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} \times \frac{1}{e}$ de h_{opt} (t). Le tableau II donne les valeurs efficaces des bruits qui ont été mesurées dans ces conditions.

TABLEAU I

	opt (supposé) µs	0,5	1	2	3	4	5	6
	$\gamma = \frac{k}{\alpha}$	2	1	0,5	0,333	0,25	0,2	0,167
m_1	Gain de la voie d'atténuation	0,73	0,368	0,185	0,124	0,092	0,073	0,065
m_2	Gain de la voie d'intégration	0,184	0	0,18	0,49	0,83	1,17	1,53

Tableau I - Les valeurs calculées du gain de la voie d'analyse pour divers valeurs de τ_{opt} avec RC = CR = 1 µs et α = 1 µs.

TABLEAU II

τ_{opt} supposé	Voie d'atténuation			Voie d'intégration				V^2 de bruit		
								Sans le prédicteur	Avec le prédicteur	
µs	R_1 KΩ	R_2 KΩ	Gain	R_3 KΩ	R_4 KΩ	R_5 KΩ	Gain	mV	mV	Gain %
0,5	0,287	1	0,73	32,8	1	8,05	0,18	29,5	28,6	3,05 %
1	1,78	1	0,361	0	1	8,05	0	29,5	27	8,5 %
2	4,22	1	0,185	32,8	1	8,05	0,18	29,5	26,8	9,15 %
3	7,06	1	0,124	11	1	8,05	0,49	29,5	29	1,7 %
4	10	1	0,092	6,19	1	8,05	0,83	29,5	32	
5	13,3	1	0,073	4,22	1	8,05	1,17	29,5	35	

Tableau II - Valeurs numériques expérimentales des éléments en fonction τ_{opt} (supposé) pour RC = CR = α = 1 µs.

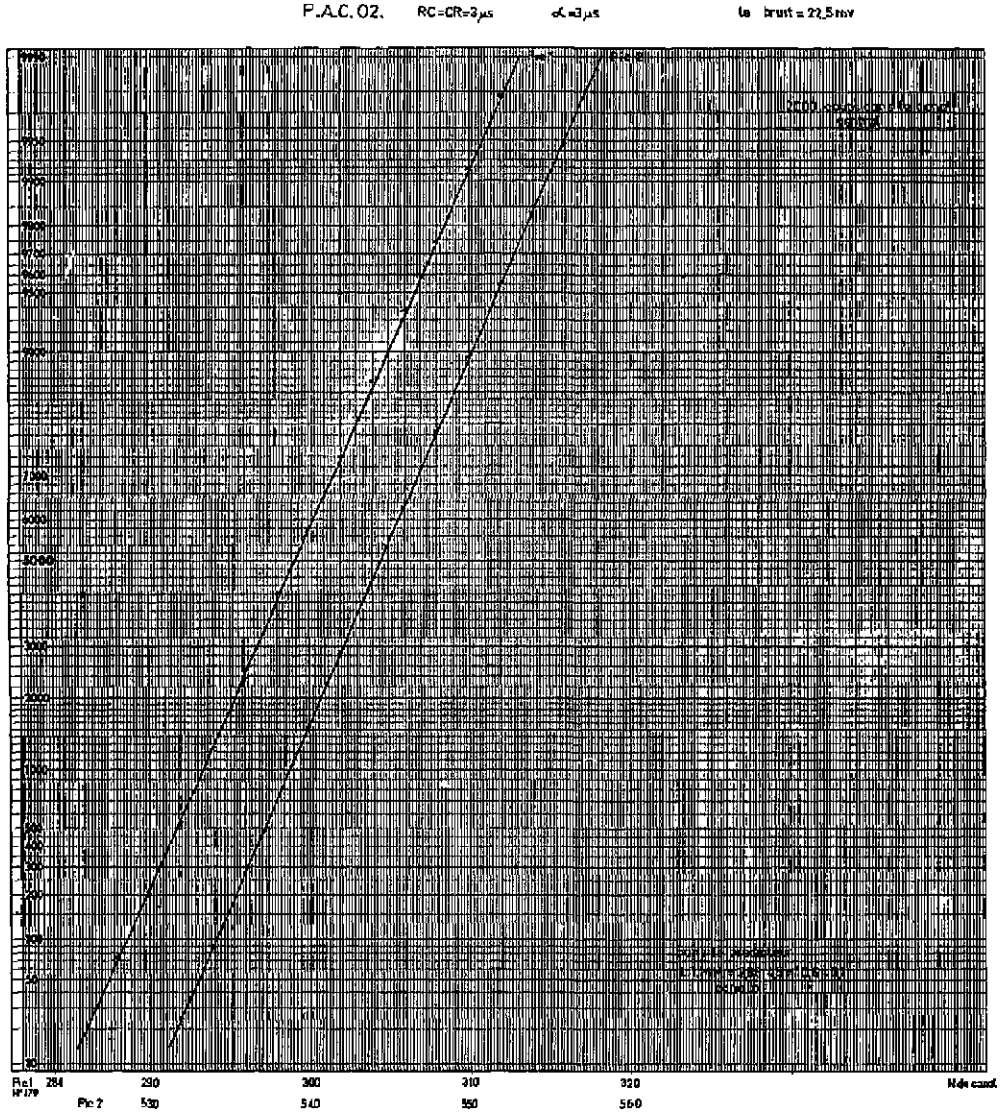


Figure 7

Largeur des pics à mi-hauteur sans le prédicteur.

