

CEA-R 3346

JACOB M. .-
Algèbre des courants.-
Commissariat à l'énergie atomique, Centre d'études
nucléaires de Saclay (Essonne), 1967.-
27 cm, 157 p.

CEA-R 3346 - JACOB Maurice

ALGEBRE DES COURANTS

Sommaire. - La première partie de ce cours (trois premiers chapitres), traite des généralités concernant l'algèbre de courants. Après une définition rapide des courants faibles et un rappel de leurs propriétés (hypothèse V-A, conservation du courant vecteur, règles de sélection, courant axial partiellement conservé, ...), l'on introduit l'algèbre de Gell-Mann $SU(3) \times SU(3)$, et discute les propriétés générales de l'Hamiltonien faible non leptonique.

Les chapitres IV à IX sont consacrés à des applications importantes de l'algèbre des courants. En premier lieu l'on démontre la formule de Adler et Weisberger, par deux méthodes différentes, celle dite du "repère de moment infini" et celle des singularités proches. Cette dernière est seule utilisée dans la suite. Puis, l'on traite successivement les

CEA-R 3346 - JACOB Maurice

CURRENT ALGEBRA

Summary. - The first three chapters of these lecture notes are devoted to generalities concerning current algebra. The weak currents are defined, and their main properties given (V-A hypothesis, conserved vector current, selection rules, partially conserved axial current, ...). The $SU(3) \times SU(3)$ algebra of Gell-Mann is introduced, and the general properties of the non-leptonic weak Hamiltonian are discussed.

Chapters IV to IX are devoted to some important applications of the algebra. First one proves the Adler-Weisberger formula, in two different ways, by either the infinite momentum frame, or the near-by singularities method. In the other chapters, the latter method is the only one used. The following topics are successively dealt with :

./.

problèmes suivants : désintégrations semi-leptoniques des mésons K et des hyperons, théorème de Kroll-Ruderman, désintégrations non leptoniques des mésons K et des hyperons (explication de la règle $\Delta I = 1/2$), théorèmes de basse énergie concernant les processus avec émission ou absorption d'un méson π ou d'un photon, relations de super-convergence, et enfin, réactions dites "neutrino".

1967

164 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

semi leptonic decays of K mesons and hyperons, Kroll-Ruderman theorem, non leptonic decays of K mesons and hyperons ($\Delta I = 1/2$ rule), low energy theorems concerning processes with emission (or absorption) of a pion or a photon, super-convergence sum rules, and finally, neutrino reactions.

1967

164 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

ALGÈBRE DES COURANTS

par

Maurice JACOB

Rapport CEA - R 3346

- Rapport CEA-R 3346 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Service de Physique Théorique

ALGÈBRE DES COURANTS

par

Maurice JACOB

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.

- Septembre 1967 -

Ce cours sur l'Algèbre des Courants a été présenté à l'Institut des Sciences et Techniques Nucléaires au cours du premier semestre de l'année 1966-67 . Il faisait suite à un cours sur les interactions faibles donné durant l'année 1965-66 . Ces cours s'adressaient avant tout aux jeunes chercheurs des groupes de physique théorique (D.Ph.T) et de physique expérimentale de haute énergie (D.Ph.P.E) du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay et son niveau correspond à celui d'un cours à option de 3ème cycle.

Les notes de ce cours ont été rédigées et mises sous la forme présente par Messieurs C. Itzykson et G. Mahoux du Service de Physique Théorique de Saclay mais en fait, ce cours n'est qu'un des aspects d'une étude de l'Algèbre des courants que nous avons entreprise en commun, à Saclay Itzykson, Mahoux et moi-même au cours des 18 derniers mois, et qui nous a conduit en particulier à développer la méthode des singularités proches qui est utilisée couramment ici. Il correspond lui aussi à cette oeuvre d'équipe à laquelle j'ai été très heureux de participer avec eux.

Maurice JACOB, Saclay, Mars 1967

P L A N

I - INTRODUCTION	1
II - PROPRIETES GENERALES DES COURANTS FAIBLES :	13
Courant axial conservé partiellement (CACP)	
Courant axial à divergence dominée par le pion (CADDP)	
III - ALGEBRES DES COURANTS :	25
Bases théoriques et techniques, modèle des quarks	
IV - FORMULE DE ADLER-WEISBERGER :	39
a) Méthode du "repère de moment infini"	39
b) Méthode des singularités proches	47
V - APPLICATION AUX DESINTEGRATIONS SEMI-LEPTONIQUES :	61
Hypérons	61
Mésons K	64
Théorème de Kroll-Ruderman	69
VI - APPLICATION AUX DESINTEGRATIONS NON LEPTONIQUES :	72
Mésons K : explication de la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$	74
Hypérons	82
VII - THEOREME DE BASSE ENERGIE :	102
Réactions avec production de méson π	
et relations entre désintégrations radiatives et non radiatives	
VIII - RELATIONS DE SUPER-CONVERGENCE :	120
Combinaison des relations de l'algèbre des courants et des	
contraintes imposées par un comportement asymptotique de Regge	
IX - APPLICATION AUX REACTIONS NEUTRINO	132
APPENDICES	
A - NOTATIONS ET CONVENTIONS DIVERSES	
B - ALGEBRE DE SU(3)	

INTRODUCTION

Les symétries jouent un rôle extrêmement important en physique des hautes énergies. La validité de larges symétries permet en effet de simplifier grandement la description des interactions entre particules, dont la variété peut paraître gênante dans notre recherche d'un niveau élémentaire à grande simplicité. Leur rôle est tel qu'il est tentant d'introduire des symétries qui ne sont que très approchées, mais dont certaines conséquences se maintiennent quand même dans le monde réel. La symétrie unitaire est une symétrie brisée, mais toutes ses implications sont semble-t-il qualitativement, et même à une bonne approximation, quantitativement vérifiées. Il est donc naturel de supposer que les interactions fortes admettent cette symétrie, mais que des interactions plus faibles, qui ne la satisfont pas, sont aussi présentes, de sorte que cette symétrie, bien que manifeste, n'apparaît plus comme exacte. Dans ce cas cependant, ces interactions moyennement fortes ne se prêtent a priori pas au calcul des perturbations comme c'est le cas des corrections électromagnétiques à l'indépendance de charge, et il est difficile de dépasser un niveau de prédiction semi-quantitatif.

Pour cela une nouvelle méthode de calcul introduite par Gell-Mann, apparaît comme très fructueuse. Elle repose sur les propriétés algébriques des opérateurs de charge, et porte le nom d'algèbre des courants.

Si la symétrie unitaire $SU(3)$ était une symétrie exacte, on pourrait, comme nous le verrons en détail, introduire à l'aide du théorème de Noether, 8 courants conservés. Les charges, associées à ces courants (les intégrales sur tout l'espace des composantes de temps des densités de courant correspondantes) seraient des opérateurs hermitiques, indépendants du temps, qui, en

tant que générateurs du groupe de symétrie, satisferaient les relations algébriques caractéristiques de l'algèbre de SU(3) :

$$[Q^i, Q^j] = i f_{ijk} Q^k \quad , \quad (I.1)$$

où les f_{ijk} sont les constantes de structure de SU(3). Si la symétrie est imparfaite, et c'est le cas en pratique, les 8 courants considérés ne sont plus tous conservés et les 8 charges associées ne sont plus toutes indépendantes du temps. Les relations (I.1) peuvent cependant toujours être vérifiées. Si elles sont valables pour une valeur particulière du temps elles le restent, comme il est aisé de le vérifier, quel que soit le temps. Ceci reste vrai, alors qu'une relation comme :

$$Q^i |m\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|Q^i|m\rangle \quad , \quad (I.2)$$

où les états m et n appartiennent tous aux même multiplet de SU(3), valable en symétrie exacte, ne l'est plus en symétrie brisée.

Si la symétrie est imparfaite, certaines relations (I.1) entre opérateurs peuvent donc, malgré tout, rester exactes. Ce sont les seuls restes quantitatifs de la symétrie. De telles relations entre opérateurs sont extrêmement utiles, car elles conduisent à des règles de sommes exactes, en prenant les éléments de matrice des deux membres entre états physiques, qui ne sont plus attachés à des multiplets particuliers de SU(3) :

$$\sum_n \langle B|Q^i|n\rangle \langle n|Q^j|A\rangle - \langle B|Q^j|n\rangle \langle n|Q^i|A\rangle = i f_{ijk} \langle B|Q^k|A\rangle \quad . \quad (I.3)$$

Ces règles de somme se prêtent relativement facilement à une comparaison avec l'expérience, car les éléments de matrice introduits sont ceux qui

apparaissent dans les interactions faibles semi-leptoniques et électromagnétiques des hadrons, qui sont toutes de la forme courant-courant. Même si l'on ne sait encore que peu de choses sur les interactions fortes, la symétrie impose aux éléments de matrice des opérateurs de charge des relations non linéaires comme (I.3), qui complètent ainsi les relations de dispersion linéaires, que peuvent satisfaire les fonctions invariantes, qui apparaissent dans la décomposition de leurs éléments de matrice sur une base de vecteurs particulière.

Une autre attitude consiste à regarder une symétrie brisée comme un accident, c'est-à-dire comme une remarque extrêmement fructueuse pour l'étude de certains états, mais sans que les propriétés observées traduisent une invariance globale des équations dynamiques. C'est sans doute le cas de la symétrie SU(6) qui est très bien adaptée à la description des niveaux hadroniques les plus bas. En écrivant la relation (I.3), nous supposons au contraire qu'il existe un niveau d'approximation où cette relation est exacte en tant qu'égalité entre opérateurs. Elle demeure alors exacte, même si ces opérateurs ne satisfont plus à toutes les propriétés associées à la symétrie exacte.

Pouvant ainsi calculer, et cela de façon parfaitement définie, à l'aide d'une symétrie brisée, il est tentant de prendre la symétrie la plus vaste qu'il s'avère fructueux de considérer. Les opérateurs de charge introduits sont ceux qui entrent en jeu dans le calcul des interactions électromagnétiques et des interactions faibles vectorielles, qui font intervenir tous les courants hadroniques de composantes unitaires 3,8, 1,2 et 4,5. Les interactions faibles faisant aussi intervenir des courants axiaux, on peut introduire 8 courants axiaux j_μ^{A1} ($1 = 1 \dots 8$) à côté des 8 courants vecteurs j_μ^1 ($1 = 1 \dots 8$) ainsi que 8 charges axiales hermitiques :

$$Q_1^A = \int j_0^{A1}(x) d^3x \quad ,$$

et postuler des relations de commutation pouvant fournir un système fermé par commutation, ne faisant intervenir que les opérateurs Q et Q^A . Dans un modèle particulièrement simple de théorie des champs (le modèle des quarks), on peut calculer explicitement tous les commutateurs, et vérifier que les relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j] &= i f_{ijk} Q_k \\ [Q_i, Q_j^A] &= i f_{ijk} Q_k^A \\ [Q_i^A, Q_j^A] &= i f_{ijk} Q_k \end{aligned} \quad (I.4)$$

Elles nous donnent l'algèbre du groupe $SU(3) \times SU(3)$, qui admet comme sous groupe le groupe $SU(3)$ de la symétrie unitaire.

C'est un groupe compact qui peut donc entraîner une structure en multiplets finis des hadrons. Les courants axiaux ne sont pas conservés (ils ne le seraient que dans des modèles où, soit la masse des quarks serait nulle, soit la masse des mésons pseudo-scalaires serait nulle), et on ne s'attend pas à ce que cette structure soit manifeste. Néanmoins la symétrie $SU(3) \times SU(3)$, considérée en tant que relations exactes entre opérateurs (I.4), semble extrêmement intéressante à introduire. Les relations (I.4) constituent la seule algèbre associée à un groupe compact (multiplets de dimensions finies), ne faisant intervenir que les opérateurs de charge. Le succès de la relation d'Adler-Weisberger a suscité un très grand intérêt pour l'étude des conséquences des relations (I.4), et les multiples accords très satisfaisants obtenus justifient l'introduction du groupe de symétrie $SU(3) \times SU(3)$. En fait les relations (I.4) permettent, comme nous le verrons en détail, de résumer sous une forme particulièrement dense un grand nombre de propriétés reconnues des courants électromagnétique et faibles.

L'objet de ce cours se limite à l'étude de ces conséquences. Après une exposition des bases théoriques et techniques nécessaires, nous présenterons

les différentes applications de cette algèbre des courants aux interactions semi-leptoniques, mais aussi aux interactions faibles non-leptoniques, et à de nombreux cas ne faisant en fait intervenir que les interactions fortes.

Il est possible de réécrire les relations (I.4) en terme de densités de courants :

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0) [j_0^i(x), j_0^j(y)] &= i f_{ijk} j_0^k(x) \delta_4(x-y) \\ \delta(x_0 - y_0) [j_0^i(x), j_0^{Aj}(y)] &= i f_{ijk} j_0^{Ak}(x) \delta_4(x-y) \\ \delta(x_0 - y_0) [j_0^{Ai}(x), j_0^{Aj}(y)] &= i f_{ijk} j_0^k(x) \delta_4(x-y) \end{aligned} \quad (I.5)$$

Ces relations redonnent les relations (I.4) par double intégration sur d_3x et d_3y . Elles impliquent cependant beaucoup plus, car des tri-divergences pourraient être introduites et s'éliminer par intégration. Les relations (I.5) sont vraies dans le modèle des quarks et pourraient néanmoins posséder un domaine de validité beaucoup plus vaste que le cadre de ce modèle. Elles sont, bien sûr, beaucoup plus riches que les relations (I.4), qui ne font intervenir que les charges totales. Leurs éléments de matrice considérés dans des relations semblables à (I.3), font intervenir les charges, mais aussi tous leurs moments. On a en fait affaire à une algèbre infinie, mais qui peut être très fructueuse à introduire, si les règles de somme peuvent être saturées par un ensemble infini (mais discret) de résonances. La considération particulière des composantes de temps des densités de courant, par opposition aux composantes d'espace, est délicate à justifier en fonction de l'invariance relativiste. Cependant un système particulier, celui de l'impulsion infinie, peut servir à définir les composantes de temps d'une façon satisfaisante, étant donné, comme nous le verrons, les simplifications fondamentales qu'il permet d'introduire. Ce domaine est encore en plein développement et nous ne l'aborderons pas dans ce cours.

Il est possible de généraliser (I.5) en introduisant une composante d'espace à côté d'une composante de temps, et d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta(x_0, y_0) [j_0^1(x), j_\mu^j(y)] &= i f_{1jk} j_\mu^k(x) \delta_4(x-y) \\ \delta(x_0 - y_0) [j_0^1(x), j_\mu^{Aj}(y)] &= i f_{1jk} j_\mu^{Ak}(x) \delta_4(x-y) \\ \delta(x_0 - y_0) [j_0^{Ai}(x), j_\mu^{Aj}(y)] &= i f_{1jk} j_\mu^k(x) \delta_4(x-y) \end{aligned} \quad (I.6)$$

ce qui revient à généraliser aux courants, les propriétés introduites pour les charges. Les tri-divergences sont alors inévitables (ce sont les termes de Schwinger). Ces relations sont cependant valables dans le modèle des quarks, et nous introduirons souvent les hypothèses de départ de l'algèbre des courants sous cette forme (I.6). Néanmoins, nous ne considérerons les éléments de matrice de ces opérateurs qu'à la limite de l'impulsion transférée nulle, ce qui revient en fait, comme nous le verrons, à n'utiliser que la forme (I.4) beaucoup moins restrictive. Nous n'introduirons (I.6) que par commodité de calcul, les relations (I.4) constituant le postulat. Ceci limite tous les résultats obtenus, à des relations de basse énergie, faisant intervenir des amplitudes en un point non physique (une quadri-impulsion nulle), et aussi parfois la dérivée de ces amplitudes en ce point. Cependant, le nombre et la variété de ces résultats, qui n'ont jusqu'à présent jamais été trouvés en défaut (l'accord est au pire de l'ordre de 10 %, limite qu'il semble de toute façon difficile à dépasser à cause des hypothèses annexes qu'il est, comme nous le verrons, nécessaire d'introduire parfois), et qui ne reposent que sur l'algèbre des charges $SU(3) \times SU(3)$, semble justifier un cours, qui se limite ainsi à cette forme particulière et restreinte de l'algèbre des courants. Nous n'aborderons pas l'étude des algèbres faisant intervenir les intégrales sur tout l'espace des composantes d'espace et de temps des courants vecteurs et axiaux $U(6) \times U(6)$, ni les intégrales de toutes les quantités bilinéaires covariantes introduites dans le modèle des quarks : $U(12)$. L'introduction de l'algèbre $U(6) \times U(6)$ permet de dépasser les relations de basse énergie,

établies pour l'effet Compton. $SU(6)$ statique et $SU(6)_W$ correspondent à deux sous-groupes particuliers. Leurs conséquences sont très intéressantes à étudier mais l'apparition de termes de Schwinger introduit des complications qui n'existent pas dans l'étude des conséquences de $SU(3) \times SU(3)$. Nous n'aborderons pas ce sujet dans ce cours. Les différentes questions que nous étudierons peuvent être organisées selon le plan donné avant cette introduction.

