

SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ETUDE THEORIQUE DE L' "EFFET DE DENSITE"
Première partie
MECANISME (EQUATIONS NON LINEARISEES)

par

Jean BOURE

Rapport CEA - R 3049

1967

Ca

CENTRE D'ETUDES
NUCLEAIRES DE GRENOBLE

BOURE J. .-

Sur le Comportement oscillatoire de canaux chauffés.
Etude théorique de l' "effet de densité". Première
partie. Mécanisme (équations non linéarisées).-
Commissariat à l'énergie atomique, Centre d'études
nucléaires de Grenoble (Isère), 1967.-
27 cm, 24 p., 3 fig. h.-t.

CEA-R 3049 (1ère partie) - BOURÉ Jean

SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFÉS
ETUDE THEORIQUE DE L'EFFET DE DENSITE
1ère partie : MECANISME (EQUATIONS NON LINEARISEES)

Sommaire. - On expose le problème du comportement oscillatoire des canaux chauffés en mettant l'accent sur la présence de retards dans le système et on propose un modèle à "effet de densité" pour expliquer ce comportement. L'effet de densité est la conséquence de la relation physique entre l'enthalpie et la masse volumique du fluide.

Les équations non linéaires du schéma mathématique correspondant sont établies et mises sous forme adimensionnelle.

L'analyse de ces équations conduit à une description du mécanisme des oscillations.

On donne la liste des paramètres dont dépend le comportement du modèle. A ce stade de l'étude, on peut déjà relever dans ce comportement plusieurs faits conformes à l'expérience.

1967

33 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-R 3049 (part I) - BOURÉ Jean

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS - AN ANALYSIS
OF THE DENSITY EFFECT
Part I : THE MECHANISM (NON-LINEAR ANALYSIS)

Summary. - The problem of the oscillatory behavior of heated channels is presented in terms of delay times and a density effect model is proposed to explain the behavior. The density effect of the consequence of the physical relationship between enthalpy and density of the fluid.

Non linear equations are derived from the model in a dimensionless form.

A description of the mechanism of oscillations is given, based on the analysis of the equations.

An inventory of the governing parameters is established. At this point of the study, some facts in agreement with the experiments can already be pointed out.

1967

33 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
Service des Transferts Thermiques

SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ETUDE THEORIQUE DE L' "EFFET DE DENSITE"

1ère Partie
MECANISME (EQUATIONS NON LINEARISEES)

par

Jean BOURÉ

Ce texte est la version française du rapport en anglais
déjà paru sous le même numéro

*Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200,
en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de
la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.*

*The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française,
Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire,
PARIS VIIème.*

**SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ETUDE THEORIQUE DE L'EFFET DE DENSITE'
(1ère Partie)**

MECANISME (EQUATIONS NON LINEARISEES)

REMERCIEMENTS

L'auteur est profondément reconnaissant à Monsieur le Professeur A. CRAYA qui, en tant que Conseiller Scientifique du Service des Transferts Thermiques du Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, a dirigé le travail initial [1] et lui a apporté de nombreuses et importantes contributions.

Il remercie Monsieur H. MONDIN, Chef du Service des Transferts Thermiques qui lui a confié cette étude et y a porté un intérêt constant, ainsi que le Docteur N. ZUBER et Monsieur F.W. STAUB du Research and Development Center de la General Electric Company (Schenectady N.Y. USA) avec qui il a eu de nombreuses discussions intéressantes.

Une partie importante du travail initial [1] a été effectuée sous contrat Euratom dans le cadre de l'accord de coopération Euratom-Etats-Unis.

NOMENCLATURE

Les formules dimensionnelles sont établies avec un système d'unités cohérent dont les grandeurs fondamentales sont la longueur (L), la masse (M), le temps (T), la quantité de chaleur (Q).

Dans toute la mesure du possible, les lettres majuscules sont réservées aux grandeurs dimensionnelles et les lettres minuscules aux paramètres adimensionnels.

A	Fonctions adimensionnelles du temps réduit - Equations (16) et (22)
B	
D	Diamètre équivalent (L)
G	Accélération de la pesanteur (LT^{-2})
H	Enthalpie (QM^{-1})
L	Longueur (L)
P	Pression ($M.L^{-1} T^{-2}$)
R	Masse volumique (ML^{-3})
T	Temps (T)
U	Vitesse (LT^{-1})
W	Densité volumique de puissance ($QL^{-3} T^{-1}$)
Z	Abscisse (L)
Δ	Variation finie
θ	Temps (T)
Λ	Coefficient de frottement de Darcy
f	paramètre adimensionnel de frottement
g	gravité réduite
h	enthalpie réduite
l	longueur réduite
p	pression réduite
q	paramètre adimensionnel caractéristique d'une singularité géométrique
s	sous-saturation réduite

t	temps réduit
u	vitesse réduite
v	perturbation de vitesse, réduite
z	abscisse réduite
λ	longueur réduite de la zone chauffante sans effet de densité
ρ	masse volumique réduite
σ	rapport de sections
τ	temps réduit
φ	angle
ψ	coefficient de perte de pression

Indices

a	relatif à la longueur adiabatique de sortie
c	relatif à une valeur caractéristique ou à la longueur chauffante
d	relatif à la sortie de la longueur chauffante
e	relatif à la sortie du canal
f	terme de frottement
g	terme de gravité
i	terme d'inertie ou nombre
n	valeur "normalisée"
o	relatif à une valeur de référence ou à l'entrée de la longueur chauffante ou à la longueur adiabatique d'entrée
oo	entrée de la longueur chauffante, en régime permanent
p	circuit extérieur au canal (pompe ...)

Sigles

LAE	longueur adiabatique d'entrée
LCDC	longueur chauffante à densité constante
LCDV	longueur chauffante à densité variable
LAS	longueur adiabatique de sortie.

I. INTRODUCTION

1.1.

L'apparition d'oscillations pose un problème d'importance considérable, lors de l'établissement du projet ou au cours du fonctionnement de nombreux appareillages poussés dans lesquels circule un fluide soumis à de fortes variations de masse volumique. De telles variations sont souvent dues à un chauffage avec ou sans changement de phase. Par exemple, le premier cas est celui des chaudières ou des réacteurs nucléaires refroidis à l'eau bouillante, tandis que le second est celui d'appareillages dans lesquels le fluide est dans un état supercritique (fusées à propergols liquides).

Le comportement étudié est caractérisé par la présence d'oscillations, régulières en forme, période et amplitude, des paramètres hydrodynamiques et thermiques du système (débit, chutes de pressions, etc...). On le distingue ici d'autres phénomènes qui affectent les mêmes paramètres (variations brutales de débit, fluctuations, expulsion...) et qui peuvent avoir, ou non, les mêmes causes.

L'élément de base des appareillages considérés est toujours une sorte de canal parcouru par le fluide. Dans le canal, le fluide est soumis à deux catégories de conditions aux limites :

a) les conditions aux limites hydrodynamiques, qui imposent au fluide, en certains points, la valeur de certaines de ses propriétés thermodynamiques (par exemple la pression) et provoquent l'écoulement (caractéristique externe du canal).

b) D'autres conditions aux limites, souvent de nature thermique, qui imposent aussi au fluide en certains points la valeur de certaines de ses propriétés thermodynamiques (par exemple l'enthalpie) et provoquent la variation de masse volumique.

La variation de masse volumique avec l'enthalpie le long du canal, et ses conséquences, sont désignées ici par le terme "effet de densité". L'introduction de retards dans le système par toute perturbation survenant en n'importe quelle section (sauf la sortie) est une de ces conséquences car la perturbation entraîne des variations de masse volumique à l'aval de la section considérée.

Le but de cette étude est de montrer que l' "effet de densité", grâce à ces retards, suffit à faire entrer le système en oscillations et permet d'expliquer les comportements oscillatoires observés expérimentalement.

L'étude comporte deux parties. Dans la première, on montrera que l'effet de densité est une cause suffisante d'oscillations. Le mécanisme sera analysé et les principaux paramètres mis en évidence.

Dans la seconde partie, on traitera le problème très important des seuils d'oscillation et on montrera que le mécanisme ci-dessus est la cause réelle du phénomène dans de nombreux cas. Pour permettre l'interprétation physique des équations exploitées dans les deux parties, le modèle proposé ici est à dessein très simplifié et ne tient pas compte de phénomènes dont on pense qu'ils ont une influence faible mais peut-être non négligeable sur le comportement étudié. Une étude numérique présentée également dans la seconde partie montrera qu'en dépit de ces simplifications, le modèle à effet de densité donne une bonne idée des valeurs des paramètres et de la fréquence au seuil du phénomène.

Une publication moins générale, mais très détaillée, existant déjà sur le modèle [1], on insistera ici beaucoup plus sur ses aspects physiques que sur l'établissement des équations. (Cependant, du fait de la généralisation, les calculs et la nomenclature utilisés ici diffèrent légèrement de ceux de [1]).

1.2. Travaux antérieurs

Plus de 60 publications ont été analysées dans [1], certaines en détail, et depuis la rédaction de [1], plusieurs rapports intéressants, parmi lesquels [5], [6], [9], [10], [11] sont parvenus à l'auteur. Seules les conclusions de l'étude bibliographique sont données ici.

Du point de vue expérimental, les informations disponibles actuellement n'épuisent certes pas le sujet, mais elles sont suffisamment nombreuses pour étayer des travaux théoriques. Il y a peu de contradictions et les influences des principaux paramètres sont qualitativement connues.

Du point de vue théorique, le bilan est moins bon. De nombreuses causes possibles ont été proposées pour le phénomène mais les mécanismes moteurs ne sont pas encore, actuellement, complètement compris. Quelques schémas mathématiques ont donné des résultats encourageants pour les calculs quantitatifs, mais leur validité n'a pas été établie pour le cas général. Les équations correspondantes sont très compliquées si bien que la signification physique des résultats obtenus n'est pas très claire.

La compréhension étant une étape essentielle vers une prévision quantitative sûre, il est nécessaire de définir deux sortes de modèles :

1) - Des modèles très simplifiés, mis au point pour permettre la compréhension des mécanismes essentiels.

2) - Des modèles plus précis, mais plus compliqués, à utiliser pour la prévision quantitative.

La nécessité d'étudier ces deux sortes de modèles a été reconnue dans plusieurs publications antérieures. [2] par exemple est une bonne publication suivant la voie des modèles simplifiés. La présente étude suit la même approche.

Quelques autres constatations importantes sont les suivantes :

a) Les écoulements à masse volumique variable sont souvent sujets à des comportements oscillatoires. Ceci ressort des essais nombreux et variés faits jusqu'à ce jour et est confirmé par l'obtention d'oscillations avec de nombreux schémas mathématiques, en dépit de la variété de leurs hypothèses.

b) En bonne première approximation, l'apparition des oscillations peut être décrite par un système d'équations linéaires [3] [4] [5].

c) L'influence de la sous-saturation à l'entrée n'est pas monotone [6] [7] [8]. Un accroissement de la sous-saturation a une influence déstabilisatrice pour de faibles valeurs de cette sous-saturation et stabilisatrice pour de fortes valeurs.

1.3. Mécanismes vraisemblables

Parmi les mécanismes proposés, les plus vraisemblables font intervenir des effets de retard, comme cela est souvent le cas pour les systèmes mécaniques instables ou oscillants. Dans le système considéré ici, les retards sont toujours introduits par la propagation de quelque quantité. Cette relation entre phénomènes de propagation et d'oscillation a déjà été rapportée précédemment, par exemple dans [12] [13]. Trois phénomènes de propagation semblent être plus susceptibles que les autres d'être la cause de comportements oscillatoires de systèmes simples, comme par exemple les circuits chauffés électriquement :

a) Propagation de perturbations de pression par les ondes dynamiques

Dans la plupart des systèmes et malgré la faible vitesse de ces ondes dans les milieux diphasiques, les fréquences d'oscillation observées semblent cependant trop faibles pour confirmer pleinement cette cause.

b) Propagation de perturbations de densité

La vraisemblance de cette cause est étayée en particulier par les observations expérimentales mettant en évidence une relation très nette entre temps de parcours du canal par une particule et période des oscillations.

c) Propagation de perturbations du régime ou de la configuration d'écoulement

Les études expérimentales dans les installations basse pression en verre mettent également souvent en évidence des changements de configurations d'écoulement associés au comportement oscillatoire [14] [9].

En toute rigueur, il est impossible de séparer ces trois phénomènes, tous trois conséquence des mêmes lois mécaniques et ils coexistent probablement dans le mécanisme réel. Il est permis toutefois de s'attendre à la prééminence de l'un d'entre eux, au moins dans certains cas. La présente étude est consacrée au second qui semble le plus susceptible de convenir pour une large gamme de pressions.

2. LE MODELE A EFFET DE DENSITE

2.1. Hypothèses et définition du modèle

Des hypothèses sont nécessaire pour deux raisons :

1) Comme indiqué ci-dessus, la mise au point de modèles très simplifiés est indispensable à la compréhension (hypothèses b, c, d, h, i, k, l, m).

2) Pour vérifier si l'effet de densité est ou non une cause de mise en oscillation, il faut obtenir un effet de densité "pur", en éliminant les autres phénomènes (hypothèses a, e, f, g, j).

a) - L'effet de densité est supposé être suffisant pour expliquer, à lui seul, le comportement du système : perburbations de pression et changements de configurations d'écoulement peuvent donc être ignorés (cf. paragraphe 1.3.). En particulier les propriétés thermodynamiques dépendant de la pression sont supposées être constantes.

b) - Même dans le cadre d'une configuration d'écoulement donnée, la propagation d'ondes de densité dans un écoulement diphasique est un phénomène compliqué [15]. Heureusement, les vitesses de propagation de ces ondes sont du même ordre de grandeur que celles des deux phases ou de l'émulsion. Les différences entre ces vitesses sont négligées (ceci n'est valable que comme première approximation et au moins dans certains cas, l'existence d'une "vitesse différentielle" [12] peut avoir une influence significative sur le comportement du système). Avec cette hypothèse, l'émulsion se comporte comme un fluide homogène. Cependant, il est impossible d'adopter ici les caractéristiques du classique "modèle homogène" (absence de glissement entre phases), dans lequel la variation de la masse volumique avec l'enthalpie est très erronée (voir figure 1 et ci-dessous).

Dans le modèle à effet de densité, l'écoulement réel est remplacé par celui d'un fluide fictif, homogène, soumis aux conditions suivantes :

- 1) Avoir dans la longueur chauffante à densité constante, les mêmes caractéristiques que le fluide réel et notamment la même vitesse.
- 2) Avoir, dans chaque section, un volume massique aussi voisin que possible de celui de l'émulsion.

c) - La figure 1 compare les relations entre volume massique et enthalpie pour le fluide réel et pour le fluide du "modèle homogène". Les quantités adimensionnelles sont celles qui sont utilisées ci-dessous et la zone intéressante est déduite de [1]. La figure 1 montre qu'on peut admettre, avec une bonne approximation, que la relation entre volume massique et enthalpie est linéaire. Elle montre aussi la grandeur de l'erreur commise, surtout à basse pression, en utilisant le "modèle homogène". (Par exemple, dans la zone intéressante et sous 8 kgf/cm^2 , l'erreur commise avec la relation linéaire optimum est inférieure à 3 % sur le volume massique et à 7 % sur la pente de la courbe donnant le volume massique en fonction de l'enthalpie. Elle serait de 96 % sur les deux quantités avec le "modèle homogène").

d) - Les équations sont unidimensionnelles.

e) - La différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie du canal est supposée être la somme d'une fonction de la seule vitesse d'entrée U_0 (qui est imposée par la caractéristique externe : voir figure 2) et d'une fonction linéaire de la seule dérivée par rapport au temps de cette vitesse d'entrée $\frac{dU_0}{dT}$ (cette dernière fonction a son origine dans l'inertie du circuit extérieur). Cette hypothèse permet au modèle de couvrir les cas de la convection naturelle ou forcée dans un seul canal, le cas d'un canal en parallèle avec de nombreux autres (lorsque les variations de débit dans un canal peuvent être supposées sans influence sur les autres) et le cas d'un canal en parallèle avec un by-pass. Le problème est beaucoup plus compliqué lorsqu'il y a un petit nombre de canaux en parallèle, le système ayant des degrés de liberté supplémentaires. Ce dernier cas ne sera pas étudié rigoureusement ici mais il fera l'objet de quelques remarques dans la 2ème partie.

f) - L'influence des propriétés thermiques de la paroi du canal n'est pas prise en compte.

(Cette hypothèse est aussi discutable que l'hypothèse b mais ne peut être évitée ici, cette étude étant consacrée au "pur" effet de densité. Suivant les caractéristiques de la paroi, son influence peut être plus ou moins importante [14]).

g) - La densité volumique de puissance est constante (dans le temps) et uniforme (dans l'espace). Cette hypothèse complète logiquement la précédente. (Dans les réacteurs nucléaires, le couplage entre densité du fluide et puissance, par l'intermédiaire de la réactivité, complique le problème. Ce couplage peut avoir une influence importante sur le comportement de l'écoulement, mais il est nécessaire, dans une première étape, d'étudier le cas où il n'intervient pas).

h) - Le rapport du gradient de chute de pression par frottement dans l'émulsion au gradient de chute de pression par frottement dans un écoulement liquide de même débit masse est supposé être une fonction linéaire de l'enthalpie. Ceci est une bonne approximation pour les

écoulements diphasiques dans la zone intéressante, comme on peut s'en rendre compte sur des résultats expérimentaux [14] ou d'après la corrélation de MARTINELLI-NELSON.

i) - Les singularités géométriques (restrictions, changements de section, rugosité, ou pente du canal) ne sont prises en compte que sur la longueur adiabatique d'entrée et à l'entrée et à la sortie de la longueur adiabatique de sortie.

j) - L'enthalpie d'entrée est une constante - H_0 .

k) - L'écoulement dans les zones non chauffées est adiabatique.

l) - L'équation de l'énergie est réduite à un bilan thermique.

m) - Les cas où le sens de l'écoulement s'inverse ne sont pas traités.

La définition du modèle résulte de ces treize hypothèses. Le fluide (fig. 3) entre dans la longueur adiabatique d'entrée (désignée ci-dessous LAE), puis s'écoule dans la longueur chauffante et dans la longueur adiabatique de sortie (LAS). La longueur chauffante est divisée, par une frontière mobile, en une longueur chauffante à densité constante (LCDC) et une longueur chauffante à densité variable (LCDV). D'un point de vue physique, les hypothèses les plus significatives sont a, b, c. Pour l'application du modèle, les plus restrictives e, f, g, i.

2.2. Equations dimensionnelles

Les symboles utilisés sont définis dans la nomenclature. Pour permettre la prise en compte de la géométrie du système (voir hypothèse i) l'abscisse Z et la vitesse U figurant dans les équations sont des "valeurs normalisées". Soit i un indice appliqué à toute longueur de canal de caractéristiques constantes ; l'abscisse normalisée Z croît dans la direction de l'écoulement et est définie par :

$$\left. \begin{aligned} Z &= 0 \text{ à l'entrée de la longueur chauffante (origine)} \\ dZ &= \sigma_i dZ_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où dZ_i est l'élément réel de longueur et σ_i le rapport de la section de passage du fluide au point considéré à la section de passage du fluide dans la longueur chauffante.

La vitesse normalisée U est définie par :

$$U = \sigma_i U_i \quad (2)$$

U est une fonction continue de l'abscisse le long du canal.

Les deux variables étant le temps T et l'abscisse normalisée Z, les quatre inconnues sont l'enthalpie H, la masse volumique R, la vitesse normalisée U et la pression P. L'origine des enthalpies est l'enthalpie pour laquelle le volume massique commence à varier (voir fig. 1).

Les quatre équations sont l'équation d'état et les équations de conservation.

$$\left. \begin{aligned} \text{Etat (hypothèse c)} \quad R &= R_0 \text{ pour } H \leq 0 \\ \text{et} \quad R &= \frac{H_c R_0}{H + H_c} \quad \text{ou} \quad \frac{R_0}{R} = 1 + \frac{H}{H_c} \text{ pour } H \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{Continuité} \quad \frac{\partial R}{\partial T} + \frac{\partial (RU)}{\partial Z} = 0 \quad (4)$$

$$\text{Energie (hypothèse l)} \quad R \frac{\partial H}{\partial T} + RU \frac{\partial H}{\partial Z} = W \quad (5)$$

Dynamique

Sur la singularité i, à l'entrée de la longueur i, la chute de pression est supposée donnée par :

$$-\delta P_i = (1 + \psi_i) \frac{RU_i^2}{2} - \frac{RU_{i-1}^2}{2} = \left[\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right] \frac{RU^2}{2}$$

où ψ_i est le coefficient de perte de pression exprimé en utilisant les caractéristiques aval. (En cas de nécessité, la chute de pression peut aussi s'écrire :

$$-\delta P_i = \left[\frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{\psi_i' - 1}{\sigma_{i-1}^2} \right] \frac{RU^2}{2}$$

où ψ_i' est le coefficient de perte de pression exprimé en utilisant les caractéristiques amont).

Sur la longueur i le gradient de chute de pression est :

$$-\frac{\partial P_i}{\partial Z_i} = R \frac{\partial U_i}{\partial T} + RU_i \frac{\partial U_i}{\partial Z_i} + RG \sin \varphi_i + \frac{\Lambda_i RU_i^2}{2 D_i}$$

(φ_i est positif pour les écoulements ascendants, négatifs pour les écoulements descendants).

Donc (hypothèse e)

$$\left. \begin{aligned} \Delta P (U_0, \frac{\partial U_0}{\partial T}) &= \sum_i \left(\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right) \frac{RU^2}{2} \\ &+ \int_{\text{canal}} \left[\frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{U}{\sigma_i} \frac{\partial U}{\partial Z} + G \sin \varphi_i + \frac{\Lambda_i U^2}{2 D_i \sigma_i^2} \right] R \frac{dZ}{\sigma_i} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

En utilisant (3) et (5) on peut exprimer simplement l'équation de continuité (4) qui s'écrit :

$$\frac{dR}{dH} \left[-\frac{\partial H}{\partial T} + U \frac{\partial H}{\partial Z} \right] + R \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = W \frac{d \frac{1}{R}}{dH} = \frac{1}{\theta} \quad (7)$$

θ a les dimensions d'un temps.

Dans LCDV

$$\theta = \theta_c = \frac{H_c R_o}{W} \quad (8)$$

Dans les autres longueurs $\theta \rightarrow \infty$

Dans LCDV, l'équation de l'énergie peut être remplacée par une expression simple en combinant (3), (5), (8) :

$$\frac{1}{R} \left(-\frac{\partial R}{\partial T} + U \frac{\partial R}{\partial Z} \right) = -\frac{1}{\theta_c} \quad (9)$$

Pour réduire le nombre de paramètres à considérer, il est utile de mettre les équations sous forme adimensionnelle. La meilleure façon de le faire est d'utiliser un système à quatre grandeurs fondamentales : grandeurs mécaniques, (longueurs, masse volumique, temps) ; grandeur thermique, (cf. hypothèse 1) (enthalpie). Comme unités pour ces grandeurs, on prend respectivement la longueur chauffée L_c , la masse volumique à l'entrée R_o , le temps caractéristique θ_c et l'enthalpie caractéristique H_c .

Les équations adimensionnelles sont écrites ci-dessous dans chaque tronçon. Pour simplifier l'écriture, les valeurs réduites de la gravité et du coefficient de frottement sont définies par :

$$g = \frac{G \theta_c^2}{L_c} \sin \psi_c$$

$$f = \frac{\Lambda_o}{2} \frac{L_c}{D_c}$$

Λ_o étant le coefficient de Darcy dans LCDC.

$$q_i \text{ est défini par } q_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right)$$

2.3. Equations de LAE (longueur adiabatique d'entrée)

Dans ce tronçon $\theta \rightarrow \infty$

$u_o(t)$ étant la valeur réduite de la vitesse normalisée à l'entrée et $-s$ étant la valeur réduite de l'enthalpie d'entrée (s pour "sous-saturation") les équations (3), (7), (5) conduisent à :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_o(t) \\ \rho &= 1 \\ h &= -s \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

La chute de pression réduite dans LAE est d'après (6)

$$\Delta p [LAE] = \sum_i q_i u_o^2 + \int_{LAE} \left[\frac{1}{\sigma_i} \frac{du_o}{dt} + g \frac{\sin \psi_i}{\sin \psi_c} + \frac{\Lambda_i L_c}{2 D_i} \frac{u_o^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{dz}{\sigma_i}$$

Elle peut s'écrire sous forme conventionnelle :

$$\Delta p [LAE] = \left(\frac{du_o}{dt} + g + f u_o^2 \right) l_o \quad (11)$$

où l_o prend trois valeurs différentes pour les trois sortes de termes (inertie, gravité, frottement). Pour simplifier l'écriture, les termes provenant des singularités qui sont en u_o^2 , sont assimilés à des termes de frottement.

$$\text{Inertie} \quad l_{oi} = \int_{LAE} \frac{dz}{\sigma_i^2}$$

$$\text{Gravité} \quad l_{og} = \int_{LAE} \frac{\sin \psi_i}{\sin \psi_c} \frac{dz}{\sigma_i}$$

$$\text{Frottement} \quad l_{of} = \frac{1}{f} \left[\sum_i q_i + \int_{LAE} \frac{\Lambda_i L_c}{2 D_i} \frac{dz}{\sigma_i^2} \right]$$

Soit, en introduisant les longueurs réelles (dimensionnelles)

$$\left. \begin{aligned} l_{oi} &= \frac{1}{L_c} \sum_{LAE} \frac{L_i}{\sigma_i} \\ l_{og} &= \frac{1}{L_c \sin \psi_c} \sum_{LAE} L_i \sin \psi_i \\ l_{of} &= \frac{D_c}{\Lambda_o L_c} \left[\sum_{LAE} \left(\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right) + \sum_{LAE} \frac{\Lambda_i L_i}{D_i \sigma_i^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Les trois quantités (12) sont les seuls paramètres réduits de géométrie pour la longueur adiabatique d'entrée.

2.4. Equations de LCDC (longueur chauffante à densité constante)

Dans ce tronçon $\theta \rightarrow \infty$

D'après (7), l'équation de continuité se réduit à $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

En utilisant les variables de LAGRANGE, l'équation (5) s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{Dh}{Dt} = 1$$

Soit $\tau(t)$ le temps réduit auquel une particule donnée quitte LCDC et $\lambda(t)$ la longueur de LCDC. L'apparition d'un effet de densité dans le canal suppose $\lambda < 1$.

Des calculs simples conduisent au système suivant d'équations :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(t) \\ \rho &= 1 \\ h &= t - \tau \\ \lambda &= \int_{t-s}^t u_0(x) dx \\ z &= \int_{\tau-s}^t u_0(x) dx \\ \lambda &< 1 \\ \tau - s &\leq t \leq \tau \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

La chute de pression réduite dans LCDC est, d'après (6) :

$$\Delta p [LCDC] = \int_{LCDC} \left[\frac{du_0}{dt} + g + f u_0^2 \right] dz$$

(Dans LCDC, il n'y a pas de singularités : $\sigma_i = 1$)

$$\Delta p [LCDC] = \left(\frac{du_0}{dt} + g + f u_0^2 \right) \lambda \quad (14)$$

2.5. Equations de LCDV (longueur chauffante à densité variable)

Dans ce tronçon $\theta = \theta_c$

D'après (7), l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

D'après (9), l'équation de l'énergie est :

$$\frac{D(\log \rho)}{Dt} = -1$$

Des calculs simples conduisent au système suivant d'équations :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(t) - \lambda(t) + z \\ \rho &= e^{-(t-\tau)} \\ h &= \frac{1}{\rho} - 1 \\ z(t, \tau) &= \lambda(\tau) e^{t-\tau} + e^t \int_{\tau}^t e^{-x} [u_0(x) - \lambda(x)] dx \\ \lambda &\leq z \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

La chute de pression réduite dans LCDV est, d'après (6) :

$$\Delta p [LCDV] = \int_{LCDV} \left[\frac{du_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + u_0 - \lambda + z + g + \frac{\Lambda_i}{\Lambda_0} f (u_0 - \lambda + z)^2 \right] \rho dz$$

L'hypothèse h postule que

$$\frac{dp_{\text{frottement émulsion}}}{dp_{\text{frottement liquide}}} = \frac{\Lambda_i}{\Lambda_0} \frac{1}{\rho} = 1 + v h$$

où v est une constante numérique. Il en résulte :

$$\frac{\Lambda_i}{\Lambda_0} = \rho + v \rho h = v - (v-1) \rho$$

Soit :

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \int_{\lambda}^1 \rho dz \\ A_1 &= \int_{\lambda}^1 (u_0 - \lambda + z) \rho dz \\ A_2 &= \int_{\lambda}^1 (u_0 - \lambda + z)^2 \rho dz \\ A_3 &= \int_{\lambda}^1 (u_0 - \lambda + z)^2 \rho^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

A_0, A_1, A_2, A_3 sont des quantités positives, fonctions seulement du temps. A_0, A_1, A_2 sont respectivement la masse, la quantité de mouvement et le double de l'énergie cinétique du fluide présent dans LCDV à l'instant t . A_3 est aussi lié à la quantité de mouvement ci-dessus et à sa répartition le long du canal. La chute de pression réduite dans LCDV s'écrit :

$$\Delta p [\text{LCDV}] = \left[\frac{du_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right] A_0 + A_1 + f \left[v A_2 - (v - 1) A_3 \right] \quad (17)$$

2.6. Chute de pression à la sortie de la longueur chauffante (point D figure 3)

Les équations (15) s'appliquent avec ici $z = 1$.

La chute de pression en ce point est, d'après (6) :

$$\Delta p [\text{point D}] = q_d \rho_d (u_0 - \lambda + 1)^2 \quad (18)$$

2.7. Equations de LAS (longueur adiabatique de sortie)

Dans ce tronçon $\theta \rightarrow \infty$

D'après (7) l'équation de continuité se réduit à $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ (u n'est fonction que du

temps). En utilisant les variables de LAGRANGE, l'équation de l'énergie (5) s'écrit $\frac{Dh}{Dt} = 0$.

Des calculs simples conduisent au système suivant d'équations :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(t) - \lambda(t) + 1 \\ \rho &= e^{-(t_d - \tau)} \\ h &= \frac{1}{\rho} - 1 \\ z(t, \tau) &= 1 + \int_{t_d}^t \left[u_0(x) - \lambda(x) + 1 \right] dx \\ t_d &\leq t \leq \text{instant de sortie} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

t_d est l'instant réduit auquel une particule, entrée dans LCDV à l'instant τ quitte LCDV.