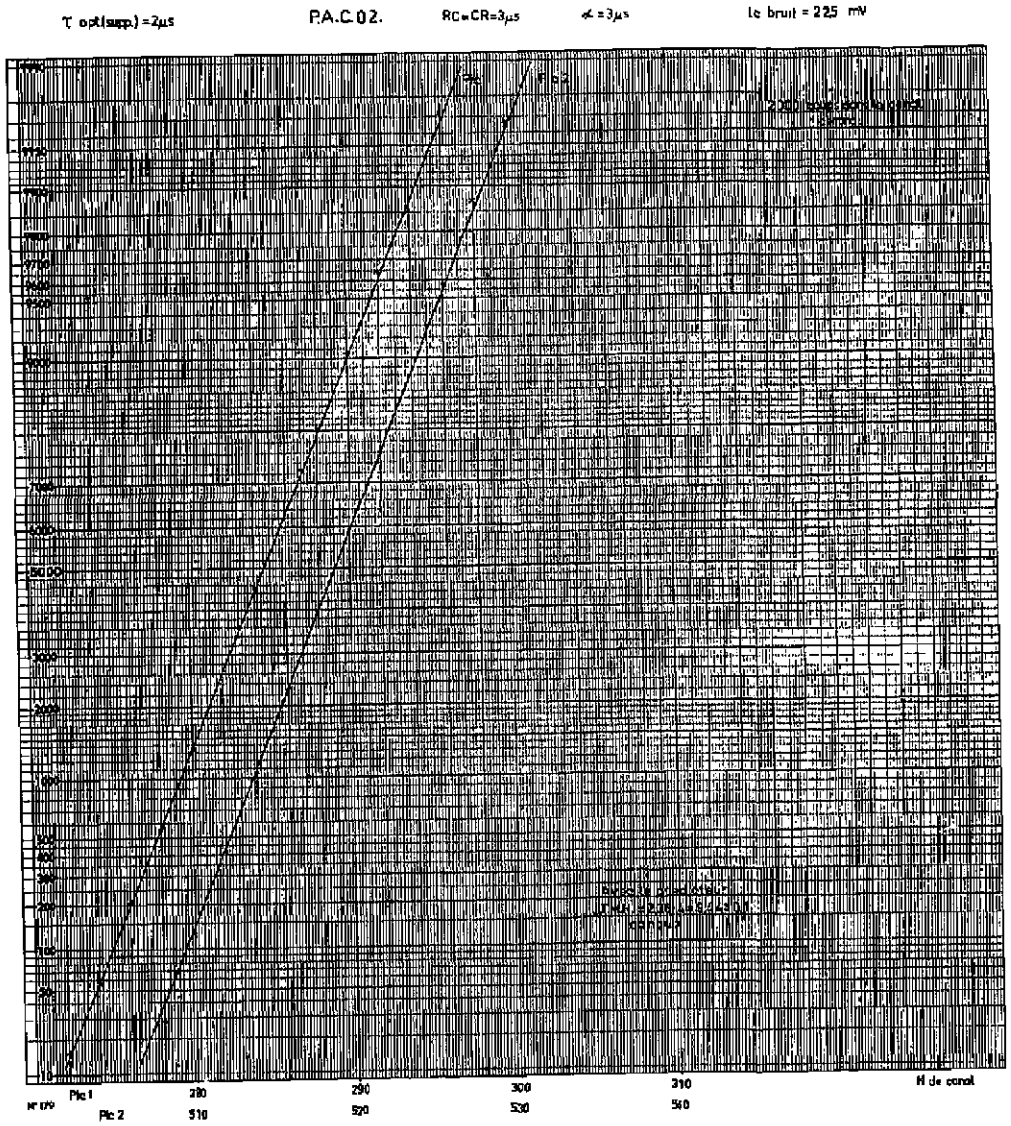


Figure 8

Largeur des pics à mi-hauteur avec le prédicteur pour τ_{opt} *(supp)* = 2 µs

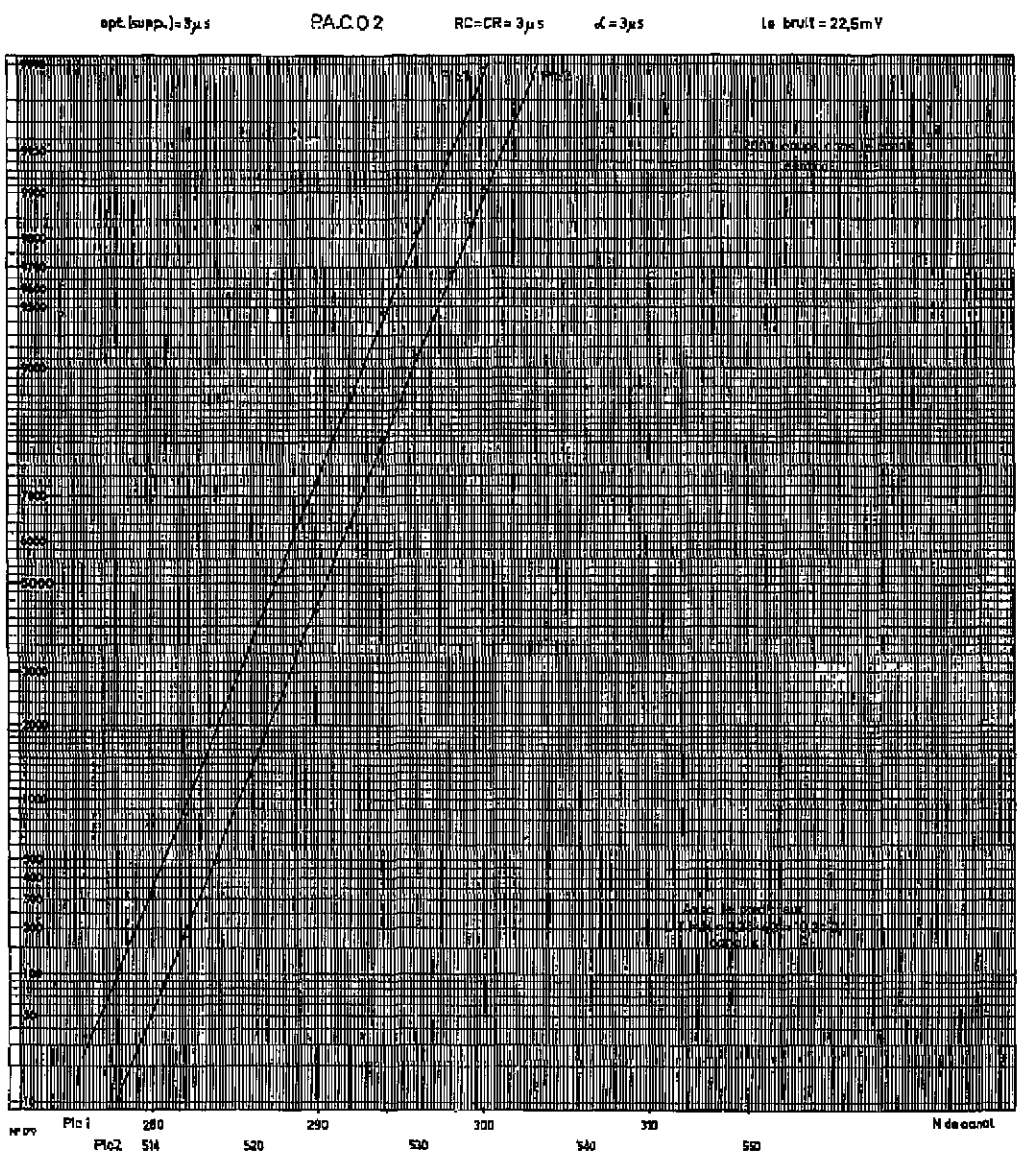


Figure 9

Largeur des pics à mi-hauteur avec le prédicteur pour τ_{opt} (supp) = 3 µs

Ces premiers résultats montrent que le prédicteur améliore de façon nette le rapport bruit à signal de la chaîne, et que, cette amélioration étant la plus forte pour la valeur supposée $\tau_0 = 2$ µs, il est vraisemblable que c'est effectivement la valeur de la constante de temps optimale correspondant au bruit issu du PACO2. Ceci corrobore la détermination grossière que l'on peut faire avec l'amplificateur MAP10 seul, en mesurant le bruit pour les différentes valeurs possibles de la constante de temps de mise en forme. Cette expérience montre en effet que le minimum de bruit doit être obtenu pour τ compris entre 1 et 3 microsecondes.

D'autre part, nous avons pu constater que des variations de m_1 et m_2 de quelques pour cent autour de la valeur déterminée ne changeaient pas de façon appréciable les valeurs mesurées pour $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$, et que les valeurs optimales réelles étaient certainement voisines des valeurs optimales calculées.

2°) PQ 01 - RC = CR = τ = 1 µs α = 1 µs

Des essais préliminaires effectués en mesurant le bruit au voltmètre quadratique ayant montré que l'amélioration la plus grande était obtenue pour $m_1 = 0{,}37 = \frac{1}{e}$ et $m_2 = 0$, on a effectué une mesure de résolution dans ces conditions. Les résultats ont été les suivants :

Sans le prédicteur $N'_1 - N_1 = 223{,}2$ $n_1 = 23{,}2$

d'où : $r_1 = 0{,}104$

Avec le prédicteur $N'_2 - N_2 = 214{,}6$ $n_2 = 19{,}3$

d'où : $r_2 = 0{,}09$

Soit $G \doteq \frac{0{,}104 - 0{,}09}{0{,}104} = 13{,}5\ \% \pm 2\ \%$

Les valeurs de n conduisent à une précision assez bonne.

Cette valeur de G est supérieure à ce que l'on attendait.

3°) Dans la deuxième série d'expériences, nous avons utilisé la ligne à retard avec d = 3 µs. Le choix de cette valeur était la conséquence de l'application des résultats exposés au paragraphe V.2 et des possibilités techniques de l'appareillage utilisé. La valeur dépend de τ_{opt} et du temps de montée de l'impulsion après mise en forme. La réponse indicielle h opt (t) du filtre prédicteur dépend de la valeur de γ et s'écrit :