Pour illustrer le genre d'information que l'on peut obtenir de l'algèbre des courants, considérons les éléments de matrice de (I.1) entre des états à un nucléon, d'impulsions p et p' , et introduisons dans le premier membre, une somme sur des états intermédiaires n :

$$\sum_n \langle p' | I_1(0) | n \rangle \langle n | I_j(0) | 0 \rangle - \langle p' | I_j(0) | n \rangle \langle n | I_1(0) | p \rangle = i \varepsilon_{ijk} \langle p' | I_k(0) | p \rangle. \quad (I.7)$$

Dans la limite de la symétrie parfaite, les seuls états intermédiaires qui donnent une contribution non nulle, sont les états à un nucléon*. Dans le cas de la symétrie brisée, d'autres états interviennent dans la somme du premier membre. Leur contribution introduit quantitativement dans les calculs, la violation de la symétrie.

L'équation (I.7) est une équation non linéaire dans les éléments de matrice de $I_1(0)$ entre états à un nucléon :

$$\langle p' | I_1(0) | p \rangle = \int_{x_0=0} d_3x \langle p' | j_0^1(x) | p \rangle. \quad (I.8)$$

* L'opérateur de spin isotopique I_1 , générateur du groupe de symétrie $SU(2)$ associé à l'indépendance de charge, n'a d'éléments de matrice non nuls, qu'entre états qui appartiennent au même multiplet.

Introduisons la fonction de vertex représentée par le graphe (figure(I,1)):

$$\int d_4x e^{-ikx} \langle p' | j_\mu^1(x) | p \rangle = (2\pi)^4 \delta_4(p' - p - k) \langle p' | j_\mu^1(0) | p \rangle . \quad (I.9)$$

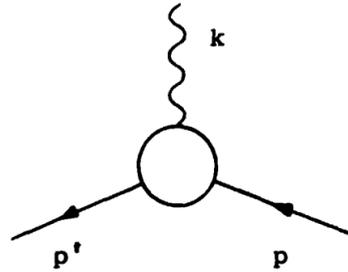


Figure (I,1)

L'invariance relativiste permet d'écrire :

$$\langle p' | j_\mu^1(0) | p \rangle = \bar{u}(p') \{ \gamma_\mu F^1(t) + \dots \} u(p) \quad t = k^2 = (p' - p)^2 , \quad (I.10)$$

ce qui définit les facteurs de forme $F^1(t), \dots$. Ces facteurs de forme sont des fonctions analytiques de t dans un plan coupé de $4\mu^2$ à l'infini (figure(I,2)), μ étant la masse du méson π .

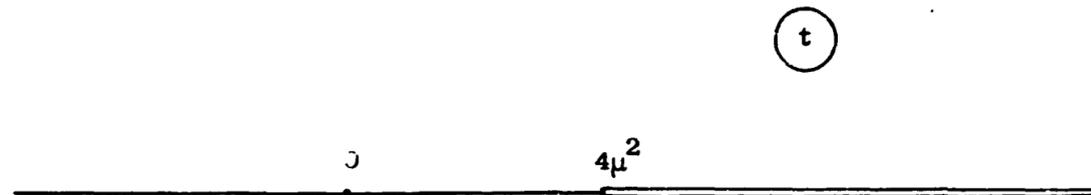


Figure (I,2)

Nous écrirons, ce qui est légitime dans ce cas, une relation de dispersion une fois soustraite pour F^1 :

$$F^1(t) = F^1(0) + \frac{t}{\pi} \int \frac{\text{Im } F^1(t') dt'}{t'(t'-t-i\epsilon)} . \quad (I.11)$$

L'équation (I.7) apparaît finalement comme une relation non linéaire dans les facteurs de forme $F^1(t), \dots$. Elle permet ainsi de déterminer les constantes de soustraction $F^1(0), \dots$. Il est aisé de vérifier (exercice) que (I.5, 9 et 10) entraînent $F(0) = 1$.

A côté du courant vecteur $j_\mu^1(x)$, le courant axial $j_\mu^{A1}(x)$ est d'une importance particulière. La "charge axiale" qui lui est associée, est définie par :

$$Q_1^A(t) = \int_{x_0=t} d_3x j_0^{A1}(x) .$$

Suivant Gell-Mann, nous avons postulé les relations de commutation suivantes :

$$[Q_1(t), Q_j^A(t)] = i \epsilon_{1jk} Q_k^A(t) . \quad (I.12)$$

$$[Q_1^A(t), Q_j^A(t)] = i \epsilon_{1jk} Q_k(t) . \quad (I.13)$$

La relation (I.12) exprime simplement le fait que le courant axial $j_\mu^{A1}(x)$ est un vecteur de spin isotopique. En revanche, la relation (I.13) est tout à fait nouvelle. Elle n'est pas vérifiée, par exemple, dans un modèle à Lagrangien, avec seulement un champ de nucléons et un champ de pions, mais l'est dans le modèle des quarks. Elle a joué un rôle très important dans le développement des applications de l'algèbre des courants, car c'est en partant de cette relation de commutation qu'Adler et Weisberger ont calculé la constante de renormalisation du courant axial G_A/G_V , en fonction des sections efficaces $\pi^+ p$ et $\pi^- p$. Ce fut le premier succès de l'algèbre des courants (en 1965,

soit trois ans après le travail de Gell-Mann sur ce sujet), et il donna une impulsion décisive à ces nouvelles techniques de calcul. Précisons que ces techniques ont énormément bénéficié des travaux de Fubini et Furlan.

Le courant axial $j_{\mu}^{A1}(x)$ n'est pas conservé : $\partial^{\mu} j_{\mu}^{A1}(x) \neq 0$. Les éléments de matrice de sa divergence entre deux états d'impulsion p et p' , sont des fonctions analytiques de la variable $t = (p' - p)^2$, avec, comme singularités, un pôle à $t = \mu^2$ ($\mu =$ masse du pion), et une coupure de $9\mu^2$ à $+\infty$:

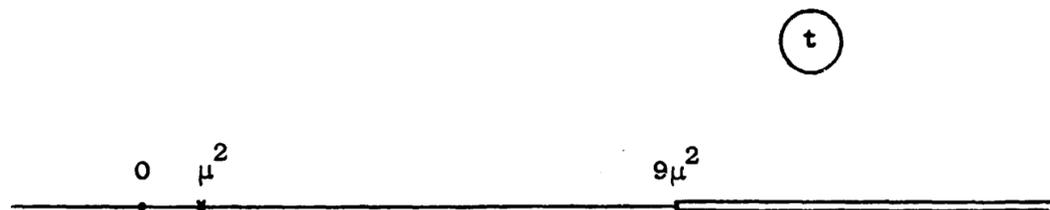


Figure (I,3)

L'hypothèse du courant axial conservé partiellement (CACP), que l'on traduit encore par l'hypothèse du courant axial à divergence dominée par le pion (CADDP), nous dit que la contribution de la coupure est négligeable devant celle du pôle du pion à $t = \mu^2$, dans un voisinage de ce pôle s'étendant jusqu'à l'origine $t = 0$. On écrit encore, ce qui est équivalent, que la divergence du courant axial est proportionnelle au champ du pion :

$$\partial^{\mu} j_{\mu}^{A1}(x) = f_{\pi} \mu^2 \phi^1(x) \quad , \quad (I.14)$$

f_{π} est relié au temps de vie des pions chargés .

Cette hypothèse permet alors d'associer directement l'opérateur de charge axiale Q_1^A à la création ou la destruction d'un pion π_1 . Nous verrons que ceci nous permet de relier entre eux des processus leptoniques qui ne

diffèrent que par la production d'un pion, tels que les désintégrations faibles $K \rightarrow \mu\nu$ et $K \rightarrow \pi\mu\nu$, ou $K \rightarrow \pi e\nu$ et $K \rightarrow 2\pi e\nu$. Dans le cas des désintégrations non leptoniques, l'amplitude s'écrit comme l'élément de matrice de l'Hamiltonien faible H_W entre les états initial et final. Moyennant une hypothèse "V-A" généralisée, s'exprimant par le fait que $(Q_1 - Q_1^A)$ commute avec H_W , nous pourrions encore relier entre eux des processus ne différant que par la production d'un pion. En particulier, cela nous permettra d'interpréter la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ en reliant les amplitudes $K \rightarrow 2\pi$ et 3π , à l'élément de matrice de l'Hamiltonien faible entre un K_1^0 et le vide $\langle 0 | H_W | K_1^0 \rangle$, qui ne fait intervenir que la partie $\Delta I = \frac{1}{2}$ de H_W .

De très nombreuses publications sur l'algèbre des courants ont paru au cours des deux dernières années. Il n'est pas question ici de les citer toutes. Nous n'en donnerons donc qu'un petit nombre à la fin de chaque chapitre. Elles permettront d'approfondir les questions présentées dans ce cours, et serviront de guide à l'ensemble de la littérature sur ce sujet. Nous prions donc de nombreux auteurs de nous excuser du choix, nécessairement arbitraire qui a été fait ici.

Parmi les articles ayant introduit puis "lancé" l'algèbre des courants, il faut citer :

GELL-MANN : Phys. Rev. 125, 1067 (1962)

Physics 1, 63 (1964)

le second article est plus technique que le premier.

ADLER : Phys. Rev. Letters, 14, 1051 (1965).

WEISBERGER : Phys. Rev. Letters, 14, 1047 (1965) .

FUBINI et FURLAN : Physics 1, 229 (1965) .

Nous n'abordons pas les conséquences de $SU(6) \times SU(6)$ que le lecteur intéressé pourra trouver exposées dans les articles suivants :

CABIBBO et RADICATTI : Physics Letters, 19, 697 (1966)

BEG : Phys. Rev., 150, 1276 (1966)

BJORKEN : Phys. Rev., 148, 1467 (1966)

Les théorèmes de basse énergie, généralisées dans ces articles, sont exposés dans :

LOW : Phys. Rev., 96, 1428 (1954)

GELL-MANN et GOLDBERGER : Phys. Rev. 96, 1433 (1954)

Nous n'abordons pas non plus l'étude des relations de commutation entre densités de courant, au sujet desquelles on peut se référer à :

DASHEN et GELL-MANN : Phys. Rev. Letters, 17, 340 (1966)

GELL-MANN : Erice 1966, Notes de cours.

PROPRIETES GENERALES DES COURANTS FAIBLES

1) - Introduction des courants faibles :

Les désintégrations leptoniques et semi-leptoniques sont bien décrites par un hamiltonien faible phénoménologique de la forme courant-courant :

$$\pi = \frac{G}{\sqrt{2}} J_{\mu}^{+} J^{\mu}, \quad (II.1)$$

où G est la constante de couplage faible :

$$G \sim (1.023 \pm 0.002) \frac{10^{-5}}{M_p^2}, \quad (II.2)$$

et où le courant J_{μ} se décompose en deux parties, l'une leptonique J_{μ}^{lept} et l'autre hadronique J_{μ}^{hadr} :

$$J_{\mu} = J_{\mu}^{lept} + J_{\mu}^{hadr}. \quad (II.3)$$

Le courant leptonique J_{μ}^{lept} est bien connu. Son expression en fonction des champs de leptons est :

$$J_{\mu}^{lept} = \bar{\Psi}_e \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \Psi_{\nu_e} + \bar{\Psi}_{\mu} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \Psi_{\nu_{\mu}}. \quad (II.4)$$

Rappelons brièvement les propriétés essentielles de J_{μ}^{lept} ainsi écrit :

- a) symétrie entre l'électron et le muon.
- b) existence de deux neutrinos, l'un ν_e associé à l'électron, l'autre ν_{μ} associé au muon.
- c) couplage V-A : la parité est violée "au maximum". Le neutrino a une hélicité négative, l'antineutrino une hélicité positive.

La grande simplicité du courant faible leptonique ne se retrouve pas en apparence dans le courant hadronique. Ceci est dû aux interactions fortes qui viennent compliquer le schéma simple qui convient aux leptons. On est amené à écrire :

$$j_{\mu}^{\text{hadr}} = \cos\theta \left\{ (j_{\mu}^1 + i j_{\mu}^2) + (j_{\mu}^{A1} + i j_{\mu}^{A2}) \right\} + \sin\theta \left\{ (j_{\mu}^4 + i j_{\mu}^5) + (j_{\mu}^{A4} + i j_{\mu}^{A5}) \right\}, \quad (\text{II.5})$$

où θ est l'angle de Cabibbo : $\theta = 0,245 \pm 0,010$ radian, et où les indices 1,2,4 et 5 sont des indices de spin unitaire.

Sous cette forme j_{μ}^{hadr} est séparé en un courant conservant l'étrangeté (terme en $\cos\theta$) et un courant changeant l'étrangeté d'une unité (terme en $\sin\theta$). Chacun d'eux se sépare à son tour en un courant vecteur et un courant axial. Dans nos notations, j_{μ}^1 est le courant vecteur, j_{μ}^{A1} le courant axial, d'indice de spin unitaire 1. Ainsi par exemple, $j_{\mu}^1 + i j_{\mu}^2$ est le courant vecteur de charge positive, d'hypercharge nulle, $j_{\mu}^{A4} + i j_{\mu}^{A5}$ le courant axial de charge positive, d'hypercharge + 1.

Il est souvent utile d'avoir des expressions de j_{μ}^1 et j_{μ}^{A1} en termes de champs élémentaires, analogues à (II.4). Parmi les différents modèles de théorie des champs à Lagrangien qui permettent d'écrire explicitement j_{μ}^1 et j_{μ}^{A1} , nous retiendrons plus particulièrement le modèle des quarks.

2) - Modèle des quarks :

Rappelons tout d'abord les nombres quantiques des trois quarks p, n et λ :

	I	I_3	Y	Q	B	Spin
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
n	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
λ	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

I et I_3 sont les nombres quantiques d'isospin, Y l'hypercharge, Q la charge électrique, et B le nombre baryonique.

Les quarks p et n forment un doublet de spin isotopique, tandis que λ est un singlet d'isospin.

Remarquons que la charge électrique est donnée par la formule de Gell-Mann - Nishijima :

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{B + S}{2}. \quad (\text{II.6})$$

Les quarks sont des fermions de spin $\frac{1}{2}$. En conséquence, nous les décrirons par des champs de Dirac à quatre composantes $\Psi_p(x)$, $\Psi_n(x)$ et $\Psi_{\lambda}(x)$, satisfaisant des relations d'anticommution. Il est commode d'introduire le "spineur unitaire" à 3 composantes $q(x)$:

$$q(x) = \begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \Psi_n(x) \\ \Psi_{\lambda}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Les relations d'anticommution canoniques s'écrivent alors :

$$S(x_0 - y_0) \left[q_{\alpha}(x), q_{\beta}^{\dagger}(y) \right]_{+} = \delta_{\alpha\beta} \delta_4(x-y) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (\text{II.8})$$

Avec Gell-Mann^[1], introduisons les huit matrices 3×3 λ_i de l'algèbre de SU(3) (voir appendice B). Les trois premières λ_1 , λ_2 et λ_3 , sont les représentations des trois composantes de l'isospin. Elles se réduisent en effet aux matrices usuelles de Pauli dans le sous-espace du doublet d'isospin (p,n), et à zéro dans le sous-espace du singlet d'isospin λ . Les matrices λ_4 et λ_5 jouent dans les sous-espaces (p, λ) et (n), les mêmes rôles que λ_1 et λ_2 dans (p,n) et (λ). Il en est de même pour les matrices λ_6 et λ_7 dans (n, λ) et (p). Quant à la matrice λ_8 , elle représente, à un facteur $\sqrt{3}$ près, l'hypercharge : $Y = \lambda_8 / \sqrt{3}$.