La chute de pression réduite dans LAS est d'après (6) :

$$\Delta p [\text{LAS}] = \int_{\text{LAS}} \left[\frac{1}{\sigma_a} \left(\frac{du_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} \right) + g \frac{\sin \varphi_a}{\sin \varphi_c} + \frac{\Lambda_a L_c (u_0 - \lambda + 1)^2}{2 D_a \sigma_a^2} \right] \frac{\rho dz}{\sigma_a}$$

Elle peut s'écrire sous forme conventionnelle :

$$\Delta p [\text{LAS}] = \left(\frac{du_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right) B_0 + f B_2 \quad (20)$$

où B_0 prend deux valeurs différentes pour les deux sortes de termes (inertie, gravité).

Soit :

$$\left. \begin{aligned} l_{ai} &= \frac{L_a}{L_c \sigma_a} \\ l_{ag} &= \frac{L_a \sin \varphi_a}{L_c \sin \varphi_c} \\ l_{af} &= \frac{\Lambda_a}{\Lambda_0} \frac{D_c}{D_a} \frac{L_a}{L_c} \frac{1}{\sigma_a^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

et la longueur normalisée réduite de LAS :

$$l_{an} = \frac{\sigma_a L_a}{L_c}$$

B_0 et B_2 prennent les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} \text{Inertie} \quad B_{oi} &= \frac{l_{ai}}{l_{an}} \int_{\text{LAS}} \rho dz \\ \text{Gravité} \quad B_{og} &= \frac{l_{ag}}{l_{an}} \int_{\text{LAS}} \rho dz \\ \text{Frottement} \quad B_{2f} &= \frac{l_{af}}{l_{an}} (u_0 - \lambda + 1)^2 \int_{\text{LAS}} \rho dz \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

B_0 et B_2 sont des quantités analogues à A_0 et A_2 . Elles sont positives et fonctions seulement du temps.

2.8. Chute de pression à la sortie (point E, figure 3)

Les équations (19) s'appliquent avec ici $z = 1 + l_{an}$.

La chute de pression en ce point est, d'après (6) :

$$\Delta p [\text{point E}] = q_e \rho_e (u_0 - \lambda + 1)^2 \quad (23)$$

2.9. Conclusions

Le comportement du fluide dans le modèle à effet de densité est complètement décrit par les systèmes d'équations ci-dessus (10), (13), (15), (19) complétés par la "condition aux limites dynamique" (6) :

$$\Delta p (u_0, \frac{du_0}{dt}) = \Delta p [\text{LAE}] + \Delta p [\text{LCDC}] + \Delta p [\text{LCDV}] + \Delta p [\text{point D}] + \Delta p [\text{LAS}] + \Delta p [\text{point E}]$$

qui se réduit à la somme des équations (11), (14), (17), (18), (20), (23). Des relations supplé-

mentaires (12), (16), (21), (22) sont utilisées pour simplifier la forme de l'équation (6).

Avec ces équations, le problème se ramène essentiellement à la recherche de deux fonctions inconnues : la vitesse à l'entrée $u_o(t)$ et la densité $\rho(z, t)$. De plus, le problème serait facile à résoudre si la forme de la fonction $u_o(t)$ était connue.

La condition aux limites dynamique (6) qui lie $\frac{du_o}{dt}$ à u_o est ainsi l'équation de base du problème.

3. EQUATION DE BASE DU MODELE A EFFET DE DENSITE

3.1. Etablissement de l'équation

L'hypothèse e s'exprime sous forme adimensionnelle

$$\Delta p(u_o, \frac{du_o}{dt}) = \psi(u_o) - l_p \frac{du_o}{dt}$$

où l_p est un nombre positif caractéristique de l'inertie du circuit extérieur.

Combinant (6), (11), (14), (17), (18), (20), (23) il vient :

$$\begin{aligned} \psi(u_o) - l_p \frac{du_o}{dt} &= \left(\frac{du_o}{dt} + g + f u_o^2 \right) (l_o + \lambda) \\ &+ \left(\frac{du_o}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right) A_o + A_1 + f \left[v A_2 - (v-1) A_3 \right] \\ &+ q_d \rho_d (u_o - \lambda + 1)^2 \\ &+ \left(\frac{du_o}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right) B_o + f B_2 \\ &+ q_e \rho_e (u_o - \lambda + 1)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{Posons : } u_o(t) = u_{oo} + v(t) \quad (25)$$

où u_{oo} est la vitesse réduite à l'entrée en régime permanent. (Ici la perturbation $v(t)$ peut être grande).

En régime permanent ($v \approx 0$) (24) s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi(u_{oo}) &= (g + f u_{oo}^2) (l_o + \lambda_o) + g A_{oo} + A_{10} + f \left[v A_{20} - (v-1) A_{30} \right] \\ &+ q_d \rho_{do} (u_{oo} - \lambda + 1)^2 + g B_{oo} + f B_{20} + q_e \rho_{eo} (u_{oo} - \lambda_o + 1)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

En retranchant (26) de (24) et en résolvant en $\frac{du_o}{dt} = \frac{dv}{dt}$ on obtient l'équation dite "de base" (27) :

$$\begin{aligned} (l_p + l_o + \lambda + A_o + B_o) \frac{dv}{dt} &= \psi(u_{oo} + v) - \psi(u_{oo}) \\ &- f v (2 u_{oo} + v) (l_o + \lambda) \\ &- (g + f u_{oo}^2) (\lambda - \lambda_o) + \frac{d\lambda}{dt} (A_o + B_o) \\ &- g (A_o - A_{oo}) - (A_1 - A_{10}) - f \left[v (A_2 - A_{20}) - (v-1) (A_3 - A_{30}) \right] \\ &- q_d \Delta \left[\rho_d (u_o - \lambda + 1)^2 \right] \\ &- g (B_o - B_{oo}) - f (B_2 - B_{20}) \\ &- q_e \Delta \left[\rho_e (u_o - \lambda + 1)^2 \right] \end{aligned}$$

3.2. Discussion : Mécanisme des oscillations

3.2.1. Discussion

Si le comportement du modèle est oscillatoire (et la 2ème partie montrera qu'il l'est) l'équation (27) donne la clé du mécanisme moteur correspondant. Le premier membre de l'équation (27) est du signe de $\frac{dv}{dt}$. Dans le second membre, à un instant donné t , les termes d'amortissement sont de signe contraire à v , puisqu'ils tendent à donner $v \frac{dv}{dt} < 0$, et les termes moteurs sont du signe de v puisqu'ils tendent à donner $v \frac{dv}{dt} > 0$. Le second membre de (27) a été, à dessein, écrit en 7 lignes, suivant l'origine des termes.

Première ligne : $\psi(u_{oo} + v) - \psi(u_{oo})$ peut être, soit 0 (voir figure 2, cas de la convection naturelle) soit de signe contraire à v (convection forcée). Ce terme introduit l'influence des caractéristiques, en régime permanent, de la partie du circuit extérieur au canal et explique pourquoi, avec le même canal et les mêmes conditions opératoires (même vitesse réduite), le fonctionnement en convection naturelle est moins stable que le fonctionnement en convection forcée, en accord avec les renseignements bibliographiques. Dans le cas d'un by-pass important, il n'y a, bien sûr, aucune influence du circuit extérieur (l_p dans le premier membre est aussi nul).

Deuxième ligne : $- f v (2 u_{oo} + v) (l_o + \lambda)$. Ce terme provient des longueurs à densité constante ("simple phase") non chauffée (l_o) et chauffée (λ). C'est un terme d'amortissement puisqu'il est toujours de signe contraire à v .

Troisième ligne : $-(g + f u_{00}^2)(\lambda - \lambda_0) + \frac{d\lambda}{dt}(A_0 + B_0)$. Ce terme provient de différents tronçons (LCDC, LCDV, LAS). Il a été, à dessein, mis sous cette forme pour montrer l'influence sur la stabilité de la présence d'une frontière mobile entre LCDC et LCDV. (Il disparaît lorsqu'on fixe arbitrairement cette frontière). D'après l'équation (13) :

$$\lambda = \int_{t-s}^t u_0(x) dx \quad \frac{d\lambda}{dt} = v(t) - v(t-s)$$

Le terme est en retard par rapport à v . Après tout changement de signe de v , c'est un terme moteur à cause de ce retard. Ceci explique la raison et le signe de la différence importante (voir 2ème partie) qui existe entre le cas sans sous-saturation ($s = 0$ d'où $\lambda = 0$) et les cas correspondant à de petites valeurs de la sous-saturation.

Les autres termes (quatrième à septième ligne) peuvent également être moteurs pour la même raison. Ce sont des fonctions de la densité (voir équations (16) et (22)) et la densité à une abscisse donnée z est retardée par rapport à la perturbation v de vitesse à l'entrée. Ces termes proviennent respectivement du tronçon LCDV, du point D, du tronçon LAS et du point E. Comme on peut s'en rendre compte d'après leurs définitions (16), il faut noter que A_1 , A_2 et A_3 dépendent de la distribution de la masse dans le tronçon LCDV. Cette distribution est affectée par des phénomènes tels que l'ébullition locale et le glissement dont l'influence est aussi, au moins approximativement, prise en compte ici. D'autre part, B_2 (voir équation (22)) (comme évidemment A_0 et B_0) est indépendant de la distribution de la masse dans le tronçon LAS. Ceci conduit à l'idée, à vérifier, que l'influence du tronçon LAS (plus souvent la cheminée) pourrait être maximum quand la perturbation dans ce tronçon est maximum, c'est-à-dire quand le temps de transit d'une particule dans LAS est une demi-période. Ainsi l'influence de LAS pourrait n'être pas monotone. Malheureusement [1], les longueurs de cheminée correspondantes n'ont pas été essayées expérimentalement.

Au lieu d'écrire l'équation (27) comme ci-dessus, il est possible de distinguer des termes d'inertie, de gravité, de frottement (sauf aux points D et E pour lesquels inertie et frottement ont été réunis dans q_d et q_e). La nomenclature a été choisie de telle façon que g apparaisse dans toute terme de gravité, f dans tout terme de frottement et que ni f ni g n'apparaissent dans les termes d'inertie.

Il faut noter d'après l'équation (27) qu'un comportement oscillatoire avec un canal horizontal ou même vertical à écoulement descendant est presque aussi vraisemblable qu'avec un canal vertical à écoulement ascendant.

L'introduction de termes moteurs dus au frottement n'est pas surprenante, puisque les effets du frottement à une abscisse donnée z sont retardés par rapport à la vitesse à l'entrée par l'effet de densité.

3.2.2. Le mécanisme des oscillations

L'analyse précédente conduit à la description suivante du mécanisme à "effet de densité" illustré par la figure 4.

Toute perturbation a des conséquences retardées sur la densité et sa distribution le long du canal, les retards étant introduits par le phénomène de propagation des variations de densité (cf. paragraphe 1.3.). Par leurs effets intégrés sur les termes de chute de pression et à cause de la condition aux limites dynamique (imposée par le circuit extérieur), ces variations de densité provoquent d'autres perturbations, retardées par rapport à la perturbation initiale. Pour certaines valeurs des paramètres, ce mécanisme permet l'entretien d'oscillations.

Par exemple, un accroissement fortuit et bref du débit provoque, pendant un temps fini, un accroissement de la masse volumique et un accroissement de la longueur "non bouillante". A son tour, ceci provoque une augmentation de la chute de pression et une diminution du débit qui, du fait des retards ci-dessus, amène le débit sous sa valeur initiale de régime permanent et amorce un comportement oscillatoire.

Dans ce mécanisme, les séquences motrices, pour la plupart des termes, sont celles qui suivent les changements de signe de la perturbation de vitesse.

On peut constater sur (27) que ce mécanisme est le seul mécanisme moteur possible dans le modèle : tout comportement oscillatoire survenant dans le système considéré doit être attribué à ce mécanisme.

Le mécanisme à effet de densité est analogue à des mécanismes envisagés précédemment, par exemple dans [2]. Cependant, il est donné ici dans sa forme générale, indépendamment de toute particularité géométrique ou de tout terme isolé de chute de pression (le terme de gravité, habituellement mis en avant, ne joue pas ici de rôle particulier).

Vu la forme relativement compliquée de l'équation (27), l'établissement d'un critère analytique d'apparition des oscillations serait, pour le moins, très difficile. Cet établissement n'a pas été tenté ici et une autre méthode pour l'étude des seuils d'oscillation est proposée dans la seconde partie.

4. PARAMETRES DU MODELE

Les paramètres adimensionnels figurant dans les équations (10), (13), (15), (19) et (27) sont les seuls paramètres ayant une influence sur le comportement transitoire du modèle. Comme ils sont adimensionnels, il est utile, d'un point de vue physique, de conserver présent à l'esprit la signification des quantités utilisées comme unités pour la mise sous forme adimensionnelle des équations. Ces significations sont évidentes sauf pour θ_c . D'après (15) $\rho = e^{-(t-\tau)}$ on voit que θ_c est le temps nécessaire pour qu'une particule, donnée dans la longueur chauffante à densité variable, voit son volume multiplié par e . En conséquence, si θ_c est grand, l'effet de densité est faible et le système doit être stable et inversement. Cette remarque peut être utile pour une première estimation de la stabilité d'un système donné.

Elle explique l'influence stabilisatrice d'une augmentation de pression ($\theta_c = \frac{H_c R_o}{W}$ est presque proportionnel à la pression).

Les paramètres sont classés ici soit comme paramètres de l'installation (y compris les propriétés du fluide) soit comme paramètres de fonctionnement.

4.1. Paramètres de l'installation

1) - Plusieurs de ces paramètres sont des longueurs réduites définies par les équations (12) et (21). Ils représentent tous la partie de la longueur du canal de référence ayant la même chute de pression par inertie ou par gravité ou par frottement que l'élément considéré.

l_{oi} et l_{of} représentent LAE. D'après leurs positions dans l'équation (27), on peut prévoir qu'un accroissement de l_{oi} n'a qu'une influence faible sur la stabilité mais peut affecter la fréquence des oscillations cependant qu'un accroissement de l_{of} a une influence stabilisatrice (ceci est en accord avec les expériences). Il est commode de modifier l_{oi} pour y inclure l_p représentant l'inertie du circuit extérieur. On constate qu'un accroissement de l'inertie du circuit extérieur a exactement la même influence qu'un accroissement de l'inertie de LAE.

l_{ai} , l_{ag} et l_{af} représentent LAS.

2) - Les autres paramètres ont d'autres significations : f est un "frottement" réduit dans LCDC tandis que V est un coefficient affectant le frottement dans LCDV. (V n'est que faiblement fonction de la pression et de la qualité moyenne. Son ordre de grandeur est 2,5 à 3,5). l_{an} est la longueur normalisée réduite de LAS, q_d et q_e représentent respectivement les singularités ou changements géométriques entre la longueur chauffante et LAS et à la sortie de LAS.

3) - Ainsi, la géométrie relativement complexe du canal est représentée par 10 paramètres. Dans le cas simple où il n'y a pas de singularités, ces 10 paramètres se réduisent à 5 : l_{oi} , l_{of} , f , V , l_a .

4) - En sus de l_p , le circuit extérieur peut introduire plusieurs paramètres qui sont tous compris dans la fonction $\Psi(u_{oo} + v) - \Psi(u_{oo})$. La première dérivée ($\frac{d\Psi}{du_{oo}}$) de la fonction Ψ montre l'importance de la pente de la caractéristique externe de régime permanent.

4.2. Paramètres de fonctionnement

Ils sont trois :

1. La sous-saturation réduite $s = \frac{H_o}{H_c}$ est aussi le temps de transit réduit d'une particule

donnée dans LCDC (13). La longueur "non bouillante" λ , fonction de s , figure dans l'équation de base (27) et comme noté ci-dessus (paragraphe 3.2.1.), ceci crée pour s la possibilité de jouer un rôle important.

2. La vitesse réduite de régime permanent $u_{oo} = \frac{U_{oo} \theta_c}{L_c} = \frac{U_{oo} H_c R_o}{W L_c}$ est proportionnelle au quotient du débit de régime permanent par la puissance. D'après (15) u_{oo} est aussi le rapport de la vitesse réelle à l'entrée en régime permanent à la vitesse à l'entrée dans un régime permanent de référence. Dans le régime permanent de référence, sans sous-saturation, une particule donnée double de volume pendant son séjour dans la longueur chauffante. La remarque faite ci-dessus à propos de θ_c s'applique à u_{oo} ce qui signifie que l'ordre de grandeur de u_{oo} est important pour ce qui concerne la stabilité. (L'ordre de grandeur de u_{oo} compatible avec un comportement oscillatoire sera donné dans la seconde partie).

Il est aussi intéressant de remarquer que u_{oo} est simplement l'inverse du nombre de DAMKOHLER [16] apparaissant dans les appareillages avec combustion qui sont aussi sujets au même type de comportement oscillatoire.

La relation en régime permanent entre le débit et la chute de pression dans le canal (second membre de l'équation (26)) n'étant pas forcément monotone, certaines gammes de valeurs de u_{oo} peuvent n'être pas réalisables. Ce n'est pas là le phénomène étudié ici (c'est un phénomène d'instabilité étudié par exemple par LEDINEGG [17]) mais c'est un point qu'il faut vérifier avant d'utiliser l'équation (27) car cette limitation n'existe plus dans (27). Des solutions de (27) peuvent exister pour des valeurs impossibles de u_{oo} : elles n'ont pas alors de signification physique.

$$3. \text{ La gravité réduite } g = \frac{G \theta_c^2 \sin \varphi}{L_c} = \frac{G (H_c R_o)^2 \sin \varphi}{W^2 L_c}$$

est inversement proportionnelle au carré de la puissance. C'est aussi le rapport entre la projection de l'accélération de la pesanteur sur la direction de la longueur chauffante et l'accélération à l'entrée dans le régime permanent de référence défini ci-dessus. Il traduit l'influence du champ de gravité sur le comportement du système. Il y a des raisons (paragraphe 3.2.) de penser que cette influence n'est pas considérable et que g n'est pas un paramètre très "sensible".

5. CONCLUSION

1) - Quelques remarques sont faites d'un point de vue physique sur le comportement oscillatoire de canaux chauffés. On insiste sur l'importance des retards dans l'analyse de ce comportement.

2) - Un modèle à effet de densité est proposé pour l'explication du comportement. L'effet de densité est la conséquence de la relation physique entre enthalpie et masse volumi-

que. Les équations non linéaires du modèle sont établies et mises sous forme adimensionnelle.

3) - On donne une description, basée sur l'analyse des équations, du mécanisme des oscillations. Celles-ci sont entretenues du fait des retards introduits par l'effet de densité entre la vitesse à l'entrée et les différents termes de chute de pression.

4) - On établit la liste des paramètres du modèle. A ce stade de l'étude et en accord avec l'expérience, on trouve déjà qu'un accroissement de la perte de pression à l'entrée a une influence stabilisatrice, que le fonctionnement en convection forcée est plus stable que le fonctionnement en convection naturelle, et que des oscillations peuvent apparaître également dans des canaux horizontaux. Un temps caractéristique θ_c est introduit et son ordre de grandeur s'avère important pour tout problème concernant les oscillations.

Manuscrit reçu le 24 octobre 1966

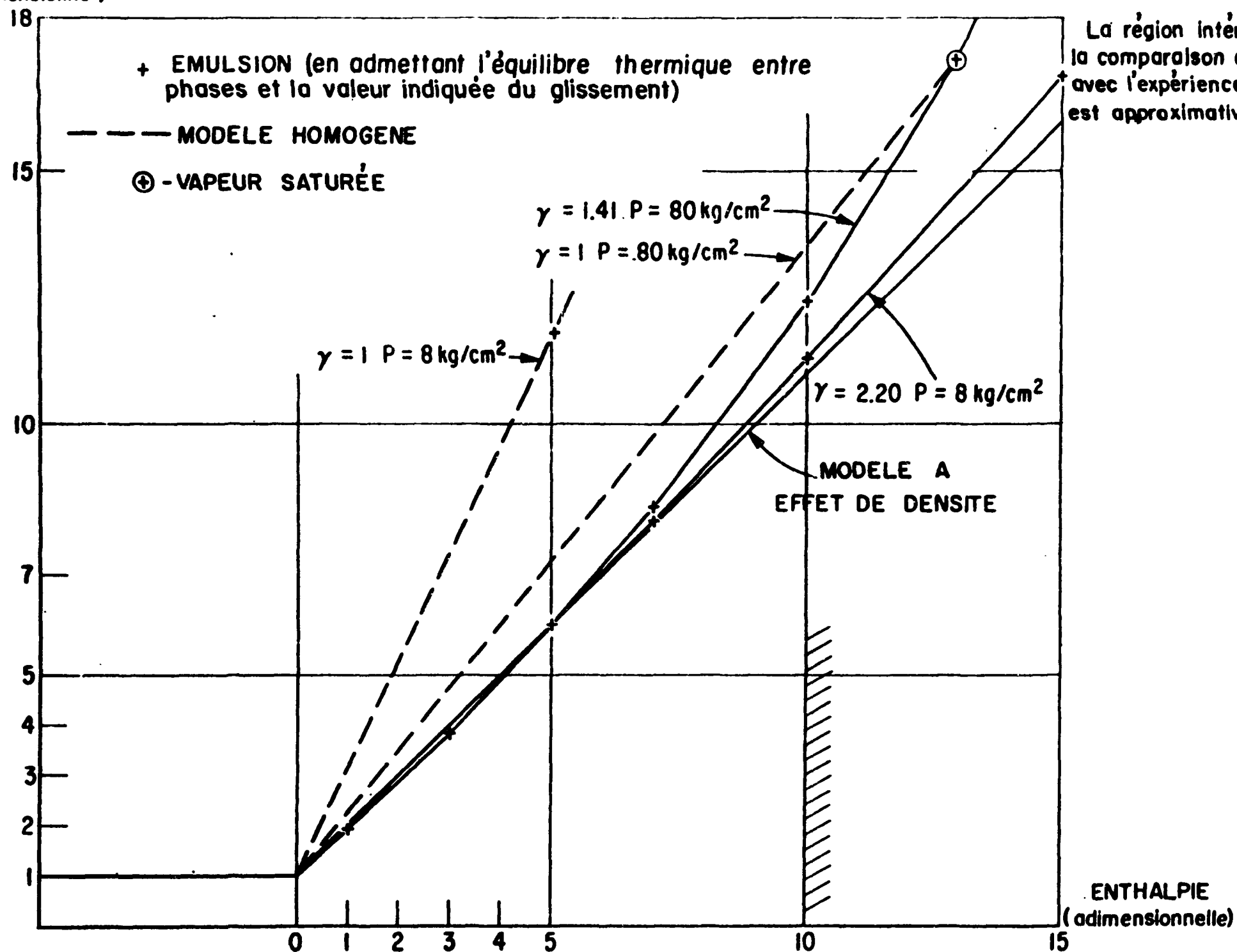
BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURE J.
Contribution à l'étude théorique des oscillations dans les canaux chauffants à ébullition.
Thèse Docteur-Ingénieur - Centre d'Etudes Nucléaire et Université de Grenoble (France), Juin 1965
- [2] WALLIS G.B., HEASLEY J.H.
Oscillations in two-phase flow system
J. of Heat Transfer , Aug. 1961, 83 c, 3
- [3] DAVIDOV A.A.
Investigation of flow pulsations in tubes of the evaporation section of radiant boilers
AEC Tr 4490, 1955
- [4] LUMMIS R.C.
The frequency response of nucleate pool boiling heat transfer ,
NYO 9940, 1964
- [5] ST PIERRE C.C., PETRICK M., BANKOFF S.G.
Response of a boiling water channel to power modulation, 1965
- [6] GOUSE S.W., ANDRYSIK C.D.
Some observations on two-phase flow oscillations
Proc. Multiphase flow symposium, Winter meeting, ASME, nov. 1963

- [7] BECKER K.M., JAHNBERG S., HAGA I., HANSSON P.T., MATHISEN R.P.
Hydrodynamic instability and dynamic burnout in natural circulation two-phase flow . An experimental and theoretical study.
AE 156, Sept. 1964
- [8] Technische Hogeschool te Eindhoven
Final report on the research program on heat transfer and stability studies in B.W.R.
WW 016 R70, feb. 1965
- [9] JEGLIC F.A., GRACE T.M.
Onset of flow oscillations in forced flow subcooled boiling
NASA TND 2821, 1964
- [10] OZISIK M.N., CEBECI T.
Dynamic stability of flow oscillation in a heated channel
ASME paper 65HT 45
- [11] JAIN K.C.
Self-sustained hydrodynamic oscillations in a natural circulation two-phase flow boiling loop
PhD Thesis, Northwestern University (Aug. 1965)
- [12] ZUBER N., STAUB F.W.
The propagation and the wave form of the vapor volumetric concentration in boiling, forced convection system under oscillatory conditions
International Journal of Heat and Mass Transfer, 9, 9, Sept. 1966
- [13] BOURÉ J.
Oscillations de débit dans un canal bouillant
Actes VIII^e Journées de l'Hydraulique - Lille, France (Juin 1964)
- [14] FABREGA S.
Etude expérimentale des instabilités hydrodynamiques survenant dans les réacteurs nucléaires à ébullition.
Thèse Docteur-Ingénieur - Centre d'Etudes Nucléaires et Université de Grenoble (France), Oct. 1964

- [15] BOURÉ J.
Propagation de petites perturbations dans les écoulements diphasés avec transfert de masse et glissement
Actes VIII^e Journées de l'Hydraulique - Lille, France, Juin 1964
- [16] PENNER S.S.
Chemistry problems in jet propulsion
Pergamon, 1957
- [17] LEDINEGG M.
Unstabilität der strömung bei natürlichem und zwangumlauf
Die Wärme, 1938, 61, 891-898.

VOLUME MASSIQUE
(adimensionnel)



La région intéressante pour la comparaison quantitative avec l'expérience (2^e partie) est approximativement $h < 10$

FIG.1 LOIS DE DENSITE COMPAREES

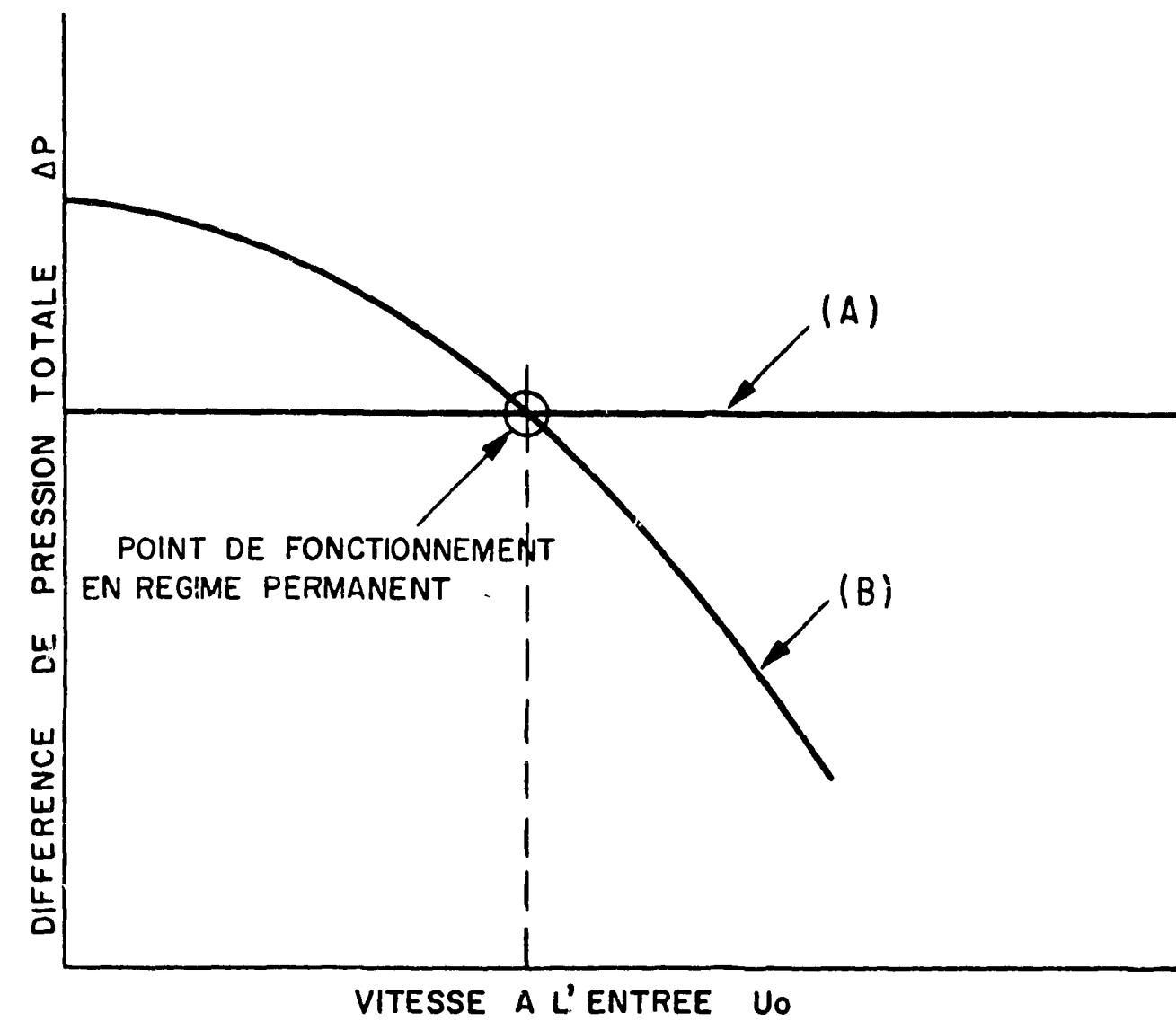


FIG.2 CARACTERISTIQUES EXTERNES (Regime permanent)
 COURBE A: BY PASS DE FORTE SECTION OU CONVECTION NATURELLE
 COURBE B: BY PASS DE FAIBLE SECTION OU CONVECTION FORCEE