$$h\ opt\ (t) = \gamma e^{-1}\ \delta(t) - (\gamma - 1)^2 \frac{1}{\gamma} e^{-1}\ k e^{-kt}$$

Les calculs et l'expérience montrent que les valeurs optimales pour lesquelles le bruit devient minimal sont $\gamma opt = 1{,}63$ dans le cas du prédicteur à deux voies (atténuation et intégration) et $\gamma opt = 1{,}59$ pour une seule voie (d'atténuation) du prédicteur.

Prenant en considération la valeur $\tau_{opt} = 2\ \mu s$ trouvée expérimentalement, nous trouvons en utilisant la formule générale (xxx) que les valeurs γ optimum correspondent à $RC = CR = 3\ \mu s$ et $\alpha = 3\ \mu s$ pour le filtre prédicteur complet (deux voies).

Le tableau III ci-dessous contient les valeurs théoriques du gain du prédicteur pour les deux voies d'analyse (atténuation et intégration). Etant donné que dans la réalisation expérimentale nous étions limité par les valeurs existantes de constantes de temps de mise en forme, les valeurs adoptées dans l'expérience sont légèrement différentes des valeurs théoriques. Il ne faut pas oublier que les valeurs τ_{opt} choisies sont des valeurs hypothétiques. Conformément aux calculs pour la valeur γ_{opt}, l'influence de la voie d'intégration du prédicteur devient très faible et elle peut être complètement négligée. Le filtre prédicteur dans ce cas est un circuit à une seule voie. Le tableau IV montre les résultats expérimentaux. Dans le cas des mesures pour la valeur hypothétique $\tau_{opt} = 1\ \mu s$, le gain de la voie d'intégration ayant une valeur qui ne peut pas être négligée, l'expérience a été effectuée avec deux voies. Le gain 1,35 * représente le gain global de la voie d'atténuation. Les éléments de la voie d'intégration sont calculés d'après le tableau III. Pour les valeurs $\tau_{opt} = 2\ \mu s$ et $3\ \mu s$ les mesures étaient faites uniquement avec la voie d'atténuation étant donné la très faible influence de la voie d'intégration (0,06 – $\tau_{opt} = 2\ \mu s$), et (0 – $\tau_{opt} = 3\ \mu s$).

TABLEAU III

opt (supposé) µs	1	2	3
$\gamma = \frac{k}{a}$	3	1,5	1
Gain de la voie d'atténuation	1,35	0,548	0,368
Gain de la voie d'intégration	0,49	0,06	0
L'amélioration du $\frac{B}{S_{max}/(\frac{B}{S})_{min}}$	5,6 %	~ 10,5 %	7 %

Tableau III - Les valeurs théoriques pour $RC = CR = 3\ \mu s$ $\alpha = 3\ \mu s$ en fonction du τ_{opt} (supposé).