Nous pouvons maintenant construire les courants vecteur et axial :

$$j_{\mu}^1(x) = \bar{q}(x) \gamma_{\mu} \frac{\lambda_1}{2} q(x) \quad (\text{II.9})$$

$$j_{\mu}^{A1}(x) = \bar{q}(x) \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{\lambda_1}{2} q(x) . \quad (\text{II.10})$$

Ils possèdent l'importante propriété, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant, de former deux octets à spin unitaire.

Revenons alors au courant faible hadronique donné par (II.5), et explicitons-le en termes de quarks. On trouve aisément :

$$J_{\mu}^{\text{hadr}} = \cos\theta \bar{\Psi}_p \gamma_{\mu} (1+\gamma_5) \Psi_n + \sin\theta \bar{\Psi}_p \gamma_{\mu} (1+\gamma_5) \Psi_{\lambda} , \quad (\text{II.11})$$

qui est à comparer avec (II.4).

Cette expression de J_{μ}^{hadr} amène les remarques suivantes :

a) Courant vecteur conservé (CVC) : En première approximation $\cos\theta = 1$. L'expérience montre que la constante de couplage vecteur, $\Delta S = 0$, n'est pas renormalisée par les interactions fortes. Pour interpréter ce résultat, on fait l'hypothèse que le courant faible vecteur, qui ne change pas l'étrangeté, est conservé :

$$\partial^{\mu} \left(j_{\mu}^1 + i j_{\mu}^2 \right) = 0 . \quad (\text{II.12})$$

Or, en écrivant les relations (II.9), nous avons identifié les trois premières composantes de j_{μ}^1 avec le courant de spin isotopique. En effet, l'opérateur de spin isotopique \vec{I} est donné par :

$$I_i = \int d_3x j_{0i}^1(x) \quad (i = 1, 2, 3) . \quad (\text{II.13})$$

Les interactions fortes conservant l'isospin, la divergence du courant de spin isotopique est nulle :

$$\partial^{\mu} j_{\mu}^1 = 0 \quad (i = 1, 2, 3) . \quad (\text{II.14})$$

ce qui entraîne aussitôt (II.12).

Ainsi l'identification du courant faible $j_{\mu}^1 + i j_{\mu}^2$ avec la composante de charge positive du courant de spin isotopique, assure automatiquement l'hypothèse CVC.

b) - Règles de sélection : Le terme en $\cos\theta$ dans (II.11) transforme un quark n en quark p . Il augmente la charge et I_3 d'une unité, et conserve l'hypercharge. Ceci entraîne la règle $|\Delta I| = 1$ pour les désintégrations semi-leptoniques, conservant l'étrangeté.

Le terme en $\sin\theta$, transforme un quark λ en quark p . Il augmente la charge d'une unité, I_3 de $\frac{1}{2}$, et l'hypercharge de $+1$. Ceci entraîne la règle $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ pour les désintégrations semi-leptoniques des particules étranges, ainsi que la règle $\Delta S = \Delta Q$: la charge du baryon augmente ou diminue d'une unité, comme son étrangeté.

c) - Désintégrations non leptoniques et hamiltonien courant-courant : La partie purement hadronique $\frac{G}{\sqrt{2}} J_{\mu}^{\text{hadr.}\dagger} J^{\mu \text{hadr.}}$ de l'hamiltonien (II.1) est responsable des désintégrations non leptoniques des particules étranges. Considérons par exemple la désintégration d'un hypéron Y :

$$Y \rightarrow N + \pi .$$

L'élément de matrice $T : \frac{G}{\sqrt{2}} \langle N\pi | J_{\mu}^{\text{hadr.}\dagger} J^{\mu \text{hadr.}} | Y \rangle$ fait intervenir deux fois le courant hadronique $J_{\mu}^{\text{hadr.}}$, une première fois avec $\Delta S = 1$, $|\Delta I| = \frac{1}{2}$, une deuxième fois avec $\Delta S = 0$, $|\Delta I| = 1$. Au total, c'est donc une transition $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, en désaccord avec la règle expérimentale $|\Delta I| = \frac{1}{2}$, fort bien vérifiée maintenant.

Pour expliquer la règle $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ avec un hamiltonien de la forme courant-courant, on peut soit introduire des courants neutres sans équivalents leptoniques soit faire appel à des mécanismes particuliers, qui renforcent la partie $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ de l'amplitude de désintégration ("octet enhancement").

En fait il n'existe aucune preuve expérimentale d'une interaction locale courant \times courant pour les interactions faibles non leptoniques. Nous serons même éventuellement amenés à ne pas utiliser cette expression explicite de l'hamiltonien non leptonique.

Tous les courants introduits ont les bonnes propriétés de transformation par CP, soit les mêmes que celles du courant leptonique, ceci en accord avec la non observation de violation de CP par les interactions semi-leptoniques. Nous rejetterons la responsabilité de cette violation sur des complications de l'hamiltonien non leptonique, auquel pourrait s'ajouter une partie impaire par CP.

3) - Hypothèses CACP et CADDP :

Nous avons vu que le courant vecteur, $\Delta S = 0$, est conservé, entraînant la non renormalisation de la constante de couplage vecteur. En revanche la constante de couplage axiale, $\Delta S = 0$, est renormalisée :

$$\frac{G_A}{G_V} = 1,2 \quad (II.15)$$

Par conséquent le courant axial ne peut être conservé. Cependant le rapport G_A/G_V est peu différent de 1, ce qui amène à supposer que le Courant Axial est Conservé Partiellement (CACP). Donnons une signification précise à cette hypothèse. Pour cela, considérons l'élément de matrice du courant axial $J_\mu^A(0)$ entre deux états à un nucléon, d'impulsions p et p' . L'invariance de Lorentz nous permet d'écrire :

$$\langle N(p') | J_\mu^A(0) | N(p) \rangle = \bar{u}(p') \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 G_A(t) + k_\mu \gamma_5 H_A(t) + i \sigma_{\mu\nu} k^\nu \gamma_5 K_A(t) \right\} u(p) \langle \frac{1}{2} \rangle, \quad (II.16)$$

où $k = p' - p$, $t = k^2$, et $\langle \frac{1}{2} \rangle$ est l'élément de matrice de τ^3 (matrice de Pauli) entre les états de spin isotopique des nucléons. (II.16) définit une fonction de vertex, que nous représenterons par le graphe suivant :

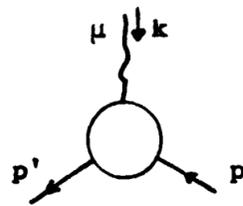


Figure II,1

Dans (II.16), le troisième terme en $\sigma_{\mu\nu} k^\nu \gamma_5$ ne se transforme pas comme $\gamma_\mu \gamma_5$ ou $k_\mu \gamma_5$ par C ou par G (isoparité)(appendice A). Pour cette raison nous le rejetterons (courant de 2ème classe), et ne garderons que les deux premiers termes, en $\gamma_\mu \gamma_5$ (axial) et $k_\mu \gamma_5$ (pseudo-scalaire induit).

Les facteurs de forme $G_A(t)$ et $H_A(t)$ sont des fonctions analytiques de la variable t , avec, pour singularités, une coupure allant de $9\mu^2$ à l'infini, et, pour la seule fonction $H_A(t)$, un pôle à $t = \mu^2$, dû à l'état intermédiaire à un méson π , symbolisé par le graphe suivant :

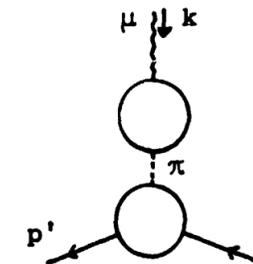


Figure II,2

La contribution de ce graphe s'écrit en effet :

$$\frac{f_\pi g \langle \tau^1 \rangle}{k^2 - \mu^2} i k_\mu \bar{u}(p') i \gamma_5 u(p), \quad (II.17)$$

où apparaît le couplage $f_\pi i k_\mu$ du courant axial avec le pion, le couplage π -Nucléon $i \gamma_5 g \langle \tau^1 \rangle$, et le propagateur du pion $1/(k^2 - \mu^2)$. Un terme tel que (II.17) est du type pseudo-scalaire $k_\mu \gamma_5$, ce qui montre que $G_A(t)$ n'a pas de pôle à $t = \mu^2$.

Revenons à (II.16) et calculons la divergence du courant axial entre les mêmes états à un nucléon :

$$\begin{aligned} \langle N(p') | \partial^\mu J_\mu^A(0) | N(p) \rangle &= i (p' - p)^\mu \langle N(p') | J_\mu^A(0) | N(p) \rangle \\ &= \left\{ 2 m G_A(t) + t H_A(t) \right\} \bar{u}(p') i \gamma_5 u(p) \langle \frac{1}{2} \rangle \end{aligned} \quad (II.18)$$

Si le courant axial était exactement conservé, on aurait :

$$2m G_A(t) + t H_A(t) = 0 \quad (\text{II.19})$$

et puisque $G_A(0) = 1,2$ est différent de zéro, cela entraînerait pour $H_A(t)$ un pôle à l'origine $t = 0$:

$$H_A(t) = -2m \frac{G_A(t)}{t} \quad (\text{II.20})$$

Ceci est incompatible avec les propriétés analytiques de $H_A(t)$, décrites ci-dessus. Il n'existe pas, en effet, de particule pseudo-scalaire de masse nulle, susceptible de donner un pôle en $t = 0$. Cependant le pôle du méson π à $t = \mu^2$ est peu éloigné de l'origine, ce qui nous amène à écrire, au lieu de (II.20) :

$$H_A(t) = -2m \frac{G_A(t)}{t - \mu^2} \quad (\text{II.21})$$

et à énoncer l'hypothèse CACP (Courant Axial Conservé Partiellement) sous la forme suivante : "le courant axial est conservé dans la limite où la masse μ du méson π est nulle". En effet, tenant compte de (II.21), (II.18) devient :

$$\langle N(p') | \partial^\mu j_\mu^A(0) | N(p) \rangle = 2m G_A(t) \frac{\mu^2}{\mu^2 - t} \bar{u}(p') i \gamma_5 u(p) \langle \frac{i}{2} \rangle \quad (\text{II.22})$$

lorsque $\mu^2 \rightarrow 0$, le second membre tend vers zéro.

L'hypothèse CACP est souvent traduite sous la forme CADDP : Courant Axial à Divergence Dominée par le Pion. Appelons $G(t)$ la fonction qui apparaît dans le second membre de (II.18) :

$$G(t) = 2m G_A(t) + t H_A(t) \quad (\text{II.23})$$

Ecrivons une relation de dispersion non-soustraite pour $G(t)$:

$$G(t) = \frac{R}{\mu^2 - t} + \frac{1}{\pi} \int_{9\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } G(t') dt'}{t' - t - i\epsilon} \quad (\text{II.24})$$

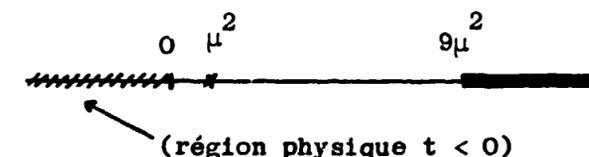


Figure II,3

Nous avons déjà calculé le résidu R au pôle du pion, dans (II.17) :

$$R = f_\pi \mu^2 g \langle \tau^1 \rangle \quad (\text{II.25})$$

Énonçons l'hypothèse CADDP : "la fonction $G(t)$ est dominée par la contribution du pôle du pion, dans un voisinage de $t = \mu^2$, allant jusqu'à l'origine $t = 0$ ". On peut donc écrire, pour ces valeurs de t :

$$\langle N(p') | \partial^\mu j_\mu^A(0) | N(p) \rangle \approx \frac{f_\pi \mu^2 g \langle \tau^1 \rangle}{\mu^2 - t} \quad (\text{II.26})$$

qui est à comparer avec (II.22). L'identification des deux expressions (II.22) et (II.26) fournit une importante relation, due à Goldberger et Treiman^[2]. A $t = 0$, il vient en effet :

$$f_\pi = \frac{m}{g} \frac{G_A}{G_V} \quad (\text{II.27})$$

(par définition : $G_A(0) = G_A/G_V$).

Dans cette relation, toutes les grandeurs sont connues expérimentalement : f_π est donné par le temps de vie des pions chargés, g est la constante de couplage pion-nucléon, et $G_A/G_V = 1,2$. Le calcul de G_A/G_V en utilisant (II.27) donne $G_A/G_V = 1,3$, à dix pour-cents environ de la valeur expérimentale.

La même hypothèse CADDP peut encore s'énoncer dans un autre langage, en disant que la divergence du courant axial n'est couplée qu'au méson π , ce qui se traduit par la proportionnalité de $\partial^\mu j_\mu^{A1}$ au champ du pion ϕ_π^1 :

$$\partial^\mu j_\mu^{A1}(x) = C_\pi \phi_\pi^1(x) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (II.28)$$

Compte tenu de la définition de la constante de couplage f_π :

$$\langle 0 | j_\mu^{A1}(0) | \pi^j(q) \rangle = i f_\pi q_\mu \delta_{ij} \quad (II.29)$$

la constante C_π , qui apparaît dans (II.28), n'est rien d'autre que $f_\pi \mu^2$.

Considérons alors les éléments de matrice des deux membres de (II.28), entre des états à un nucléon :

$$\begin{aligned} \langle N(p') | \partial^\mu j_\mu^{A1}(0) | N(p) \rangle &= f_\pi \mu^2 \langle N(p') | \phi_\pi^1 | N(p) \rangle \\ &= f_\pi \frac{\mu^2}{\mu^2 - t} g K(t) \bar{u}(p') i\gamma_5 u(p) \langle \tau^1 \rangle, \quad (II.30) \end{aligned}$$

$K(t)$ est le facteur de forme du couplage π -Nucléon, défini par l'élément de matrice du courant du pion $j_\pi^1(x) = (\square + \mu^2) \phi_\pi^1(x)$ entre des états à un nucléon :

$$\langle N(p') | j_\pi^1(0) | N(p) \rangle = g K(t) \bar{u}(p') i\gamma_5 u(p) \langle \tau^1 \rangle \quad (II.31)$$

L'identification de (II.30) avec (II.18), à $t = 0$, entraîne :

$$f_\pi = \frac{m}{g K(0)} \left(\frac{G_A}{G_V} \right), \quad (II.32)$$

qui diffère de la relation (II.27) par la présence du facteur de forme $K(0)$. Rappelons que $K(t)$ est normalisé à 1, pour un pion physique : $K(\mu^2) = 1$. On s'attend donc à ce que $K(0)$ soit peu différent de 1. Compte tenu des valeurs expérimentales de f_π , m , g et (G_A/G_V) , la relation (II.32) donne $K(0) \approx 0,9$.

Dans toute la suite de ce cours, c'est sous la forme (II.28) que nous écrirons l'hypothèse CADDP, et c'est la relation (II.32) que nous appellerons relation de Goldberger et Treiman.

La relation (II.28) peut se généraliser à toutes les composantes de l'octet de courant axial j_μ^{A1} . Remarquons cependant que l'hypothèse CADDP pour les facteurs de forme étranges que l'on est amené à introduire, repose sur des bases beaucoup moins solides. En effet, ces facteurs de formes sont des fonctions analytiques de t , avec comme singularités, un pôle à $t = m_K^2$ (m_K est la masse du méson K), et une coupure commençant à $t = (m_K + 2\mu)^2$:

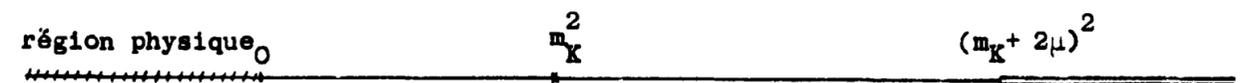


Figure (II,4)

m_K^2 est de l'ordre de $12 \mu^2$ et $(m_K + 2\mu)^2$ de l'ordre de $30 \mu^2$. Le pôle du méson K est maintenant beaucoup plus éloigné du début de la région physique $t = 0$. Dans ces conditions, il est difficile de supposer qu'à l'origine, la contribution de la coupure est négligeable devant celle du pôle. Toutefois, les quelques résultats expérimentaux disponibles actuellement, n'ont pas montré de

désaccord violent avec cette hypothèse.