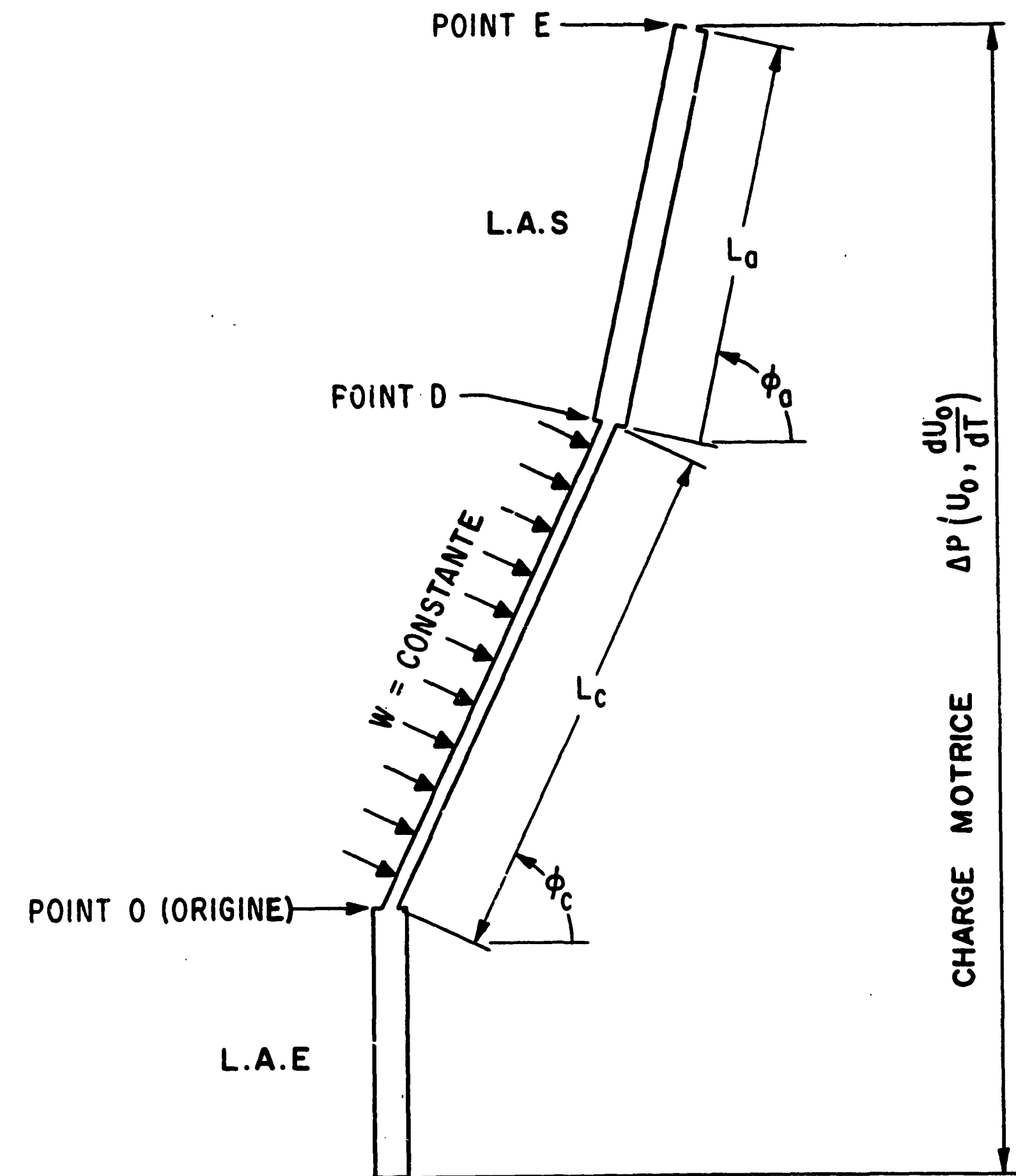


FIG.3 MODELE A EFFET DE DENSITE:
 LE CANAL

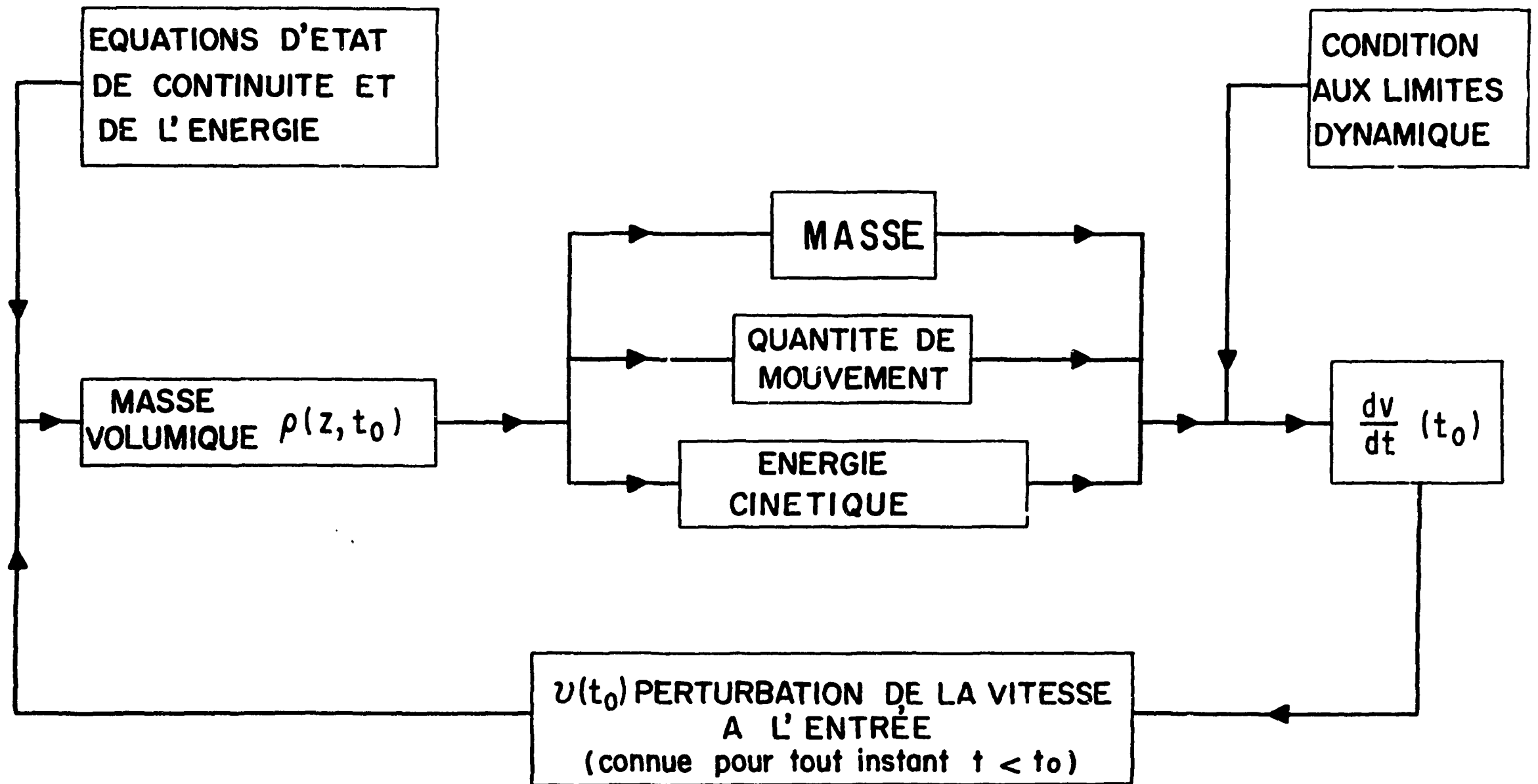


FIG.4 MODELE A EFFET DE DENSITE: MECANISME MOTEUR

SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ETUDE THEORIQUE DE L' "EFFET DE DENSITE"
Deuxieme partie
SEUILS D'OSCILLATION (EQUATIONS LINEARISEES)

par

Jean BOURE

Rapport CEA - R 3049

1967

Ca

CENTRE D'ETUDES
NUCLEAIRES DE GRENOBLE

BOURE J. .-

Sur le Comportement oscillatoire de canaux chauffés.

Etude théorique de l'"effet de densité". Deuxième partie.

Seuils d'oscillation (équations linéarisées).-

Commissariat à l'énergie atomique, Centre d'études
nucléaires de Grenoble (Isère), 1967.-

27 cm, 30 p.

CEA-R 3049 (2ème partie) - BOURÉ Jean

SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ETUDE THEORIQUE DE L'EFFET DE DENSITE
2ème partie : SEUILS D'OSCILLATION (EQUATIONS LINEARISEES)

Sommaire. - L'apparition d'oscillations dans les canaux chauffés est étudiée dans le cadre de l' "effet de densité", conséquence de la relation physique entre l'enthalpie et la masse volumique du fluide.

On établit les équations du seuil, après linéarisation des équations obtenues dans la première partie [1]. Elles peuvent être résolues rigoureusement par une méthode numérique et conduisent à :

1. une relation entre les paramètres du modèle au seuil d'oscillation,
2. la fréquence des oscillations au seuil.

En comparant les prédictions du modèle aux comportements observés expérimentalement, on montre que l'effet de densité est très souvent la cause réelle de comportements oscillatoires.

1967

32 p

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-R 3049 (part II) - BOURÉ Jean

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS - AN ANALYSIS
OF THE DENSITY EFFECT

Part II : THE OSCILLATIONS THRESHOLDS (LINEARIZED ANALYSIS)

Summary. - The onset of the oscillatory behavior of heated channels is studied in terms of the so-called "density-effect", consequence of the physical relationship between enthalpy and density of the fluid.

The threshold equations are derived, after linearization of the equations obtained in part I [1]. They can be solved rigorously by numerical methods to yield :

1. a relation between the describing parameters at the onset of oscillations, and
2. the frequency of the oscillations.

By comparing the results predicted by the model to the experimental behavior of actual systems, the density effect is very often shown to be the actual cause of oscillatory behaviors.

1967

32 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
Service des Transferts Thermiques

SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ETUDE THEORIQUE DE L'EFFET DE DENSITE

(II^e partie)

SEUILS D'OSCILLATION (EQUATIONS LINEARISEES)

par

Jean BOURÉ

Ce texte est la version française du rapport en anglais
déjà paru sous le même numéro

*Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200,
en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de
la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.*

*The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française,
Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire,
PARIS VIIème.*

**SUR LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ETUDE THEORIQUE DE L'EFFET DE DENSITE**

II^e Partie

SEUILS D'OSCILLATION (EQUATIONS LINEARISEES)

REMERCIEMENTS

L'auteur est profondément reconnaissant à Monsieur le Professeur A. CRAYA qui, en tant que Conseiller Scientifique du Service des Transferts Thermiques du Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, a dirigé le travail initial [2] et lui a apporté de nombreuses et importantes contributions.

Il remercie Monsieur H. MONDIN, Chef du Service des Transferts Thermiques qui lui a confié cette étude et y a porté un intérêt constant, ainsi que le Docteur N. ZUBER et Monsieur F. W. STAUB du Research and Development Center de la General Electric Company (Schenectady N.Y. USA) avec qui il a eu de nombreuses discussions intéressantes.

Une partie importante du travail initial [2] a été effectuée sous contrat Euratom dans le cadre de l'accord de coopération Euratom-Etats-Unis.

NOMENCLATURE

Les formules dimensionnelles sont établies avec un système d'unités cohérent dont les grandeurs fondamentales sont la longueur (L), la masse (M), le temps (T), la quantité de chaleur (Q).

A	}	fonctions adimensionnelles du temps (voir Annexe 2)
B		
D		diamètre (Annexe 1) ou fonction adimensionnelle de la fréquence (Annexe 2)
E		quantité adimensionnelle (Annexe 2)
G		accélération de la pesanteur (Annexe 1) (LT^{-2})
H		enthalpie (Annexe 1) ($Q M^{-1}$)
L		longueur (Annexe 1) (L)
P		pression (Annexe 1) ($ML^{-1} T^{-2}$)
R		masse volumique (Annexe 1) (ML^{-3})
T		temps (Annexe 1) (T) ou quantité adimensionnelle (Annexe 2)
U		vitesse (Annexe 1) (LT^{-1})
W		densité volumique de puissance (Annexe 1) ($Q L^{-3} T^{-1}$)
Z		fonction trigonométrique (Annexe 2)
Δ		Variation
Λ		coefficient de frottement de Darcy (Annexe 1)
ψ		coefficient de pertes de pression (Annexe 1)
ϕ		fonction ou multiplicateur du coefficient de frottement, de MARTINELLI-NELSON (voir Annexe 1)
c		nombre complexe (équation 2)
f		frottement réduit (voir Annexe 1)
g		gravité réduite (voir Annexe 1)
h		enthalpie réduite
k		quantité adimensionnelle (voir Annexe 2)
l		longueur réduite

m	quantité adimensionnelle (équation 6)
p	pression réduite (Annexe 1)
q	paramètre adimensionnel (Annexe 1)
s	sous-saturation réduite (Annexe 1)
t	temps réduit
u	vitesse réduite
v	perturbation de vitesse, réduite
x	qualité (Annexe 1) ou quantité adimensionnelle
y	quantité adimensionnelle (Annexe 2)
z	abscisse réduite
λ	longueur chauffante à densité constante (réduite)
ν	paramètre de frottement (Annexe 1)
ρ	masse volumique réduite
σ	rapport de sections (Annexe 1)
τ	temps réduit
φ	angle ou fonction (Annexe 1)
ω	pulsation réduite.

Indices

a	relatif à la longueur adiabatique de sortie
c	valeur caractéristique ou relative à la longueur chauffante
d	relatif à la sortie de la longueur chauffante
e	relatif à la sortie du canal
f	relatif à un terme de frottement
g	relatif à un terme de gravité
i	relatif à un terme d'inertie
n	valeur normalisée ou nombre
o	en général, valeur de référence ou relative à l'entrée de la longueur chauffante, ou relative à la longueur adiabatique d'entrée
p	relatif au circuit extérieur (pompe ...)
lg	dans H_{lg} seulement, chaleur latente de vaporisation
oo	valeur de régime permanent à l'entrée de la longueur chauffante.

Sigles

LAE	longueur adiabatique d'entrée
LCDC	longueur chauffante à densité constante
LCDV	longueur chauffante à densité variable
LAS	longueur adiabatique de sortie.

1. INTRODUCTION

Ce rapport est la seconde partie d'une étude consacrée à l'effet de densité en tant qu'explication possible du comportement oscillatoire de canaux chauffés dans lesquels apparaissent des variations importantes de masse volumique (écoulements diphasiques ou supercritique). Le nom d' "effet de densité" traduit les conséquences de la variation de masse volumique en fonction de l'enthalpie le long du canal. Parmi ces conséquences, des retards sont introduits dans le système par toute perturbation.

Dans la première partie [1] , on a montré, en étudiant les équations non linéarisées du modèle, que l'effet de densité est une cause suffisante d'oscillation, dont le mécanisme moteur a été décrit en faisant intervenir les retards ci-dessus.

Une liste des paramètres adimensionnels intervenant dans le modèle a été établie pour une configuration géométrique assez générale (voir aussi annexe 1), et quelques conséquences des équations ont été comparées avec succès aux observations expérimentales.

Le but de ce second rapport est de montrer que l'effet de densité est réellement, du moins très souvent, la cause du comportement oscillatoire.

2. L'EQUATION DE BASE

L'équation dite de base a été établie en [1] (équation (27)) et est (voir nomenclature) :

$$(1_p + 1_o + \lambda + A_o + B_o) \frac{dv}{dt} = \varphi(u_{oo} + v) - \varphi(u_{oo})$$

$$- f v (2u_{oo} + v) (1_o + \lambda)$$

$$- (g + f u_{oo}^2) (\lambda - \lambda_o) + \frac{d\lambda}{dt} (A_o + B_o)$$

$$- g (A_o - A_{oo}) - (A_1 - A_{10}) - f [v (A_2 - A_{20}) - (v - 1) (A_3 - A_{30})]$$

.....

$$\begin{aligned} & - q_d \Delta [\rho_d (u_o - \lambda + 1)^2] \\ & - g (B_o - B_{oo}) - f (B_2 - B_{2o}) \\ & - q_e \Delta [\rho_e (u_o - \lambda + 1)^2] \end{aligned}$$

C'est une équation relativement compliquée et on ne peut pousser plus loin les calculs analytiques si on n'accepte pas d'hypothèses supplémentaires. (Ils serait simple de résoudre numériquement cette équation avec un ordinateur et cela sera fait ultérieurement, mais cela ne permettrait pas d'atteindre le but de la présente étude. Ce but n'est pas de résoudre l'équation de base dans un certain nombre de cas, mais de déduire de cette équation un nombre suffisant de conséquences générales pour démontrer la réalité du mécanisme moteur impliqué).

a) - L'étude des seuils d'oscillation est un problème d'intérêt primordial, et il y a de bonnes raisons de penser que, pour le mécanisme à effet de densité, et au seuil, le comportement peut être décrit par des équations linéaires (voir dans [1] les références [3] [4] [5] et le paragraphe 1.2). (Certains mécanismes comme le mécanisme basé sur des perturbations de la configuration d'écoulement exposé en [1], soit évidemment non linéaires, même au seuil. Comme dit en [1], ils doivent être étudiés séparément, et ont été éliminés à dessein du présent modèle). Les équations sont donc linéarisées. Il est intéressant de noter que la linéarisation ne change pas la structure de l'équation de base en ce qui concerne les termes d'amortissement ou moteurs.

b) - Pour permettre d'aboutir à une équation autonome, l'accélération du champ des forces de volume est supposée constante, ou du moins varier lentement par rapport aux paramètres oscillants.

Soit l_{pf} définit par $\frac{d\psi}{du_o} (u_o = u_{oo}) = -2f u_{oo} l_{pf}$. Comme ψ , l_{pf} n'est fonction que de u_{oo} . D'après la figure 2 de [1], l_{pf} est positif dans le cas de la convection forcée et nul dans le cas de la convection naturelle. La valeur linéarisée de $\psi(u_{oo} + v) - \psi(u_{oo})$ est $-2f l_{pf} u_{oo} v$. Dans le premier membre de l'équation de base, l_p provient de l'inertie du circuit extérieur est toujours positif. En utilisant la même convention qu'en [1], on peut donner à l_p deux valeurs différentes pour les deux sortes de termes (inertie et friction) et écrire l'équation de base linéarisée :

$$\begin{aligned} (l_p + l_o + \lambda_o + A_{oo} + B_{oo}) \frac{dv}{dt} = & -2f u_{oo} v (l_p + l_o + \lambda_o) \\ & - (g + f u_{oo}^2) (\lambda - \lambda_o) + \frac{d\lambda}{dt} (A_{oo} + B_{oo}) \\ & - g (A_o - A_{oo}) - (A_1 - A_{1o}) - f [v (A_2 - A_{2o}) - (v - 1)(A_3 - A_{3o})] \\ & - q_d \Delta [\rho_d (u_o - \lambda + 1)^2] \\ & - g (B_o - B_{oo}) - f (B_2 - B_{2o}) \\ & - q_e \Delta [\rho_e (u_o - \lambda + 1)^2] \end{aligned} \quad (1)$$

Une remarque très importante peut être faite immédiatement sur (1) : Le circuit extérieur est représenté par deux paramètres et ceux-ci peuvent être combinés avec les deux paramètres de la longueur adiabatique d'entrée (LAE) pour donner :

- un seul paramètre d'inertie ($l_{pi} + l_{oi}$) écrit ci-après l_{oi}
- un seul paramètre de frottement ($l_{pf} + l_{of}$) écrit ci-après l_{of} .

En particulier, passer du fonctionnement en convection naturelle ou sous charge motrice constante au fonctionnement en convection forcée accroît la stabilité (cf [1]), comme toute autre opération augmentant l_{of} . D'autre part, accroître l'inertie du circuit extérieur n'affecte pas beaucoup les seuils mais change la fréquence, comme toute opération augmentant l_{oi} .

La liste des paramètres descriptifs du système, établie en [1] est donnée en Annexe 1 pour le cas linéarisé. Tous entrent dans l'équation (1).

3. LES EQUATIONS DU SEUIL

3.1. Etablissement des équations

$$\text{Soit } v = v_o e^{ct} \quad (2)$$

où v_o est une quantité petite devant u_{oo} et c un nombre complexe. Le report de (2) dans (1) conduit à une équation (3), non écrite ici, où c est l'inconnue. (1) étant une équation linéaire, toute solution de cette équation peut être mise sous la forme $\sum_j v_{oj} e^{c_j t}$, où les nombres complexes c_j sont les solutions de (3). Pourvu que les solutions de (3) soient des fonctions continues et finies des paramètres, le seuil correspond aux cas où une ou plusieurs solutions de (3) sont des nombres imaginaires purs et où toutes les autres ont des parties réelles négatives. C'est pourquoi les deux équations obtenues en portant $c = i\omega$ dans (3) et en séparant partie réelle et partie imaginaire sont nommées équations du seuil. Les calculs sont fastidieux mais simples et seule la méthode est donnée ci-dessous.

a) - En introduisant $u_o(t) = u_{oo} + v_o e^{ct}$ dans les équations de la longueur chauffante à densité constante (LCDC) (équations (13) de la 1ère partie), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= u_{oo} s + v_o e^{ct} \left(\frac{-e^{-cs}}{c} + \frac{1}{c} \right) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= v_o e^{ct} (-e^{-cs} + 1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

b) - En introduisant $u_o(t) = u_{oo} + v_o e^{ct}$ dans les équations de la longueur chauffante à densité variable (LCDV) (équations (15) de la 1ère partie), on obtient :

$$\rho = e^{-(t-\tau)}$$

$$z(t, \tau) = u_{oo} (e^{t-\tau} + s - 1) + v_o e^{ct} \left[\frac{e^{-cs} e^{(1-c)(t-\tau)}}{1-c} - \frac{e^{-cs}}{c(1-c)} + \frac{1}{c} \right]$$

Posant $x = 1 - s + \frac{z}{u_{oo}}$, on en déduit la valeur linéarisée de $\rho(z, t)$ dans LCDV :

$$\rho(z, t) = \frac{1}{x} + \frac{v_o e^{ct}}{u_{oo}} \left[\frac{e^{-cs}}{1-c} x^{-(1+c)} - \frac{e^{-cs}}{c(1-c)} x^{-2} + \frac{x^{-2}}{c} \right] \quad (5)$$

c) - En introduisant $u_o(t) = u_{oo} + v_o e^{ct}$ dans les équations de la longueur adiabatique de sortie (LAS) (équations (19) de la 1ère partie) et en posant :

$$m = 1 - s + \frac{1}{u_{oo}} \quad (6)$$

on obtient la valeur suivante de ρ dans LAS :

$$\rho(z, t) = \frac{1}{m} + \frac{v_o e^{ct}}{u_{oo}} \left[\frac{e^{-cs} m^{-1-c}}{1-c} - \frac{e^{-cs} m^{-2}}{c(1-c)} + \frac{m^{-2}}{c} \right] e^{-c \frac{z-1}{m u_{oo}}} \quad (7)$$

d) - Partant de (4), (5) et (7), il est facile d'exprimer les termes de (1) en fonction des seuls paramètres descriptifs du système et de l'inconnue c . A cause de la linéarisation $v = v_o e^{ct}$ apparaît dans (1) en facteur commun, et, grâce à l'hypothèse b, c est la seule quantité contenant le temps t . Soit $(T_n + iT_{1n})v$ un terme quelconque du second membre de (1).

D'après la discussion faite dans la première partie (paragraphe III.2.1.) c est un terme moteur si la "partie réelle" T_n est positive et un terme d'amortissement dans le cas contraire.

e) - L'introduction de $c = i\omega$ permet l'établissement des équations du seuil.

3.2. Les équations du seuil

Elles sont données dans l'annexe 2 et peuvent se mettre sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \text{Equation "partie réelle"} \quad 0 &= \sum_{n=1}^{n=9} T_n \\ \text{Equation "partie imaginaire"} \quad (l_{oi} + u_{oo} s + u_{oo} k + \frac{l_{ai}}{m}) \omega &= \sum_{n=1}^{n=9} T_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

où $k = \log m$

L'élimination de ω entre ces deux équations conduirait à une relation entre les 13 paramètres du système (annexe 1). Cette élimination n'est pas possible, mais les deux équations (8) peuvent être résolues (numériquement) simultanément en prenant comme inconnues ω et l'un quelconque des paramètres ci-dessus, les 12 restant étant donnés.

4. RESULTATS ET DISCUSSION

4.1. Retards et déphasages

Il faut noter que les équations (8) contiennent plusieurs fonctions trigonométriques de ωs , ωk , ωy (voir définitions de Z , annexe 2, équations (2)). Ceci est la conséquence de la présence de facteurs e^{-cs} , $e^{-ck} = m^{-\frac{n}{c}}$, e^{-cy} , dans l'équation de base sous sa forme (3) facteurs dont les significations sont des retards des termes de (3) par rapport à la fonction $v_o e^{ct}$.

On sait déjà que s est le temps de séjour d'une particule donnée dans LCDC [1]. A la sortie de la longueur chauffante et en régime permanent $\rho_d = \frac{1}{m}$ d'après (7) et $\rho_d = e^{-(t_d - \tau)}$ d'après [1]. Il en résulte que $k = \log m = t_d - \tau$ est, en régime permanent, le temps de séjour d'une particule donnée dans LCDV. Pour la même raison, en régime permanent, la vitesse dans LAS est $m u_{oo}$ et $y = \frac{l_{an}}{m u_{oo}}$ est le temps de séjour d'une particule donnée dans LAS. Ainsi, dans l'équation de base, ces trois retards fondamentaux sont présents. Ceci n'est pas surprenant, mais le fait important, constaté par l'étude numérique de (8), est que, dès qu'il y a une sous-saturation et une longueur adiabatique de sortie, aucun de ces retards ne peut être négligé sans affecter profondément les résultats. Cette remarque est valable, indépendamment de la validité du modèle lui-même.

Dans l'équation de base (3), les retards ci-dessus se combinent avec des déphasages, introduits par la différentiation (1er membre) et par plusieurs intégrations de e^{ct} (voir dans la 1ère partie les équations (13), (15), (16), (19), (22)), sous la forme de facteurs c , $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{1-c}$, $\frac{1}{(1-c)^2}$, $\frac{1}{2-c}$, et qui donnent dans (8) (voir annexe 2) des facteurs ω , $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega^2}$, $\frac{1}{1+\omega^2}$, $\frac{1}{(1+\omega^2)^2}$, $\frac{1}{4+\omega^2}$. Pour information, la forme de

l'équation de base est, en remplaçant par l'unité tous les coefficients indépendants de c (mais fonction des 13 paramètres descriptifs) :

$$c + c^0 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + e^{-cs} \left(c^0 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{(1-c)^2} + \frac{1}{2-c} \right) + e^{-c(s+k)} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{(1-c)^2} + \frac{1}{(2-c)} \right) + e^{-cy} \left\{ \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + e^{-cs} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{1-c} \right) + e^{-c(s+k)} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{1-c} \right) \right\} = 0$$

Compte tenu de la forme compliquée de cette équation (3), l'établissement d'un critère analytique pour le seuil des oscillations serait, pour le moins, très difficile, et n'est pas tenté ici.

4.2. Comparaison qualitative avec l'expérience

Comme noté dans l'introduction, le but principal de cette étude est de vérifier les possibilités de l'effet de densité en tant que mécanisme moteur des oscillations.

A cause des simplifications faites [1], les résultats quantitatifs des équations (8) peuvent différer sensiblement des valeurs expérimentales au seuil, même si l'effet de densité est le mécanisme réel. Ces résultats quantitatifs seront discutés dans le paragraphe 4.3. Pour vérifier la réalité du mécanisme en cause, la meilleure méthode est de comparer : 1°) les ordres de grandeurs et 2°) les lois et tendances du seuil, déduits de (8), aux ordres de grandeurs, lois et tendances expérimentales, quand ils sont connus.

a) - Ordre de grandeur du paramètre u_{00} au seuil

Les équations (8) conduisent effectivement à des seuils d'oscillations, démontrant ainsi la possibilité (mais pas encore la réalité) du mécanisme à effet de densité. Les résultats numériques montrent que la vitesse réduite u'_{00} est le paramètre le plus significatif pour les seuils dans le modèle. (Ceci avait été prévu en [1] à partir de considérations physiques). En fait, l'autre paramètre contenant la puissance, qui est la gravité réduite g , ne varie pas énormément dans les cas pratiques. L'ordre de grandeur de u_{00} au seuil est 0,2, la gamme maximum pouvant être 0,01 à 1. Un tel ordre de grandeur est très compatible avec plusieurs séries d'expériences. Dans [3] la gamme réelle est :

$$0,04 \leq u_{00} \leq 0,50$$

b) - Ordre de grandeur de la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ au seuil

Deux faits sont bien établis dans la bibliographie :

1°) Dans la plupart des cas, la fréquence est comprise entre 0,1 et 1 c/s.

2°) La période est plus ou moins liée au temps de parcours du canal par une particule.

Les prévisions du modèle sont en bon accord avec des deux faits :

1°) L'ordre de grandeur de $\frac{\omega}{2\pi}$ est 0,1 (la gamme maximum pouvant être de 0,01 à 0,3).

Comme l'ordre de grandeur de l'unité de temps Θ_c , par exemple dans [3], est 0,3 s, ceci conduit à une fréquence dimensionnelle de l'ordre de 0,33 c/s.

2°) Comme noté ci-dessus (paragraphe 4.1.), s , k , et y sont, en régime permanent, les temps de parcours par une particule de LCDC, LCDV, LAS respectivement. Les résultats numériques montrent que $\frac{\omega}{2\pi} (s+k+y)$ est généralement de l'ordre de $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire que la période est de l'ordre de 1,5 fois le temps de parcours des longueurs chauffante et adiabatique de sortie.

A cause des conditions particulières des essais de WISSLER [4], (grands diamètres et grandes longueurs, faibles vitesses), cette remarque peut notamment expliquer les périodes importantes observées par cet auteur.

c) - Influence de la pression

Il est bien connu qu'une augmentation de pression a une influence stabilisatrice. Ceci est vrai également dans le modèle (où une augmentation de pression provoque surtout un accroissement de H_c).

d) - Influence des pertes de charge dans LAE et de la caractéristique externe

L'accord entre les prévisions du modèle et l'influence stabilisatrice connue d'une perte de charge à l'entrée ou d'une caractéristique externe plus plongeante (convection forcée au lieu de convection naturelle, par exemple) a déjà été noté (paragraphe 2). Dans le modèle, l'influence stabilisatrice vient de l_{of} , dont un accroissement augmente toujours le terme d'amortissement ($-T_1$) (voir figure 1).

e) - Influence de pertes de pression dans la région "double phase"

De telles chutes de pression ont une influence destabilisatrice. Bien que les influences de q_d et q_e n'aient pas été étudiées en [2], la forme des termes correspondants T_6 et T_9 (annexe 2), qu'on peut comparer aux autres termes moteurs, laisse à penser qu'ils peuvent également être des termes moteurs du comportement oscillatoire.

f) - Influence de la longueur de LAS (souvent : la cheminée) (figure 1)

Dans la gamme de longueurs étudiée expérimentalement, une augmentation de la longueur de cheminée a une influence destabilisatrice. Ceci a été vérifié numériquement pour le

modèle dans [2]. On a trouvé qu'un accroissement de la longueur de cheminée avait une influence destabilisatrice jusqu'à des valeurs de l_a voisines de 2,5. Les longueurs réelles utilisées dans la bibliographie ont toujours été nettement inférieures à cette valeur.

g) - Influence du diamètre équivalent D_c du tronçon chauffant

Expérimentalement cette influence semble dépendre de la valeur des autres paramètres : [5] et [6] ont trouvé une influence destabilisatrice d'un accroissement de D_c , alors que [7] a trouvé le contraire.