TABLEAU IV

τ_{opt} (supposé)	Voie d'atténuation			V^2 du bruit mesuré avec V^0		
µs	R_1	R_2	Gain	Sans préd.	Avec préd.	L'amélioration de bruit
1	6,19	1 KΩ	1,35 *	22,1 mV	21,0 mV	4,9 %
2	0,82	1 KΩ	0,56	22,2	20,1	9,5 %
3	1,78	1 KΩ	0,361	22,0	20,6	6,4 %

Tableau IV - Valeurs expérimentales des éléments et l'amélioration obtenue dans le cas $RC = CR = 3\ \mu s$ et $\alpha = 3\ \mu s$.

4°) Expériences avec le PACO2 :

- $RC = CR = 1\ \mu s$:

Voie atténuation seule avec le gain $\frac{1}{e}$

Sans le prédicteur :

$N'_1 - N_1 = 235,4$ $\qquad n_1 = 13,3$

$$r_1 = \frac{13,3}{235,4} = 0,0576$$

Avec le prédicteur :

$N'_2 - N_2 = 235,3$ $\qquad n_2 = 12,4$

$$r_2 = \frac{12,4}{235,3} = 0,0528$$

D'où :

$$G = \frac{r_1 - r_2}{r_1} = \frac{0,0048}{0,0576} = 8\ \% \pm 3,5\ \%$$

On a théoriquement dans ce cas, si l'on admet $\tau_o = 2\ \mu s$, une détérioration du rapport bruit à signal.

- RC = CR = 3 µs $\qquad \alpha = 3$ µs.

Voie atténuation seule avec le gain 0,56.

(La valeur théorique $m = \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 \mu} \times \frac{1}{e}$ est 0,51 en admettant $\tau_0 = 2$ µs).

Sans le prédicteur :

$N'_1 - N_1 = 246,3 \qquad n_1 = 10,6$

$$r_1 = \frac{10,6}{246,3} = 0,043$$

Avec le prédicteur :

$N'_2 - N_2 = 234,4 \qquad n_2 = 9,45$

$$r_2 = \frac{9,45}{234,4} = 0,0403$$

D'où :

$$G = \frac{r_1 - r_2}{r_1} = \frac{27}{403} = 7\ \% \pm 4\ \%$$

Les mesures du rapport $\frac{B}{S}$ effectuées parallèlement avec le voltmètre quadratique nous avaient donné les résultats présentés dans le tableau :

Sans le prédicteur		Avec le prédicteur	
Bruit	21,4 mV	Bruit	19,3 mV
Signal	205 mV	Signal	203,5 mV
$\frac{B}{S}$	0,1045	$\frac{B}{S}$	0,095

Tableau V - Les résultats d'amélioration du $\frac{B}{S}$ obtenus avec le voltmètre quadratique pour $\alpha = 3$ µs et $\tau_{opt} = 2$ µs

$$G = \frac{0,1045 - 0,095}{0,1045} = 9,05\ \%$$

VII - APPLICATIONS

Les quelques expériences qui viennent d'être décrites montrent que le dispositif prédicteur proposé agit bien sur la résolution de la chaîne dans le sens prévu. Mais il est permis de se demander si ce dispositif peut présenter un intérêt pratique, ou s'il faut envisager le travail que nous avons effectué d'un point de vue purement académique.

Il est certain que l'amélioration obtenue de la résolution, qui n'excède sans doute pas 10 %, ne suffit pas à justifier l'introduction du filtre prédicteur dans une chaîne de spectrométrie. Car ces 10 % peuvent également être obtenus, plus simplement, en passant de la mise en forme CR - RC envisagée jusqu'ici, à la mise en forme à double intégration et simple différentiation CR - RC_2. Mais le même dispositif peut être utilisé conjointement avec la mise en forme CR - RC_2 ! Les calculs développés en Annexe II montrent que dans le cas où l'on utilise le prédicteur optimal avec une mise en forme CR - RC_2, l'amélioration que l'on doit théoriquement attendre est de 6,5 %, ce qui finalement fait environ 16 % de différence au total avec une mise en forme RC - CR employée seule.

Mais l'aspect amélioration du rapport signal à bruit n'est pas le seul intéressant dans ce dispositif. Muni d'une ligne à retard, il effectue en quelque sorte une deuxième différentiation du signal, rendant plus rapide son retour à zéro. C'est un point qui a de l'importance : en effet, pour qu'un codeur d'amplitude donne une mesure aussi exacte que possible de l'amplitude maximale d'un signal, il faut que, au moment où se fait cette mesure, le signal ou les signaux arrivés précédemment soient complètement amortis. Sinon, des empilements apparaissent, qui se traduisent par un élargissement des raies du spectre.

La durée d'un signal, théoriquement infinie puisque l'on a affaire à des signaux décroissant exponentiellement, ne peut recevoir de définition pratique bien rigoureuse. Deux définitions ont été proposées dans la littérature :

- le temps de séjour (« dwell time ») défini arbitrairement par Blalock (croyons-nous) comme le temps, mesuré en prenant τ_0 comme unité, au bout duquel le signal retombe à 2 % de sa valeur maximale.

- La largeur équivalente mesurée également en prenant τ_0 comme unité qui est la durée d'une impulsion rectangulaire ayant pour amplitude l'amplitude maximale du signal et pour surface l'intégrale de la valeur absolue du signal (les surfaces au-dessous de l'axe des temps sont donc additionnées et non soustraites).

Le tableau VI présente les valeurs de ces paramètres pour les différentes mises en forme que nous avons envisagées. On voit que, dans l'une ou l'autre des définitions de la durée d'une impulsion, autorisant donc une fréquence de répétition moyenne des signaux plus élevée pour une même probabilité d'empilements.

TABLEAU VI

Le Signal	Mise en forme CR - RC			Mise en forme CR-(RC)$_2$	
	Sans prédiction	Prédiction		Sans prédiction	Prédiction par un atténuateur *
		par un atténuateur	par atténuateur et intégrateur		
Temps de séjour	6,8 τ_0	4,73 τ_0	5,55 τ_0	4,6 τ_0	3,56 τ_0
Largeur équivalente	2,718 τ_0	2,03 τ_0	2,17 τ_0	2,15 τ_0	1,93 τ_0

* Dans ce cas, on peut calculer que l'amélioration du rapport bruit à signal n'est que 3,5 %.