Indiquons que par la suite, nous ferons grand usage de CADDP, en même temps que des hypothèses de l'algèbre des courants. En conséquence il sera souvent difficile de savoir si la comparaison des résultats théoriques avec l'expérience, teste CADDP ou l'algèbre des courants. Nous serons cependant souvent amenés à introduire des tests de CADDP seuls qui donnent un bon accord avec l'expérience.

REFERENCES

- [1] - GELL-MANN and NEEMAN : The Eightfold Way, publié par Benjamin, N.Y.(1964)
Ce livre réunit une série d'articles sur la symétrie unitaire SU(3).
- [2] - GOLDBERGER et TREIMAN : Phys. Rev. 111, 354 (1958).

- I I I -

ALGÈBRE DES COURANTS

I) Construction de l'algèbre des courants :

Revenons à la définition des courants vecteur et axial :

$$j_{\mu}^1(x) = \bar{q}(x) \gamma_{\mu} \frac{\lambda_1}{2} q(x) \quad (III.1)$$

$$j_{\mu}^{A1}(x) = \bar{q}(x) \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{\lambda_1}{2} q(x) \quad (III.2)$$

Compte tenu des relations d'anticommution canoniques des champs de quarks :

$$\delta(x_0 - y_0) [q_{\alpha}(x), \bar{q}_{\beta}(y)]_{+} = \gamma_0 \delta_4(x - y) \delta_{\alpha\beta} \quad (III.3)$$

et des expressions des commutateurs des matrices λ_1 (voir appendice B), il est aisé de démontrer les relations suivantes :

$$\delta(x_0 - y_0) [j_0^1(x), j_{\mu}^j(y)] = i f_{1jk} j_{\mu}^k(x) \delta_4(x - y) \quad (III.4)$$

$$\delta(x_0 - y_0) [j_0^1(x), j_{\mu}^{Aj}(y)] = i f_{1jk} j_{\mu}^{Ak}(x) \delta_4(x - y) \quad (III.5)$$

$$\delta(x_0 - y_0) [j_0^{A1}(x), j_{\mu}^{Aj}(y)] = i f_{1jk} j_{\mu}^k(x) \delta_4(x - y) \quad (III.6)$$

Généralisant la définition (II.10) de l'opérateur \vec{T} de spin isotopique, introduisons les "charges" vectorielles et axiales, $Q_1(t)$ et $Q_1^A(t)$, comme les intégrales d'espace de la composante de temps des courants :

$$Q_1(t) = \int_{x_0=t} d_3x j_0^1(x) \quad (III.7)$$

$$Q_1^A(t) = \int_{x_0=t} d_3x j_0^{A1}(x) \quad (III.8)$$

De ces définitions et des relations de commutation précédentes, on déduit immédiatement :

$$[Q_1(t), j_\mu^j(x)]_{x_0=t} = i f_{1jk} j_\mu^k(x) \quad (\text{III.9})$$

$$[Q_1(t), j_\mu^{Aj}(x)]_{x_0=t} = i f_{1jk} j_\mu^{Ak}(x) \quad (\text{III.10})$$

$$[Q_1^A(t), j_\mu^j(x)]_{x_0=t} = i f_{1jk} j_\mu^{Ak}(x) \quad (\text{III.11})$$

$$[Q_1^A(t), j_\mu^{Aj}(x)]_{x_0=t} = i f_{1jk} j_\mu^k(x) \quad (\text{III.12})$$

puis :

$$[Q_1(t), Q_j(t)] = i f_{1jk} Q_k(t) \quad (\text{III.13})$$

$$[Q_1(t), Q_j^A(t)] = i f_{1jk} Q_k^A(t) \quad (\text{III.14})$$

$$[Q_1^A(t), Q_j^A(t)] = i f_{1jk} Q_k(t) \quad (\text{III.15})$$

Interprétons maintenant ces différentes relations. Les équations (III.13), (III.14) et (III.15) montrent que les 16 opérateurs de charges $Q_1(t)$ et $Q_1^A(t)$ ($i = 1, \dots, 8$), pris au même instant t , forment une algèbre de Lie. Cette algèbre se décompose en deux sous-algèbres disjointes. En effet, définissons les nouveaux opérateurs $Q_1^\pm(t)$:

$$Q_1^\pm(t) = \frac{1}{2} [Q_1(t) \pm Q_1^A(t)] \quad (\text{III.16})$$

Les relations (III.13) à (III.15) peuvent s'écrire :

$$[Q_1^+(t), Q_j^+(t)] = i f_{1jk} Q_k^+(t) \quad (\text{III.17})$$

$$[Q_1^-(t), Q_j^-(t)] = i f_{1jk} Q_k^-(t) \quad (\text{III.18})$$

$$[Q_1^+(t), Q_j^-(t)] = 0 \quad (\text{III.19})$$

Ainsi les huit opérateurs $Q_1^+(t)$ forment à eux-seuls une première algèbre de Lie, l'algèbre de $SU(3)$ (relation (III.17)), et les huit autres opérateurs $Q_1^-(t)$ forment une seconde algèbre de $SU(3)$ (relation (III.18)), ces deux algèbres commutant entre elles (relation (III.19)). C'est ce que l'on exprime en disant que les seize opérateurs $Q_1(t)$ et $Q_1^A(t)$ forment l'algèbre de $SU(3) \times SU(3)$.

Remarquons encore que les huit charges vectorielles $Q_1(t)$ forment aussi à elles-seules une algèbre de Lie (relation (III.13)). C'est aux représentations du groupe $SU(3)$ associé à cette sous-algèbre que nous nous référons, lorsque nous dirons par la suite, que telles quantités forment un triplet, un octet, ... de spin unitaire. Nous appellerons les charges vectorielles $Q_1(t)$: opérateurs de spin unitaire. Elles généralisent en effet les opérateurs $I_i(t)$ de spin isotopique. Par exemple, les relations (III.9) signifient que les 8 composantes du courant vecteur se transforment comme un octet de spin unitaire. Il en est de même pour les huit composantes du courant axial (relation III.10), et pour les huit charges axiales (relation (III.14)). Mais nous savions déjà qu'il en était bien ainsi. Les courants vecteur et axial ont été construits pour cela. En revanche, la relation (III.15) est tout à fait nouvelle. Sachant que les $Q_1^A(t)$ forment un octet, on s'attend en effet à ce que le commutateur $[Q_1^A(t), Q_j^A(t)]$ contienne non seulement des composantes d'un octet, mais aussi des composantes d'objets se transformant suivant les représentations (10) et $\overline{(10)}$. La relation (III.15) nous apprend que ces dernières sont absentes, et précise en plus, que l'octet est celui des charges vectorielles. On sait que (III.15) est le point de départ du calcul de la constante de renormalisation G_A/G_V , par Adler et Weisberger.

Les relations (III.9) à (III.15) découlent de (III.4,5,6) et de la définition des charges. Demandons-nous, réciproquement, quelles relations de commutation locales doivent satisfaire les courants, pour que les charges $Q_1(t)$ et $Q_1^A(t)$ satisfassent (III.13,14,15). On peut montrer que les équations (III.4,5,6) ne sont pas l'unique solution de ce problème. La solution générale, s'obtient en ajoutant au second membre de (III.4,5,6), des termes arbitraires proportionnels à des dérivées spatiales de la fonction de Dirac $\delta_4(x-y)$, (termes dits de Schwinger). Ces termes n'altèrent pas les relations de commutation des charges. En effet, ils disparaissent par intégration sur d_3x . Ainsi, les relations de commutation des charges sont moins restrictives que celles des courants. Par la

suite, nous distinguerons dans les formules que nous démontrerons à partir de l'algèbre des courants, celles qui découlent des relations de commutation entre les charges (donc indépendantes des termes de Schwinger), de celles moins générales, qui nécessitent les relations de commutation entre courants, sans terme de Schwinger. Nous nous limiterons pratiquement au premier cas.

Nous avons construit à chaque instant t , un groupe de transformations $SU(3) \times SU(3)$ sur les opérateurs de champs, pris au même temps t . Nous n'en avons pas, pour autant, un groupe de symétrie de la théorie. En effet, l'équation d'évolution des opérateurs $Q_1(t)$ et $Q_1^A(t)$:

$$i \frac{d}{dt} Q_1(t) = [H, Q_1(t)] \quad (III.20)$$

nous montre que ces opérateurs, qui sont les générateurs du groupe, ne commutent pas avec l'hamiltonien, sauf s'ils sont indépendants du temps. Cette dernière circonstance ne se produit qu'avec les charges conservées (par exemple les opérateurs de spin isotopique). A la sous-algèbre de ces opérateurs conservés, correspond un sous-groupe du grand groupe $SU(3) \times SU(3)$ (par exemple $SU(2)$), sous-groupe qui est indépendant du temps, et qui est donc un groupe de symétrie de la théorie.

II) Universalité du courant faible :

L'algèbre des courants permet de redéfinir l'universalité du couplage faible. En effet, le problème de l'universalité consiste essentiellement, une fois écrite la forme courant-courant (II.1) de l'hamiltonien, avec une unique constante de couplage G , et le courant J_μ ayant été décomposé en une partie leptonique (II.4) et une partie hadronique, à préciser la normalisation de la partie hadronique. Une telle normalisation est complètement fixée par des relations de commutation non linéaires entre les courants.

Rappelons tout d'abord comment a été introduite la notion d'universalité, avant l'apparition des désintégrations faibles des particules étranges. Le courant faible des nucléons s'écrivait :

$$J_\mu^{\text{hadr.}} = \alpha \bar{\Psi}_P \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Psi_N \quad (III.21)$$

où Ψ_N et Ψ_P sont les champs de Dirac associés respectivement au neutron et au proton. L'universalité consistait à prendre égale à 1, la constante α .

Exprimons cette universalité dans le langage de l'algèbre des courants. Pour cela définissons les opérateurs de charge :

$$F^+(t) = \int_{x_0=t} d_3x \frac{1}{\sqrt{2}} J_0^{\text{hadr.}}(x) \quad (III.22)$$

$$F^-(t) = \int_{x_0=t} d_3x \frac{1}{\sqrt{2}} J_0^{\text{hadr.}}(x)^\dagger$$

que nous écrivons :

$$F^\pm(t) = F_1(t) \pm i F_2(t) \quad (III.23)$$

Appelons $2i F_3(t)$ le commutateur $[F_1(t), F_2(t)]$. Alors, on peut vérifier avec $\alpha = 1$, que les trois opérateurs $F_i(t)$ forment une algèbre de $SU(2)$:

$$[F_i(t), F_j(t)] = 2i \epsilon_{ijk} F_k(t) \quad (III.24)$$

Réciproquement, postulons les relations de commutation (III.24), nous en déduisons que $\alpha = 1$. Ainsi les relations (III.24) sont équivalentes à l'hypothèse de l'universalité du couplage faible.

Appliquons maintenant les mêmes idées au courant faible total, qui contient une partie changeant l'étrangeté. Nous écrivons ce courant :

$$J_\mu^{\text{hadr.}} = \alpha \left(J_\mu^1 + i J_\mu^2 + J_\mu^{A1} + i J_\mu^{A2} \right) + \beta \left(J_\mu^4 + i J_\mu^5 + J_\mu^{A4} + i J_\mu^{A5} \right) \quad (III.25)$$

avec des constantes α et β à déterminer par (III.24). On a :

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \alpha Q_1^+(t) + \beta Q_4^+(t) \\ F_2(t) &= \alpha Q_2^+(t) + \beta Q_5^+(t) \end{aligned} \quad (III.26)$$

Compte tenu des relations de commutation (III.17), et utilisant le tableau des constantes f_{ijk} donné dans l'appendice B, il vient successivement:

$$F_3(t) = \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) Q_3^+(t) - \alpha \beta Q_6^+(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \beta^2 Q_8^+(t) \quad (III.27)$$

puis :

$$[F_3(t), F_1(t)] = 2i F_2(t) (\alpha^2 + \beta^2) \quad (III.28)$$

$$[F_2(t), F_3(t)] = 2i F_1(t) (\alpha^2 + \beta^2)$$

Par comparaison avec (III.24), il vient aussitôt la condition :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (III.29)$$

qui traduit, pour le courant faible total, l'hypothèse de l'universalité du couplage faible. Posant alors $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$, nous retrouvons pour le courant (III.25), la forme (II.5) donnée par Cabibbo.

III - Propriétés de l'hamiltonien non leptonique courant-courant :

Nous noterons \mathcal{H}_w^{nl} la densité d'hamiltonien non leptonique :

$$\mathcal{H}_w^{nl} = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu^{\dagger \text{hadr.}} J_\mu^{\text{hadr.}} \quad (III.30)$$

1) Hypothèse V - A :

Cette hypothèse se traduit par la présence de $(1+\gamma_5)$ dans la définition du courant faible, qui signifie que la charge associée au courant faible appartient à l'algèbre des opérateurs $Q_1^+(t)$, et commute avec les opérateurs $Q_1^-(t)$ (définis par (III.16)) :

$$[J_\mu^{\dagger \text{hadr.}}(x), Q_1^-(t)]_{x_0=t} = 0 \quad (III.31)$$

Cela entraîne que l'hamiltonien faible \mathcal{H}_w^{nl} commute avec les $Q_1^-(t)$, ce que l'on peut écrire :

$$[Q_1^-(t), \mathcal{H}_w^{nl}(x)]_{x_0=t} = [Q_1^-(t), \mathcal{H}_w^{nl}(x)]_{x_0=t} \quad (III.32)$$

La relation (III.32) traduit, pour $\mathcal{H}_w^{nl}(x)$, l'hypothèse V-A. Nous serons amenés, par la suite, à considérer des hamiltoniens faibles non leptoniques, qui ne seront pas de la forme courant x courant. Nous conserverons néanmoins l'hypothèse V-A sous la forme (III.32).

2) Conservation de \mathcal{E}^P :

L'hamiltonien (III.30) est invariant dans la transformation \mathcal{E}^P . Or, l'expérience a révélé, dans les désintégrations du K_L^0 , l'existence d'un mode 2π , qui viole \mathcal{E}^P . Pour expliquer cette faible violation, de nombreuses théories ont été avancées. Peu d'entre elles ont résisté aux tests expérimentaux. Pour notre part, nous nous en tiendrons à l'existence dans l'hamiltonien faible d'un terme supplémentaire petit, et violant \mathcal{E}^P , ne satisfaisant pas a priori (III.32).