Dans le modèle, pour les cas étudiés en [2], un accroissement de D_c provoque une diminution de f et est généralement légèrement destabilisateur. Cependant, l'influence inverse est tout à fait possible car un accroissement de D_c peut aussi conduire à un accroissement stabilisateur de l_{of} . Ainsi le modèle peut aider à expliquer un désaccord apparent entre plusieurs essais.

h) - Influence de l'inclinaison du canal

L'influence quantitative de ce paramètre n'est pas disponible, mais la possibilité d'oscillations dans la même gamme de valeurs des paramètres a été rapportée pour une section d'essais inclinée [8] et même horizontale (plusieurs auteurs, voir par exemple [3]). Cette possibilité est prévisible sur les équations (8) (annexe 2) et est confirmée par les résultats numériques, même dans le cas d'un changement de signe de g . La gamme pratique des valeurs de g semble être $0 \leq g \leq 1$.

i) - Existence de plusieurs seuils (pour une variation monotone d'un paramètre de fonctionnement)

L'existence de plusieurs seuils, avec passage soit de la stabilité aux oscillations, soit des oscillations à la stabilité, pour une variation monotone d'un paramètre de fonctionnement (souvent la puissance ou le débit) a été rapportée par différents auteurs (voir par exemple [3]). Comme cela était prévisible d'après la forme des équations (8) dont les termes T mettent en jeu plusieurs fonctions trigonométriques de la pulsation ω , on a effectivement trouvé plusieurs solutions. Par exemple, les 12 autres paramètres du système étant donnés, plusieurs couples de valeurs (u_{oo} , ω) peuvent satisfaire les équations (8). Ces solutions ne correspondent d'ailleurs pas toujours à des seuils car (paragraphe 3.1) pour qu'une solution de (8) soit un seuil, il est nécessaire que toutes les autres solutions complexes de (1) aient des parties réelles négatives. Cependant plusieurs cas de vrais seuils multiples ont été trouvés dans l'étude numérique du modèle.

j) - Influence de la sous-saturation

L'influence de la sous-saturation est l'un des points les plus intéressants de cette discussion. Du point de vue du modèle lui-même, la distinction entre paramètres de géométrie et de fonctionnement, d'une part, et l'importance des influences de ces paramètres, d'autre part, conduisent à la conclusion que la représentation logique des seuils d'oscillation est un diagramme donnant la vitesse réduite u_{oo} au seuil en fonction de la sous-saturation réduite s (figure 2). Ce diagramme est une généralisation adimensionnelle du diagramme sous saturation, vitesse, avec la puissance en paramètre, utilisé par au moins deux auteurs [9] [10] partant de points de vue différents. De plus, la forme des courbes obtenue avec le modèle est la même que celle obtenue expérimentalement (par exemple par GOUSE [9]). Ceci est en accord avec les observations antérieures [7] [11] d'une influence destabilisatrice d'un accroissement de la sous-saturation pour de faibles valeurs de cette sous-saturation s et d'une influence stabilisatrice au-dessus d'une valeur donnée de s .

L'emploi des paramètres adimensionnels montre aussi que, généralement, les installations basse pression utilisant de l'eau, opèrent dans une région où un accroissement de la sous-saturation réduite a une influence stabilisatrice. C'est le contraire à haute pression et il en résulte qu'il est difficile de comparer les résultats obtenus avec les deux sortes d'installations.

k) - L'inventaire ci-dessus révèle un très bon accord entre les prévisions du modèle et les connaissances actuelles sur les seuils d'oscillation. En fait, ce sont les seuls renseignements sûrs disponibles pour permettre la vérification du mécanisme, ce qui est le but de cette étude (voir paragraphe 1). (Quelques autres influences connues, comme par exemple celles relatives à la paroi chauffante, ne sont évidemment pas incluses dans le modèle ; ceci a été discuté dans la 1ère partie). L'accord observé soutient la conclusion que l'effet de densité est réellement la cause du comportement oscillatoire dans la plupart des cas.

Cette conclusion ne doit pas s'interpréter comme sous-entendant l'inexistence d'autres mécanismes, comme déjà noté en [1].

l) - Observations complémentaires

Deux remarques sont faites dans ce paragraphe. Elles ne sont pas suffisamment sûres pour s'ajouter purement et simplement aux considérations précédentes. Cependant, elles peuvent permettre une meilleure compréhension du mécanisme.

La première concerne l'influence de la simulation de l'ébullition dans un canal en injectant soit de la vapeur, soit de l'air, au travers de parois poreuses, dans un écoulement d'eau sous-saturée, tous les autres paramètres restant constants. Cette expérience intéressante a été faite par JEGLIC et al. [12]. L'injection de vapeur conduit exactement au même comportement que dans l'essai avec chauffage correspondant, alors que l'injection d'air conduit toujours à un écoulement stable dans la gamme de paramètres étudiée. Un tel résultat aurait pu être prévu très facilement avec le mécanisme à effet de densité. Dans ce mécanisme, les oscillations se pro-

duisent grâce à un couplage entre vitesse et masse volumique (voir la figure 4 de [1]). Ce couplage n'est évidemment pas affecté lorsqu'on remplace le flux calorifique (qui crée, dans une section donnée, une certaine quantité de vapeur à la paroi), par l'injection directe de la même quantité de vapeur. D'autre part, l'injection de la même quantité d'air affaiblit fortement le couplage. Avec de la vapeur le couplage est à la fois thermodynamique et hydrodynamique, le premier étant prédominant (comme le montre l'influence de la sous-saturation). Avec de l'air, le couplage est seulement hydrodynamique. Il serait intéressant de refaire le même essai sans sous-saturation à l'entrée, car alors le couplage serait le même dans les trois cas (paroi chauffante, injection de vapeur, injection d'air).

La seconde remarque concerne le comportement d'un canal chauffé, en parallèle avec un petit nombre d'autres canaux. Comme il a été vu dans la première partie, ce problème est beaucoup plus compliqué que le problème étudié ci-dessus, mais on peut tenter une hypothèse simplificatrice : Du fait de petites différences inévitables entre les canaux, l'un d'eux est toujours "moins" stable que les autres. En admettant que ces canaux "plus" stables se comportent comme un by-pass unique tant qu'il n'y a pas d'oscillation, la fonction ΔP , charge motrice du canal "moins" stable, est déterminée. Il est ainsi possible de calculer un seuil. Cette méthode a été essayée, en utilisant le modèle à effet de densité, sur des résultats donnés en [13] pour trois canaux chauffés en parallèle. Dans les expériences d'oscillations, un canal était toujours en opposition de phase avec les deux autres. Bien que les calculs complets n'aient pas été faits, des résultats préliminaires sont encourageants : les valeurs de la vitesse réduite au seuil u_{oo} décroissent de 0,15 à 0,09 pour des valeurs de la sous-saturation s croissant de 1 à 4. Ces valeurs sont tout à fait dans la gamme de valeurs qu'on peut attendre du modèle à effet de densité avec la géométrie considérée. Cette méthode devra évidemment être soigneusement étudiée avant qu'aucune conclusion ne puisse être atteinte, surtout lorsque d'autres régimes d'oscillations peuvent être obtenus (deux canaux en opposition de phase alors que le troisième est stable ou trois canaux en phase [14]).

m) - En conclusion à cette discussion, une remarque importante doit être faite avant de continuer l'étude des possibilités du modèle à effet de densité. Dans le but de renforcer la signification physique des équations, le modèle est simplifié et ne sont pas pris en compte certains phénomènes dont on pense qu'ils ont une influence faible, mais peut-être pas négligeable. Ces influences sont évaluées ci-après dans un cas pratique donné mais dès maintenant le modèle a prouvé son utilité et il peut être valablement utilisé dans de nombreux cas où des considérations qualitatives suffisent. Un bon exemple de cette utilité serait l'amélioration de la stabilité d'un système existant en étudiant les effets de modifications variés au moyen du modèle.

4.3. Comparaison quantitative avec l'expérience

La réalité de l'effet de densité, en tant que cause du comportement oscillatoire, une fois démontrée, il est intéressant, pour les études de projet, de connaître l'influence des hypothèses simplificatrices faites. Cette influence est évaluée ci-dessous pour une série donnée d'expériences [3], choisies parce que bien connues de l'auteur.

Pour permettre l'utilisation des résultats numériques déjà obtenus lors de la comparaison qualitative avec l'expérience (paragraphe 4.2.), les valeurs retenues pour les paramètres de géométrie sont approchées. Ceci est possible, à cause de l'influence relativement faible de ces paramètres de géométrie, et parce qu'on ne recherche pour l'instant qu'une idée approchée de la valeur quantitative du modèle. Au vu des bons résultats obtenus (voir ci-dessous), il serait intéressant de faire une comparaison plus précise, et de l'étendre à d'autres expériences. Cependant pour information et comme complément nécessaire à l'étude ci-dessus de l'effet de densité, il a paru intéressant de donner la comparaison suivante en l'état.

Les essais ont été décrits en [3]. Une discussion préliminaire faite en [2] a montré la nécessité de calculer la sous-saturation "réelle" s en prenant en compte le phénomène d'ébullition locale. Cette prise en compte est faite ici, comme suggéré en [2], en décalant l'origine des enthalpies, point auquel la densité commence à suivre la loi (voir [1]) $\frac{1}{\rho} = h + 1$. Au lieu de prendre $h = 0$ dans la section d'apparition de l'ébullition franche, on le fait dans une section située $\frac{2}{3} L_B$ en aval de la section d'apparition de l'ébullition locale. La section d'apparition de l'ébullition locale est définie comme étant la section où la paroi atteint la température de saturation et L_B est la longueur de canal dans laquelle a lieu l'ébullition locale. Le coefficient $\frac{2}{3}$ est choisi, plus ou moins arbitrairement, pour tenir compte du fait que les bulles n'affectent pas beaucoup la masse volumique du fluide tant qu'elles sont petites et situées à la paroi.

Pour les expériences considérées, les paramètres de géométrie étaient :

$$l_{oi} = 0,6 \quad l_{of} = 0,8 \quad f = 2,5 \quad v = 3,3 \quad q_d = 0 \quad l_a \approx 2 \quad q_e = 0$$

D'après les influences des paramètres dans le modèle et comme discuté en [2], les seuils dans ce cas devraient être à peu près les mêmes que les seuils du cas suivant, qui a déjà été étudié numériquement.

$$l_{oi} = 0 \quad l_{of} = 0 \quad f = 3 \quad v = 1 \quad q_d = 0 \quad l_a = 1 \quad q_e = 0$$

Les paramètres adimensionnels des essais sont donnés dans le tableau I et la comparaison avec le modèle est faite sur la figure 2. Sauf pour un point, les valeurs du paramètre g sont toujours :

$$0 < g < 1$$

Pour cette raison, les courbes théoriques sont données pour $g = 0$ et $g = 1$.

D'après la figure 2 et, étant données les approximations ci-dessus, l'accord peut être considéré comme bon, confirmant encore le mécanisme à effet de densité. 4 seulement des 28 points expérimentaux sont loin des prévisions théoriques.

5. CONCLUSION

L'apparition de comportements oscillatoires dans les canaux chauffés a été étudiée dans le cadre de l' "effet de densité" conséquence de la relation physique entre l'enthalpie et la masse volumique dans le canal.

L'équation de base, dont on a montré dans une publication antérieure [1] qu'elle est susceptible d'avoir des solutions oscillatoires, a été ici linéarisée pour conduire aux équations du seuil. Les équations du seuil se traduisent par une relation entre les paramètres du modèle au seuil et permettent le calcul de la fréquence des oscillations. On a donné la signification physique de plusieurs retards présents dans les équations et insisté sur leur importance physique.

On a discuté les résultats d'une comparaison extensive entre les prévisions du modèle et les lois et tendances du phénomène d'après la bibliographie existante. L'accord général trouvé montre que l'effet de densité est très souvent la cause du comportement oscillatoire.

TABEAU I

Valeurs des paramètres adimensionnels pour les points expérimentaux.

Mesures				Paramètres adimensionnels					
W W/cm ³	U _{oo} m/s	T _{sat} -T _o °C	T s	u _{oo}	g	C _p $\frac{T_{sat}-T_o}{H_c}$ (1)	s	$\frac{\omega}{2\pi}$	m-1 (2)
86.5	1.52	6.2	2.6	0.271	0.374	1.32	0.65	0.082	3.0
126.3	1.32	31.7	10	0.161	0.175	6.75	5.66	0.015	0.6
62.8	1.22	15.6	5	0.300	0.710	3.32	2.75	0.059	0.6
105.1	1.10	30.7	8.6	0.161	0.254	6.53	5.50	0.020	0.7
156.2	1.38	38.4	4.8	0.136	0.115	8.17	6.87	0.025	0.5
95.1	1.39	22.9	6.5	0.225	0.310	4.87	4.08	0.030	0.4
151.7	1.52	33.7	8.8	0.155	0.122	7.16	5.98	0.014	0.5
155.9	2.05	26.3	6.3	0.203	0.115	5.60	4.61	0.019	0.3
40.7	1.27	10.3	5.2	0.481	1.690	2.19	1.83	0.087	0.3
69.5	0.99	11.7	6.2	0.220	0.580	2.49	1.76	0.043	2.8
99.0	1.93	11.2	-	0.301	0.286	2.38	1.73	-	1.6
187.4	2.18	21.4	-	0.179	0.080	4.55	3.42	-	2.2 (3)
147.3	3.09	18.2	2.6	0.323	0.129	3.87	3.17	0.048	0.0
189.1	3.04	23.7	1.7	0.248	0.078	5.04	4.14	0.058	0.0
102.7	1.48	12.1	-	0.222	0.266	2.57	1.76	-	2.8
82.5	1.11	12.5	2.3	0.208	0.412	2.66	1.86	0.097	3.0
123.8	1.89	21.0	2.0	0.235	0.183	4.47	3.64	0.075	0.6
125.2	1.89	22.1	-	0.233	0.179	4.70	3.86	-	0.4
102.9	2.33	16.2	2.7	0.349	0.265	3.45	2.86	0.067	0.0
125.2	2.30	19.9	2.7	0.283	0.179	4.24	3.51	0.055	0.0
157.3	2.34	24.8	2.1	0.229	0.113	5.28	4.38	0.056	0.0
110.9	2.31	17.3	2.3	0.321	0.228	3.68	3.04	0.073	0.1
79.9	1.35	19.0	11.0	0.261	0.439	4.04	3.37	0.021	0.5
109.1	1.42	27.2	3.3	0.201	0.235	5.79	4.90	0.051	0.1
94.6	1.02	18.2	15.0	0.166	0.314	3.87	2.90	0.013	3.1 (4)
95.0	0.75	37.1	6.7	0.122	0.311	7.89	6.68	0.029	1.5
85.7	0.42	60.2	7.8	0.076	0.381	12.8	11.2	0.028	2.0
89.1	0.49	59.4	-	0.085	0.353	12.6	11.1	-	0.7
82.0	0.38	62.5	8.8	0.071	0.417	13.3	11.7	0.026	2.5
54.5	0.26	54.6	9.5	0.074	0.942	11.6	10.1	0.036	3.4

(1) Ce serait la valeur de s s'il n'y avait pas d'ébullition locale
(2) Valeur théorique de la qualité "réelle" de sortie
(3) Point instable
(4) Second seuil.

$$\nu = 1 \quad q_d = q_e = 0 \quad l_{on} = l_{oi} = l_{og} = l_{of} \quad s = 0 \quad g = 0$$

INFLUENCE DE l_{oi} (LONGUEUR ADIABATIQUE AMONT-INERTIE) INFLUENCE DE l_{of} (LONGUEUR ADIABATIQUE AMONT-FROTTEMENT)

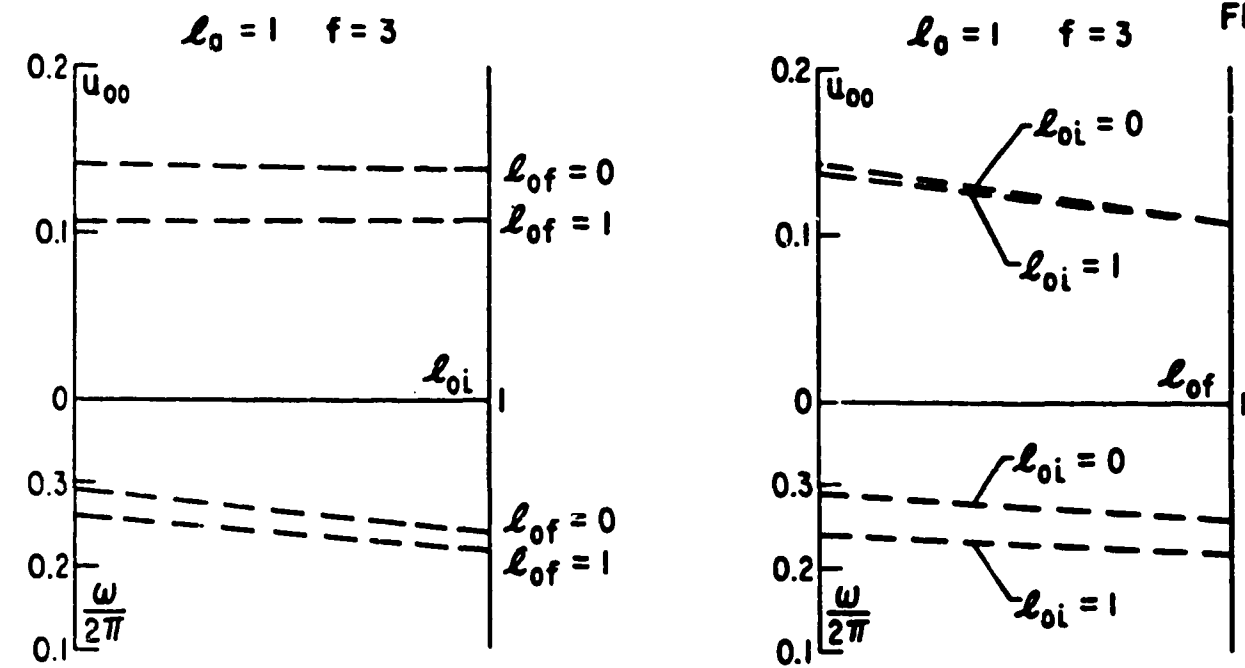


FIG.1 MODELE A EFFET DE DENSITE: INFLUENCES DES PARAMETRES DE GEOMETRIE

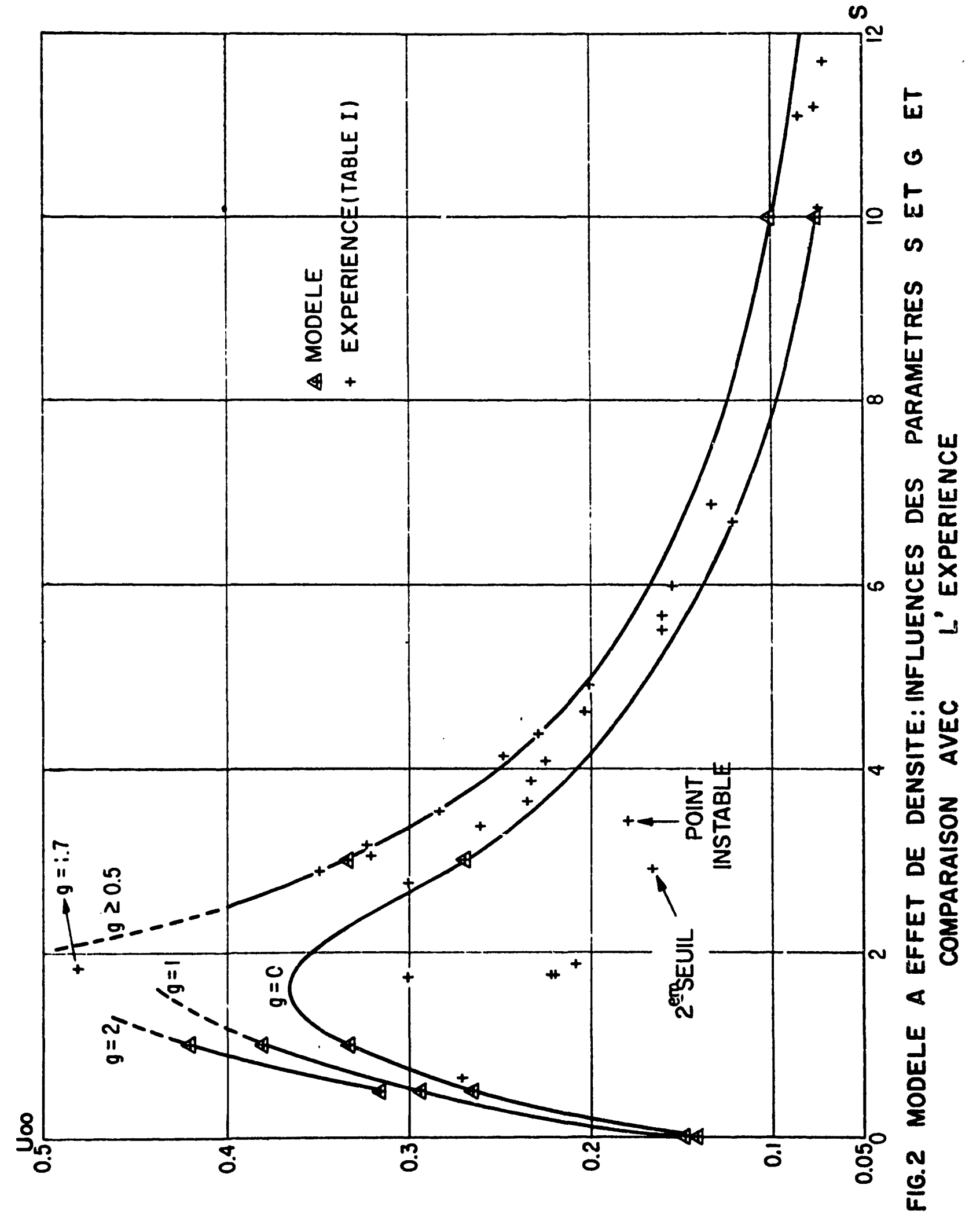


FIG.2 MODELE A EFFET DE DENSITE: INFLUENCES DES PARAMETRES S ET G ET COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

ANNEXE 1

DEFINITIONS DES 13 PARAMETRES DU MODELE

REMARQUES PRELIMINAIRES

1°) Les relations suivantes résultent des définitions données en [1] .

2°) Toutes les quantités en jeu sont rendues adimensionnelles en utilisant les unités suivantes :

Grandeurs mécaniques

longueur L_c (longueur chauffante)

masse volumique R_o (masse volumique à l'entrée)

temps Θ_c (temps caractéristique : voir [1]).

Grandeurs thermiques

enthalpie H_c (enthalpie caractéristique : voir [1])

3°) La caractéristique externe (influence du circuit extérieur [1]) est une fonction connue :

$$\Delta P = \phi(U_o) - J \frac{dU_o}{dT}$$

toutes les quantités étant ici dimensionnelles. $\phi(U_o)$ est la caractéristique externe de régime permanent et J l'inertie du circuit extérieur. La forme réduite de cette équation est :

$$\Delta p = \frac{\Theta_c^2}{R_o L_c} \phi(U_o) - \frac{J}{R_o L_c} \frac{du_o}{dt} = \psi(u_o) - l_{pi} \frac{du_o}{dt}$$

Le paramètre l_{pi} défini en [1] et utilisé ici (paragraphe 2) est alors :

$$l_{pi} = \frac{J}{R_o L_c}$$

Le paramètre l_{pf} défini dans le paragraphe 2 est :

$$l_{pf} = - \frac{1}{2fu_{oo}} \left(\frac{d\psi}{du_o} \right)_{u_{oo}} = - \frac{D_c}{\Lambda_o L_c} \frac{1}{R_o} \frac{1}{U_{oo}} \left(\frac{d\phi}{dU_o} \right)_{U_{oo}}$$

$\phi(U_o)$ est soit une constante, soit voisin d'une fonction parabolique de U_o (voir 1ère partie, figure 2). l_{pf} ne dépend donc pas beaucoup de U_{oo} .

4°) Le paramètre v est défini par :

$$\frac{dp \text{ frottement émulsion}}{dp \text{ frottement liquide}} = 1 + v h$$

ou, en utilisant le paramètre de MARTINELLI-NELSON, $\phi_{l_o}^2$ et la qualité "vraie" :

$$x = \frac{H}{H_{lg}} \quad \phi_{l_o}^2 = 1 + v x \frac{H_{lg}}{H_c}$$

v est supposé indépendant de x , (voir [1]), et est donné par :

$$v = \frac{1}{x} \frac{H_c}{H_{lg}} (\phi_{l_o}^2 - 1)$$

LES 10 PARAMETRES DE GEOMETRIE

- Longueur réduite d'inertie de LAE (longueur adiabatique d'entrée) (inclus l'inertie du circuit extérieur)

$$l_{oi} = \frac{J}{R_o L_c} + \frac{1}{L_c} \sum_{LAE} \frac{L_i}{\sigma_i}$$

- Longueur réduite de frottement de LAE (inclus l'influence de la caractéristique externe de régime permanent - peut être légèrement affectée par les conditions de fonctionnement).

$$l_{of} = \frac{D_c}{\Lambda_o L_c} \left[\frac{-1}{R_o U_{oo}} \left(\frac{d\phi}{dU_o} \right) U_{oo} + \sum_{LAE} \left(\frac{1+\psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right) + \sum_{LAE} \frac{\Lambda_i L_i}{D_i \sigma_i^2} \right]$$

- Frottement réduit dans LCDC (longueur chauffante à densité constante)

$$f = \frac{\Lambda_o}{2} \frac{L_c}{D_c}$$

- Paramètre de frottement de LCDV (longueur chauffante à densité variable)

$$v = \frac{1}{x} \frac{H_c}{H_{lg}} (\phi_{l_o}^2 - 1)$$

- Paramètre de chute de pression à la sortie du canal chauffant

$$q_d = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\psi_d}{\sigma_a^2} - 1 \right)$$

- Longueur normalisée réduite de LAS (longueur adiabatique de sortie)

$$l_{an} = \frac{\sigma_a L_a}{L_c}$$

- Longueur réduite d'inertie de LAS

$$l_{ai} = \frac{L_a}{\sigma_a L_c}$$

- Longueur réduite de gravité de LAS

$$l_{ag} = \frac{L_a \sin \phi_a}{L_c \sin \phi_c}$$

- Longueur réduite de frottement de LAS

$$l_{af} = \frac{\Lambda_a}{\Lambda_o} \frac{D_c}{D_a} \frac{L_a}{L_c} \frac{1}{\sigma_a^2}$$

- Paramètre de chute de pression à la sortie de LAS

$$q_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\psi_e}{\sigma_e^2} - \frac{1}{\sigma_a^2} \right)$$

LES 3 PARAMETRES DE FONCTIONNEMENT.

- Sous-saturation réduite (inclus l'effet de l'ébullition locale)

$$s = \frac{\text{sous-saturation "vraie" à l'entrée}}{H_c}$$

- Vitesse réduite (combine débit et puissance)

$$u_{oo} = \frac{U_{oo} H_c R_o}{W L_c}$$

- Gravité réduite

$$g = \frac{(H_c R_o)^2 G \sin \phi}{L_c W^2}$$

ANNEXE 2

LES EQUATIONS DU SEUIL.

La suite des calculs décrits dans le paragraphe 3.1. conduit au système suivant d'équations :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Partie réelle} \\ \text{Partie imaginaire} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = \sum_{n=1}^{n=9} T_n \\ (l_{oi} + u_{oo}s + u_{oo}k + \frac{l_{ai}}{m}) \omega = \sum_{n=1}^{n=9} T_{1n} \end{array} \quad (8)$$

avec les définitions suivantes (1).