Techniquement, la réalisation du dispositif prédicteur qu'il faut considérer comme un accessoir d'une chaîne de spectrométrie est très simple. Il faut noter en effet que à l'instant où l'amplitude maximale du signal est analysée par le codeur, en sortie du circuit «Différence», le signal retardé dans la ligne n'est pas encore apparu. Dans ces conditions, seule la linéarité et la stabilité du circuit «Différence» comptent et doivent être soignées comme pour le reste de la chaîne. Par contre, l'atténuateur et la ligne à retard peuvent être de qualité moyenne, leurs défauts n'apparaîtront que sur le bruit ! On peut donc en particulier utiliser une ligne à retard à constantes localisées à prises multiples pour fournir les différents retards nécessaires.

ANNEXE I

SOLUTION DE L'EQUATION DE WIENER - HOPF

On peut trouver la solution de l'équation de Wiener-Hopf dans la littérature spécialisée (P. ex. Lee p. 370 à 495), mais il a paru intéressant de montrer comment on l'obtient, car c'est un sujet qui n'a pas encore reçu une grande diffusion:

On a vu que l'équation de Wiener-Hopf s'obtient comme la condition nécessaire et suffisante pour que h (t) soit la réponse indicielle optimale :

$$q(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau \geqslant 0$$

$$q(\tau) \quad \text{quelconque pour} \quad \tau < 0$$

avec :

$$q(\tau) = \int_0^{\infty} h_{opt}(\sigma)\, \varphi_x(\tau - \sigma)\, d\sigma - \varphi_x(\tau + \alpha),$$

que l'on peut écrire aussi

$$q(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{opt}(\sigma)\, \varphi_x(\tau - \sigma)\, d\sigma - \varphi_x(\tau + \alpha)$$

puisque $h_{opt}(t)$ doit être nul pour les valeurs négatives de t pour être physiquement réalisable.

La recherche de la solution de cette équation nécessite de définir la transformation complexe de Fourier qui constitue une extension au plan complexe de la transformation de Fourier utilisée en analyse harmonique, et permet d'étendre son domaine d'application à une plus grande variété de fonctions.

Soit en effet f (t) une fonction apériodique quelconque nulle pour $t < 0$. On sait que si l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\, dt$$

est bornée, alors

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

converge et définit la transformée de Fourier de f (t).

La transformation inverse est :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

On peut étendre cette transformation aux fonctions f (t) pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

diverge, mais pour lesquelles l'intégrale :

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)|\, e^{\sigma t}\, dt$$

converge pour $\sigma < 0$. En considérant une variable complexe $\lambda = \sigma + j\omega$, on définit la transformée de Fourier complexe $F(\lambda)$ de f (t) par :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-j\lambda t}\, dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{\sigma t}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

qui existe pour $\sigma < 0$. La transformation inverse s'écrit :

$$f(t) = \int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} F(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda \qquad \sigma_1 < 0$$

Il est important pour la suite de remarquer que si $f(t) = 0$ pour $t < 0$, alors $F(\lambda)$ n'a de singularités (zéro ou pôle) que dans le 1/2 plan complexe supérieur et réciproquement (y compris l'axe ω) puisque l'intégrale converge pour toute valeur négative de σ. De même, si l'on considérait une fonction f (t) nulle pour $t > 0$ et quelconque pour $t < 0$ mais telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} |f(t)|\, e^{\sigma t}\, dt$$

converge pour $\sigma > 0$, on en déduirait que sa transformée complexe de Fourier :

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-j\lambda t}\, dt$$

a toutes ses singularités dans le demi-plan complexe inférieur.

Ainsi, si l'on considère une fonction d'autocorrélation $\varphi(\tau)$, qui, par définition, existe pour toute valeur de τ, on peut la décomposer en deux fonctions :

$$\varphi^{+}(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau) & \tau \geqslant 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

et

$$\varphi^{-}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau > 0 \\ \varphi(\tau) & \tau < 0 \end{cases}$$

De même que pour la transformée de Fourier réelle de $\Phi(\omega)$ de $\varphi(\tau)$ on aura les transformées complexes de Fourier :

$$\Phi^{+}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \varphi^{+}(\tau)\, e^{-j\lambda\tau}\, d\tau$$

et

$$\Phi^{-}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \varphi^{-}(\tau)\, e^{-j\lambda\tau}\, d\tau$$

$\Phi^{+}(\lambda)$ a toutes ses singularités dans le demi-plan complexe supérieur et $\Phi^{-}(\lambda)$, dans le demi-plan complexe inférieur. Et $\varphi(\tau)$ étant une fonction paire ($\varphi^{+}(\tau) = \varphi^{-}(-\tau)$), on aura :

$$\Phi^{+}(\lambda) \times \Phi^{-}(\lambda) = \Phi(\lambda)$$

et

$$\Phi^{+}(\lambda) = [\Phi^{-}(\lambda)]^{*}$$

On peut donc décomposer le spectre $\Phi(\omega)$ en deux fonctions $\Phi^{+}(\lambda)$ et $\Phi^{-}(\lambda)$ qui constituent chacune la transformée complexe de Fourier d'une fonction du temps $\varphi^{+}(\tau)$ nulle pour $\tau < 0$ et $\varphi^{-}(\tau)$ nulle pour $\tau > 0$.

En revenant à l'équation de Wiener Hopf, si l'on prend la transformée complexe de Fourier des deux membres, on aura :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau)\, e^{-j\lambda\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_{opt}(\sigma)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau+\alpha)\, d\tau$$

or :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau+\alpha)\, e^{-j\lambda\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\eta)\, e^{-j\lambda(u-\alpha)}\, du$$

$$= e^{+j\lambda\alpha}\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\eta)\, e^{-j\lambda u}\, du$$

d'où :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\tau+\alpha)\, e^{-j\lambda\tau}\, d\tau = e^{j\lambda\alpha}\, \Phi_x(\lambda)$$

$\Phi_x(\lambda)$ étant obtenu à partir du spectre $\Phi_x(\omega)$ de x en remplaçant la variable réelle ω par la variable complexe $\lambda (= \sigma + j\omega)$.