3) Règle $|\Delta I| = \frac{1}{2}$:

Nous avons déjà vu que l'hamiltonien (III.30) viole la règle de sélection $|\Delta I| = \frac{1}{2}$. En effet $J^{\text{hadr.}}$ est une composante d'un octet de spin unitaire. Or le produit $J_\mu^{\dagger \text{hadr.}} J_\mu^{\text{hadr.}}$ contient a priori des composantes des représentations $\{1\}$, $\{8\}$ et $\{27\}$, et cette dernière représentation $\{27\}$ a des composantes $\Delta I = 3/2$. Nous avons suggéré précédemment (page 13), deux méthodes permettant d'expliquer la règle $|\Delta I| = \frac{1}{2}$. L'une d'elles consiste à faire appel à des mécanismes particuliers, tels que les interactions dans l'état final, qui renforcent la partie $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ des amplitudes de désintégration. L'autre consiste à introduire des courants neutres, sans équivalents leptoniques, et à ne garder dans le produit courant x courant, que la partie qui se transforme comme la composante d'un octet. Seule existe la partie symétrique (couplage D) du produit courant x courant : $d_{ijk} J_\mu^{\dagger \text{hadr.}} J_\mu^{\text{hadr.}}$ **

Dans le modèle des quarks, nous pouvons construire aisément à partir de l'octet scalaire $\bar{q} \lambda_1 q$, et de l'octet pseudo-scalaire $\bar{q} i\gamma_5 \lambda_1 q$, un hamiltonien non leptonique ayant toutes les bonnes propriétés, y compris $|\Delta I| = \frac{1}{2}$, mais

** Seuls les multiplets invariants par conjugaison de charge peuvent apparaître.

** On peut vérifier (exercice), qu'elle a les bonnes propriétés de transformation par CP. Le couplage F conduirait à un terme impair par CP.

qui n'est pas de la forme courant x courant. Tout d'abord, la règle $|\Delta S| = 1$ restreint le choix des indices i et j aux seules valeurs 4, 5, 6 et 7 (composantes changeant l'étrangeté). La conservation de la charge restreint encore ce choix à 6 et 7 (composantes neutres). L'invariance par la transformation \mathcal{E} \mathcal{P} élimine à son tour la composante scalaire $\bar{q} \lambda_7 q$ et la composante pseudo-scalaire $\bar{q} i\gamma_5 \lambda_6 q$. En effet, tenant compte des lois de transformation d'un champ de Dirac par \mathcal{E} et \mathcal{P} , données dans l'appendice A (page A4), il vient :

$$\mathcal{E} \mathcal{P} \bar{q}(0) \lambda_1 q(0) (\mathcal{E} \mathcal{P})^{-1} = -q^T(0) C \gamma_0 \lambda_1 \gamma_0 C^{-1} \bar{q}^T(0) = \bar{q}(0) \lambda_1^T q(0) \quad (\text{III.33})$$

(le changement de signe dans la seconde égalité est dû à l'anti-commutation des champs \bar{q} et q). De même :

$$\mathcal{E} \mathcal{P} \bar{q}(0) i\gamma_5 \lambda_1 q(0) (\mathcal{E} \mathcal{P})^{-1} = -q^T(0) C \gamma_0 i\gamma_5 \lambda_1 \gamma_0 C^{-1} \bar{q}^T(0) = -\bar{q}(0) i\gamma_5 \lambda_1^T q(0) \quad (\text{III.34})$$

L'équation (III.33) montre que pour la partie de \mathcal{H}_w^{nl} qui conserve la parité, seules conviennent les matrices λ_1 symétriques, (donc λ_6), tandis que d'après (III.34), pour la partie de \mathcal{H}_w^{nl} violant la parité, ce sont les matrices antisymétriques qui conviennent (donc λ_7). Ainsi \mathcal{H}_w^{nl} peut s'écrire $\alpha \bar{q} \lambda_6 q + \beta \bar{q} i\gamma_5 \lambda_7 q$. Faisant l'hypothèse V-A sous la forme (III.32), on voit immédiatement que $\alpha = \beta$. Donc :

$$\mathcal{H}_w^{nl} = \alpha (\bar{q} \lambda_6 q + \bar{q} i\gamma_5 \lambda_7 q) \quad (\text{III.35})$$

\mathcal{H}_w^{nl} appartenant à un octet de spin unitaire, la règle $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ est automatiquement assurée.

IV - Groupes de symétrie et théorème de Noether :

Nous avons été amenés à considérer, au début de ce chapitre, l'algèbre du groupe $SU(3) \times SU(3)$, comme conséquence de la définition même des courants $J_\mu^i(x)$ et $J_\mu^{Ai}(x)$. Nous montrerons, maintenant, comment l'on peut introduire, de façon plus générale, une algèbre de courants, par l'intermédiaire d'un groupe de transformations sur les champs. Nous nous appuierons pour cela sur le principe d'action stationnaire. Soit $\mathcal{L}(\Phi^i, \Phi_\mu^i)$ la densité de Lagrangien, fonction des

champs locaux $\Phi^i(x)$ et de leurs dérivées premières $\Phi_\mu^i = \partial \Phi^i / \partial x^\mu$. L'intégrale d'action entre les instants t_1 et t_2 est, par définition :

$$I(t_2, t_1) = \int_{t_1 < x_0 < t_2} d_4x \mathcal{L}(x) \quad (\text{III.36})$$

Soit $\delta \Phi^i(x)$ une transformation infinitésimale des champs $\Phi^i(x)$. Dans une telle transformation I varie de la quantité δI :

$$\delta I = \int_{t_1 < x_0 < t_2} d_4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} \delta \Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu^i} \delta \Phi_\mu^i \right) \quad (\text{III.37})$$

où $\delta \Phi_\mu^i = \partial(\delta \Phi^i) / \partial x^\mu$ est la variation de Φ_μ^i , et où la sommation sur l'indice i est sous-entendue (nous ne nous embarasserons pas de questions de commutation des champs Φ^i ; dans chaque cas particulier, lorsque \mathcal{L} est donné explicitement, il est facile d'en tenir compte). Par intégration par parties, δI devient :

$$\delta I = \int_{t_1 < x_0 < t_2} d_4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu^i} \right) \delta \Phi^i + \int_{t_1 < x_0 < t_2} d_4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu^i} \delta \Phi^i \right) \quad (\text{III.38})$$

Le dernier terme dans (III.38) est l'intégrale de volume d'une quadri-divergence, que l'on transforme aisément en intégrale de surface. On peut montrer que sa contribution à l'infini, dans des directions genre espace, est nulle, donc :

$$\delta I = \int_{t_1 < x_0 < t_2} d_4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu^i} \right) \delta \Phi^i + \left[\int d_3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu^i} \delta \Phi^i \right]_{x_0 = t_1}^{x_0 = t_2} \quad (\text{III.39})$$

Le principe d'action stationnaire postule que, dans une variation $\delta \Phi^i(x)$ des champs, nulle aux temps t_1 et t_2 , l'intégrale d'action $I(t_2, t_1)$ ne varie pas. On en déduit immédiatement les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu^i} = 0 \quad (\text{III.40})$$

Lorsque $\delta\Phi^1(x)$ ne s'annule pas aux temps t_1 et t_2 , le terme de surface dans (III.39) n'est pas nul, et s'écrit :

$$\delta I(t_2, t_1) = G(t_2) - G(t_1) \quad (III.41)$$

où :

$$G(t) = \int_{x_0=t} d_3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^1_0} \delta\Phi^1 \quad (III.42)$$

Schwinger a complété le principe d'action stationnaire, en montrant que $G(t)$ est le générateur de la transformation infinitésimale $\delta\Phi^1(x)$:

$$\delta\Phi^1(x) = i [G(t), \Phi^1(x)] \quad (III.43)$$

Singularisons maintenant la transformation $\delta\Phi^1(x)$. Soit n le nombre de champs Φ^i ($i = 1, \dots, n$). Donnons-nous une représentation à n dimensions d'une algèbre de Lie \mathcal{A} , c'est-à-dire un ensemble de matrices numériques $n \times n$, que nous appellerons F_α , ayant la propriété suivante :

$$[F_\alpha, F_\beta] = i f_{\alpha\beta\gamma} F_\gamma \quad (III.44)$$

Considérons la variation $\delta\Phi^1(x)$:

$$\delta\Phi^1(x) = i \varepsilon_\alpha(t) (F_\alpha)^{ij} \Phi^j(x) \quad (III.45)$$

où les paramètres infinitésimaux $\varepsilon_\alpha(t)$ ne dépendent que du temps $t = x_0$.

Dans cette transformation le Lagrangien devient une fonction des $\varepsilon_\alpha(t)$, et sa variation est donnée par :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_\alpha} \varepsilon_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^1_\mu} i \left(\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x^\mu} \right) (F_\alpha)^{ij} \Phi^j \quad (III.46)$$

La variation de I s'écrit :

$$\delta I = \int_{t_1 < x_0 < t_2} d_4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^1_\mu} (F_\alpha)^{ij} \Phi^j \right) \right] \varepsilon_\alpha(x_0) + G(t_2) - G(t_1) \quad (III.47)$$

où le terme de surface $G(t)$ est donnée par :

$$G(t) = \varepsilon_\alpha(t) i \int_{x_0=t} d_3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^1_0} (F_\alpha)^{ij} \Phi^j(x) \quad (III.48)$$

Le principe d'action stationnaire fournit alors l'équation de Lagrange suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^1_\mu} (F_\alpha)^{ij} \Phi^j \right) = 0 \quad (III.49)$$

Définissons les courants $j_\mu^\alpha(x)$:

$$j_\mu^\alpha(x) = - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^1_\mu} (F_\alpha)^{ij} \Phi^j(x) \quad (III.50)$$

ainsi que les générateurs $G_\alpha(t)$:

$$G(t) = - \varepsilon_\alpha(t) G_\alpha(t) \quad (III.51)$$

L'équation (III.49) donne la divergence du courant j_μ^α :

$$\partial^\mu j_\mu^\alpha(x) = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_\alpha} \quad (III.52)$$

De (III.48, 50, 51), on tire l'expression du générateur $G_\alpha(t)$ comme l'intégrale d'espace de la composante de temps du courant j_μ^α :

$$G_\alpha(t) = \int_{x_0=t} d_3x j_0^\alpha(x) \quad (III.53)$$

et la relation de commutation (III.43) devient :

$$[G_\alpha(t), \Phi^1(x)]_{x_0=t} = - (F_\alpha)^{ij} \Phi^j(x) \quad (III.54)$$

Utilisant l'identité de Jacobi, nous pouvons calculer le commutateur de $\Phi^1(x)$ avec $[G_\alpha(t), G_\beta(t)]$:

$$\begin{aligned}
 \left[[G_\alpha(t), G_\beta(t)], \Phi^1(x) \right]_{x_0=t} &= \left[G_\alpha(t), [G_\beta(t), \Phi^1(x)] \right]_{x_0=t} + \left[[G_\alpha(t), \Phi^1(x)], G_\beta(t) \right]_{x_0=t} \\
 &= - (F_\beta)^{1j} [G_\alpha(t), \Phi^j(x)]_{x_0=t} - (F_\alpha)^{1j} [\Phi^j(x), G_\beta(t)]_{x_0=t} \\
 &= \left[(F_\beta)^{1j} (F_\alpha)^{jk} - (F_\alpha)^{1j} (F_\beta)^{jk} \right] \Phi^k(x) \\
 &= - i f_{\alpha\beta\gamma} (F_\gamma)^{1k} \Phi^k(x) \\
 &= i f_{\alpha\beta\gamma} [G_\gamma(t), \Phi^1(x)]_{x_0=t} \tag{III.55}
 \end{aligned}$$

ceci montre que l'opérateur $[G_\alpha(t), G_\beta(t)] - i f_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma(t)$ commute avec tous les champs $\Phi^1(x)$. Ce n'est pas suffisant pour affirmer qu'il est nul. On peut montrer cependant qu'il en est bien ainsi :

$$[G_\alpha(t), G_\beta(t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma(t) \tag{III.56}$$

Les relations (III.50, 52, 53, 56) sont fondamentales. La dernière montre que nous avons su construire à l'aide des champs $\Phi^1(x)$, pris à un instant donné t , une représentation $G_\alpha(t)$ de l'algèbre \mathcal{A} , et ceci indépendamment de toute hypothèse sur le Lagrangien \mathcal{L} . Nous avons associé, d'autre part, à chaque générateur $G_\alpha(t)$, un courant $j_\mu^\alpha(x)$, que nous savons calculer explicitement grâce à (III.50). Ces courants en général ne sont pas conservés. Leur divergence est donnée par (III.52).

Supposons cependant que le Lagrangien soit invariant dans une transformation ε_α : $\partial\mathcal{L}/\partial\varepsilon_\alpha = 0$. La relation (III.52) nous apprend alors que :

$$\partial^\mu j_\mu^\alpha(x) = 0 \tag{III.57}$$

Ainsi, à toute transformation des champs, qui laisse invariant le Lagrangien, nous avons associé un courant conservé. Ceci est l'essence même du théorème de Noether. On déduit aisément de (III.57), que le générateur correspondant $G_\alpha(t)$ est indépendant du temps : c'est donc une constante du mouvement.

Les générateurs G_α conservés forment une sous-algèbre de la grande algèbre des opérateurs $G_\alpha(t)$: à tout groupe de symétrie du Lagrangien, nous associons donc, en fait, une algèbre de constantes du mouvement.

Appliquons ces résultats au modèle des quarks. Nous écrivons le Lagrangien des quarks, comme la somme d'un Lagrangien libre et d'un Lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_I(x)$:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{q}(x) \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) q(x) + \mathcal{L}_I(x) \tag{III.58}$$

(par définition $g \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x} f = g \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} f$)

Si $\mathcal{L}_I(x)$ n'est pas dérivatif, il n'intervient pas dans l'expression (III.50) des courants. Nous laissons au lecteur, le soin de vérifier qu'à la transformation du champ des quarks définie par les 16 paramètres infinitésimaux ε_α et ε_α^A ($\alpha = 1, \dots, 8$) :

$$\delta q(x) = i \left(\varepsilon_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{2} + \varepsilon_\alpha^A \frac{\lambda_\alpha}{2} \gamma_5 \right) q(x) \tag{III.59}$$

correspondent les 16 courants définis par (III.1, 2). Le lecteur pourra vérifier en outre que (III.56) donne les relations de commutation (III.13, 14, 15), les générateurs G_α et G_α^A s'identifiant aux charges Q_α et Q_α^A . Il est important de noter ici que la construction générale des algèbres de courants, que nous venons d'esquisser, donne des relations de commutations entre les charges, et non entre les courants, ce qui laisse la porte ouverte à d'éventuels termes de Schwinger.

Dans la transformation (III.59), nous avons utilisé l'algèbre de $SU(3) \times SU(3)$, définie par les 16 matrices $\frac{\lambda_\alpha}{2}$ et $\frac{\lambda_\alpha}{2} \gamma_5$. Il est facile de généraliser à d'autres types d'algèbres. Par exemple les quatre matrices 4×4 σ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), définies à partir des matrices 2×2 de Pauli :

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \tag{III.60}$$

$$\sigma_0 = \mathbf{1}$$

forment une algèbre de Lie. Par produit direct avec les matrices de Gell-Mann, on obtient les 72 matrices de l'algèbre de $U(6) \times U(6)$:

$$\frac{\sigma_{\mu}}{2}, \frac{\sigma_{\mu}}{2} \frac{\lambda_{\alpha}}{2}, \frac{\sigma_{\mu}}{2} \gamma_5, \frac{\sigma_{\mu}}{2} \gamma_5 \frac{\lambda_{\alpha}}{2} \quad (\mu = 0, \dots, 3 \text{ et } \alpha = 1, \dots, 8) \quad (\text{III.61})$$

auxquelles correspondent 72 courants et 72 générateurs d'un groupe $U(6) \times U(6)$ de transformations des champs. Ce groupe contient, entre autres, comme sous-groupe, le groupe $SU(3) \times SU(3)$ défini précédemment.