	Origine (voir [1])
$T_1 + i T_{11} = - 2 f u_{oo} (l_o + \lambda_o)$	Frottement (LAE-LCDC)
$T_2 + i T_{12} = \frac{1}{v} \left[- (g + f u_{oo}^2) (\lambda - \lambda_o) + \frac{d\lambda}{dt} (A_{oo} + B_{oo}) \right]$	Inertie, gravité, frottement (frontière mobile d'ébullition)
$T_3 + i T_{13} = - g \frac{A_o - A_{oo}}{v}$	gravité (LCDV)
$T_4 + i T_{14} = - \frac{A_1 - A_{10}}{v}$	inertie (LCDV)
$T_5 + i T_{15} = - f \left[v \frac{A_2 - A_{20}}{v} - (v - 1) \frac{A_3 - A_{30}}{v} \right]$	frottement (LCDV)
$T_6 + i T_{16} = - q_d \frac{\Delta [\rho_d (u_o - \lambda + 1)^2]}{v}$	inertie + frottement (Point D)
$T_7 + i T_{17} = - g \frac{B_o - B_{oo}}{v}$	gravité (LAS)

$$T_8 + i T_{18} = -f \frac{B_2 - B_{20}}{v}$$

frottement (LAS)

$$T_9 + i T_{19} = -q_e \frac{\Delta [\rho_e (u_o - \lambda + 1)^2]}{v}$$

inertie + frottement
(Point E)

et (2)

$$k = \log m$$

$$y = \frac{l_{an}}{m u_{oo}}$$

$$\cos \omega (s + k + y) = Z_1$$

$$\sin \omega (s + k + y) = Z_{11}$$

$$\cos \omega (s + y) = Z_2$$

$$\sin \omega (s + y) = Z_{12}$$

$$\cos \omega (s + k) = Z_3$$

$$\sin \omega (s + k) = Z_{13}$$

$$\cos \omega s = Z_4$$

$$\sin \omega s = Z_{14}$$

$$\cos \omega y = Z_5$$

$$\sin \omega y = Z_{15}$$

$$\frac{1}{1 + \omega^2} = D_1$$

$$\frac{1}{4 + \omega^2} = D_4$$

$$E_2 = m^2 D_1 D_4 [(\omega^2 - 2) Z_3 - 3 \omega Z_{13}] + (m D_1 - 2 D_4) Z_4$$

$$+ (m \omega D_1 + \frac{m}{\omega} - \omega D_4) Z_{14} - 2 (m - 1)$$

$$E_{12} = -m^2 D_1 D_4 [3 \omega Z_3 + (\omega^2 - 2) Z_{13}] + (m \omega D_1 + \frac{m}{\omega} - \omega D_4) Z_4$$

$$+ (2 D_4 - m D_1) Z_{14} - \frac{m}{\omega}$$

$$E_3 = 2m D_1^2 [(1 - \omega^2) Z_3 + 2 \omega Z_{13}] - 2 D_1 Z_4 [(1 - \omega^2) D_1 + k]$$

$$- [\frac{1}{\omega} + 4 \omega D_1^2 + 2 \omega k D_1] Z_{14} + 2 k$$

$$E_{13} = 2 m D_1^2 [2 \omega Z_3 + (\omega^2 - 1) Z_{13}] - [\frac{1}{\omega} + 4 \omega D_1^2 + 2 \omega k D_1] Z_4$$

$$+ 2 D_1 Z_{14} [(1 - \omega^2) D_1 + k] + \frac{1}{\omega}$$

$$E_7 = D_1 [Z_1 - \frac{Z_{11}}{\omega}] + \frac{D_1}{m \omega^2} [Z_2 + \omega Z_{12}] - D_1 (Z_3 - \frac{Z_{13}}{\omega})$$

$$- \frac{D_1}{m \omega^2} (Z_4 + \omega Z_{14}) + \frac{1}{m \omega^2} (1 - Z_5)$$

$$E_{17} = -D_1 (\frac{Z_1}{\omega} + Z_{11}) + \frac{D_1}{m \omega^2} (\omega Z_2 - Z_{12}) + D_1 (\frac{Z_3}{\omega} + Z_{13})$$

$$- \frac{D_1}{m \omega^2} (\omega Z_4 - Z_{14}) + \frac{Z_{15}}{m \omega^2}$$

Avec ces notations, les termes des équations (8) s'écrivent comme suit (3) :

- frottement (LAE + LCDC)

$$T_1 = -2 f u_{oo} (l_{of} + u_{oo} s)$$

$$T_{11} = 0$$

- frontière mobile d'ébullition

$$T_2 = - (g + f u_{oo}^2) \frac{Z_{14}}{\omega} + (u_{oo} k + \frac{l_{ai}}{m}) (1 - Z_4)$$

$$T_{12} = (g + f u_{oo}^2) \frac{1 - Z_4}{\omega} + (u_{oo} k + \frac{l_{ai}}{m}) Z_{14}$$

- gravité (LCDV)

$$T_3 = g D_1 (Z_3 - \frac{Z_{13}}{\omega}) - \frac{g D_1}{m} (Z_4 - \frac{Z_{14}}{\omega}) + \frac{g Z_{14}}{\omega}$$

$$T_{13} = -g D_1 (\frac{Z_3}{\omega} + Z_{13}) + \frac{g D_1}{m} (\frac{Z_4}{\omega} + Z_{14}) + \frac{g Z_4}{\omega} - \frac{g}{m \omega}$$

- inertie (LCDV)

$$T_4 = -m u_{oo} D_1^2 [(1 - \omega^2) Z_3 + 2 \omega Z_{13}] + u_{oo} k D_1 (Z_4 + \omega Z_{14})$$

$$+ u_{oo} D_1^2 [(1 - \omega^2) Z_4 + 2 \omega Z_{14}] + \frac{u_{oo} Z_{14}}{\omega} - u_{oo} k$$

$$T_{14} = -m u_{oo} D_1^2 [2\omega Z_3 + (\omega^2 - 1) Z_{13}] + u_{oo} k D_1 (\omega Z_4 - Z_{14}) \\ + u_{oo} D_1^2 [2\omega Z_4 + (\omega^2 - 1) Z_{14}] - \frac{u_{oo}}{\omega} (1 - Z_4)$$

- frottement (LCDV)

$$T_5 = f u_{oo}^2 [v E_2 + (v - 1) E_3]$$

$$T_{15} = f u_{oo}^2 [v E_{12} + (v - 1) E_{13}]$$

- Point D

$$T_6 = -q_d u_{oo} m D_1 (Z_3 + \omega Z_{13}) + q_d u_{oo} D_1 Z_4 + q_d u_{oo} Z_{14} (\omega D_1 + \frac{1}{\omega}) - 2q_d u_{oo} \\ T_{16} = -q_d u_{oo} m D_1 (\omega Z_3 - Z_{13}) + q_d u_{oo} Z_4 (\omega D_1 + \frac{1}{\omega}) - q_d u_{oo} D_1 Z_{14} - \frac{q_d u_{oo}}{\omega}$$

- Gravité (LAS)

$$T_7 = g \frac{l_{ag}}{l_{an}} E_7$$

$$T_{17} = g \frac{l_{ag}}{l_{an}} E_{17}$$

- Frottement (LAS)

$$T_8 = \frac{f m u_{oo} l_{af}}{y} E_7 - 2 f u_{oo} l_{af} (1 - \frac{Z_{14}}{\omega})$$

$$T_{18} = \frac{f m u_{oo} l_{af}}{y} E_{17} - \frac{2 f u_{oo} l_{af}}{\omega} (1 - Z_4)$$

- Point E

$$T_9 = q_e u_{oo} [-m D_1 (Z_1 + \omega Z_{11}) + D_1 (Z_2 - \frac{Z_{12}}{\omega}) - 2 (1 - \frac{Z_{14}}{\omega}) + \frac{Z_{15}}{\omega}]$$

$$T_{19} = q_e u_{oo} [-m D_1 (\omega Z_1 - Z_{11}) - D_1 (\frac{Z_2}{\omega} + Z_{12}) - \frac{2}{\omega} (1 - Z_4) + \frac{Z_5}{\omega}]$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURÉ J.
Sur le comportement oscillatoire de canaux chauffés : Etude théorique de l'effet de densité, 1ère partie, Mécanisme (équations non linéarisées). Rapport CEA R 3049 (1967)
- [2] BOURÉ J.
Contribution à l'étude théorique des oscillations dans les canaux chauffants à ébullition. Thèse Docteur-Ingénieur - Centre d'Etudes Nucléaires et Université de Grenoble (France) - Juin 1965
- [3] FABREGA S.
Etude expérimentale des instabilités hydrodynamiques survenant dans les réacteurs nucléaires à ébullition.
Thèse Docteur-Ingénieur, Centre d'Etudes Nucléaires et Université de Grenoble, (France) Oct. 1964
- [4] WISSLER E.H.
The transient behavior of a two-phase natural circulation loop
PhD Thesis (Juin 1955)
- [5] SEMENOVKER I.E.
The occurrence of pulsations in the evaporation tubes of steam boilers
AEC Tr 4490 (original 1955)
- [6] LEVY S., BECKJORD E.S.
Hydraulic stability in a natural circulation loop with net steam generation at 1 000 psia,
GEAP 3215, juillet 1959

- [7] BECKER K.M. et al.
Hydrodynamic instability and dynamic burnout in natural circulation two phase
flow. An experimental and theoretical study
AE 156 (Sept. 1964)
- [8] LEVY S., SWAN C.L.
Performance, two phase pressure drop, burnout and hydraulic oscillation of an
inclined test section with net steam generation at 1 000 psia
GEAP 3228 (Rev. 1), Août 1959
- [9] GOUSE S.W., ANDRYSIAK C.D.
Some observations on two-phase flow oscillations
Proc. Multiphase flow symp. Winter meeting ASME, nov. 1963
- [10] OZISIK M. N., T. CEBECI
Dynamic stability of flow oscillations in a heated channel
ASME paper 65 HT 65
- [11] Anonyme (Technische Hogeschool te Eindhoven)
Final report on the research program on heat transfer and stability in boiling
water reactors,
WW 016 R70 (Fev. 1965)
- [12] JEGLIC F.A., GRACE T.M.
Onset of flow oscillations in forced flow subcooled boiling
NASA TN D 2821 (1964)
- [13] CASTERLINE J.E., LEE D.M.
Flow instability and critical heat flux in heated parallel channels
Topical report - Contract AT (30-3) - 187, Columbia University, N.Y., Oct. 1964
- [14] GOUSE S.W.
Communication personnelle (Déc. 1965)

**THE OSCILLATORY BEHAVIOR
OF HEATED CHANNELS**

An Analysis of the Density Effect

**PART I
THE MECHANISM (Non Linear Analysis)**

by

Jean BOURE

Rapport C E A - R 3049

1966

Da

CEA-R-3049(1)(E)

BOURE J. .-

The oscillatory behavior of heated channels. An analysis of the density effect. Part 1 : The mechanism (non-linear analysis).-

Commissariat à l'Energie Atomique, Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble (Isère), 1966.-

27 cm, 40 p., fig., bib.

CEA-R 3049 (1ère partie) - BOURE Jean

LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ANALYSE DE L'EFFET DE DENSITE
1ère partie : LE MECANISME (ANALYSE NON LINEAIRE)

Sommaire. - On présente le problème du comportement oscillatoire de canaux chauffés en fonction des temps de retard ; on présente un modèle d'effet de densité pour expliquer ce comportement. L'effet de densité résulte du rapport physique entre l'enthalpie et la densité du fluide.

A partir de ce modèle, on obtient des équations non linéaires sous une forme sans dimension.

On donne une description du mécanisme d'oscillation, basée sur une analyse des équations.

On dresse l'inventaire des paramètres principaux. Déjà à ce stade des études, il est possible de trouver quelques faits en accord avec les résultats des expériences.

1966

40 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-R 3049 (part I) - BOURE Jean

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS - AN ANALYSIS
OF THE DENSITY EFFECT
PART I : THE MECHANISM (NON-LINEAR ANALYSIS)

Summary. - The problem of the oscillatory behavior of heated channels is presented in terms of delay-times and a density effect model is proposed to explain the behavior. The density effect is the consequence of the physical relationship between enthalpy and density of the fluid.

Non-linear equations are derived from the model in a dimensionless form.

A description of the mechanism of oscillations is given, based on the analysis of the equations.

An inventory of the governing parameters is established. At this point of the study, some facts in agreement with the experiments can already be pointed out.

1966

40 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
Service des Transferts Thermiques

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS

An Analysis of the Density Effect

PART I

THE MECHANISM (Non Linear Analysis)

by

Jean BOURE

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 16, rue Lord Byron, PARIS VIIIème.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 16, rue Lord Byron, PARIS VIIIème.

Acknowledgments

The author is greatly indebted to Prof. A. Craya who, as Scientific Consultant for the Heat Transfer Laboratory of the "Centre d'Etudes Nucleaires de Grenoble," has directed the initial work [1]. He has made many important contributions to this study, too numerous to be cited in detail.

The author is grateful to Mr. Mondin, Head of the Heat Transfer Laboratory, who entrusted him with the present research, for his constant interest and the stimulating atmosphere of his Laboratory.

The author is also indebted to Dr. N. Zuber and to Mr. F. W. Staub of the General Electric Research and Development Center (Schenectady, New York) for many fruitful discussions.

A large part of the initial work [1] was sponsored by Euratom under joint USAEC Euratom Research and Development Program.

Nomenclature

Units are expressed in a length (L), mass (M), time (T), heat quantity (Q) system. With $(Q) = (ML^2T^{-2})$, this system would be equivalent to an L, M, T system.

As far as possible block letters are used for dimensional quantities and small letters are used for dimensionless parameters.

A } B }	dimensionless functions of time (Eq. (16) and (22))	f	Reduced friction
D	Equivalent Diameter (L)	g	Reduced gravity
G	Gravity acceleration (LT^{-2})	h	Reduced enthalpy
H	Enthalpy (QM^{-1})	l	Reduced length
L	Length (L)	p	Reduced pressure
P	Pressure ($ML^{-1}T^{-2}$)	q	Geometry change parameter (dimensionless)
R	Density (ML^{-3})	s	Reduced "subcooling"
T	Time (T)	t	Reduced time
U	Velocity (LT^{-1})	u	Reduced velocity
W	Power per unit of volume ($QL^{-3}T^{-1}$)	v	Reduced velocity disturbance
Z	Abscissa (L)	z	Reduced abscissa
Δ	Finite variation	λ	"Non-boiling" reduced length
$\odot$	Time (T)	ρ	Reduced density
$\wedge$	Darcy's friction factor (dimensionless)	σ	Area ratio
		τ	Reduced time
		ψ	Angle
		Ψ	Pressure loss factor (dimensionless)

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS

An Analysis of the Density Effect

PART I THE MECHANISM (Non Linear Analysis)

Subscripts

a	downstream adiabatic length value
c	characteristic value or heated length value
d	heated length exit geometry change
e	channel exit geometry change
f	friction term
g	gravity term
i	inertia term or number
n	normalized value
o	in general reference value or heated length inlet value or upstream adiabatic length value
oo	steady state, heated length inlet value
p	outside loop (pump...)
UAL	upstream adiabatic length
CDHL	constant density heated length
VDHL	variable density heated length
DAL	downstream adiabatic length

I Introduction

The occurrence of an oscillatory behavior is a problem of tremendous interest for the design and operation of many advanced apparatus involving large density changes of a circulating fluid. Such density changes are often induced by heating with or without change of phase. The first case is for example that of boilers or nuclear boiling water reactors while the second one concerns apparatus where the fluid is under supercritical pressure (liquid propellant rockets).

The oscillatory behavior is defined as the presence of oscillations, regular in shape, period and amplitude, of the hydrodynamic and thermal parameters of the system (flow rate, pressure drop, etc.).

It is distinguished here from other phenomena, which affect the same parameters (flow excursions, random fluctuations, chugging...) and which may or may not have the same causes.

The basic element of the apparatus of interest is always a kind of channel through which the fluid flows. The fluid inside the channel is subject to two sets of boundary conditions.

a) The hydrodynamic boundary conditions, which impose some thermodynamic properties to the fluid at some point (for example the pressure) and cause it to flow (driving head characteristic).

b) Another set of boundary conditions, which is often of thermal nature, also imposes some thermodynamic properties to the fluid at some point

(for example the enthalpy) and causes the density to change.

The density variation with enthalpy along the channel and its consequences are called here the "density effect." Among these consequences, and because a disturbance causes the density to vary downstream, delay times are introduced in the system by any disturbance in any point (except the exit).

The purpose of this paper is to show that the density effect, with its delay times, is sufficient to cause the system to oscillate and to explain the experimentally observed oscillatory behaviors.

The paper consists of two parts. In Part I, it will be shown that the density effect is sufficient to cause oscillation. The mechanism will be analyzed and the main parameters stressed.

In Part II, the very important problem of the onset of oscillation will be dealt with and the above mechanism will be shown to be the actual cause of the phenomenon in many cases. In order to enhance the physical meaning of the equations used in Parts I and II, the model is purposely very simplified and some phenomena which are believed to have a weak but perhaps non-negligible influence are not taken into account. By means of a numerical study it will also be shown in Part II that, despite these assumptions, the density effect model can be used to obtain a good idea of the values of the parameters and of the frequency at the onset of the phenomenon.

As a less general, but very detailed publication on the density effect model is already available in French [1], the emphasis will be put here on the physical aspects rather than on the derivation of the equations. (However, because of the generalization, the calculations and the nomenclature used here differ slightly from those used in [1].)

1.2 Review of Previous Works

More than 60 papers have been analyzed in [1], some of them in detail, and since the writing of [1], several interesting papers, some of them are [5], [6], [9], [10], [11], have been made available to the author. Only the conclusions of this literature survey are given here. From the experimental point of view, the information gathered to date is by no means complete but is sufficiently numerous to serve as a good basis for theoretical works. There are few discrepancies and the influences of the main parameters are qualitatively known.

From the theoretical point of view, the balance is less favorable. A number of possible causes have been proposed for the phenomenon, but to date, the driving mechanisms are not fully understood.

For quantitative calculations some models have given encouraging results but their general usefulness has not been established. The equations based on these models are very involved so that the physical meanings of the results are not very clear. Since the understanding is an essential step for reliable calculations, there are two kinds of models which should be formulated:

1. Very simplified models, developed to give an understanding of the governing processes.
2. More accurate, but also more complicated models, to be used for design purposes. The necessity for considering both models was already recognized in several previous publications. A good paper that takes the simplified approach is [2]. The present study also follows the same approach.

Some other facts of importance are:

- a) Variable density flows are often subject to oscillatory behavior. This appears from the numerous and varied experiments made to date and is confirmed by the oscillations found with many mathematical models, despite the variety of their assumptions.
- b) As a good first approximation, the onset of the oscillation may be considered a linear phenomenon [3, 4, 5].
- c) The influence of the inlet subcooling is not monotonic [6, 7, 8]. An increase in subcooling has a destabilizing influence for low values of subcooling and a stabilizing influence for high values.

I.3 Possible Mechanisms

Among the proposed mechanisms, the most likely involve delay effects as is often the case for unstable or oscillatory mechanical systems. In the system under consideration, delay-times are always related to the propagation of some quantity and this relation between propagation and oscillation phenomena have already been stressed before, for example in [12, 13]. Three propagation phenomena seem more likely than the others to be the cause of an oscillatory behavior for simple systems such as electrically heated loops.

- a) Propagation of pressure disturbances by compression waves. However, in most systems and despite the low velocity reported for such waves in a two-phase media, the observed frequencies of oscillations seem to be too low to fully support this cause.
- b) Propagation of density disturbances. To support this mechanism, there is considerable evidence of a relationship between the transit time of a particle through the channel and the period of the oscillations.

- c) Propagation of flow regime or flow pattern disturbances. There is also considerable evidence, in low pressure glass loops of flow pattern changes associated with the oscillatory behavior [14, 9].

Rigorously speaking, it is impossible to separate these three phenomena, since all three are consequences of the same mechanical laws, and they probably merge in the actual mechanism. Hopefully, we can expect in some case the promineny of one of them. The following study deals with the second one, which is believed to have the best potentialities for a large range of pressure.

II. The Density Effect Model

II.1 Assumptions and Definition of the Model

Assumptions are needed for two reasons:

- 1. As stressed above, the development of a very simplified model is necessary for understanding purposes (assumptions b, c, d, h, i, k, l, m).
- 2. The testing of the density effect as a cause for the oscillatory behavior makes it necessary to have a "pure" density effect, by eliminating other phenomena (assumptions a, e, f, g, j).

- a) The "density effect" is supposed to be sufficient, by itself, to cause the behavior of the system, so that pressure disturbances and flow pattern changes can be ignored. (See Sec. I.3) In particular, the pressure dependent thermodynamic properties are assumed to be constants.
- b) Even for a given flow pattern, the propagation of density waves in two phase mixtures is a complicated phenomenon [15]. Fortunately, the order of magnitude of their velocities is the same as the order of

magnitude of the velocities of the phases or of the mixture. The difference between these velocities are neglected. (It is felt that this can be made only as a first step and that, at least in some cases, the so-called "drift phenomenon" [12] may have a significant influence on the behavior of the system.) With this assumption, the mixture behaves like a homogeneous fluid. However, it is impossible to adopt the characteristics of the well known homogeneous model, (no slip) since its density variation is quite erroneous. (See Fig. 1 and hereafter)

The density effect model replaces the actual flow by the flow of a fictitious homogeneous fluid submitted to the following conditions:

1. To have, in the constant density section, the same characteristics as the actual fluid and especially the same velocity.
2. To have at any point, a specific volume as near as possible to that of the mixture.

c) Figure 1 compares the specific volume for the actual fluid and for the homogeneous model as a function of enthalpy. The dimensionless quantities are those used in the analysis and the zone of interest is deduced from [1]. This figure shows that one can assume with a good approximation, a linear relationship between the enthalpy and the specific volume of the mixture.

It also shows the magnitude of the error made, especially at low pressure, when using the usual homogeneous model. (For example, in the zone of interest and at 8 Kg/cm^2 , the error made when assuming the best fit linear relationship is less than 3% on the specific volume and less than 7% on the slope of the specific volume versus enthalpy curve. It is 96% on both quantities when the homogeneous model is used.)

d) The analysis is one dimensional.

e) The total pressure drop ΔP between the inlet and the outlet of the channel is supposed to be the sum of a function of only the inlet velocity U_0 (as imposed by the driving head steady state characteristic, see Fig. 2) and of a linear function of only the time derivative $\frac{dU_0}{dT}$ (coming from the inertia of the outside loop). This allows the model to cover the cases of natural circulation or forced convection in a single channel, the case of a channel in parallel with a great number of others, when a variation of flow in a channel can be assumed not to affect the others, and the case of a channel in parallel with a by-pass. The problem is much more complicated when there is a small number of parallel channels, the system having more degrees of freedom. It will not be rigorously studied here but some remarks on this problem will be made in Part II.

f) The influence of the thermal properties of the channel wall is not taken into account. (This assumption is as questionable as the assumption b for the actual systems, but cannot be avoided here, as a "pure" density effect is analyzed. Depending of the properties of the wall, their effect may be weak or strong [14]).

g) The power density is constant (with respect to time) and uniform (with respect to space). This assumption is consistent with the foregoing one. (In nuclear reactors, the reactivity coupling between the fluid density and the power complicates the problem. This coupling may have a definite influence on the flow behavior but is neglected here as a necessary step.)

h) The ratio of the mixture frictional pressure gradient to the frictional pressure gradient for the same flow rate flowing as a liquid is assumed to be a linear function of the enthalpy.

This is a good approximation for two phase flow in the zone of interest, as it can be seen from experiments [14] or from the Martinelli-Nelson correlation.

- i) Geometry changes (such as restrictions, changes in area, roughness or slope of the channel) in the flow path are limited to the upstream non-heated length and to the inlet and exit of the downstream unheated length.
- j) The inlet enthalpy is a constant- H_0 .
- k) The flow in the unheated lengths is adiabatic.
- l) The energy equation is limited to a thermal balance.
- m) The flow is not allowed to reverse.

The definition of the model results from these thirteen assumptions.

The fluid (see Fig. 3) enters the upstream adiabatic length (called U.A.L. hereafter) and flows through the heated length and the downstream adiabatic length (D.A.L.). The heated length is divided, by a mobile boundary, into a constant density heated length (C.D.H.L.) and a variable density heated length (V.D.H.L.). From the physical point of view, the most significant assumptions are a, b, c. For the application of the model, the restrictive ones are e, f, g, i.

II.2 Dimensional Equations

The symbols used in this paper are defined in the nomenclature. In order to be able to consider the effect of system geometry (see assumption i) the abscissa Z and the velocity U used in the equations are "normalized values." Let the subscript i apply to any length of channel of constant characteristics. The normalized abscissa Z increases in the direction of the flow and is defined by:

$$Z = 0 \quad \text{at the inlet to the heated section (origin)}$$

$$dZ = \sigma_i dz_i$$

where dz_i is the actual element of length and σ_i the ratio of the flow area at the particular point to the flow area in the heated section.

The normalized velocity U is defined by:

$$U = \sigma_i U_i \quad (2)$$

U is a continuous quantity along the channel.

The two variables being the time T and the normalized abscissa Z , the four unknown are the enthalpy H , the density R , the normalized velocity U and the pressure P . The origin for the enthalpies is the enthalpy where the density begins to change (see Fig. 1).

The four equations are the equation of state and the conservation laws.

State (assumption c)

$$R = R_0 \quad \text{when } H \leq 0$$

$$\text{and } R = \frac{H_c R_0}{H + H_c} \quad \text{or } \frac{R_0}{R} = 1 + \frac{H}{H_c} \quad \text{when } H \geq 0 \quad (3)$$

Continuity

$$\frac{\partial R}{\partial T} + \frac{\partial RU}{\partial Z} = 0 \quad (4)$$

Energy (assumption l)

$$R \frac{\partial H}{\partial T} + RU \frac{\partial H}{\partial Z} = W \quad (5)$$

Momentum

On a geometry change i , at the inlet of length i , the pressure drop is assumed to be:

$$-\delta P_i = (1 + \psi_i) \frac{RU_i^2}{2} - \frac{RU_{i-1}^2}{2} = \left[\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right] \frac{RU^2}{2}$$

Where Ψ_i is the loss coefficient expressed in terms of the downstream characteristics. (If necessary the pressure drop can also be written:

$$-\Delta P_i = \left[\frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{\Psi_i' - 1}{\sigma_{i-1}^2} \right] \frac{R U^2}{2}$$

where Ψ_i' is the loss

coefficient expressed in terms of the upstream characteristics.)

On the length i , the pressure drop gradient is:

$$-\frac{\partial P_i}{\partial z_i} = R \frac{\partial U_i}{\partial T} + R U_i \frac{\partial U_i}{\partial z} + R G \sin \varphi_i + \frac{\Lambda_i R U_i^2}{2 D_i}$$

(Ψ_i is positive for upwards flow, negative for downwards flow.)

Whence (assumption e)

$$\Delta P \left(U_0, \frac{dU_0}{dT} \right) = \sum_i \left(\frac{1 + \Psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right) \frac{R U^2}{2} + \int_{\text{channel}} \left[\frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{U}{\sigma_i} \frac{\partial U}{\partial z} + G \sin \varphi_i + \frac{\Lambda_i U^2}{2 D_i \sigma_i^2} \right] R \frac{dz}{\sigma_i} \quad (6)$$

Using (3) and (5) leads to a simple expression for the continuity equation (4) which can be written:

$$\frac{dR}{dH} \left[\frac{\partial H}{\partial T} + U \frac{\partial H}{\partial z} \right] + R \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

or

$$\frac{\partial U}{\partial z} = W \frac{d \frac{1}{R}}{dH} = \frac{1}{W} \quad (7)$$

Where Θ is a time

In the V.D.H.L.

$$\Theta = \Theta_c = \frac{H_c R_0}{W} \quad (8)$$

In the other lengths

$$\Theta \rightarrow \infty$$

In the V.D.H.L. the energy equation can be replaced by a simple one using (3), (5) and (8).

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial T} + U \frac{\partial R}{\partial z} \right) = - \frac{1}{\Theta_c} \quad (9)$$

In order to reduce the number of parameters to consider, it is useful to write the equations in a dimensionless form. The best way to do so is to use a system with the following four fundamental quantities.

Mechanical quantities

Length,

Density,

Time

Thermal quantity

Enthalpy

The units for these quantities are respectively taken as the heated length L_c , the density at the inlet R_0 , the characteristic time Θ_c and the characteristic enthalpy H_c .

The dimensionless equations are written hereafter for every section.

For the sake of simplicity, the reduced values of the gravity g and of the friction f are taken as:

$$g = \frac{G \Theta_c^2}{L_c} \sin \varphi_c$$

$$f = \frac{\Lambda_0}{2} \frac{L_c}{D_c}$$

Λ_0 being the Darcy coefficient in the C.D.H.L.

q_i is defined as:

$$q_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right)$$

II.3 U.A.L. Equations (Upstream adiabatic length)

In this section

$$\textcircled{H} \rightarrow \infty$$

Whence, $u_o(t)$ being the reduced value of the inlet normalized velocity and $-s$ being the reduced value of the inlet enthalpy (s stands for subcooling), the equations (3), (7), (5) lead to

$$\left. \begin{aligned} u &= u_o(t) \\ p &= 1 \\ h &= -s \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

The reduced pressure drop in the U.A.L. is (cf. equation (6))

$$\Delta p[\text{U.A.L.}] = \sum_i q_i u_o^2 + \int_{\text{U.A.L.}} \left[\frac{1}{\sigma_i} \frac{du_o}{dt} + g \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_c} + \frac{\Lambda_i L_c}{2 D_i} \frac{u_o^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{dz}{\sigma_i}$$

It can be written in a conventional form

$$\Delta p[\text{U.A.L.}] = \left(\frac{du_o}{dt} + g + f u_o^2 \right) l_o \quad (11)$$

Where l_o is given three different values for the three kinds of terms (inertia, gravity, friction). For simplicity, geometry changes, which lead to terms in u_o^2 are counted as friction terms.

Inertia

$$l_{oi} = \int_{\text{U.A.L.}} \frac{dz}{\sigma_i^2}$$

Gravity

$$l_{og} = \int_{\text{U.A.L.}} \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_c} \frac{dz}{\sigma_i}$$

Friction

$$l_{of} = \frac{1}{f} \left[q_i + \int_{\text{U.A.L.}} \frac{\Lambda_i L_c}{2 D_i} \frac{dz}{\sigma_i^2} \right]$$

Introducing the actual dimensional values

$$\left. \begin{aligned} l_{oi} &= \frac{1}{L_c} \sum_{\text{U.A.L.}} \frac{L_i}{\sigma_i} \\ l_{og} &= \frac{1}{L_c \sin \varphi_c} \sum_{\text{U.A.L.}} L_i \sin \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$l_{of} = \frac{D_c}{\Lambda_o L_c} \left[\sum_{\text{U.A.L.}} \left(\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right) + \sum_{\text{U.A.L.}} \frac{\Lambda_i L_i}{D_i \sigma_i^2} \right]$$

These three quantities (12) are the only reduced geometry parameters for the upstream adiabatic length.

II.4 C.D.H.L. Equations (Constant density heated length)

In this section

$$\textcircled{H} \rightarrow \infty$$

From (7) the continuity equation reduces to $\frac{\partial m}{\partial z} = 0$ while the energy equation (5) is written $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{Dh}{Dt} = 1$ using Lagrange's variables. Let $\tau(t)$ be the reduced time when a given particle leaves the C.D.H.L. and $\lambda(t)$ the length of the C.D.H.L.

The occurrence of a density effect in the channel is subject to the condition

$$\lambda < 1$$

Straightforward calculations lead to the following set of equations:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(t) \\
 \rho &= 1 \\
 h &= t - \tau \\
 \lambda &= \int_{t-\Delta}^t u_0(x) dx \\
 z &= \int_{t-\Delta}^t u_0(x) dx \\
 \lambda &< 1 \\
 t-\Delta &\leq t \leq \tau
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

The reduced pressure drop in the C.D.H.L. is (cf. equation (6))

$$\Delta p[\text{C.D.H.L.}] = \int_{\text{C.D.H.L.}} \left[\frac{du_0}{dt} + g + f u_0^2 \right] dz$$

(in the C.D.H.L. no singularities are present and $\sigma_i = 1$)

$$\Delta p[\text{C.D.H.L.}] = \left(\frac{du_0}{dt} + g + f u_0^2 \right) \lambda \tag{14}$$

II.5 V.D.H.L. Equations (Variable density heated length)

In this section

$$\Theta = \Theta_c$$

From (7), the continuity equation is $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$

From (9) the energy equation is $\frac{D(\log \rho)}{Dt} = -1$

Straightforward calculations lead to the following set of equations.