Le produit de convolution de $h_{opt}(t)$ par $\varphi_x(\tau)$ donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_{opt}(\sigma)\, \varphi_x(\tau-\sigma)\, d\sigma\, d\tau = H_{opt}(\lambda)\, \Phi_x(\lambda)$$

L'équation devient donc :

$$Q(\lambda) = H_{opt}(\lambda)\, \Phi_x(\lambda) - e^{j\lambda\alpha}\, \Phi_x(\lambda)$$

Si l'on décompose $\Phi_x(\lambda)$ en $\Phi_x^+(\lambda)$ et $\Phi_x^-(\lambda)$, et si l'on pose

$$\Gamma_x^+(\lambda) = \frac{1}{\Phi_x^+(\lambda)} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_x^-(\lambda) = \frac{1}{\Phi_x^-(\lambda)},$$

on obtient :

$$Q(\lambda)\, \Gamma_x^-(\lambda) = H_{opt}(\lambda)\, \Phi_x^+(\lambda) - e^{j\lambda\alpha}\, \Phi_x^+(\lambda).$$

Soit encore $\gamma_x^-(\tau)$ et $\gamma_x^+(\tau)$ les transformées complexes de Fourier inverses de $\Gamma_x^-(\lambda)$ et $\Gamma_x^+(\lambda)$;

en prenant la transformée inverse de l'équation, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(\sigma)\, \gamma_x^-(\tau-\sigma)\, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{opt}(\sigma)\, \varphi_x^+(\tau-\sigma)\, d\sigma - \Psi_x(\tau+\alpha)$$

en posant $\Psi_x(\tau+\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty+j\sigma_2}^{+\infty+j\sigma_2} \Phi_x^+(\lambda)\, e^{j\tau\lambda}\, e^{j\alpha\lambda}\, d\lambda$

soit :

$$g(\tau) = q(\tau) * \gamma_x^-(\tau)$$

$q(\tau)$ est nul pour $\tau > 0$ ainsi que $\gamma_x^-(\tau)$. Donc $g(\tau)$ est nul pour $\tau \geqslant 0$. $\Psi_x(\tau)$ peut être défini pour toute valeur de τ, et $h_{opt}(\tau)$ et $\varphi_x^+(\tau)$ ne sont définis que pour $\tau \geqslant 0$. En appelant $\Psi_x^+(\tau)$ *la fonction* :

$$\Psi_x^+(\tau) = \begin{cases} \Psi_x(\tau) & \tau \geqslant 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

on voit que l'équation devient :

$$h_{opt}(\tau) * \varphi_x^+(\tau) = \Psi_x^+(\tau)$$

D'où, en revenant aux transformées complexes de Fourier :

$$H_{opt}(\lambda) = \frac{1}{\Phi_x^+(\lambda)} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \Psi_x^+(\tau)\, e^{-j\lambda\tau}\, d\tau$$

Ce résultat s'applique aisément au prédicteur que l'on cherche à déterminer ici.

On a dans le cas où k est différent de a :

$$\Phi_x(\lambda) = \frac{Ka^2}{2} \quad \frac{\lambda^2 + k^2}{(\lambda^2 + a^2)^2} = a\sqrt{\frac{K}{2}} \quad \frac{k + j\lambda}{(a + j\lambda)^2} \quad a\sqrt{\frac{K}{2}} \quad \frac{k - j\lambda}{(a - j\lambda)^2}$$

$$= \Phi_x^+(\lambda) \times \Phi_x^-(\lambda)$$

On calcule d'abord :

$$\Psi_x(\tau) = \int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} a\sqrt{\frac{k}{2}} \quad \frac{k + j\lambda}{(a + j\lambda)^2} \quad e^{j\lambda(\tau + \alpha)}\, d\lambda$$

Cette intégrale se décompose en deux :

$$\Psi_x(\tau) = a\sqrt{\frac{K}{2}}\int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} \frac{k - a}{(a + j\lambda)^2}\, e^{j\lambda(\tau + \alpha)}\, d\lambda + a\sqrt{\frac{K}{2}}\int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} \frac{1}{a + j\lambda}\, e^{-j(\tau + \alpha)}\, d\lambda$$

Or, la T.C.F. de la fonction :

$$f(t) = e^{-at}$$

est $F(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\lambda t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \quad \frac{1}{a + j\lambda}$

et celle de la fonction :

$$g(t) = t\, e^{-at}$$

est :

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} t\, e^{-at} \quad e^{-j\lambda t} \quad dt = \frac{1}{2\pi} \quad \frac{1}{(a + j\lambda)^2}$$

On en déduit que :

$$\Psi_x(\tau) = a\sqrt{\frac{K}{2}} \times 2\pi\,[(K - a)(\tau + \alpha)\, e^{-a(\tau + \alpha)} + e^{-a(\tau + \alpha)}]$$

On a alors maintenant :

$$H_{opt}(\lambda) = \frac{1}{a\sqrt{\frac{K}{2}}} \quad \frac{(a + j\lambda)^2}{k + j\lambda} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} a\sqrt{2K}\; 2\pi e^{-a\alpha}\,[(k - a)(\tau + \alpha) + 1]\, e^{-a\tau} e^{-j\lambda\tau} d\tau$$

qui s'écrit :

$$H_{opt}(\lambda) = \frac{(a + j\lambda)^2}{k + j\lambda}\,[(k - a)e^{-a\alpha}\int_0^{\infty} \tau e^{-(a + j\lambda)\tau} d\tau + [(k - a)\alpha + 1]\, e^{-a\alpha}\int_0^{\infty} e^{-(a + j\lambda)\tau} d\tau]$$

$$= (k - a)\, e^{-a\alpha} \frac{1}{k + j\lambda} + [(k - a)\alpha + 1]\, e^{-a\alpha} \frac{a + j\lambda}{k + j\lambda}$$

or :

$\frac{a + j\lambda}{k + j\lambda} = \frac{a - k}{k + j\lambda} + 1$. On écrira donc :

$$H_{opt}(\lambda) = -\alpha(k - a)^2 \quad e^{-a\alpha} \frac{1}{k + j\lambda} + [(k - a)\alpha + 1] \quad e^{-a\alpha}$$