FORMULE DE ADLER ET WEISBERGER

1) Méthode du repère de moment infini :

Le point de départ de la démonstration de la formule de Adler et Weisberger est la relation de commutation entre les charges axiales $Q_+^A = Q_1^A + i Q_2^A$ et $Q_-^A = Q_1^A - i Q_2^A$ déduite de (III.15) :

$$[Q_+^A(t), Q_-^A(t)] = 2 Q_3 \quad (\text{IV.1})$$

Au second membre de (IV.1), apparaît la charge vectorielle conservée Q_3 , qui n'est autre que la 3ème composante du spin isotopique I_3 . Considérons les éléments de matrice de (IV.1) entre des états physiques à un proton, et introduisons une somme sur des états intermédiaires j (in ou out) :

$$\sum_j \langle p' | Q_+^A(0) | j \rangle \langle j | Q_-^A(0) | p \rangle - \langle p' | Q_-^A(0) | j \rangle \langle j | Q_+^A(0) | p \rangle = 2 \langle p' | Q_3 | p \rangle \quad (\text{IV.2})$$

Compte tenu de la normalisation choisie pour les états à une particule (appendice A), le second membre s'écrit simplement :

$$2 \langle p' | Q_3 | p \rangle = \langle p' | p \rangle = (2\pi)^3 \frac{p_0}{m} \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (\text{IV.3})$$

Dans la somme sur les états j , évaluons tout d'abord la contribution des états à un neutron. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma_n} \int \frac{m}{p_n^0} d_3 p_n \langle p' | Q_+^A(0) | p_n \sigma_n \rangle \langle p_n \sigma_n | Q_-^A(0) | p \rangle, \quad (\text{IV.4})$$

où p_n et σ_n sont respectivement l'impulsion et le spin du neutron. Connais-

sant l'expression (III.8) de $Q_{\pm}^A(t)$ en fonction des courants axiaux $J_{\mu}^{A(1,2)}$, ainsi que les éléments de matrice (II.16) de ces mêmes courants entre états à un nucléon, on a :

$$\begin{aligned} \langle p' | Q_{\pm}^A(0) | p_n \sigma_n \rangle &= \int_{x_0=0} d_3x \langle p' | j_0^{A1}(x) + i j_0^{A2}(x) | p_n \sigma_n \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}_n) \langle p' | j_0^{A1}(0) + i j_0^{A2}(0) | p_n \sigma_n \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}_n) G_A(0) \bar{u}(p) \gamma_0 \gamma_5 u_{\sigma_n}(p) \end{aligned} \quad (IV.5)$$

d'où l'expression de la contribution des états intermédiaires à un neutron :

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \frac{m}{p_0} G_A(0)^2 \sum_{\sigma_n} \bar{u}(p) \gamma_0 \gamma_5 u_{\sigma_n}(p) \bar{u}_{\sigma_n}(p) \gamma_0 \gamma_5 u(p) = \\ = (2\pi)^3 \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \frac{m}{p_0} G_A(0)^2 \bar{u}(p) \gamma_0 \gamma_5 \frac{p+m}{2m} \gamma_0 \gamma_5 u(p) \end{aligned} \quad (IV.6)$$

Ceci peut se réécrire plus simplement, moyennant un peu d'algèbre de Dirac :

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) \gamma_0 \gamma_5 (\not{p}+m) \gamma_0 \gamma_5 u(p) &= \bar{u}(p) \gamma_0 (\not{p}-m) \gamma_0 u(p) \\ &= \bar{u}(p) [2 \gamma_0 p_0 - (\not{p}+m)] u(p) \\ &= 2 \bar{u}(p) (\gamma_0 p_0 - m) u(p) \\ &= 2 \left(\frac{p_0^2}{m} - m \right) \end{aligned}$$

Ecrivant, suivant la coutume, $G_A(0) = G_A/G_V$, (IV.4) prend la forme suivante :

$$(2\pi)^3 \frac{p_0}{m} \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \left(1 - \frac{m^2}{p_0^2} \right) \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 \quad (IV.7)$$

Evaluons maintenant la contribution des autres états intermédiaires (à deux particules et plus). Nous les écrirons $|p_j, \alpha_j\rangle$ où p_j est l'impulsion totale, et α_j représente tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier complètement l'état. Avec la normalisation suivante :

$$\langle p'_j, \alpha'_j | p_j, \alpha_j \rangle = (2\pi)^3 2 p_j^0 \delta_3(\vec{p}'_j - \vec{p}_j) \delta_{\alpha'_j, \alpha_j} \quad (IV.8)$$

la contribution de ces états s'écrit :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d_3 p_j}{2 p_j^0} \sum_{\alpha_j} \langle p' | Q_{\pm}^A(0) | p_j \alpha_j \rangle \langle p_j \alpha_j | Q_{\mp}^A(0) | p \rangle - (Q_{\pm}^A \leftrightarrow Q_{\mp}^A) \quad (IV.9)$$

Comme précédemment, on a :

$$\langle p' | Q_{\pm}^A(0) | p_j \alpha_j \rangle = (2\pi)^3 \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}_j) \langle p' | [j_0^{A1}(0) \pm i j_0^{A2}(0)] | p_j \alpha_j \rangle \quad (IV.10)$$

Nous ne connaissons pas l'expression générale de l'élément de matrice de J_{μ}^{A1} entre un état à un proton et un état quelconque*. Pour aller plus loin, nous devons faire appel à une hypothèse supplémentaire. C'est l'hypothèse CADDP, sous la forme (II.28), qui va nous servir ici, en reliant les éléments de matrice inconnus du second membre de (IV.10), aux éléments de matrice du champ du méson π entre les mêmes états, qui sont eux-mêmes reliés aux sections efficaces totales pion-proton. Prenons donc l'élément de matrice de (II.28) entre un état à un proton et un état $|p_j \alpha_j\rangle$. Il vient :

$$i(p' - p_j)^{\mu} \langle p' | [j_{\mu}^{A1}(0) \pm i j_{\mu}^{A2}(0)] | p_j \alpha_j \rangle = \frac{m \mu \sqrt{2}}{g K(0)} \left(\frac{G_A}{G_V} \right) \langle p' | \Phi_{\pi_{\pm}}(0) | p_j \alpha_j \rangle, \quad (IV.11)$$

où le champ $\Phi_{\pi_{\pm}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{\pi}^1 \pm i \Phi_{\pi}^2)(x)$ crée un π^{\pm} et détruit un π^{\mp} .

* Si l'on néglige pour l'instant l'information pouvant être acquise à l'aide des réactions inélastiques des neutrinos.

(IV.10) s'écrit :

$$\langle p' | Q_{\pm}^A(0) | p_j \alpha_j \rangle = (2\pi)^3 \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}_j) \frac{m \mu^2 \sqrt{2}}{g K(0)} \frac{G_A}{G_V} \frac{\langle p' | \Phi_{\pi_{\pm}}(0) | p_j \alpha_j \rangle}{p_j^0 - p'^0} \quad (IV.12)$$

Introduisons, pour la commodité, l'intégration $\int dW^2 \delta(W^2 - p_j^2)$ dans l'expression (IV.9). Tenant compte de (IV.12), (IV.9) devient :

$$(2\pi)^3 \frac{p_0}{m} \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \left(\frac{m \mu^2 \sqrt{2}}{g K(0)} \cdot \frac{G_A}{G_V} \right)^2 \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{dW^2}{(p_j^0 - p^0)^2} \frac{m}{2 p^0 p_j^0} \times \left\{ F^-(W^2, k^2) - F^+(W^2, k^2) \right\}, \quad (IV.13)$$

où l'on a posé, par définition :

$$F^{\pm}(W^2, k^2) = \sum_{\alpha_j} \delta(W^2 - p_j^2) \left| \langle p | \Phi_{\pi_{\pm}}(0) | p_j \alpha_j \rangle \right|_{\vec{p}_j = \vec{p}}, \quad (IV.14)$$

et $k = p_j - p$. Rassemblons les résultats (IV.3, 7, 13). La relation (IV.2) prend la forme suivante :

$$\left(1 - \frac{m^2}{p_0^2} \right) \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 + \left(\frac{m \mu^2 \sqrt{2}}{g K(0)} \cdot \frac{G_A}{G_V} \right)^2 \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{m}{2 p^0 p_j^0} \frac{dW^2}{(p_j^0 - p^0)^2} (F^- - F^+)(W^2, k^2) = 1. \quad (IV.15)$$

Avant de relier F^+ et F^- aux sections efficaces pion-proton, faisons trois remarques importantes :

1) la covariance de (IV.15) est loin d'être explicite. La contribution de l'état intermédiaire à un neutron dépend de façon très critique du choix de l'axe des temps. Elle s'annule, par exemple, dans le système au repos du proton ($p_0 = m$). La contribution des autres états intermédiaires dépend de façon encore plus compliquée du choix de l'axe des temps.

2) l'usage de l'hypothèse CADDP dans (IV.12), n'est justifié que si le carré du transfert $k^2 = (p_j - p)^2$ varie au voisinage du segment $(0, \mu^2)$ (voir chapitre II). Or :

$$k^2 = (p_j^0 - p^0)^2 = (\sqrt{W^2 + p^2} - p^0)^2 \quad (IV.16)$$

ce qui montre que k^2 croît indéfiniment avec W^2 . Dans ces conditions, il est tout à fait déraisonnable de faire l'hypothèse CADDP.

3) comme nous le verrons plus loin, $F^{\pm}(W^2, k^2)$ est relié à la section efficace totale de collision de mésons π^{\pm} de masse carrée k^2 , sur des protons. Ainsi, puisque k^2 croît indéfiniment avec W^2 , la règle de somme (IV.15) fait intervenir des sections efficaces de pions arbitrairement loin de leur couche de masse.

Ces trois remarques ont fait que pendant longtemps, on n'a pas su exploiter la relation (IV.15). C'est à Fubini et Furlan^[1] que revient le mérite d'avoir montré comment on pouvait remédier simultanément aux trois défauts graves de (IV.15). La méthode consiste à se placer dans un repère où \vec{p} et p^0 deviennent infiniment grands. Dans ces conditions, à W^2 fixé, k^2 tend vers zéro. En effet :

$$k^2 = (\sqrt{W^2 + p^2} - p_0)^2 = (\sqrt{W^2 - m^2 + p_0^2} - p_0)^2 \quad (IV.17)$$

$$\sim \frac{W^2 - m^2}{2 p_0}$$

$$\xrightarrow{p_0 \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi, déjà, les remarques précédentes 2 et 3 tombent. Nous supposons, maintenant, que l'on peut intervertir dans (IV.15) l'intégration sur dW^2 et la limite $p_0 \rightarrow \infty$. Nous verrons, par la suite, que cela est équivalent à supposer que l'amplitude π -proton satisfait une relation de dispersion soustraite une seule fois. On a :

$$\frac{1}{(p_j^0 - p^0)^2} = \frac{(p_j^0 + p^0)^2}{(W^2 - m^2)^2}$$

et :

$$\frac{(p_j^0 + p^0)^2}{2 p_j^0 p^0} \xrightarrow{p^0 \rightarrow \infty} 2 .$$

La relation (IV.15) prend, à la limite $p_0 \rightarrow \infty$, la forme parfaitement covariante :

$$\left(\frac{G_A}{G_V}\right)^2 \left\{ 1 + m \left(\frac{2m\mu^2}{g K(0)}\right)^2 \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{dW^2}{(W^2 - m^2)^2} [F^-(W^2, 0) - F^+(W^2, 0)] \right\} = 1 . \quad (IV.18)$$

Il nous reste maintenant à relier $F^\pm(W^2, 0)$ aux sections efficaces totales π^\pm proton. Soient p et k les impulsions respectives du proton et du neutron, $|p_j \alpha_j\rangle$ l'état final, $W^2 = (p+k)^2$ le carré de la masse totale. On a (voir appendice A) :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}^\pm(W^2, \mu^2) &= \frac{m}{2 \sqrt{(pk)^2 - p^2 k^2}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_j}{2 p_j^0} \sum_{\alpha_j} (2\pi)^4 \delta_4(p+k-p_j) |\langle p_j \alpha_j | j_{\pi^\pm}(0) | p \rangle|^2 \\ &= \frac{m \pi}{\sqrt{(pk)^2 - p^2 k^2}} \sum_{\alpha_j} |\langle p_j \alpha_j | j_{\pi^\pm}(0) | p \rangle|^2 \delta(W^2 - p_j^2), \end{aligned} \quad (IV.19)$$

j_{π^\pm} est le courant de méson π , défini par (II.27), de telle sorte que :

$$\langle p_j \alpha_j | j_{\pi^\pm}(0) | p \rangle = \lim_{k^2 \rightarrow \mu^2} (\mu^2 - k^2) \langle p_j \alpha_j | \Phi_{\pi^\pm}(0) | p \rangle . \quad (IV.20)$$

Il vient alors :

$$\sigma_{\text{tot}}^\pm(W^2, \mu^2) = \lim_{k^2 \rightarrow \mu^2} \sigma_{\text{tot}}^\pm(W^2, k^2) , \quad (IV.21)$$

où $\sigma_{\text{tot}}^\pm(W^2, k^2)$ est ce que nous appellerons, par définition, la section efficace totale π^\pm proton, pour des pions hors de leur couche de masse :

$$\sigma_{\text{tot}}^\pm(W^2, k^2) = \pi \frac{m(\mu^2 - k^2)^2}{\sqrt{(pk)^2 - m^2 k^2}} F^\pm(W^2, k^2) , \quad (IV.22)$$

Lorsque $k^2 = 0$, il vient :

$$\sigma_{\text{tot}}^\pm(W^2, 0) = \pi \frac{2m\mu^4}{W^2 - m^2} F^\pm(W^2, 0) . \quad (IV.23)$$

De (IV.18) et (IV.23), on tire la formule de Adler et Weisberger :

$$1 - \left(\frac{G_V}{G_A}\right)^2 = \left(\frac{2m}{g K(0)}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{dW^2}{W^2 - m^2} \left\{ \sigma_{\text{tot}}^+(W^2, 0) - \sigma_{\text{tot}}^-(W^2, 0) \right\} . \quad (IV.24)$$

Cette formule donne une expression de la constante de renormalisation du courant axial, en fonction des sections efficaces totales de pions non physiques (masse nulle), sur des protons physiques. Nous n'entrerons pas dans le détail de l'évaluation numérique de l'intégrale dans (IV.24). Le lecteur se reportera aux publications originales de Adler^[2] et Weisberger^[3]. Disons, cependant, que cette évaluation numérique est rendue délicate par le fait que les pions sont hors de leur couche de masse, aussi bien dans les sections efficaces $\sigma^\pm(W^2, 0)$ que dans le facteur de forme $K(0)$. Les effets correspondants peuvent être estimés dans un modèle particulier, mais ils ne sont pas complètement indépendants du modèle. Adler donne le résultat suivant :

$$\left| \frac{G_A}{G_V} \right| = 1,24 \pm 0,03 \quad (IV.25)$$

tandis que Weisberger trouve :

$$\left| \frac{G_A}{G_V} \right| = 1,16 \quad (IV.26)$$

à comparer avec le résultat expérimental* :

$$\frac{G_A}{G_V} = -1,18 \pm 0,02 \quad (IV.27)$$

Revenons à la limite $p_0 \rightarrow \infty$. La somme sur les états intermédiaires $|p_j, \alpha_j\rangle$ dans (IV.9), donne une intégrale sur le quadrivecteur p_j , à \vec{p}_j fixé et égal à \vec{p} .

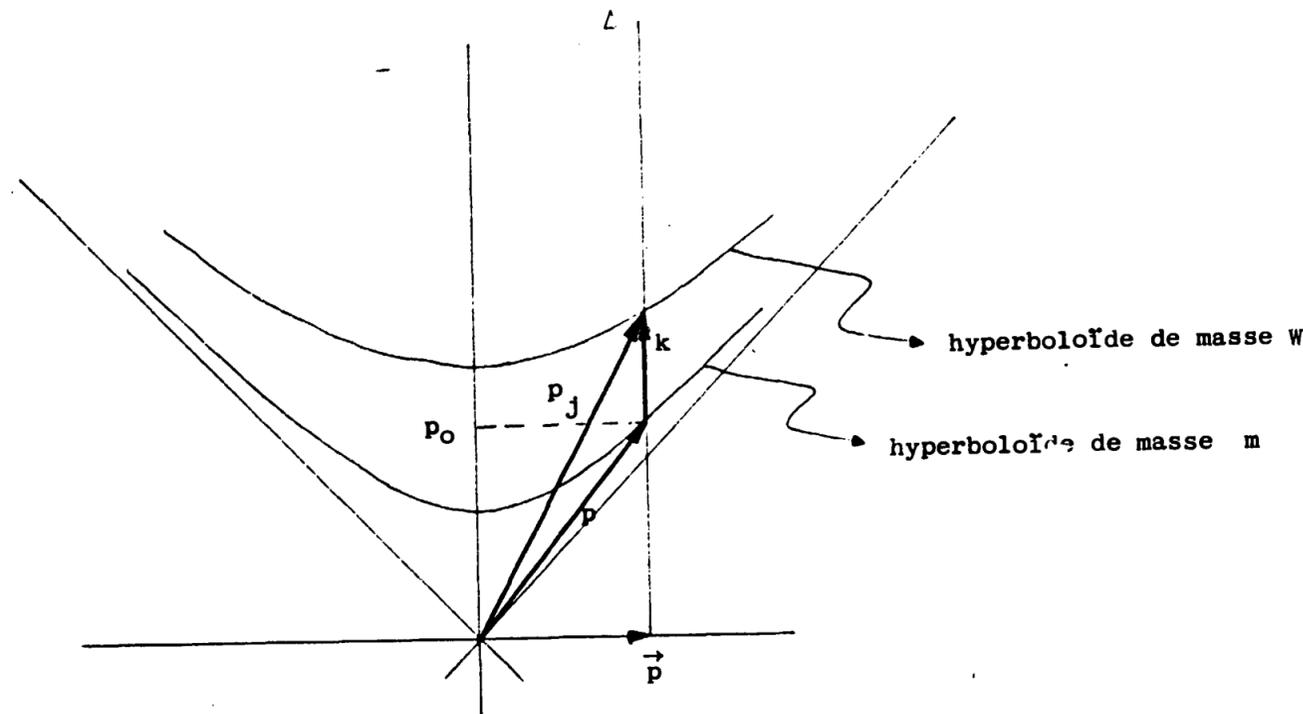


Figure (IV.1)

Sur la figure (IV.1), ont été tracés le vecteur p , ainsi que les vecteurs p_j ($\vec{p}_j = \vec{p}$) et k , correspondant à une masse W donnée. Il apparaît clairement que lorsque W varie de $(m+\mu)$ à l'infini, le vecteur k , parallèle à l'axe des temps, devient arbitrairement grand (l'extrémité du vecteur p_j se déplace sur la droite Δ). Il est non moins clair, que, à W fixé, lorsque \vec{p} et p_0 tendent vers l'infini, le vecteur k tend vers zéro, la droite Δ

* L'accord numérique peut être considéré comme remarquable. Il montre clairement que si l'on se limite à une algèbre construite à partir des seuls courants, vecteur et axial, il faut introduire un signe + dans la relation III.15, comme nous l'avons fait alors qu'un signe - aurait été possible. Ce second choix conduirait en fait à un groupe de symétrie non compact.

se déplaçant à l'infini, parallèlement à l'axe des temps.