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(t) - \lambda(t) + z \\
 \rho &= e^{-(t-\tau)} \\
 h &= \frac{1}{\rho} - 1 \\
 z(t, \tau) &= \lambda(\tau) e^{t-\tau} + e^t \int_{\tau}^t e^{-x} [u_0(x) - \lambda(x)] dx \\
 \lambda &\leq z \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

The reduced pressure drop in the V.D.H.L. is (cf. equation (5))

$$\Delta p[\text{V.D.H.L.}] = \int_{\text{V.D.H.L.}} \left[\frac{du_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + u_0 - \lambda + z + g + \frac{\lambda_i}{\lambda_0} f (u_0 - \lambda + z)^2 \right] \rho dz$$

The assumption h postulates that

$$\frac{dp_{\text{friction mixture}}}{dp_{\text{friction liquid}}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \frac{1}{\rho} = 1 + \gamma \rho \quad \text{where } \gamma \text{ is a numerical constant}$$

$$\text{Then } \frac{\lambda_i}{\lambda_0} = \rho + \gamma \rho h = \gamma - (\gamma - 1) \rho$$

Let

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \int_{\lambda}^1 \rho dz \\
 A_1 &= \int_{\lambda}^1 (u_0 - \lambda + z) \rho dz \\
 A_2 &= \int_{\lambda}^1 (u_0 - \lambda + z)^2 \rho dz \\
 A_3 &= \int_{\lambda}^1 (u_0 - \lambda + z)^3 \rho dz
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

A_0, A_1, A_2, A_3 are positive quantities and they are functions of the time only.

A_0, A_1, A_2 are respectively the mass, the momentum, and twice the kinetic energy of the fluid present in the V.D.H.L. at the time t .

A_3 is also related to the above momentum and its distribution along the channel. The reduced pressure drop in the V.D.H.L. is written:

$$\Delta p [V.D.H.L.] = \left[\frac{dm_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right] A_0 + A_1 + f \left[\lambda A_2 - (\lambda - 1) A_3 \right] \quad (17)$$

II.6 Heated channel exit pressure drop (Point D, see Fig. 3)

Equations (15) are valid here, with $\beta = 1$

The pressure drop at this point is, from equation (6)

$$\Delta p (\text{point D}) = q_d \rho_a (u_0 - \lambda + 1)^2 \quad (18)$$

II.7 D.A.L. Equations

In this section $\Omega \rightarrow \infty$. From (7) the continuity equation reduced to:

$$\frac{\partial m}{\partial z} = 0 \quad (u \text{ in a function of time only}) \text{ while the energy equation (5) is written using Lagrange's Coordinates } \frac{Dh}{Dt} = 0.$$

Straightforward calculations lead to the following set of equations:

$$\left. \begin{aligned} m &= m_0(t) - \lambda(t) + 1 \\ \rho &= e^{-(t-\lambda-z)} \\ h &= \frac{1}{\rho} - 1 \\ z(t, z) &= 1 + \int_{t_d}^t [m_0(x) - \lambda(x) + 1] dx \\ t_d &\leq t \leq \text{exit time} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

t_d is the reduced time when a particle, which entered the V.D.H.L. at time τ , leaves the V.D.H.L.

The reduced pressure drop in the D.A.L. is (cf. equation (6)) from assumption i

$$\Delta p [D.A.L.] = \int_{D.A.L.} \left[\frac{1}{\sigma_a} \left(\frac{dm_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} \right) + g \frac{\sin \varphi_a}{\sin \varphi_c} + \frac{\lambda_a L_c (u_0 - \lambda + 1)^2}{2 D_a \sigma_a^2} \right] \frac{\rho dz}{\sigma_a}$$

It can be written in a conventional form

$$\Delta p [D.A.L.] = \left(\frac{dm_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right) B_0 + f B_2 \quad (20)$$

Where B_0 is given two different values for the two kinds of terms: inertia and gravity.

Let

$$\left. \begin{aligned} l_{ai} &= \frac{L_a}{L_c \sigma_a} \\ l_{ag} &= \frac{L_a \sin \varphi_a}{L_c \sin \varphi_c} \\ l_{af} &= \frac{\lambda_a}{\lambda_0} \frac{D_c}{D_a} \frac{L_a}{L_c} \frac{1}{\sigma_a^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

and the normalized reduced length of the D.A.L.

$$l_{an} = \frac{\sigma_a L_a}{L_c}$$

Then B_0 and B_2 take the following values

Inertia

$$B_{0i} = \frac{l_{ai}}{l_{an}} \int_{DAL} p dz$$

Gravity

$$B_{0g} = \frac{l_{ag}}{l_{an}} \int_{DAL} p dz$$

Friction

$$B_{2f} = \frac{l_{af}}{l_{an}} (u_0 - \lambda + 1)^2 \int_{DAL} p dz$$

(22)

B_0 and B_2 are quantities analogous to A_0 and A_2 . They are positive and functions of time only.

II.8 Exit Pressure Drop (Point E, see Fig. 3)

Equations (19) are valid then, with $g = 1 + l_{an}$

The pressure drop is, from equation (6)

$$\Delta p[\text{point E}] = q_e p_e (u_0 - \lambda + 1)^2 \quad (23)$$

II.9 Conclusions. The dynamic behavior of the fluid in the density effect model is completely described by the above sets of equations (10), (13), (15), (19) and by the momentum boundary condition (6).

$$\Delta p(u_0, \frac{du_0}{dt}) = \Delta p[UAL] + \Delta p[CDHL] + \Delta p[VCHL] + \Delta p[ptD] + \Delta p[DAL] + \Delta p[;tE]$$

which reduces to the sum of equations (11), (14), (17), (18), (20), (23).

Additional relations (12), (16) (21), (22) are used to simplify the form of

equation (6).

With these sets of equations, the problem is formulated in terms of only two unknown functions: the inlet velocity $u_0(t)$ and the density $\rho(z, t)$. Furthermore, the problem would be easy to solve if the form of the function $u_0(t)$ were known.

Thus, the momentum boundary condition (6), which relates $\frac{du_0}{dt}$ to u_0 , is the basic equation of the problem.

III. Basic Equation of the Density Effect Model

III.1 Derivation of the Equation

Assumption e can be written in dimensionless form

$$\Delta p(u_0, \frac{du_0}{dt}) = \varphi(u_0) - l_p \frac{du_0}{dt}$$

where l_p is a positive number (inertia of the outside loop)

From (6), (11), (14), (17), (18), (20), (23).

$$\begin{aligned} \varphi(u_0) - l_p \frac{du_0}{dt} = & \left(\frac{du_0}{dt} + g + f u_0^2 \right) (l_0 + \lambda) \\ & + \left(\frac{du_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right) A_0 + A_1 + f [2A_2 - (\lambda - 1)A_3] \\ & + q_a p_a (u_0 - \lambda + 1)^2 \\ & + \left(\frac{du_0}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} + g \right) B_0 + f B_2 \\ & + q_e p_e (u_0 - \lambda + 1)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Let

$$u_0(t) = u_{00} + v(t) \quad (25)$$

Where u_{00} is the steady state reduced inlet velocity. (Here the disturbance $v(t)$ may be large).

In the steady state case ($\nu \equiv 0$) (24) is written:

$$\varphi(u_{\infty}) = \left\{ \begin{aligned} &(g + f u_{\infty}^2)(l_0 + \lambda_0) + g A_{\infty} + A_{10} + f [\nu A_{20} - (\nu - 1) A_{30}] \\ &+ q_d \rho_d (u_{\infty} - \lambda_0 + 1)^2 + g B_{\infty} + f B_{20} + q_e \rho_e (u_{\infty} - \lambda_0 + 1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Subtracting (26) from (24) and solving for $\frac{du}{dt} = \frac{d\nu}{dt}$ leads to the so-called "basic equation" (27).

$$\begin{aligned} (l_p + l_0 + \lambda + A_0 + B_0) \frac{d\nu}{dt} = & \varphi(u_{\infty} + \nu) - \varphi(u_{\infty}) \\ & - f \nu (2u_{\infty} + \nu)(l_0 + \lambda) \\ & - (g + f u_{\infty}^2)(\lambda - \lambda_0) + \frac{d\lambda}{dt} (A_0 + B_0) \\ & - g(A_0 - A_{\infty}) - (A_1 - A_{10}) - f [\nu(A_2 - A_{20}) - (\nu - 1)(A_3 - A_{30})] \\ & - q_d \Delta [\rho_d (u_{\infty} - \lambda + 1)^2] \\ & - g(B_0 - B_{\infty}) - f(B_2 - B_{20}) \\ & - q_e \Delta [\rho_e (u_{\infty} - \lambda + 1)^2] \end{aligned}$$

III.2 Discussion; The Mechanism of Oscillations

III.2.1 Discussion

If the model behavior is oscillatory (and it will be shown in Part II that it is) equation (27) gives the key of the driving mechanism involved. The left hand side of equation (27) is of the sign of $\frac{d\nu}{dt}$. In the right hand side, at a given time t , damping terms have the sign of $(-\nu)$

since they tend to lead to $\nu \frac{d\nu}{dt} < 0$, and driving terms have the sign of ν , since they tend to lead to $\nu \frac{d\nu}{dt} > 0$.

The right hand side of equation (27) has been purposely written on 7 lines, according to their origin.

First Line $\varphi(u_{\infty} + \nu) - \varphi(u_{\infty})$ may either be 0 (see Fig. 2 natural circulation or have the sign of $(-\nu)$ (forced convection). It gives the influence of the steady state characteristics of the part of the loop outside the channel and explains why, for the same channel and the same operating conditions, (same reduced velocity), the natural convection operation is less stable than the forced convection operation as reported in the literature. In the case of a large by-pass, there is, of course, no influence of the outside circuit (l_p is also zero).

Second Line $-f \nu (2u_{\infty} + \nu)(l_0 + \lambda)$ This term comes from the constant density ("single phase") lengths either non-heated (l_0) or heated (λ). It is a damping term, being always of the sign of $(-\nu)$.

Third Line $-(g + f u_{\infty}^2)(\lambda - \lambda_0) + \frac{d\lambda}{dt} (A_0 + B_0)$ This term comes from different zones (C.D.H.L., V.D.H.L., D.A.L.). It has been purposely written in this way to show the influence on the stability of a moving boundary between the C.D.H.L. and the V.D.H.L. (This term disappears if a fixed boundary is assumed.) From equation (13)

$$\lambda = \int_{t-\Delta}^t u_0(x) dx \quad \frac{d\lambda}{dt} = \nu(t) - \nu(t-\Delta)$$

The term is delayed on ν . After any change of sign of ν , it is a driving term because of this delay. This explains the cause and the sign of the important difference (see Part II) which exists between the case of no "subcooling" ($\Delta = 0$ whence $\lambda \equiv 0$, $\frac{d\lambda}{dt} \equiv 0$) and the cases of a

small value of subcooling

The other terms (fourth to seventh line) may also be driving terms for the same reason: they are functions of the density (see equation (16) and (22)) and the density at a given abscissa z is delayed on the inlet velocity perturbation v . They come respectively from the V.D.H.L., Point D, D.A.L., and Point E. As can be seen from their definition (16), it should be stressed that A_1 , A_2 , and A_3 depend on the distribution of the mass in the V.D.H.L. This distribution is affected by such phenomena as local boiling or slip, the influence of which is at least approximatively taken into account here.

On the other hand B_2 (see equation (22)) (as, of course, A_0 and B_0) is not affected by the distribution of the mass in the D.A.L. This supports the tentative conclusion that the D.A.L. (more often the riser) influence is maximum when the disturbance in it is maximum, i.e., when the transit time of a particle through the D.A.L. is half a period. So the D.A.L. influence may not be monotonic. Unfortunately [1], this leads to lengths of riser which have not been experimentally tested.

Instead of writing equation (27) as done above, it is possible to distinguish inertia, gravity and friction terms (except for Point D and E where inertia and friction parameters are merged in q_d and q_e). The nomenclature has been chosen in such a way that g appears in any gravity term, f in any friction term and neither f nor g appear in inertia terms.

It should be stressed from equation (27) that an oscillatory behavior with a horizontal or even a vertical downward flow is almost as likely as with a vertical upward flow.

The introduction of driving terms by friction terms is not surprising, since the friction at a given abscissa z is delayed in its effect on the inlet velocity by the density effect.

III.2.2 The Mechanism of Oscillations

The foregoing analysis leads to the following description of the density effect mechanism illustrated in Fig. 4:

Any disturbances have delayed consequences on the density and the density distribution along the channel, the delays being introduced by the density propagation phenomena (see Sec. I.3). By their integrated effects on the pressure drop terms and because of the momentum boundary conditions (imposed by the outside loop) these density changes induce other disturbances which are delayed on the initial one. For certain sets of parameters, this mechanism allows sustained oscillations,

For example, a fortuitous and brief increase of the flow rate causes, for a finite duration of time, an increase of the density and an increase of the "non-boiling" length. This, in turn, causes an increase of the pressure drop and a decrease in the flow rate which, because of the above delays, brings the flow rate under the initial steady state one, thus starting an oscillatory behavior.

In this mechanism, the driving sequences for most terms are those following changes of the sign of the velocity disturbance.

It can be seen in (27) that this mechanism is the only possible driving mechanism in the model: Any oscillatory behavior occurring to the system under consideration shall be assigned to this mechanism.

The density effect mechanism is analogous to mechanisms assumed formerly, for example, in [2]. However, it is given here in its general

form, independently of any particular geometry or of any particular pressure terms (the gravity terms usually referred to, play no particular role here).

In view of the rather involved form of equation (27) the derivation of analytical criteria for the onset of oscillations would be at least very difficult. It has not been attempted here and another method for the study of the onset of oscillations is proposed in Part II.

IV Parameters of the Model

The dimensionless parameters present in the equations (10), (13), (15), (19) and (27) are the only parameters that have an influence on the transient behavior of the model. As they are dimensionless, it is useful, from the physical point of view, to keep in mind the meaning of the quantities used as units to put the equations in a dimensionless form. These meanings are obvious except for Θ_c . From (15) $p = e^{-(t-\tau)}$ it can be seen that Θ_c is the time required, for a given particle in the variable density heated length, to multiply its volume by e.

Accordingly, if Θ_c is large, the density effect shall be weak and the system is stable and conversely. This remark can be useful for a first look in the stability of a given system and explains the stabilizing influence of a pressure increase ($\Theta_c = \frac{H_c R_p}{W}$ is almost proportional to the pressure).

The parameters will be listed here either as loop parameters (including fluid properties) or as operating parameters.

IV.1 Loop Parameters

1. Several of these parameters are reduced lengths defined by equations (12) and (21). They all are the fraction of the length of the reference

channel having the same inertia, or gravity, or friction pressure drop as the particular element under consideration.

l_{oi} and l_{of} represent the U.A.L. From their place in equation (27) it can be foreseen that an increase in l_{oi} has only a weak influence on the stability but can affect the frequency of oscillations while an increase in l_{of} has a stabilizing influence (this is in agreement with experiments). It is convenient to modify l_{oi} to include in it l_p representing the inertia of the outside loop. Thus an increase of the inertia of the outside loop has exactly the same influence as an increase of the inertia of the U.A.L.

l_{ai} , l_{ag} and l_{af} represent the D.A.L.

2. The other parameters have other meanings.

f is a reduced "friction" in the C.D.H.L while γ is a "friction factor" in the V.D.H.L. (γ is only a weak function of the pressure and of the mean quality. Its order of magnitude is 2.5 to 3.5.) l_{an} is the reduced normalized length of the D.A.L. q_d and q_e represent the geometry changes between the heated length and the D.A.L. and at the exit of the D.A.L. respectively.

3. So, the fairly complicated geometry of the channel is represented by 10 parameters. In the simple case when there are no geometry changes, these 10 parameters reduce to only 5: l_{oi} , l_{of} , f , γ , l_a

4. Besides l_p , the outside loop may introduce several parameters, but they are all comprised in the function $\varphi(u_{\infty} + v) - \varphi(u_{\infty})$. The first derivative $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u_{\infty}}$ of this function shows the importance of the slope of the steady state driving head characteristic.

IV.2 Operating Parameters

There are three of them.

1. The reduced subcooling $\Delta = \frac{H_0}{H_c}$ is also the reduced time of transit of a given particle through the C.D.H.L. (13). The "non-boiling" length λ , a function of s , appears in the basic equation (27) and, as noted above (Sec. III.2.1), this opens a possibility for s to play an important role.

2. The reduced steady state velocity $\mu_{oo} = \frac{U_{oo} \theta_c}{L_c} = \frac{U_{oo} H_c R_o}{W L_c}$ is proportional to the ratio of the steady state flow rate to the power.

From (15) μ_{oo} is also the ratio of the actual steady state inlet velocity U_{oo} to the inlet velocity in a reference steady state. In the reference steady state, with no subcooling, a particle doubles its volume during its transit time through the heated length. The remark made above on θ_c applies to μ_{oo} and that means that the order of magnitude of μ_{oo} is important as far as the stability is concerned. (The order of magnitude of μ_{oo} for oscillatory behavior will be given in Part II).

It is also interesting to state that μ_{oo} is merely the reciprocal of the so-called Damköhler's number [16] appearing in the combustion systems sometimes subject to the same kind of oscillatory behavior.

Due to the non-monotonic relationship in steady state between the pressure drop in the channel and the flow rate (right hand side of equation (26)) some range of values for μ_{oo} may not be possible. This is not the phenomenon studied here (it is an instability phenomenon studied for example by Ledinegg [17]) but it has to be checked before using equation (27) since this limitation is not taken into account in it. Solutions of (27) for impossible values of μ_{oo} do exist, but they have no physical meaning.

3. The reduced gravity $g = \frac{G \theta_c^2 \sin \varphi_c}{L_c} = \frac{G (H_c R_o)^2 \sin \varphi_c}{W^2 L_c}$ is inversely proportional to the power density squared. It is also the ratio of the gravity acceleration (projected on the heated channel direction) to the inlet acceleration in the reference steady state defined above. It shows the influence of the gravity field on the system behavior. There are some reasons (Sec. III.2) to think that this influence is not very strong and that g is not a very sensible parameter.

V. Conclusion

1. Some remarks are made concerning the physical aspects of the oscillatory behavior of heated channels and the importance of the delay-times on the behavior is stressed.

2. A density effect model is proposed to explain the behavior. The density effect is the consequence of the physical relationship between enthalpy and density. Non-linear equations for the model are derived in a dimensionless form.

3. A description of the mechanism of oscillation is given, based on the analysis of the equations. Oscillations are sustained, owing to the delays introduced between the inlet velocity and the pressure drop terms by the density effect.

4. An inventory of the influential parameters is established. At this point of the study and in agreement with experiments, it is already found that an increase of the inlet pressure drop has a stabilizing influence, that forced convection operation is more stable than natural circulation operation, and that horizontal channels can lead to oscillations. A characteristic time θ_c was introduced and its order of magnitude shown to be important as far as stability is concerned.

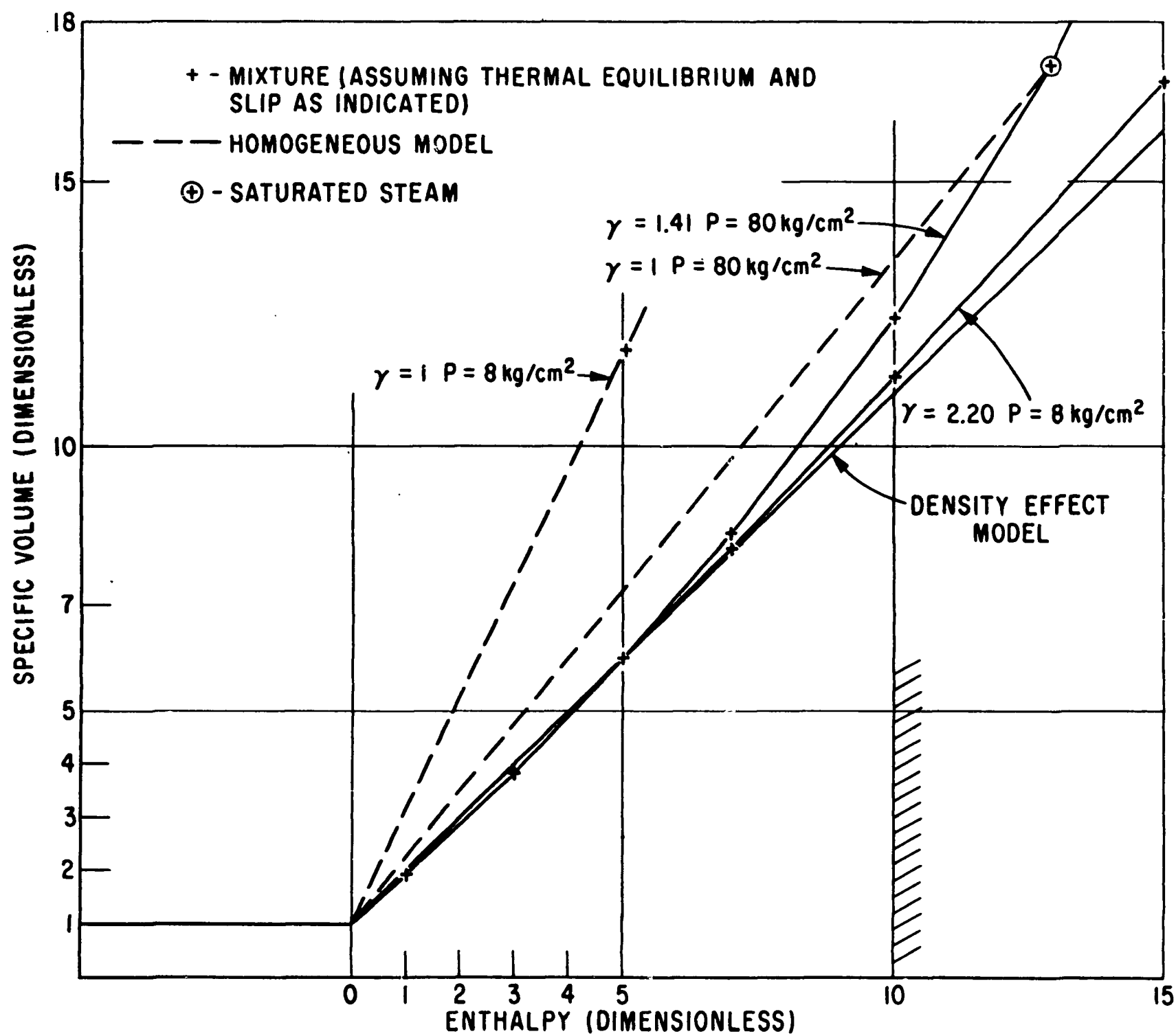


Figure 1 Compared Density Laws

The zone of interest to be used for the quantitative comparison with experiments (Part II) is roughly $h < 10$

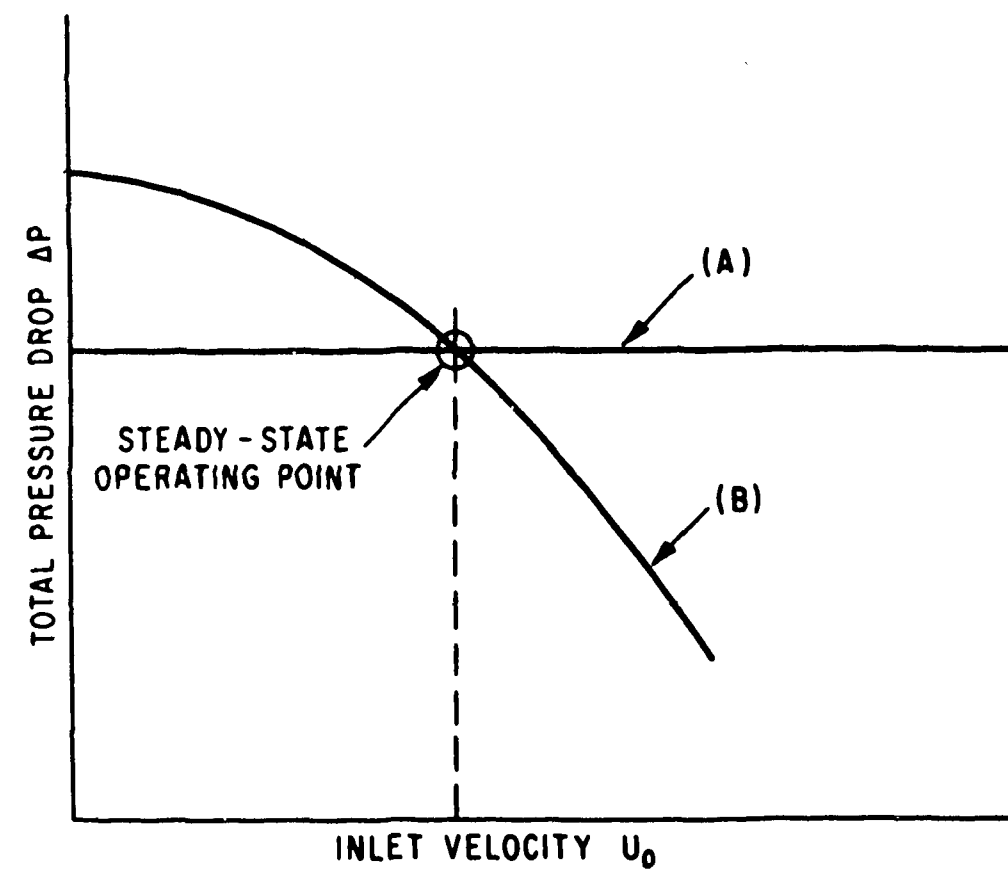


Figure 2 Driving Head Characteristics (Steady State)
 -Curve (A): large bypass or natural circulation
 -Curve (B): small bypass or forced convection

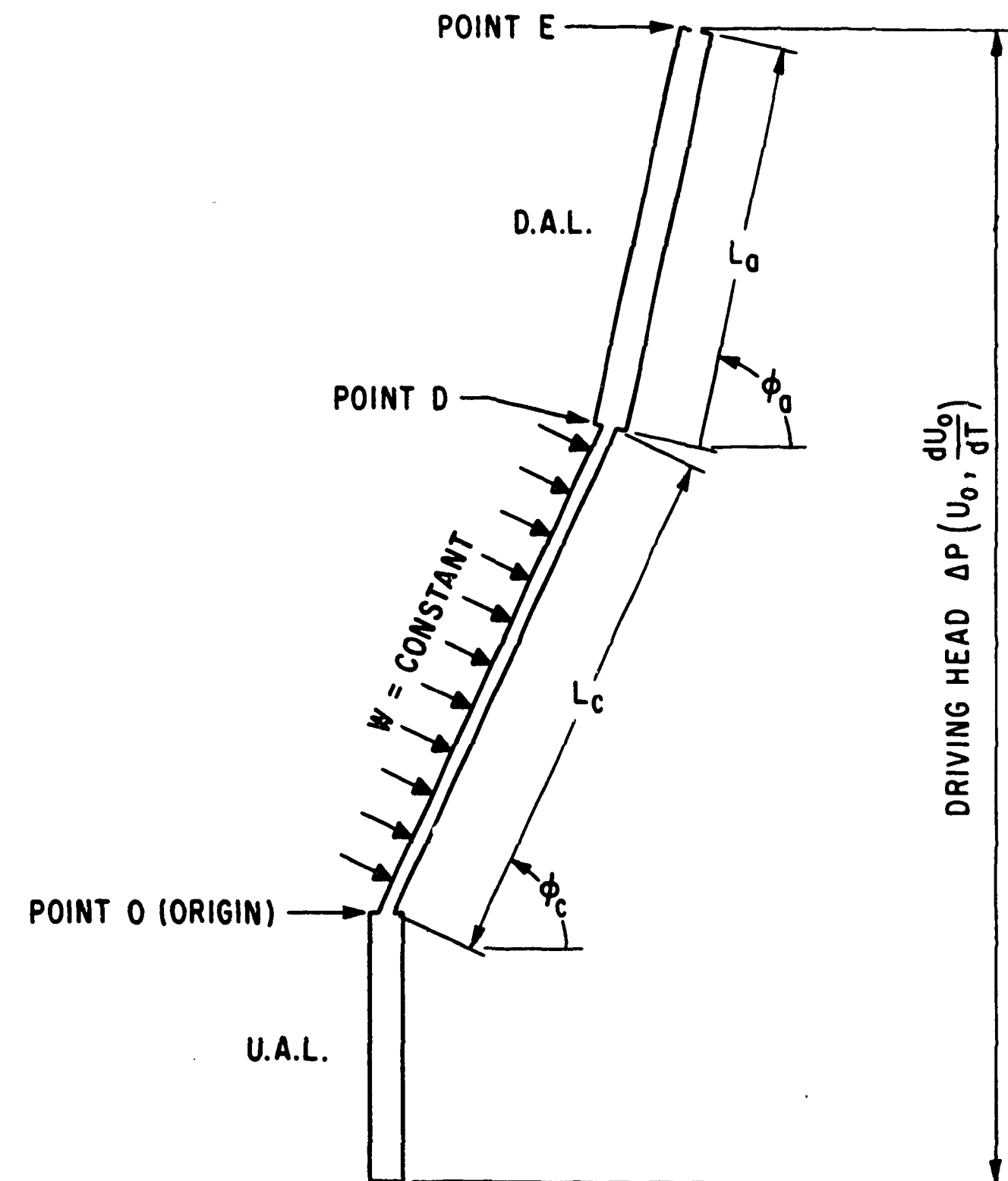


Figure 3 Density Effect Model: the channel

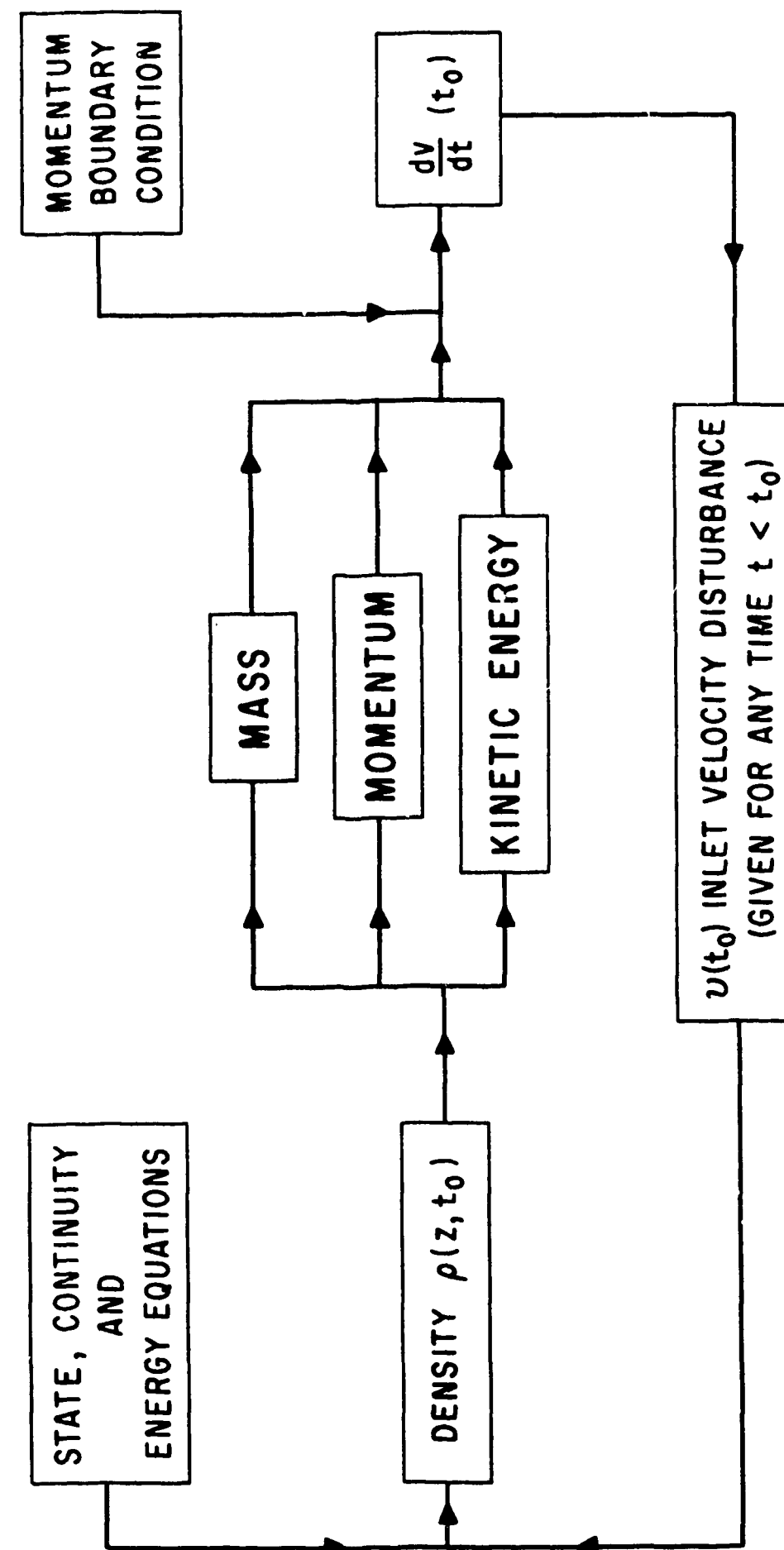


Figure 4 Density Effect Model: the driving mechanism

Bibliography

- 1 J. Bouré, "Contribution à l'étude théorique des oscillations dans les canaux chauffants à ébullition," Thèse Docteur-Ingénieur-Centre d'Etudes Nucléaires, et Université de Grenoble (France), June, 1965
- 2 G. B. Wallis, J. H. Heasley, "Oscillations in two-phase flow system," J. of Heat Transfer, Aug. 1961, 83 c, 3
- 3 A. A. Davidov, "Investigation of flow pulsations in tubes of the evaporation section of radiant boilers," (1955) AEC Tr 4490
- 4 R. C. Lummis, "The frequency response of nucleate pool boiling heat transfer," NYO 9940 (1964)
- 5 C. C. St. Pierre, M. Petrick, S. G. Bankoff, "Response of a boiling water channel to power modulation," (1965)
- 6 S. W. Gouse, C. D. Andrysiak, "Some observations on two-phase flow oscillations," Proc. Multiphase flow symposium. Winter meeting, ASME (Nov. 1963)
- 7 K. M. Becker, S. Jahnberg, I. Haga, P. T. Hansson and R. P. Mathisen, "Hydrodynamic instability and dynamic burnout in natural circulation two-phase flow. An experimental and theoretical study," AE 156, (Sept. 1964)
- 8 Technische Hogeschool te Eindhoven, "Final report on the research program on heat transfer and stability studies in B.W.R.," WW 016 R70 (Feb. 1965)
- 9 F.A. Jeglic, T. M. Grace, "Onset of flow oscillations in forced flow subcooled boiling," NASA TND 2821 (1964)
- 10 M. N. Ozisik, T. Cebeci, "Dynamic stability of flow oscillation in a heated channel," ASME paper 65HT 45
- 11 K. C. Jain, "Self-sustained hydrodynamic oscillations in a natural circulation two-phase flow boiling loop" PhD Thesis, Northwestern University, (Aug. 1965)
- 12 N. Zuber, F. W. Staub, "The Propagation and the wave form of the vapor volumetric circulation in boiling, forced convection system under oscillatory conditions," Submitted for publication in the International Journal of Heat and Mass Transfer.
- 13 J. Bouré, "Oscillations de débit dans un canal bouillant," Proc. VIII^e Journées de l'Hydraulique--Lille, France (June 1964)