D'où l'expression de $h_{opt}(t)$:

$$h_{opt}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} H_{opt}(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, dt$$

$$= -\alpha(k - a)^2 \quad e^{-a\alpha} \quad e^{-kt} + [(k - a)\alpha + 1] \quad e^{-a\alpha} \quad \delta(t)$$

Dans ce cas où la constante de temps de mise en forme $1/a$ a la valeur optimale $\tau_0 = 1/k$, le prédicteur optimum se réduit à un atténuateur de rapport $e^{-a\alpha}$

ANNEXE II

CALCULS RELATIFS AU PREDICTEUR POUR UNE MISE EN FORME CR - RC_2

La fonction de transfert du filtre déterminé par la mise en forme CR - RC_2 est :

$$R(s) = \frac{a^2 s}{(s-a)^3}$$

Pour un bruit à l'entrée de densité spectrale :

$$\overline{e^2}(\omega) = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{k^2}{\omega^2}\right)$$

on a en sortie :

$$\Phi_x(\omega) = \overline{e^2}(\omega)\ |R(j\omega)|^2 = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{k^2}{\omega^2}\right) \frac{a^4\ \omega^2}{(a^2+\omega^2)^3}$$

$$= \frac{K}{2}\ a^4\ \frac{\omega^2 + k^2}{(\omega^2 + a^2)^3}$$

On décompose $\Phi_x(\omega)$ en $\Phi_x^+(\omega)$ et $\Phi_x^-(\omega)$ suivant le schéma donné en Annexe I :

$$\Phi_x(j\lambda) = \Phi_x^+(j\lambda) \times \Phi_x^-(j\lambda) = a^2\sqrt{\frac{K}{2}}\ \frac{k + j\lambda}{(a+j\lambda)^3} \times a^2\sqrt{\frac{K}{2}}\ \frac{k - j\lambda}{(a-j\lambda)^3}$$

Pour le prédicteur optimal, l'erreur quadratique moyenne $\overline{\varepsilon^2}$ est, d'après Lec (p. 435) :

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} \Psi_x^2(\tau)\ d\tau$$

où la fonction $\Psi_x(\tau)$ est la transformée inverse de Fourier de $\Phi_x^+(j\lambda)$:

$$\Phi_x(\tau) = \int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} a^2\sqrt{\frac{K}{2}}\ \frac{k + j\lambda}{(a+j\lambda)^3}\ e^{j\lambda\tau}\, d\lambda$$

On a : $\dfrac{k + j\lambda}{(a+j\lambda)^3} = \dfrac{k-a}{(a+j\lambda)^3} + \dfrac{1}{(a+j\lambda)^2}$

Donc :

$$\Psi_x(\tau) = \int_{-\infty + j\sigma_1}^{+\infty + j\sigma_1} a^2\sqrt{\frac{K}{2}}\left(\frac{k-a}{(a+j\lambda)^3} + \frac{1}{(a+j\lambda)^2}\right) e^{j\lambda\tau}\, d\lambda$$

Or, la transformée de Fourier de :

$$g(t) = t^2\ e^{-at}$$

est :

$$G(j\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} t^2\ e^{-at}\ e^{-j\lambda t}\ dt = \frac{1}{2\pi}\ \frac{2}{(a+j\lambda)^3}$$

on en déduit que la transformée inverse de $\dfrac{K-a}{(a+j\lambda)^3}$. est

$\dfrac{1}{2}(K-a)\ t^2\ e^{-at}$. On a déjà vu, d'autre part, que la transformée inverse de $\dfrac{1}{(a+j\lambda)^2}$ est $t\ e^{-at}$,

on a donc :

$$\Psi_x(\tau) = a^2 \times 2\pi \times \sqrt{\frac{K}{2}}\left(\frac{k-a}{2}\ \tau^2\ e^{-a\tau} + \tau\ e^{-a\tau}\right)$$

d'où :

$$\Psi_x^2(\tau) = a^4\ 4\pi^2\ \frac{K}{2}\ \tau^2\ e^{-2a\tau}\left(\frac{k-a}{2}\tau + 1\right)^2$$

On peut alors calculer :

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} \Psi_x^2(\tau)\ d\tau = 2\pi\ a^4\frac{K}{2}\int_0^{\alpha} \tau^2\ e^{-2a\tau}\left(\frac{k-a}{2}\tau + 1\right)^2 d\tau$$

$$\overline{\varepsilon^2} = 2\pi a\frac{K}{2}\ \frac{1}{16}\left[3(\gamma-1)^2 + 6(\gamma-1) + 4 - e^{-4}(103(\gamma-1)^2 + 142(\gamma-1) + 52)\right]$$

$$= \frac{\pi a}{8}\ \frac{K}{2}\left[3\gamma^2 - 6\gamma + 3 + 6\gamma - 6 + 4 - e^{-4}(103\gamma^2 - 206\gamma + 103 + 142\gamma - 142 + 52)\right.$$

$$= \frac{\pi a}{8}\ \frac{K}{2}\left[3\gamma^2 + 1 - e^{-4}(103\gamma^2 - 64\gamma + 13)\right]$$

On obtient :

$$\overline{e^2} = \frac{\pi}{8}\,\frac{K}{2}\,k\,\frac{1}{\gamma}\left[3\gamma^2 + 1 - e^{-4}\,(103\gamma^2 - 64\gamma + 13)\right]$$

On calculerait que :

$$\varphi_x(0) = \frac{\pi}{8}\,\frac{K}{2}\,k\,\frac{3\gamma^2+1}{\gamma}$$

est minimum pour $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi_x(0)_{opt} = \frac{\pi}{8}\,\frac{K}{2}\,k \times 2\sqrt{3}.$

On en déduit :

$$\frac{(b/s)\ \text{préd}}{(b/s)_o} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\ \sqrt{\frac{1}{\gamma}\left[3\gamma^2 + 1 - e^{-4}\,(103\gamma^2 - 64\gamma + 13)\right]}$$