Le second membre de la formule de Adler et Weisberger se présente comme une relation de dispersion. C'est en fait, et cela apparaîtra dans la seconde démonstration que nous donnerons de cette formule, une relation de dispersion vers l'avant, écrite pour des pions en dehors de leur couche de masse. Ceci ne constitue pas cependant une démonstration de cette relation de dispersion. La relation obtenue n'est valable qu'en un point (pion d'énergie nulle).

2) Méthode des singularités proches :

Nous partirons cette fois-ci, de la transformée de Fourier de l'élément de matrice, entre des états à un proton, du produit retardé de deux opérateurs de courant axial : j_μ^{A1} et j_ν^{AJ} :

$$T_{\mu\nu}^{1j}(p', q'; p, q) = \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | R \left\{ j_\mu^{A1}(x), j_\nu^{AJ}(0) \right\} | p \rangle \quad (IV.28)$$

le produit retardé de deux opérateurs est défini par :

$$R \{ A(x), B(y) \} = i \theta(x_0 - y_0) [A(x), B(y)] . \quad (IV.29)$$

Pour que (IV.28) soit défini mathématiquement, nous considérerons l'élément de matrice du produit retardé comme une distribution tempérée^[4]. Dans ces conditions, contractons les deux membres de (IV.28) avec le vecteur q'^μ :

$$q'^\mu T_{\mu\nu}^{1j} = -i \int d_4x (\partial^\mu e^{iq'x}) \langle p' | R \left\{ j_\mu^{A1}(x), j_\nu^{AJ}(0) \right\} | p \rangle . \quad (IV.30)$$

Intégrons par parties le second membre de (IV.30). La théorie des distributions tempérées^[4] nous apprend que cela est toujours possible, et qu'il ne s'introduit pas de "terme de surface" :

$$q'^\mu T_{\mu\nu}^{1j} = i \int d_4x e^{iq'x} \partial^\mu \langle p' | R \left\{ j_\mu^{A1}(x), j_\nu^{AJ}(0) \right\} | p \rangle . \quad (IV.31)$$

Il apparaît ainsi la dérivée du produit retardé, qui comporte deux termes : l'un est le produit retardé de la divergence $\partial^\mu j_\mu^{A1}(x)$ avec le courant

$J_v^{Aj}(0)$, l'autre est un commutateur à temps égaux, qui est dû à la dérivation de la distribution $\theta(x_0)$:

$$q'^{\mu} T_{\mu\nu}^{1j} = i \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | R \left\{ \partial^{\mu} J_{\mu}^{A1}(x), J_v^{Aj}(0) \right\} | p \rangle + \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | \delta(x_0) \left[J_0^{A1}(x), J_v^{Aj}(0) \right] | p \rangle \quad (IV.32)$$

Donnons des noms à ces deux termes :

$$t_v^{1j} = i \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | R \left\{ \partial^{\mu} J_{\mu}^{A1}(x), J_v^{Aj}(0) \right\} | p \rangle \quad (IV.33)$$

$$F_v^{1j} = \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | \delta(x_0) \left[J_0^{A1}(x), J_v^{Aj}(0) \right] | p \rangle$$

La relation (IV.31) s'écrit :

$$t_v^{1j} - q'^{\mu} T_{\mu\nu}^{1j} = F_v^{1j} \quad (IV.34)$$

Avant d'examiner cette relation, recensons les variables du problème. Les amplitudes $T_{\mu\nu}^{1j}$ et t_v^{1j} sont des fonctions des quatre quadrivecteurs p, q, p', q' reliés par :

$$p + q = p' + q' \quad (IV.35)$$

Nous choisirons comme variables, les trois variables de Mandelstam :

$$\begin{aligned} s &= (p+q)^2 \\ t &= (p'-p)^2 \\ u &= (p'-q)^2 \end{aligned} \quad (IV.36)$$

et les 4 carrés des masses : $p^2 = p'^2 = m^2$, q^2 et q'^2 . Ces sept variables sont reliées par :

$$s + t + u = p^2 + p'^2 + q^2 + q'^2 \quad (IV.37)$$

p^2 et p'^2 étant fixés et égaux à m^2 , il reste quatre variables, par exemple s, t, q^2 et q'^2 . Les amplitudes $T_{\mu\nu}^{1j}$ et t_v^{1j} (ou plutôt les amplitudes invariantes obtenues dans la décomposition de $T_{\mu\nu}^{1j}$ et T_v^{1j}), sont ainsi fonctions de ces quatre variables. En revanche, à cause de la localité des courants, le commutateur dans F_v^{1j} a son support en $x = 0$. En conséquence, la dépendance en q' de F_v^{1j} ne peut venir que des termes éventuels de Schwinger. Ces termes sont des polynômes dans les composantes d'espace du vecteur q' , et ils tendent vers zéro avec q' . Comme nous ferons plus tard $q' = 0$, nous pouvons purement et simplement les oublier, et écrire F_v^{1j} comme une fonction de la seule variable t :

$$t_v^{1j}(s, t; q^2, q'^2) - q'^{\mu} T_{\mu\nu}^{1j}(s, t; q^2, q'^2) = F_v^{1j}(t) \quad (IV.38)$$

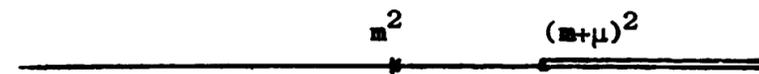
(il est bien entendu que la dépendance en s, t, q^2, q'^2 est celle des amplitudes invariantes, et non celle de $t_v^{1j} \dots$).

La relation (IV.38) impose des conditions très fortes sur les amplitudes t et T . En effet, le premier membre est une fonction de quatre variables, tandis que le second ne dépend que de t . Cela signifie, en particulier, que toute singularité en s, q^2 ou q'^2 apparaissant dans t_v^{1j} , doit se retrouver avec le même poids dans $q'^{\mu} T_{\mu\nu}^{1j}$. Pour exploiter ces conditions, nous devons connaître les singularités des amplitudes t et T . Les singularités minima sont, dans les plans q^2 et q'^2 , un pôle à la masse carrée du pion et une coupure commençant à $9\mu^2$:



figure(IV.2)

et dans le plan s , un pôle à la masse carrée du nucléon et une coupure commençant à $(m+\mu)^2$:



figure(IV.3)

Dans les amplitudes t et T nous distinguerons différents termes ayant, soit les trois pôles en $q^2 = q'^2 = \mu^2$ et $s = m^2$, soit deux de ces trois pôles, soit un seul, soit aucun. A chacun de ces termes nous associerons un graphe. Ainsi $T_{\mu\nu}^{ij}$ se décompose de la façon suivante :

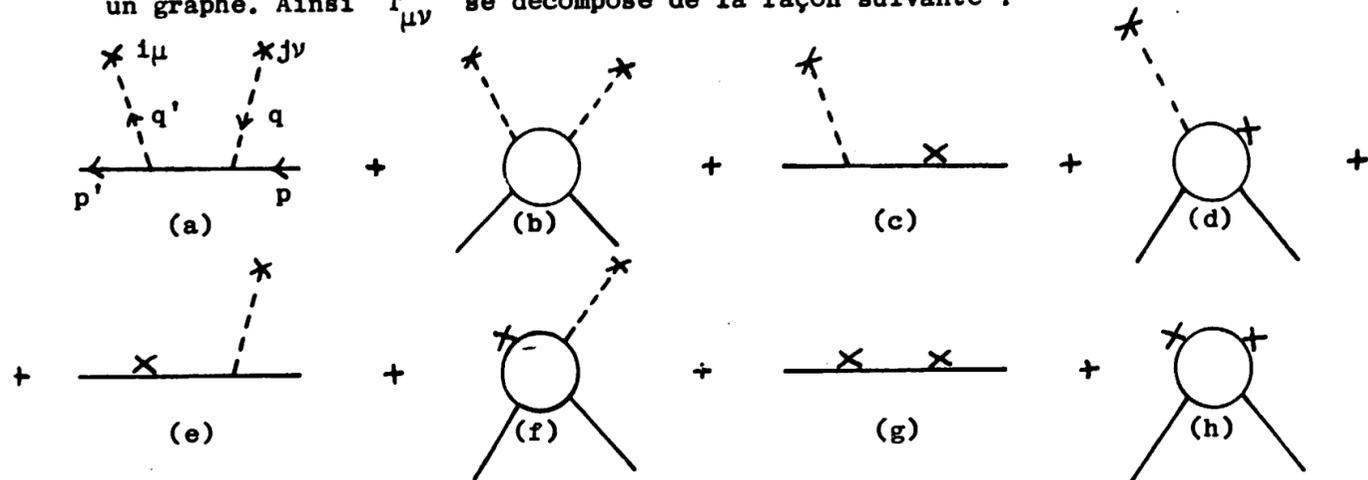


Figure (IV,4)

où, par exemple, le premier graphe (a) a simultanément les trois pôles, et le quatrième (d) n'a que le pôle en $q'^2 = \mu^2$. De la même façon t_{ν}^{ij} se décompose suivant :

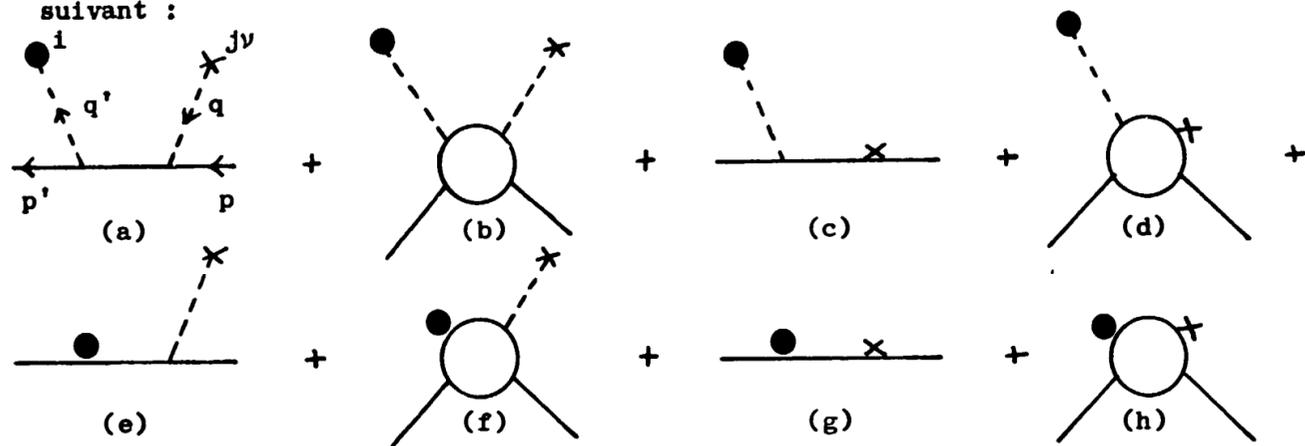


Figure (IV,5)

Le symbole $\times \text{---}$ représente la partie du courant axial j_{μ}^{Ai} qui est couplée au champ du pion, tandis que le symbole \times représente le reste de j_{μ}^{Ai} . Les symboles $\bullet \text{---}$ et \bullet ont la même signification pour la divergence $\partial^{\mu} j_{\mu}^{Ai}$. Remarquons tout de suite, que CDDP consiste à négliger les quatre derniers graphes (IV.5; e, f, g, h) dans lesquels la divergence $\partial^{\mu} j_{\mu}^{Ai}$ n'est pas couplée par l'intermédiaire du champ du pion.

Séparons tout d'abord les pôles en q^2 et q'^2 . Le couplage du courant axial j_{μ}^{Ai} avec le pion, est, par définition (voir éq. (II.14)):

$$\langle 0 | j_{\mu}^{Ai}(0) | \Pi^i(q) \rangle = i f_{\pi} q_{\mu} \quad (IV.39)$$

Ceci permet d'écrire le courant axial sous la forme :

$$j_{\mu}^{Ai}(x) = - f_{\pi} \partial_{\mu} \Phi_{\pi}^i(x) + \tilde{j}_{\mu}^{Ai}(x) \quad (IV.40)$$

où $\Phi_{\pi}^i(x)$ est le champ du pion, et où $\tilde{j}_{\mu}^{Ai}(x)$ est la partie du courant axial, qui n'est pas couplée au pion. De (IV.40) on déduit aisément que l'on peut, dans l'expression (IV.28) de $T_{\mu\nu}^{ij}$, effectuer les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} j_{\mu}^{Ai}(x) &\longrightarrow f_{\pi} i q_{\mu} \Phi_{\pi}^i(x) + \tilde{j}_{\mu}^{Ai}(x) \\ j_{\nu}^{Aj}(0) &\longrightarrow - f_{\pi} i q_{\nu} \Phi_{\pi}^j(0) + \tilde{j}_{\nu}^{Aj}(0) \end{aligned} \quad (IV.41)$$

L'amplitude $T_{\mu\nu}^{ij}$ se décompose ainsi en quatre termes, où apparaissent explicitement les pôles en q^2 et q'^2 :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{ij} = f_{\pi}^2 &\frac{q'_{\mu}}{\mu^2 - q'^2} \frac{q_{\nu}}{\mu^2 - q^2} M^{ij}(s, t; q^2, q'^2) + f_{\pi} \frac{q'_{\mu}}{\mu^2 - q'^2} \Lambda_{\nu}^{ij}(s, t; q^2, q'^2) + \\ &+ f_{\pi} \frac{q_{\nu}}{\mu^2 - q^2} \bar{\Lambda}_{\mu}^{ij}(s, t; q^2, q'^2) + R_{\mu\nu}^{ij}(s, t; q^2, q'^2) \end{aligned} \quad (IV.42)$$

On a posé, par définition :

$$M^{ij}(s, t; q^2, q'^2) = (\mu^2 - q^2)(\mu^2 - q'^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | \mathcal{R} \{ \Phi_{\pi}^i(x), \Phi_{\pi}^j(0) \} | p \rangle \quad (IV.43)$$

$$\Lambda_{\nu}^{ij}(s, t; q^2, q'^2) = i(\mu^2 - q'^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | \mathcal{R} \{ \Phi_{\pi}^i(x), \tilde{j}_{\nu}^{Aj}(0) \} | p \rangle \quad (IV.44)$$

$$\bar{\Lambda}_{\mu}^{ij}(s, t; q^2, q'^2) = -i(\mu^2 - q^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | \mathcal{R} \{ \tilde{j}_{\mu}^{Ai}(x), \Phi_{\pi}^j(0) \} | p \rangle \quad (IV.45)$$

$$R_{\mu\nu}^{ij}(s, t; q^2, q'^2) = \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | \mathcal{R} \{ \tilde{j}_{\mu}^{Ai}(x), \tilde{j}_{\nu}^{Aj}(0) \} | p \rangle \quad (IV.46)$$

Dans M^{ij} nous reconnaissons l'amplitude de diffusion Π -Nucleon, définie pour des pions hors de leur couche de masse. Plus précisément l'amplitude physique est la limite (non nulle malgré les facteurs $(\mu^2 - q^2)$ et $(\mu^2 - q'^2)$) de

$M^{1j}(s,t;q^2,q'^2)$, lorsque q^2 et q'^2 tendent vers μ^2 . La fonction Λ_v^{1j} représente l'amplitude de production d'un pion, par diffusion d'un nucléon dans un champ extérieur axial couplé au courant J^A . La fonction $\bar{\Lambda}_\mu^{1j}$ est reliée à Λ_v^{1j} par le croisement :

$$\bar{\Lambda}_\mu^{1j}(s,t;q^2,q'^2) = \Lambda_\mu^{j1}(u,t;q'^2,q^2) \quad (IV.47)$$

La fonction $R_{\mu\nu}^{1j}$ représente la double diffusion d'un nucléon dans le même champ extérieur axial, couplé au courant J^A .