- 14 S. Fabr ga, "Etude expérimentale des instabilités hydrodynamiques survenant dans les réacteurs nucléaires à ébullition, Thèse Docteur Ingenieur-Centre D' tudes Nucléaires et Université de Grenoble (France), Oct. 1964
- 15 J. Bouré, "Propagation de petites perturbations dans les écoulements diphasés avec transfert de masse et glissement, "Proc. VIII  Journées de l'Hydraulique-Lille, France, June, 1964
- 16 S. S. Penner, "Chemistry problems in jet propulsion," Pergamon (1957)
- 17 M.Ledinegg, "Unstabilit t der strömung bei natürlichem und zwangumlauf" Die Wärme, (1938) 61 891-898

Manuscrit reçu le 16 juin 1966

**THE OSCILLATORY BEHAVIOR
OF HEATED CHANNELS**

An Analysis of the Density Effect

**PART II
THE OSCILLATIONS THRESHOLDS
(linearized analysis)**

by

Jean BOURE

Rapport C E A - R 3049

1966

Da

CEA-R-3049(2)(E)

BOURE J. .-

The oscillatory behavior of heated channels. An analysis of the density effect. Part 2 : The oscillations thresholds (linearized analysis).-

Commissariat à l'Energie Atomique, Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble (Isère), 1966.-

27 cm, 39 p., fig., bib.

CEA-R 3049 (2ème partie) - BOURE Jean

LE COMPORTEMENT OSCILLATOIRE DE CANAUX CHAUFFES
ANALYSE DE L'EFFET DE DENSITE

2ème partie : LES SEUILS D'OSCILLATION (ANALYSE LINEAIRE)

Sommaire. - On étudie le début du comportement oscillatoire de canaux chauffés en fonction de l'effet dit "de densité" ; ce dernier est la conséquence directe du rapport physique entre l'enthalpie et la densité du fluide.

On déduit les équations de seuil après avoir rendu linéaires les équations obtenues dans la première partie [1]. Elles peuvent être résolues d'une manière rigoureuse, par des méthodes numériques, et donnent :

1. le rapport entre les paramètres descriptifs au début des oscillations, et
2. la fréquence de ces oscillations.

En comparant les résultats prévus par le modèle et le comportement expérimental des systèmes réels, il est possible de démontrer que l'effet de densité est en fait la cause des comportements oscillatoires.

1966

39 p

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-R 3049 (part II) - BOURE Jean

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS - AN ANALYSIS
OF THE DENSITY EFFECT

PART II : THE OSCILLATIONS THRESHOLDS (LINEARIZED ANALYSIS)

Summary. - The onset of the oscillatory behavior of heated channels is studied in terms of the so-called "density effect", consequence of the physical relationship between enthalpy and density of the fluid.

The threshold equations are derived, after linearization of the equations obtained in Part I [1]. They can be solved rigorously by numerical methods to yield : 1. a relation between the describing parameters at the onset of oscillations, and 2. the frequency of the oscillations.

By comparing the results predicted by the model to the experimental behavior of actual systems, the density effect is very often shown to be the actual cause of oscillatory behaviors.

1966

39 p

Commissariat à l'Energie Atomique - France

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
Service des Transferts Thermiques

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS

An Analysis of the Density Effect

PART II

THE OSCILLATIONS THRESHOLDS (linearized analysis)

by

Jean BOURE

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 16, rue Lord Byron, PARIS VIIIème.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 16, rue Lord Byron, PARIS VIIIème.

Acknowledgments

The author is greatly indebted to Prof. A. Craya who, as Scientific Consultant for the Heat Transfer Laboratory of the "Centre d'Etudes Nucleaires de Grenoble," has directed the initial work [2]. He has made many important contributions to this study, too numerous to be cited in detail.

The author is grateful to Mr. Mondin, Head of the Heat Transfer Laboratory, who entrusted him with the present research, for his constant interest and the stimulating atmosphere of his Laboratory.

The author is also indebted to Dr. N. Zuber and to Mr. F. W. Staub of the General Electric Research and Development Center (Schenectady, New York) for many fruitful discussions.

A large part of the initial work [2] was sponsored by Euratom under joint USAEC Euratom Research and Development Program.

Nomenclature

For dimensional quantities, units are expressed in a length (L), mass (M), time (T), heat quantity (Q), system. With $(Q) = (ML^2T^{-2})$, this system would be equivalent to an L, M, T system.

A	Dimensionless functions of time	c	Complex number (equation 2)
B	(see Appendix 2)	f	Reduced friction (see Appendix 1)
D	Diameter (Appendix 1) (L) or dimensionless function of frequency (Appendix 2)	g	Reduced Gravity (see Appendix 1)
E	Dimensionless Quantity (Appendix 2)	h	Reduced enthalpy
G	Gravity acceleration (Appendix 1) (LT^{-2})	k	Dimensionless quantity (see Appendix 2)
H	Enthalpy (Appendix 1) (QM^{-1})	l	Reduced length
L	Length (Appendix 1) (L)	m	Dimensionless quantity (equation 6)
P	Pressure (Appendix 1) ($ML^{-1}T^{-2}$)	p	Reduced pressure (Appendix 1)
R	Density (Appendix 1) (ML^{-3})	q	Dimensionless parameter (Appendix 1)
T	Time (Appendix 1) (T) or dimensionless quantity (Appendix 2)	s	Reduced "subcooling" (see Appendix 1)
U	Velocity (Appendix 1) (LT^{-1})	t	Reduced time
W	Power per unit of volume (Appendix 1) ($QL^{-3}T^{-1}$)	u	Reduced velocity
Z	Trigonometric functions (Appendix 2)	v	Reduced velocity disturbance
Δ	Variation	x	Quality (Appendix 1) or dimensionless quantity
Λ	Darcy's friction coefficient (Appendix 1)	y	Dimensionless quantity (see Appendix 2)
Ψ	Pressure loss coefficient (Appendix 1)	z	Reduced abscissa
Φ	Function or Martinelli-Nelson friction factor multiplier (see Appendix 1)	λ	Constant density heated length (reduced)
		γ	Friction parameter (Appendix 1)
		ρ	Reduced density
		σ	Area ratio (Appendix 1)
		τ	Reduced time

Nomenclature - concluded

φ angle or function (Appendix I)

ω Reduced pulsation

Subscripts

a downstream adiabatic length value
c characteristic value or heated length value
d heated length exit
e channel exit
f friction term
g gravity term
i inertia term
n normalized value or number
o in general reference value, or heated length inlet value, or upstream adiabatic length value
p outside loop (pump...)
 ℓ_g only in H_{ℓ_g} latent heat of vaporization
oo steady state value
UAL upstream adiabatic length
CDHL constant density heated length
VDHL variable density heated length
DAL downstream adiabatic length

THE OSCILLATORY BEHAVIOR OF HEATED CHANNELS

An Analysis of the Density Effect

PART II THE OSCILLATIONS THRESHOLDS (linearized analysis)

I Introduction

This paper is the second part of a study devoted to the so-called "density effect" as a possible explanation to the oscillatory behavior of heated channels when large density changes are promoted in these channels (Two-phase or supercritical flow.) The name of "density effect" reflects the consequences of the density variation versus enthalpy along the channel. Among these consequences are delay times introduced in the system by any disturbance.

In the first part [1], it has been shown by examining the nonlinear equations of the model, that the density effect is sufficient to cause oscillations, the driving mechanism for which are described, in terms of the above delay times.

An inventory of the governing dimensionless parameters have been established for a fairly general case of geometry (See also Appendix I), and some consequences of the equations have been checked successfully versus experimental observations.

The purpose of this second part is to show that the density effect is actually, at least very often, the cause of the oscillatory behavior.

II The Basic Equation

The so-called basic equation has been established in [1] (Equation (27) and is: (see nomenclature)

$$\begin{aligned}
(l_p + l_o + \lambda + A_o + i_o) \frac{dw}{dt} = & \varphi(u_{oo} + v) - \varphi(u_{oo}) \\
& - f v (2u_{oo} + v) (l_o + \lambda) \\
& - (g + f u_{oo}^2) (\lambda - \lambda_o) + \frac{d\lambda}{dt} (A_o + B_o) \\
& - g (A_o - A_{oo}) - (A_1 - A_{1o}) - f [\lambda (A_2 - A_{2o}) - (\lambda - 1) (A_3 - A_{3o})] \\
& - q_d \Delta [p_d (u_o - \lambda + 1)^2] \\
& - g (B_o - B_{oo}) - f (B_2 - B_{2o}) \\
& - q_e \Delta [p_e (u_o - \lambda + 1)^2]
\end{aligned}$$

This is a fairly complicated equation and analytical derivations cannot be made further, unless some assumptions are accepted.

(It would be quite simple to solve this equation numerically with a computer and it is intended to do so later, but this will not satisfy the purpose of the present study. This purpose is not to solve the basic equation for a number of cases, but to derive from this equation a sufficient number of general conclusions to demonstrate the reality of the driving mechanism involved.)

a. The study of oscillation thresholds is a problem of primary interest, and there are some good reasons to think that, for the density effect mechanism, and at the threshold, the behavior can be described by linear equations (see in [1], Ref. [3], [4], [5] and Section I.2) (Some mechanisms, like the flow pattern disturbance mechanism discussed in [1] are obviously nonlinear, even at the threshold. As stated in [1], they have to be studied separately, and they were purposely eliminated from the present model.) Thus the equations are linearized. It is interesting to note that the linearization does not change the structure of the basic equation as far as damping or driving terms are concerned.

b. In order to obtain an autonomous equation, the gravity is assumed to be constant or at least to vary slowly in comparison with the oscillating parameters.

Let l_{pf} be defined by $\frac{d\varphi}{du_o} (u_o = u_{oo}) = -2 f u_{oo} l_{pf}$

Like φ , l_{pf} is a function of u_{oo} only

As it can be seen from [1] (Figure 2) l_{pf} is positive for forced convection operation and is equal to zero for natural circulation operation.

The linearized value of $\varphi(u_{oo} + v) - \varphi(u_{oo})$ is $-2 f l_{pf} u_{oo} v$

On the left side of the basic equation, l_p comes from the inertia of the outside loop and is always positive. With the convention already used in [1], l_p may be given two different values for the two different kinds of terms (inertia and friction) and the basic linearized equation may be written

$$\begin{aligned}
(l_p + l_o + \lambda_o + A_{oo} + B_{oo}) \frac{dw}{dt} = & -2 f u_{oo} v (l_p + l_o + \lambda_o) \\
& - (g + f u_{oo}^2) (\lambda - \lambda_o) + \frac{d\lambda}{dt} (A_{oo} + B_{oo}) \\
& - g (A_o - A_{oo}) - (A_1 - A_{1o}) - f [\lambda (A_2 - A_{2o}) - (\lambda - 1) (A_3 - A_{3o})] \\
& - q_d \Delta [p_d (u_o - \lambda + 1)^2] \\
& - g (B_o - B_{oo}) - f (B_2 - B_{2o}) \\
& - q_e \Delta [p_e (u_o - \lambda + 1)^2]
\end{aligned} \quad (1)$$

A very import remark can be made at once by considering (1): The outside loop is represented by two parameters and they can be merged with the two parameters of the upstream adiabatic length (UAL) to give

---- A single inertia parameter ($l_{pi} + l_{oi}$) written hereafter l_{oi}

---- A single friction parameter ($l_{rf} + l_{of}$) written hereafter l_{of}

Therefore, as noted in [1], changing the operating condition from natural circulation or constant driving head to forced convection increases stability, like any increase of l_{of} . On the other hand, increasing the inertia of the outside loop does not affect very much the thresholds but changes the frequency, like any increase of l_{oi} . The system describing parameters, as established in [1] are listed in Appendix I for the linearized case. All of them enter equation (1).

III The Threshold Equations

III.1 Derivation of the Equations

Let
$$v = v_0 e^{ct} \quad (2)$$

where v_0 is a small quantity when compared to u_0 , and c a complex number. The substitution of (2) in (1) leads to an equation (3) not written here where c is the unknown. (1) being a linear equation, any solution of this equation can be written $\sum_j v_{0j} e^{c_j t}$, where the complex numbers c_j are the solutions of equation (3). Provided the solutions of (3) are neither discontinuous functions of the parameters nor infinity, the threshold corresponds to the case when one or more solution of (3) is a pure imaginary number and all the others have only negative real parts. Because of this, introducing $c = i\omega$ in (3) and separating real and imaginary parts leads to a set of two equations called the threshold equations. Calculations are cumbersome but not complicated and only the method is given here.

- a. Introducing $u_0(t) = u_{00} + v_0 e^{ct}$ in the equations of the constant density heated length (C.D.H.L.) (equations (13) of part I), leads to

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= u_{00} s + v_0 e^{ct} \left(\frac{-e^{-u}}{c} + \frac{1}{c} \right) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= v_0 e^{ct} (-e^{-u} + 1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

- b. Introducing $u_0(t) = u_{00} + v_0 e^{ct}$ in the equations of the variable density heated length (V.D.H.L.) (equations (15) of part I) leads to

$$\begin{aligned} p &= e^{-(t-z)} \\ g(t, z) &= u_{00} (e^{t-z} + s - 1) + v_0 e^{ct} \left[\frac{e^{-u} e^{(1-c)(t-z)}}{1-c} - \frac{e^{-u}}{c(1-c)} + \frac{1}{c} \right] \end{aligned}$$

Whence, defining $\alpha = 1 - s + \frac{z}{u_{00}}$, the linearized value of $p(z, t)$ in the V.D.H.L. is

$$p(z, t) = \frac{1}{\alpha} + \frac{v_0 e^{ct}}{u_{00}} \left[\frac{e^{-u}}{1-c} \alpha^{-(1+c)} - \frac{e^{-u}}{c(1-c)} \alpha^{-2} + \frac{\alpha^{-2}}{c} \right] \quad (5)$$

- c. Introducing $u_0(t) = u_{00} + v_0 e^{ct}$ in the equations of the downstream adiabatic length (DAL) (equations (19) of part I), and defining

$$m = 1 - s + \frac{1}{u_{00}} \quad (6)$$

results in the following value of ρ in the DAL

$$\rho(z, t) = \frac{1}{m} + \frac{v_0 e^{ct}}{m_{00}} \left[\frac{e^{-\omega m - 1 - c}}{1 - c} - \frac{e^{-\omega m - 2}}{c(1 - c)} + \frac{m - 2}{c} \right] e^{-c \frac{\Delta - 1}{m u_{00}}} \quad (7)$$

d. Using (4), (5), and (7) it is easy to express any term of (1) using only the describing parameters of the system and the unknown c . Because the linearization $v = v_0 e^{ct}$ appears in (1) as a common factor, and, because of assumption b, is the only quantity containing the time t . Let $(T_n + iT_{1n})v$ be any term on the right hand side of (1). According to the discussion in part I (Section III.21), this is a driving term if the real part T_n is positive and a damping term if T_n is negative.

e. Introducing $c = i\omega$ allows the derivation of the threshold equations.

III.2 The Threshold Equations

They are given in Appendix II and may be written

$$\begin{aligned} \text{Real part equation} \quad 0 &= \sum_{n=1}^{n=g} T_n \\ \text{Imaginary part equation} \quad \left(l_{0i} + u_{00} \delta + u_{00} k + \frac{l_{ai}}{m} \right) \omega &= \sum_{n=1}^{n=g} T_{1n} \end{aligned} \quad (8)$$

where $k = \text{Log } m$

The elimination of ω between these two equations would lead to a relation involving the 13 parameters of the system (Appendix I). This elimination

is not possible but the two equations (8) can be solved simultaneously for ω and any of the above parameters, the twelve remaining parameters being given.

IV Results and Discussion

IV.1 Delays and Phase Shifts

It should be pointed out that equations (8) contain several trigonometrical functions of $\omega \delta$, ωk , ωy (see definitions of Z_n Appendix II, equations (2)). They are a consequence of the factors $e^{-\omega \delta}$, $e^{-i\omega k}$, $e^{-i\omega y}$ in the basic equation written in its form (3) and their meanings are time delays in the terms of (3) relative to the function $v_0 e^{ct}$. It is already known that s is the time required for a given particle, to move through the CDHL [1]. At the exit of the heated length and in steady state, $\rho_d = \frac{1}{m}$ from equation (7) and $\rho_d = e^{-(k\delta - \tau)}$ from [1]. Whence $k = \text{Log } m = k_d - \tau$ is in steady state the time required for a given particle to move through the VDHL. For the same reason, in steady state, the velocity in the DAL is $m u_{00}$, and $y = \frac{l_{an}}{m u_{00}}$ is the time required for a given particle to move through the DAL. Thus, in the basic equation, these three fundamental delays are present. This is not surprising, but the important point obtained with a numerical study of equations (8) is that, as far as there is a subcooling, and a DAL, none of these delays can be neglected without strongly affecting the results. This is to be recognized as true, independently of the validity of the model itself. In the basic equation (3), the above delays combine with phase shifts, introduced by a differentiation (left hand side member) and by various integrations of e^{ct} (see in part I equations (13), (15), (16), (19),

(22)) as factors $c, \frac{1}{c}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{1-c}, \frac{1}{(1-c)^2}, \frac{1}{2-c}$ and resulting in (8)
(see Appendix II) as factors $\omega, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega^2}, \frac{1}{1+\omega^2}, \frac{1}{(1+\omega^2)^2}, \frac{1}{4+\omega^2}$

For information, the form of the basic equation (3) disregarding all c independent coefficients (Functions of the 13 describing parameters and all written here as unity) is

$$C + C^0 + \frac{1}{C} + \frac{1}{C^2} + e^{-\omega} \left(C^0 + \frac{1}{C} + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{1-C} + \frac{1}{(1-C)^2} + \frac{1}{2-C} \right) + e^{-\omega(\delta+k)} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{1-C} + \frac{1}{(1-C)^2} + \frac{1}{2-C} \right) + e^{-\omega y} \left\{ \frac{1}{C} + \frac{1}{C^2} + e^{-\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{1-C} \right) + e^{-\omega(\delta+k)} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{1-C} \right) \right\} = 0$$

In view of the rather involved form of this equation (3), the derivation of analytical criteria for the onset of oscillations would be at least very difficult and is not attempted here.

IV.2 Qualitative Comparison with Experiments

As pointed out in the introduction, the main purpose of this paper is to check the "density effect" as a driving mechanism for the oscillatory behavior. Because of the simplifying assumptions made [1] the quantitative results of equations (8) may differ significantly from the experimental thresholds values even if the density effect is ^{the} actual mechanism. These quantitative results will be studied in Section IV.3. To check the reality of the mechanism involved, the best way is to compare 1. the order of magnitudes and 2. the laws and trends for the thresholds ad deduced from (8), to the experimental ones, whenever they are known.

a. Order of Magnitude of the Parameter μ_{∞} at the Threshold

Equations (8) leads actually to oscillations thresholds, thus demonstrating the possibility (but not yet the reality) of the density

effect mechanism. The numerical results show that the reduced velocity μ_{∞} is the most significant parameter for these thresholds in the model (This was anticipated in [1] from physical considerations). As a matter of fact, the other parameter to contain the power, i.e., the reduced gravity g, does not vary very much in practical cases. The order of magnitude of μ_{∞} at the threshold is 0.2, the possible maximum range being 0.01, to 1. Such an order of magnitude is quite well consistent with several series of experiments. In [3] the actual range was

$$0.04 \leq \mu_{\infty} \leq 0.50$$

b. Order of Magnitude of the Frequency $\frac{\omega}{2\eta}$ at the Threshold

Two facts are well established from the literature: 1. In most cases, the frequency is comprised between 0.1 and 1 c/s. 2. The period is more or less related to the transit time required for a particle to move along the channel. The predictions of the model are in good agreement on these two points: 1. The order of magnitude of $\frac{\omega}{2\eta}$ is 0.1. (The possible maximum range being 0.01 to 0.3) As the order of magnitude of the time unit Θ_c , for example in [3], is 0.3, this leads to a dimensional frequency of the order of .33 c/s. 2. As noted above (Section IV.1) s, k and y are in steady state the transit times required for a particle to move respectively through the CDHL, the VDHL and the DAL. The numerical results show that $\frac{\omega}{2\eta} (\delta + k + y)$ is generally of the order of magnitude of 2/3, i.e., that the period is of the order of 1.5 times the transit time, required for a particle to move through the heated and downstream lengths. In particular, because of the special geometry used in Wissler [4], (large diameters and lengths,

small velocities), this remark may be an explanation for the rather large periods observed by this author.

c. Influence of Pressure

It is well known that the pressure has a stabilizing influence. This is true for the model also, (in which increasing the pressure causes primarily an increase of H_c).

d. Influence of Pressure Drops in the U.A.L. and of the Steady-State Characteristic of the Outside Loop

The agreement between the predictions of the model and the known stabilizing influence of an inlet pressure drop or of a steeper characteristic (forced convection operation instead of natural circulation, for example) has already been noted above (Section II). In the model, the stabilizing influence comes from ℓ_{of} , an increase of which always increases the damping term ($-T_i$). (see Figure 1)

e. Influence of Pressure Drops in the "Two-Phase" Region

Such pressure drops have a destabilizing influence. Although the influences of q_a and q_e have not been studied in [2], the form of the corresponding terms T_6 and T_9 (Appendix II) when compared to the driving terms supports the feeling that they can be driving terms for oscillatory behavior.

f. Influence of the Length of the DAL (Often: the riser) (Figure 1)

In the range of lengths experimentally tested, an increase of the riser length has a destabilizing influence. This has been numerically tested in [2]. It has been found that an increase in the riser length has a destabilizing influence up to values of ℓ_a around 2.5. The experimental lengths related to in the literature have always been well below this figure.

g. Influence of the Equivalent Diameter of the Heated Section D_c

Experimentally this influence seems to depend on the value of the other parameters: [5] and [6] have found a destabilizing influence of an increase of D_c , while [7] has found the contrary. In the model, for the cases studied in [2], an increase in D_c causes f to decrease and is generally slightly destabilizing. However, the reverse influence is quite possible as an increase of D_c may also result in a stabilizing increase of ℓ_{of} . Thus, the model can help to explain an apparent disagreement between several experiments.

h. Influence of the Inclination of the Channel

Quantitative influence of this parameter is not available, but the possibility of oscillations in the same range of values of the parameters has been reported for an inclined test section [8] and even for a horizontal test section (several experiments, see for example [3]).

This possibility is predictable from the equations (8) (Appendix II), and is confirmed by the numerical results, even for a change of the sign of g . The practical range of values of g seems to be

$$0 \leq g \leq 1$$

i. Existence of Several Thresholds (for a monotonic variation of an operating parameter)

The existence of several thresholds, either from stability to oscillations or from oscillations to stability for a monotonic variation of an operating parameter (often power or flow rate) has been reported

by various authors (see for example [3]). As is predictable from the form of the terms T of equations (8), involving several trigonometric functions of the pulsation ω , the existence of several solutions has been found. For example, given the other twelve parameters of the system, several sets of values (μ_{∞}, ω) may satisfy the equations (8). These solutions do not always correspond to thresholds since (Section III.1), for a solution of (8) to be a threshold, it is necessary that all the other complex solutions of (1) have only negative real parts. However, several cases of actual multiple thresholds have been found in the numerical study of the model.

j. Influence of the Subcooling

This influence of subcooling is one of the most interesting points of this discussion. As far as the model is concerned, the distinction between geometry and operating parameters, and on the other hand, the strength of the influences of these parameters, leads to the conclusion that the logical plot for the oscillation thresholds is a plot of the reduced velocity μ_{∞} at the threshold versus the reduced subcooling s (Figure 2). This is a dimensionless generalization of the subcooling versus velocity plot, with power as a parameter, used by at least two authors [9], [10] starting from different points of view. Furthermore, the shape of the curves obtained with the model is the same as that obtained experimentally (for example by Gouse [9]). This is in agreement with observations made previously [7], [11] which state that an increase of subcooling has a destabilizing influence for low values of this subcooling s and a stabilizing influence above a given value of s . The use of

dimensionless parameters shows also that generally, low pressure facilities with water as a working fluid operate in the zone where an increase in the reduced subcooling has a stabilizing influence. It is contrary at high pressure and so it is difficult to compare the results obtained with the two kinds of facilities.

k. The above inventory of facts shows a very good agreement between the predictions of the model and the oscillation thresholds knowledge. As a matter of fact, they are the only well established trends available to the author and enabling the testing of the mechanism, which is the purpose of this paper (See Section I). (A few other known influences, for example those related to the heating wall, are obviously not included in the model and this has been discussed in part I). The observed agreement supports the conclusion that the density effect is actually the cause of oscillating behavior in most systems. This should not be interpreted as the impossibility of other mechanisms as already discussed in [1].

1. Complementary Observations

Two remarks are made here. They are not supported by a sufficient evidence to supplement the above considerations. Nevertheless, they can lead to a better understanding of the mechanism.

The first one concerns the effects of simulating boiling in a channel by injecting either steam or air through the porous wall in a flow of subcooled water, all other parameters being kept constant. This interesting experiment has been made by Jeglic et al [12]. Injecting steam leads to exactly the same behavior as in the corresponding heated experiment, while injecting air results always in a stable flow for the

range of parameters investigated. Such a result could have been foreseen very easily with the density effect mechanism. In this mechanism, the oscillation occurs, because of a coupling between the velocity and the density (see [1], Figure 4). The coupling is, of course, not affected in the replacement of a heat flux, (which creates in a given section a given quantity of steam at the wall), by the direct injection of the same quantity of steam. On the other hand, the injection of the same quantity of air weakens strongly the coupling. With steam, the coupling is thermodynamic and hydrodynamic, the thermodynamic being predominant (see the influence of subcooling). With air, the coupling is only hydrodynamic. It would be interesting to perform the same experiment without inlet subcooling because in this case the coupling will be the same in three cases (heating wall, water injection, air injection).