En calculant la dérivée de l'expression sous le radical par rapport à γ, on trouve qu'elle est minimale pour $\gamma = 0{,}828$, et que l'on a alors :

$$\frac{(b/s)\,p}{(b/s)_o} = 0{,}936.$$

2.000 coups dans le canal central, le bruit = 22,5 mV

PAC 02
RC - CR = 3 µs
α = 3 µs

Pic 1 Sans le prédicteur

0278	000004	000001						
0280	000000	000000	000002	000005	000010	000012	000014	000035
0288	000068	000104	000170	000278	000405	000030	000855	001125
0296	001299	001534	001788	001905	001969	001863	001620	001490
0304	001155	000912	000678	000463	000319	000238	000132	000075
0312	000051	000018	000012	000008	000006	000003	000000	

Pic 2

0526	000001	000001						
0528	000002	000003	000008	000013	000030	000059	000089	000169
0536	000249	000415	000615	000798	001106	001427	001551	001861
0544	002040	002029	001916	001905	001628	001376	001080	000813
0552	000568	000397	000252	000175	000099	000055	000037	000016
0560	000005	000007	000002	000000	000001	000000	000001	

TABLEAU VII

Pic 1 Avec le prédicteur Topt (supp.) = 2 µs

0264	000000	000000	000000	000001	000000	000004	000002	000011
0272	000015	000029	000054	000117	000179	000271	000476	000694
0280	000925	001230	001519	001744	001940	001999	001920	001716
0288	001543	001310	000884	000699	000468	000313	000172	000095
0296	000080	000029	000015	000007	000004	000003	000001	000000
0304	000000							

Pic 2

0500	000000	000001	000001	000000				
0504	000005	000003	000003	000012	000035	000068	000151	000215
0512	000354	000566	000786	001038	001395	001610	001774	001972
0520	001967	001807	001681	001426	001135	000875	000522	000399
0528	000231	000126	000072	000036	000014	000007	000005	000002
0536	000002	000000	000000					

TABLEAU VIII

2.000 coups dans le canal central, le bruit = 22,5 mV

Général «Data pulse» Ve = 0,6 V
PAC 02
RC - CR = 3 µs
α = 3 µs

Pic 1 Sans le prédicteur

0277	000000	000000	000000					
0280	000004	000000	000005	000003	000004	000014	000033	000046
0288	000084	000160	000241	000394	000576	000797	001058	001358
0296	001589	001816	001931	001969	001802	001695	001488	001186
0304	000963	000717	000501	000315	000243	000126	000070	000041
0312	000021	000012	000010	000007	000003	000000	000001	000000

Pic 2

0525	000001	000002	000001					
0528	000003	000010	000015	000041	000071	000094	000147	000239
0536	000371	000593	000780	001064	001286	001636	001801	001887
0544	002006	001895	001770	001545	001219	001033	000758	000573
0552	000351	000228	000144	000074	000046	000036	000018	000015
0560	000003	000003	000001	000001	000001	000000	000000	

TABLEAU IX

Pic 1 Avec le prédicteur Topt (supp.) = 3 µs

0268	000000	000000	000000	000002				
0272	000000	000001	000008	000018	000042	000049	000092	000164
0280	000273	000450	000618	000939	001186	001484	001704	001867
0288	001986	001939	001771	001613	001232	000956	000712	000418
0296	000305	000183	000085	000052	000031	000010	000010	000005
0304	000000	000001	000000					

Pic 2

0509	000000	000002	000003					
0512	000015	000021	000057	000094	000149	000227	000397	000621
0520	000833	001146	001433	001703	001886	001958	001888	001821
0528	001489	001228	000886	000651	000462	000271	000179	000088
0536	000045	000025	000013	000007	000001	000000	000000	0000000
0544	000000							

TABLEAU X

BIBLIOGRAPHIE

1 - Baldinger et Franzen - Advances in Electronics and Electron Physics - Acadamic Presse (New York) Vol. III. p. 256 - 288.

2 - R. Genin Electronique et Physique nucléaire - Herman 1953.

3 - Wilson - Phil. Mag. - Vol. 41 N° 312 p. 66 - 1950.

4 - M. Tsukuda - Pulse Analyzing System for a Gridded Ionization Chamber - Nuclear Instruments and Methods - Vol. 14, p. 241-251 (1961).

5 - E. Fairstein et J. Hahn - Nuclear pulse amplifiers - Fundamental and design practice - Nucleonics - Vol. 25 N° 11 - Nov. 1965.

6 - J. J. Samueli, J. C. Balland, J. Pigneret et A. Sarazin - Amplificateurs pour spectrométrie nucléaire. A paraître dans l'Onde Electrique.

7 - T.V. Blabock - Rapport ORNL 1055.

8 - Blankenship et Nowlin - New concepts in Nuclear Pulse Amplifier Design - IEEE Transaction Nuclear Science NS 13 p. 495 - 507 (1966).

9 - V. Radeka et N. Karlovac. Least square error amplitude measurement in the presence of noise. A paraître dans Nuclear Instruments and Methods.

10 - Y. W. Lee - Statistical Theory of Communications - John Wiley and Sons - 1960.

Cette thèse a été effectuée au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, au Service d'Instrumentation Nucléaire du Département d'Electronique Générale.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance au Gouvernement Français et au Commissariat à l'Energie Atomique pour m'avoir permis de mener à bien ce travail dans des conditions matérielles très favorables.

Je prie Madame le Professeur N. MARTY, qui a bien voulu patronner ce travail, de recevoir l'expression de ma respectueuse gratitude.

Ce m'est un devoir agréable de remercier Monsieur Jacques Pottier, Chef du Service d'Instrumentation Nucléaire, pour l'orientation reçue et pour l'intérêt constant et marqué qu'il a manifesté pendant tout le déroulement de ce travail.

J'exprime ma plus vive reconnaissance à Monsieur Jacques Freycenon dont les idées ont servi de base à cette thèse, et pour les conseils et l'aide qu'il m'a constamment accordés pendant l'étude et plus particulièrement pendant la rédaction de cette thèse.

Je remercie Monsieur Henri Guillon pour l'appui que j'ai trouvé auprès de lui et pour les conseils précieux qu'il m'a donnés.

De nombreux résultats proviennent des discussions très utiles avec Messieurs V. Goursky, G. Libs à qui je présente mes remerciements.

Manuscrit reçu le 24.11.67

FIN