The second remark concerns the behavior of a heated channel, when in parallel with a small number of other channels. As seen in part I, this problem is much more complicated than the problem studied here, but a tentative assumption can be made. Owing to the unavoidable small differences between the channels, one of them is always "less" stable than the others. Assuming that these "more" stable channels behave as long as there are no oscillations, as a single bypass, the function ΔP giving the driving heat of the "less" stable channel, is known. Thus it is possible to obtain a threshold. This procedure was checked, using the density effect model, against results given in [13], concerning three parallel heated channels. In the oscillatory runs, one channel was always out of phase with the two others. Although thorough calculations were not made, preliminary results are encouraging: values of the reduced velocity at

the threshold μ_{00} decreases from 0.15 to 0.09 for values of subcooling s increasing from 1 to 4. This is well in the range expected for the density effect model, with the geometry under consideration. Obviously, this method has to be carefully investigated before any conclusion can be reached especially when other oscillatory regimes can be achieved (two channels out of phase with the other in steady state or three channels in phase [14]).

m. As a conclusive remark to the discussion, an important statement is to be made before going further in the evaluation of the density effect model. In order to enhance the physical meaning of the equations, the model is a simplified one and some phenomena which are believed to have a weak, but perhaps non-negligible influence are not taken into account. These influences will be checked hereafter for a given practical case, but as it is, the model has already proved to be useful and may be actually used in many cases involving qualitative considerations. A good example of this usefulness would be the improvement of stability of an existing system, evaluating the effects of various modifications by means of the model.

IV.3 Quantitative Comparison with Experiments

Once the reality of the density effect as a cause of the oscillatory behavior has been demonstrated, it is interesting from the design point of view, to know the influence of the simplifying assumptions. This influence is evaluated here for a particular set of experiments [3], chosen because these experiments are well known to the author.

In order to be able to use the numerical results already obtained in the qualitative comparison with experiments (Section IV.2), the values

of geometric parameters introduced in the calculations are approximated values. It is possible to do so because of the rather weak influence of these geometry parameters and because only an approximate evaluation of the quantitative value of the model is being sought. Owing to the good results obtained (see below), it would be interesting to make a more precise comparison including also other experiments. Nevertheless, it is felt that it is worthwhile to give the following comparison in its present form, for information purposes and as a necessary complement to the above study of the "density effect." The experiments were described in [3]. A preliminary discussion presented in [2] has shown the necessity of taking into account the local boiling phenomenon, to calculate the "actual" subcooling s . This is done here, as suggested in [2], by shifting the origin of enthalpy, which is the point when the density begins to follow the law (see [1]):

$$\frac{1}{\rho} = h + 1$$

Instead of taking $h=0$ at the bulk boiling inception point, this value is taken at a point $2/3 L_B$ downstream from the local boiling inception point. The local boiling inception point is defined as the point where the wall temperature reaches the saturation temperature and L_B is the length of channel where local boiling takes place. The coefficient $2/3$ is chosen more or less arbitrarily, to take into account the fact that as long as bubbles are small and located at the wall, they do not affect very much the density of the fluid. The geometry parameters for the experiments under consideration were:

$$l_{oi}=0.6 \quad l_{of}=0.8 \quad f=2.5 \quad \gamma=3.3 \quad q_d=0 \quad l_a \approx 2 \quad q_e=0$$

According to the influences of the parameters in the model, and as shown in [2], the thresholds in this case should be approximately the same as the threshold in the following case, which was numerically studied above.

$$l_{oi}=0 \quad l_{of}=0 \quad f=3 \quad \gamma=1 \quad q_d=0 \quad l_a=1 \quad q_e=0$$

The dimensionless parameters for the experimental runs are given in Table I and the comparison with the model is shown in Figure 2. Except for one point, the values of the parameter g are always

$$0 < g < 1$$

For this reason, the theoretical curves are given for $g = 0$ and $g = 1$. From Figure 2 and given the above approximations, the agreement may be considered as good, bringing further support to the density effect mechanism. Only 4 out of the 28 experimental points fall far from the theoretical predictions.

V Conclusions

The onset of the oscillatory behavior of heated channels is studied in terms of the "density effect," consequence of the physical relationship between density and enthalpy in the channel.

The basic equation, which was shown in a previous paper [1] to support the possibility of oscillations, is linearized and leads to the threshold equations. These threshold equations establish one relationship between the parameters of the model at the onset and also allow the calculation of the frequency of oscillations. The physical meanings of several delays involved by the equations are given and their importance emphasized.

The results of an extensive comparison between the predictions of the model and the available literature laws and trends are given. The general agreement which is found shows that the density effect is very often the cause of oscillatory behaviors.

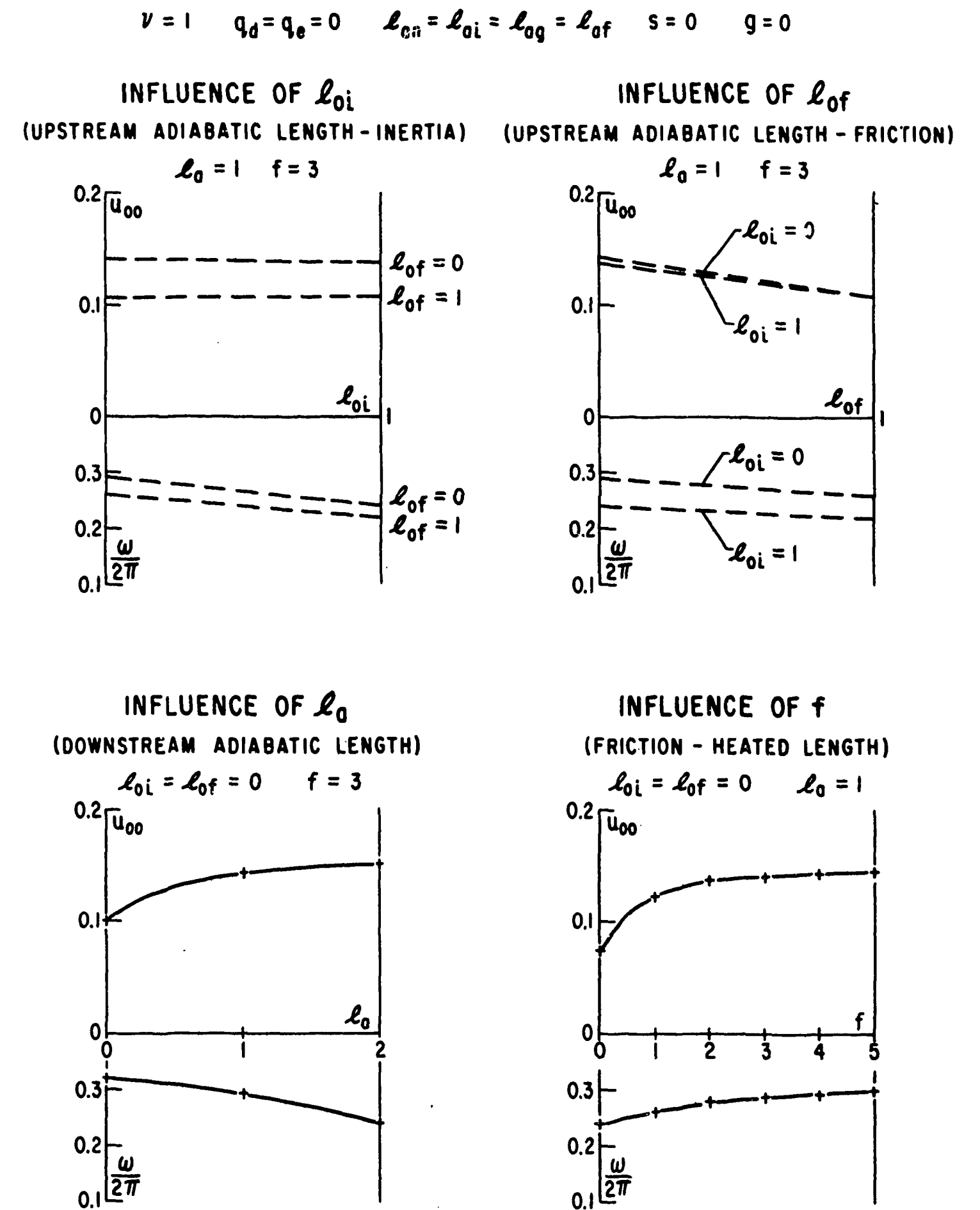


Figure 1 Density effect model--Influences of the geometry parameters

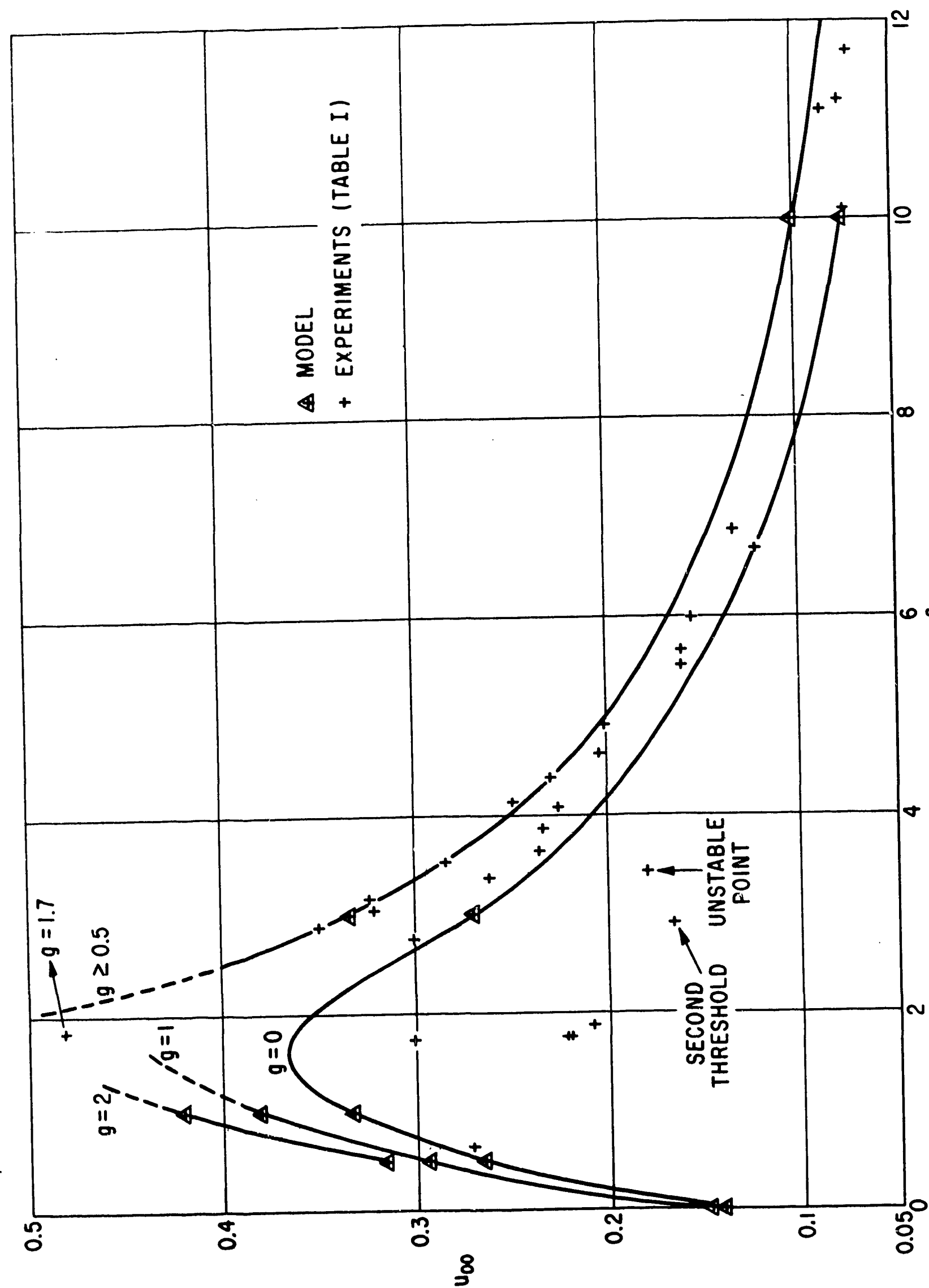


Figure 2 Density effect model--Influence of the parameters s and g and comparison with experiments

Table I

Values of the dimensionless parameters for the experimental points

Experimental Measurements				Dimensionless Parameters					
W W/cm^2	U_{00} m/s	$T_{sat}-T_0$ $^{\circ}C$	T s	μ_{00}	g	$C_p \frac{T_{sat}-T_0}{H_e}$ (1)	Δ	$\frac{\omega}{2\eta}$	$m-1$ (2)
86.5	1.52	6.2	2.6	0.271	0.374	1.32	0.65	0.082	3.0
126.3	1.32	31.7	10	0.161	0.175	6.75	5.66	0.015	0.6
62.8	1.22	15.6	5	0.300	0.710	3.32	2.75	0.059	0.6
105.1	1.10	30.7	8.6	0.161	0.254	6.53	5.50	0.020	0.7
156.2	1.38	38.4	4.8	0.136	0.115	8.17	6.87	0.025	0.5
95.1	1.39	22.9	6.5	0.225	0.310	4.87	4.08	0.030	0.4
151.7	1.52	33.7	8.8	0.155	0.122	7.16	5.98	0.014	0.5
155.9	2.05	26.3	6.3	0.203	0.115	5.60	4.61	0.019	0.3
40.7	1.27	10.3	5.2	0.481	1.690	2.19	1.83	0.087	0.3
69.5	0.99	11.7	6.2	0.220	0.580	2.49	1.76	0.043	2.8
99.0	1.93	11.2	-	0.301	0.286	2.38	1.73	-	1.6
187.4	2.18	21.4	-	0.179	0.080	4.55	3.42	-	2.2 (3)
147.3	3.09	18.2	2.6	0.323	0.129	3.87	3.17	0.048	0.0
189.1	3.04	23.7	1.7	0.248	0.078	5.04	4.14	0.058	0.0
102.7	1.48	12.1	-	0.222	0.266	2.57	1.76	-	2.8
82.5	1.11	12.5	2.3	0.208	0.412	2.66	1.86	0.097	3.0
123.8	1.89	21.0	2.0	0.235	0.183	4.47	3.64	0.075	0.6
125.2	1.89	22.1	-	0.233	0.179	4.70	3.86	-	0.4
102.9	2.33	16.2	2.7	0.349	0.265	3.45	2.86	0.067	0.0
125.2	2.30	19.9	2.7	0.283	0.179	4.24	3.51	0.055	0.0
157.3	2.34	24.8	2.1	0.229	0.113	5.28	4.38	0.056	0.0
110.9	2.31	17.3	2.3	0.321	0.228	3.68	3.04	0.073	0.1
79.9	1.35	19.0	11.0	0.261	0.439	4.04	3.37	0.021	0.5
109.1	1.42	27.2	3.3	0.201	0.235	5.79	4.90	0.051	0.1
94.6	1.02	18.2	15.0	0.166	0.314	3.87	2.90	0.013	3.1 (4)
95.0	0.75	37.1	6.7	0.122	0.311	7.89	6.68	0.029	1.5
85.7	0.42	60.2	7.8	0.076	0.381	12.8	11.2	0.028	2.0
89.1	0.49	59.4	-	0.085	0.353	12.6	11.1	-	0.7
82.0	0.38	62.5	8.8	0.071	0.417	13.3	11.7	0.026	2.5
54.5	0.26	54.6	9.5	0.074	0.942	11.6	10.1	0.036	3.4

- (1) This would be the value of s , assuming no local boiling.
- (2) This is the theoretical value of the actual exit quality.
- (3) Unstable point.
- (4) Second threshold.

Appendix I

Definitions of the 13 parameters of the model

Preliminary Remarks

1. The following relations result from the definitions given in [1]
2. All the quantities involved are made dimensionless by using the following fundamental units:

Mechanical quantities

- *length L_c (heated length)
- *density R_0 (inlet density)
- *time $\Theta_c = \frac{H_c R_0}{W}$ (characteristic time: see [1])

Thermal quantities

- *enthalpy H_c (characteristic enthalpy: see [1])

3. The driving heat characteristics (influence of the outside loop)

[1] is a known function.

$$\Delta P = \Phi(U_0) - J \frac{dU_0}{dt}$$

all quantities being dimensional.

$\Phi(U_0)$ is the steady state characteristic and J is the inertia of the outside loop. The reduced form of this equation is:

$$\Delta P = \frac{\Theta_c^2}{R_0 L_c^2} \Phi(U_0) - \frac{J}{R_0 L_c} \frac{dU_0}{dt} = \varphi(u_0) - l_{pi} \frac{du_0}{dt}$$

The parameter l_{pi} defined in [1] and used here in Section II is then:

$$l_{pi} = \frac{J}{R_0 L_c}$$

The parameter l_{pf} defined in Section II is

$$l_{pf} = -\frac{1}{2fu_w} \left(\frac{d\phi}{du_o} \right)_{u_{oo}} = -\frac{D_c}{\Lambda_o L_c} \frac{1}{R_o} \frac{1}{u_{oo}} \left(\frac{d\phi}{du_o} \right)_{u_{oo}}$$

$\Phi(u_o)$ is either a constant or is near of a parabolic function of u_o (see part I, Figure 2). Whence l_{pf} does not depend very much on u_{oo}

4. The parameter γ is defined by $\frac{dp \text{ friction mixture}}{dp \text{ friction liquid}} = 1 + \gamma h$ or using the Martinelli-Nelson parameter Φ_{eo}^2 and the true quality $x = \frac{H}{H_{eg}}$ $\Phi_{eo}^2 = 1 + \gamma x \frac{H_{eg}}{H_c}$ γ is assumed to be independent of x [1] and

is given by
$$\gamma = \frac{1}{x} \frac{H_c}{H_{eg}} (\Phi_{eo}^2 - 1)$$

10 "Geometry" Parameters

UAL (upstream adiabatic length) inertia reduced length (includes inertia of the outside loop).

$$l_{oi} = \frac{J}{R_o L_c} + \frac{1}{L_c} \sum_{UAL} \frac{L_i}{\sigma_i}$$

UAL friction reduced length (includes influence of steady state characteristic. May be slightly affected by operating conditions)

$$l_{of} = \frac{D_c}{\Lambda_o L_c} \left[\frac{-1}{R_o u_{oo}} \left(\frac{d\phi}{du_o} \right)_{u_{oo}} + \sum_{UAL} \left(\frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2} \right) + \sum_{UAL} \frac{\Lambda_i L_i}{D_i \sigma_i^2} \right]$$

Reduced friction in the CDHL (constant density heated length)

$$f = \frac{\Lambda_o}{2} \frac{L_c}{D_c}$$

VDHL (variable density heated length) friction parameter

$$\gamma = \frac{1}{x} \frac{H_c}{H_{eg}} (\Phi_{eo}^2 - 1)$$

Pressure drop parameter at the heated channel exit

$$q_h = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \psi_h}{\sigma_a^2} - 1 \right)$$

DAL (downstream adiabatic length) reduced normalized length

$$l_{an} = \frac{\sigma_a L_a}{L_c}$$

DAL inertia reduced length

$$l_{ai} = \frac{L_a}{\sigma_a L_c}$$

DAL gravity reduced length

$$l_{ag} = \frac{L_a \sin \varphi_a}{L_c \sin \varphi_c}$$

DAL friction reduced length

$$l_{af} = \frac{\Lambda_a}{\Lambda_o} \frac{D_c}{D_a} \frac{L_a}{L_c} \frac{1}{\sigma_a^2}$$

Pressure drop parameter at the DAL exit

$$q_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \psi_e}{\sigma_e^2} - \frac{1}{\sigma_a^2} \right)$$

3 Operating Parameters

Reduced "subcooling" (includes the effect of local boiling)

$$s = \frac{\text{Inlet "true" subcooling}}{H_c}$$

Reduced velocity (combines flow rate and power density)

$$u_{oo} = \frac{U_{oo} H_c R_o}{W L_c}$$

Reduced gravity

$$g = \frac{(H_c R_o)^2 G \sin \varphi}{L_c W^2}$$

Appendix II

The Thresholds Equations

Using the procedure described in Section III.1 leads to the following set of equations.

$$\begin{aligned} \text{Real Part} \quad 0 &= \sum_{n=1}^{n=g} T_n \\ \text{Imaginary Part} \quad \left(l_{oi} + u_{oo} s + u_{oo} h + \frac{l_{oi}}{m} \right) \omega &= \sum_{n=1}^{n=g} T_{in} \end{aligned} \quad (8)$$

with the following definitions (1)

$$T_1 + i T_{1i} = -2 f u_{oo} (l_o + \lambda_o)$$

$$T_2 + i T_{2i} = \frac{1}{\nu} \left[-(g + f u_{oo}^2) (\lambda - \lambda_o) + \frac{d\lambda}{dt} (A_{oo} + B_{oo}) \right]$$

$$T_3 + i T_{3i} = -g \frac{A_o - A_{oo}}{\nu}$$

$$T_4 + i T_{4i} = - \frac{A_1 - A_{1o}}{\nu}$$

$$T_5 + i T_{5i} = -f \left[\gamma \frac{A_2 - A_{2o}}{\nu} - (\gamma - 1) \frac{A_3 - A_{3o}}{\nu} \right]$$

$$T_6 + i T_{6i} = -q_d \frac{\Delta [p_d (u_o - \lambda + 1)^2]}{\nu}$$

origin (See [1])

friction (UAL CDHL)

inertia, gravity,
friction (moving
boiling boundary)

gravity VDHL

inertia VDHL

friction VDHL

inertia + friction
(Point D)

$$T_7 + i T_{17} = -g \frac{B_0 - B_{00}}{v}$$

gravity (DAL)

$$T_8 + i T_{18} = -f \frac{B_2 - B_{20}}{v}$$

friction (DAL)

$$T_9 + i T_{19} = -q_c \frac{\Delta [p_c(u_0 - \lambda + 1)^2]}{v}$$

inertia + friction
(Point E)

and (2):

$$k = \log m$$

$$y = \frac{\lambda m}{m u_{00}}$$

$$\cos \omega(s + k + y) = Z_1$$

$$\sin \omega(s + k + y) = Z_{11}$$

$$\cos \omega(s + y) = Z_2$$

$$\sin \omega(s + y) = Z_{12}$$

$$\cos \omega(s + k) = Z_3$$

$$\sin \omega(s + k) = Z_{13}$$

$$\cos \omega s = Z_4$$

$$\sin \omega s = Z_{14}$$

$$\cos \omega y = Z_5$$

$$\sin \omega y = Z_{15}$$

$$\frac{1}{1 + \omega^2} = D_1$$

$$\frac{1}{4 + \omega^2} = D_4$$

$$E_2 = m^2 D_1 D_4 [(\omega^2 - 2) Z_3 - 3 \omega Z_{13}] + (m D_1 - 2 D_4) Z_4 \\ + (m \omega D_1 + \frac{m}{\omega} - \omega D_4) Z_{14} - 2(m - 1)$$

$$E_{12} = -m^2 D_1 D_4 [3 \omega Z_3 + (\omega^2 - 2) Z_{13}] + (m \omega D_1 + \frac{m}{\omega} - \omega D_4) Z_4 \\ + (2 D_4 - m D_1) Z_{14} - \frac{m}{\omega}$$

$$E_3 = 2 m D_1^2 [(1 - \omega^2) Z_3 + 2 \omega Z_{13}] - 2 D_1 Z_4 [(1 - \omega^2) D_1 + k] \\ - \left[\frac{1}{\omega} + 4 \omega D_1^2 + 2 \omega k D_1 \right] Z_{14} + 2 k$$

$$E_{13} = 2 m D_1^2 [2 \omega Z_3 + (\omega^2 - 1) Z_{13}] - \left[\frac{1}{\omega} + 4 \omega D_1^2 + 2 \omega k D_1 \right] Z_4 \\ + 2 D_1 Z_{14} [(1 - \omega^2) D_1 + k] + \frac{1}{\omega}$$

$$E_7 = D_1 \left[Z_1 - \frac{Z_{11}}{\omega} \right] + \frac{D_1}{m \omega^2} [Z_2 + \omega Z_{12}] - D_1 \left(Z_3 - \frac{Z_{13}}{\omega} \right) \\ - \frac{D_1}{m \omega^2} (Z_4 + m Z_{14}) + \frac{1}{m \omega^2} (1 - Z_5)$$

$$E_{17} = -D_1 \left(\frac{Z_1}{\omega} + Z_{11} \right) + \frac{D_1}{m \omega^2} (\omega Z_2 - Z_{12}) + D_1 \left(\frac{Z_3}{\omega} + Z_{13} \right) \\ - \frac{D_1}{m \omega^2} (\omega Z_4 - Z_{14}) + \frac{Z_{15}}{m \omega^2}$$

With these notations, the terms of equations (8) read as follow (3)

- friction (UAL + CDHL)

$$T_1 = -2 f u_{00} (l_{0f} + u_{00} s)$$

$$T_{11} = 0$$

- moving boiling boundary

$$T_2 = -(g + f u_{00}^2) \frac{Z_4}{\omega} + (u_{00} k + \frac{\lambda_{ai}}{m}) (1 - Z_4)$$

$$T_{12} = (g + f u_{00}^2) \frac{1 - Z_4}{\omega} + (u_{00} k + \frac{\lambda_{ai}}{m}) Z_{14}$$

- gravity (VDHL)

$$T_3 = g D_1 \left(Z_3 - \frac{Z_{13}}{\omega} \right) - \frac{g D_1}{m} \left(Z_4 - \frac{Z_{14}}{\omega} \right) + \frac{g Z_{14}}{\omega}$$

$$T_{13} = -g D_1 \left(\frac{Z_3}{\omega} + Z_{13} \right) + \frac{g D_1}{m} \left(\frac{Z_4}{\omega} + Z_{14} \right) + \frac{g Z_4}{\omega} - \frac{g}{m \omega}$$

- inertia (VDHL)

$$T_4 = -m u_{\infty} D_1^2 \left[(1-\omega^2) Z_3 + 2\omega Z_{13} \right] + u_{\infty} k D_1 (Z_4 + \omega Z_{14}) + u_{\infty} D_1^2 \left[(1-\omega^2) Z_4 + 2\omega Z_{14} \right] + \frac{u_{\infty} Z_{14}}{\omega} - u_{\infty} k$$

$$T_{14} = -m u_{\infty} D_1^2 \left[2\omega Z_3 + (\omega^2 - 1) Z_{13} \right] + u_{\infty} k D_1 (\omega Z_4 - Z_{14}) + u_{\infty} D_1^2 \left[2\omega Z_4 + (\omega^2 - 1) Z_{14} \right] - \frac{u_{\infty}}{\omega} (1 - Z_4)$$

- friction (VDHL)

$$T_5 = f u_{\infty}^2 \left[\gamma E_3 + (\gamma - 1) E_3 \right]$$

$$T_{15} = f u_{\infty}^2 \left[\gamma E_{12} + (\gamma - 1) E_{13} \right]$$

- Point D

$$T_6 = -q_d u_{\infty} m D_1 (Z_3 + \omega Z_{13}) + q_d u_{\infty} D_1 Z_4 + q_d u_{\infty} Z_{14} \left(\omega D_1 + \frac{1}{\omega} \right) - 2 q_d u_{\infty}$$

$$T_{16} = -q_d u_{\infty} m D_1 (\omega Z_3 - Z_{13}) + q_d u_{\infty} Z_4 \left(\omega D_1 + \frac{1}{\omega} \right) - q_d u_{\infty} D_1 Z_{14} - \frac{q_d u_{\infty}}{\omega}$$

- Gravity (DAL)

$$T_7 = g \frac{l_{ag}}{l_{an}} E_7$$

$$T_{17} = g \frac{l_{ag}}{l_{an}} E_{17}$$

- Friction (DAL)

$$T_8 = \frac{f m u_{\infty} l_{af}}{\gamma} E_7 - 2 f u_{\infty} l_{af} \left(1 - \frac{Z_{14}}{\omega} \right)$$

$$T_{18} = \frac{f m u_{\infty} l_{af}}{\gamma} E_{17} - \frac{2 f u_{\infty} l_{af}}{\omega} (1 - Z_4)$$

- Point E

$$T_9 = q_e u_{\infty} \left[-m D_1 (Z_1 + \omega Z_{11}) + D_1 \left(Z_2 - \frac{Z_{12}}{\omega} \right) - 2 \left(1 - \frac{Z_{14}}{\omega} \right) + \frac{Z_{15}}{\omega} \right]$$

$$T_{19} = q_e u_{\infty} \left[-m D_1 (\omega Z_1 - Z_{11}) - D_1 \left(\frac{Z_2}{\omega} + Z_{12} \right) - \frac{2}{\omega} (1 - Z_4) + \frac{Z_{15}}{\omega} \right]$$

Bibliography

- 1 J. Bouré, "The Oscillatory Behavior of Heated Channels: An Analysis of the Density Effect, Part I The Mechanism (non-linear analysis)
- 2 J. Bouré, "Contribution à l'étude théorique des oscillations dans les canaux chauffants à ébullition," Thèse Docteur-Ingénieur-Centre d'Etudes Nucléaires, et Université, de Grenoble (France) June 1965
- 3 S. Fabrega, "Etude expérimentale des instabilités hydrodynamiques survenant dans les réacteurs nucléaires à ébullition, Thèse Docteur Ingénieur-Centre D'études Nucléaires et Université de Grenoble (France), Oct. 1964
- 4 E. H. Wissler, "The transient behavior of a two-phase natural circulation loop" PhD Thesis (June 1955)
- 5 I. E. Semenovker, "The occurrence of pulsations in the evaporation tubes of steam boilers," AEC Tr 4490 (original 1955)
- 6 S. Levy, E. S. Beckjord, "Hydraulic stability in a natural circulation loop with net steam generation at 1000 psia, GEAP 3215, July 1959
- 7 K. M. Becker et al, "Hydrodynamic instability and dynamic burnout in natural circulation two phase flow. An experimental and theoretical study," AE 156 (Sept. 1964)
- 8 S. Levy, C. L. Swan, "Performance, two phase pressure drop, burnout and hydraulic oscillation of an inclined test section with net steam generation at 1000 psia," GEAP 3228 (Rev. I), Aug. 1959
- 9 S.W. Gouse, C. D. Andrysiak, "Some observations on two-phase flow oscillations," Proc. Multiphase flow symp. Winter meeting ASME, Nov. 1963
- 10 M. N. Ozisik, T. Cebeci, "Dynamic stability of flow oscillations in a heated channel," ASME paper 65 HT 65.
- 11 Anonymous (Technische Hogeschool te Eindhoven) Final report on the research program on heat transfer and stability studies in boiling water reactors, WW 016 R70 (Feb. 1965)
- 12 F. A. Jeglic, T. M. Grace, "Onset of flow oscillations in forced flow subcooled boiling," NASA TN 2821 (1964)
- 13 J. E. Casterline, D. M. Lee, "Flow instability and critical heat flux in heated parallel channels," Oct. 1964, Topical report Contract AT(30-3)-187, Columbia University, N. Y.
- 14 S. W. Gouse, Personal communication (Dec. 1965)

Manuscrit reçu le 16 juin 1966