Revenons, maintenant, à la figure (IV.4). Nous reconnaissons dans les quatre termes successifs de (IV.42), les contributions des graphes (IV.4,a et b), (IV.4,c et d), (IV.4,e et f) et (IV.4,g et h).

La séparation des pôles en q^2 et q'^2 dans l'amplitude t_v^{1j} est plus simple, à cause de CADDP :

$$\partial^\mu J_\mu^{A1}(x) = f_\pi \mu^2 \varphi^1(x) \quad (IV.48)$$

Il vient aisément :

$$t_v^{1j}(s,t;q^2,q'^2) = f_\pi^2 \frac{\mu^2}{\mu^2 - q'^2} \frac{q_\nu}{\mu^2 - q^2} M^{1j}(s,t;q^2,q'^2) + f_\pi \frac{\mu^2}{\mu^2 - q'^2} \Lambda_v^{1j}(s,t;q^2,q'^2) \quad (IV.49)$$

Le premier terme correspond aux graphes (IV.5,a et b), le second aux graphes (IV.5, c et d).

Remplaçons $T_{\mu\nu}^{1j}$ et t_v^{1j} par leurs expressions (IV.42,49), dans la relation (IV.38). Nous obtenons :

$$f_\pi \frac{q_\nu}{\mu^2 - q'^2} \left\{ f_\pi M^{1j} - q'^\mu \bar{\Lambda}_\mu^{1j} \right\} + f_\pi \Lambda_v^{1j} - q'^\mu R_{\mu\nu}^{1j} - F_v^{1j} = 0 \quad (IV.50)$$

Il est important de remarquer ici, que le pôle en $q'^2 = \mu^2$ a disparu automatiquement. Cela vient de ce que nous connaissons déjà le facteur de proportionnalité exact, entre $\partial^\mu J_\mu^{A1}(x)$ et le champ du pion, dans l'expression

(IV.48) de CADDP. En revanche, le pôle en $q^2 = \mu^2$ reste. Nous devons donc écrire que son résidu est nul, ce qui donne le résultat suivant :

$$f_\pi M^{1j}(s,t;\mu^2, q'^2) = q'^\mu \bar{\Lambda}_\mu^{1j}(s,t;\mu^2, q'^2) \quad (IV.51)$$

Cette relation est écrite au point $q^2 = \mu^2$. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire qu'elle est encore valable dans un voisinage de $q^2 = \mu^2$, allant au moins jusqu'à $q^2 = 0$:

$$f_\pi M^{1j}(s,t;q^2, q'^2) = q'^\mu \bar{\Lambda}_\mu^{1j}(s,t;q^2, q'^2) \quad (IV.52)$$

En fait, on s'attend à ce que les deux membres de (IV.52) soient, au moins pour les valeurs de s,t et q'^2 qui nous intéresseront par la suite, des fonctions analytiques en q^2 , dans un plan coupé de $9\mu^2$ à l'infini. Dans ces conditions, il n'est pas déraisonnable de supposer qu'ils varient peu, lorsque q^2 varie de μ^2 à zéro, les variables s,t et q'^2 étant fixées. Ceci reste cependant une hypothèse, non dépourvue d'ailleurs d'ambiguïté, car il faut préciser arbitrairement les variables qui restent fixes, lorsque q^2 varie de μ^2 à zéro [5] *.

Cette hypothèse nous permet de scinder l'équation (IV.50) en deux équations, d'une part (IV.52), d'autre part :

$$f_\pi \Lambda_v^{1j}(s,t;q^2, q'^2) = F_v^{1j}(t) + q'^\mu R_{\mu\nu}^{1j}(s,t;q^2, q'^2) \quad (IV.53)$$

De ces deux équations, nous pouvons éliminer Λ et $\bar{\Lambda}$, et exprimer l'amplitude π -Nucléon M^{1j} en fonction de F_v^{1j} et $R_{\mu\nu}^{1j}$. L'algèbre des courants donne F_v^{1j} mais $R_{\mu\nu}^{1j}$ reste inconnu. Pour l'éliminer, il est nécessaire de se placer à $q' = 0$. Cependant, on ne peut faire tendre brutalement q' vers zéro dans (IV.53), car, dans cette limite, M , Λ , $\bar{\Lambda}$ et R deviennent infinis. Ceci est dû aux graphes (IV.4, a,c,e et g), le nucléon intermédiaire étant sur sa couche de masse lorsque $q' \rightarrow 0$. Il faut donc commencer par séparer, dans M , Λ , $\bar{\Lambda}$ et R , les contributions de l'état intermédiaire à un nucléon, de celles des autres états.

* Nous reviendrons en détail sur cette hypothèse. Elle revient à négliger le champ du σ défini par : $\delta(x_0) [J_0^{A1}(x), \partial^\mu J_\mu^{Aj}(0)] = if_\pi \mu^2 \sigma^{1j}(x) \delta^4(x)$. Nous verrons qu'elle est justifiée chaque fois qu'apparaît une masse lourde par rapport à celle du méson π , ce qui est le cas ici.

Précisons, tout d'abord, les états de charge i et j des pions entrant et sortant : $i = (1+i2)/\sqrt{2}$ et $j = (1-i2)/\sqrt{2}$. Avec ce choix, M^{ij} est l'amplitude de diffusion élastique $M_{\pi-p}$ de pions négatifs sur protons. Il vient alors :

$$M_{\pi-p}(s,t;q^2,q'^2) = - (g\sqrt{2})^2 K(q^2)K(q'^2)\bar{u}(p')i\gamma_5 \frac{p+q+m}{s-m} i\gamma_5 u(p) + \tilde{M}_{\pi-p}(s,t;q^2,q'^2) \quad (IV.54)$$

$g\sqrt{2} i\gamma_5$ est le couplage pion chargé-nucléon, $K(q^2)$ est le facteur de forme pion-nucléon précédemment défini (voir équation (II.28)), le facteur $-(p+q+m)/(s-m)$ est le propagateur du nucléon intermédiaire, et $\tilde{M}_{\pi-p}$ est la contribution (régulière à $s=m^2$) des états intermédiaires autres que l'état à un nucléon. De façon analogue, on a :

$$\bar{\Lambda}_{\mu}^{+-}(s,t;q^2,q'^2) = i g\sqrt{2} K(q^2) \frac{G_A(q'^2)}{\sqrt{2}} \bar{u}(p') \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{p+q+m}{s-m} i\gamma_5 u(p) + \tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(s,t;q^2,q'^2) \quad (IV.55)$$

$$\Lambda_{\nu}^{+-}(s,t;q^2,q'^2) = - i g\sqrt{2} K(q'^2) \frac{G_A(q^2)}{\sqrt{2}} \bar{u}(p') i\gamma_5 \frac{p'+q'+m}{s-m} \gamma_{\nu} \gamma_5 u(p) + \tilde{\Lambda}_{\nu}^{+-}(s,t;q^2,q'^2) \quad (IV.56)$$

où, pour ne pas compliquer l'écriture, nous avons négligé le terme pseudo-scalaire en $q_{\mu} \gamma_5$ dans le couplage du courant axial j_{μ}^A avec les nucléons, et retenu seulement le terme axial $\gamma_{\mu} \gamma_5 G_A(q^2)/\sqrt{2}$ (le terme pseudo-scalaire s'annule avec q , et disparaît de toute façon du résultat final). Les amplitudes $\tilde{\Lambda}$ et \tilde{M} sont régulières à $s=m^2$, et le croisement donne la relation :

$$\tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(s,t;q^2,q'^2) = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(u,t;q'^2,q^2) \quad (IV.57)$$

Enfin :

$$R_{\mu\nu}^{+-}(s,t;q^2,q'^2) = - \frac{1}{2} G_A(q^2) G_A(q'^2) \bar{u}(p') \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{p+q+m}{s-m} \gamma_{\nu} \gamma_5 u(p) + \tilde{R}_{\mu\nu}^{+-}(s,t;q^2,q'^2) \quad (IV.58)$$

Avec les quatre équations (IV.54,55,56,58), qui séparent dans les amplitudes M , Λ , $\bar{\Lambda}$ et R , la contribution du pôle à $s=m^2$ d'un terme régulier, nous avons terminé la décomposition de $T_{\mu\nu}^{ij}$ en huit termes, correspondant aux huit graphes (IV.4), ainsi que celle de t_{ν}^{ij} en quatre termes, correspondant aux quatre premiers graphes (IV.5).

Remplaçons maintenant $M_{\pi-p}$ et $\bar{\Lambda}^{+-}$ par leurs expressions (IV.54,55) dans la relation (IV.52). Après quelques calculs, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{2g K(q^2)}{s-m^2} \left\{ f_{\pi} g K(q'^2) - m G_A(q'^2) \right\} \bar{u}(p') \not{q} u(p) + g K(q^2) G_A(q'^2) \bar{u}(p') u(p) + q^{\mu} \tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(u,t;q^2,q'^2) - f_{\pi} \tilde{M}_{\pi-p}(s,t;q^2,q'^2) = 0 \quad (IV.59)$$

(pour arriver à cette équation, on a fait usage de la relation $\bar{u}(p') \not{q}' \not{q} u(p) = \bar{u}(p') (-2m \not{q} + s-m^2) u(p)$). Le premier membre de (IV.59) contient un terme singulier en $s=m^2$, et des termes réguliers. Le pôle en $s=m^2$ doit disparaître, ce qui donne la relation suivante (écrite à $q'^2 = 0$) :

$$f_{\pi} = \frac{m G_A(0)}{g K(0)} \quad (IV.60)$$

Nous reconnaissons là, la relation de Goldberger et Treiman, qui apparaît ainsi comme l'une des contraintes imposées par (IV.38).

L'équation (IV.59), amputée de son terme de pôle, devient :

$$f_{\pi} \tilde{M}_{\pi-p}(s,t;q^2,q'^2) = g K(q^2) G_A(q'^2) \bar{u}(p') u(p) + q^{\mu} \tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(u,t;q^2,q'^2) \quad (IV.61)$$

Vers l'avant ($p=p'$, $q=q'$, $t=0$), cette relation s'écrit :

$$f_{\pi} \tilde{M}_{\pi-p}(s,0;q^2,q^2) = g K(q^2) G_A(q^2) + q^{\mu} \tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(u,0;p^2,q^2) \quad (IV.62)$$

Les amplitudes \tilde{M} et $\tilde{\Lambda}$ sont régulières à $q=0$. Lorsque $q \rightarrow 0$, $s \rightarrow m^2$, et (IV.62) devient :

$$f_{\pi} \tilde{M}_{\pi-p}(m^2, 0; 0, 0) = g K(0) G_A(0) \quad (IV.63)$$

ce qui, en tenant compte de la relation de Goldberger et Treiman, peut s'écrire :

$$\tilde{M}_{\pi-p}(m^2, 0; 0, 0) = \frac{2}{m} K(0)^2 \quad (IV.64)$$

Cette "relation de consistance", démontrée par Adler^[6], ne fait intervenir que les interactions fortes, à l'exclusion des interactions faibles. Elle est, de plus, indépendante de l'algèbre des courants (tout comme (IV.60) d'ailleurs). En effet, à aucun moment, nous n'avons fait usage de la forme explicite de F_{ν}^{ij} . Nous avons seulement utilisé le fait que F_{ν}^{ij} est régulier en s , q^2 et q'^2 (ce qui résulte de la localité des courants), ainsi que l'hypothèse CDDP, et l'hypothèse supplémentaire qui nous a amenés à (IV.52). La relation (IV.64) est importante, car elle fixe la constante de soustraction qui intervient dans la relation de dispersion que satisfait l'amplitude π -Nucléon vers l'avant $M_{\pi-p}(s, 0; 0, 0)$. Selon Adler^[6], elle est vérifiée à 10 % près par les résultats expérimentaux.

De (IV.62), nous pouvons encore tirer l'expression de la fonction $\tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(u, 0; q^2, q'^2)$, au point $q = 0$, $u = m^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\mu}^{+-}(m^2, 0; 0, 0) &= f_{\pi} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; 0, 0) \Big|_{s=m^2} \\ &= 2 p_{\mu} f_{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; 0, 0) \Big|_{s=m^2} \end{aligned} \quad (IV.65)$$

Remplaçons maintenant Λ et R par leurs expressions (IV.56, 58) dans la relation (IV.53). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{G_A(q^2)}{s-m^2} \left\{ f_{\pi} g K(q'^2) - m G_A(q'^2) \right\} \bar{u}(p') \not{q}' \gamma_{\nu} u(p) + f_{\pi} \tilde{\Lambda}_{\nu}^{+-}(s, t; q^2, q'^2) + \\ + \frac{1}{2} G_A(q^2) G_A(q'^2) \bar{u}(p') \gamma_{\nu} u(p) - F_{\nu}^{+-}(t) - q'^{\mu} \tilde{R}_{\mu\nu}^{+-}(s, t; q^2, q'^2) = 0 \end{aligned} \quad (IV.66)$$

(pour arriver à cette équation, on a fait usage de la relation $\bar{u}(p') \not{q}' (\not{p}' + \not{q}' - m) \gamma_{\nu} u(p) = \bar{u}(p') (-2 m \not{q}' + s - m^2) \gamma_{\nu} u(p)$).

La disparition du pôle en $s=m^2$ redonne la formule de Goldberger et Treiman. Ceci étant, il reste :

$$\begin{aligned} f_{\pi} \tilde{\Lambda}_{\nu}^{+-}(s, t; q^2, q'^2) &= F_{\nu}^{+-}(t) - \frac{1}{2} G_A(q^2) G_A(q'^2) \bar{u}(p') \gamma_{\nu} u(p) + \\ &+ q'^{\mu} \tilde{R}_{\mu\nu}^{+-}(s, t; q^2, q'^2) \end{aligned} \quad (IV.67)$$

Vers l'avant, et pour $q = q' = 0$, on obtient :

$$f_{\pi} \tilde{\Lambda}_{\nu}^{+-}(m^2, 0; 0, 0) = F_{\nu}^{+-}(0) - \frac{1}{2} G_A(0)^2 \frac{p_{\mu}}{m} \quad (IV.68)$$

L'algèbre des courants nous apprend d'autre part que :

$$\begin{aligned} F_{\nu}^{+-}(0) &= \langle p | j_{\nu}^{v3}(0) | p \rangle \\ &= \frac{1}{2} \bar{u}(p) \gamma_{\nu} u(p) = \frac{1}{2} \frac{p_{\nu}}{m} \end{aligned} \quad (IV.69)$$

d'où :

$$f_{\pi} \tilde{\Lambda}_{\nu}^{+-}(m^2, 0; 0, 0) = \left[1 - G_A(0)^2 \right] \frac{p_{\nu}}{m} \quad (IV.70)$$

Éliminons $\tilde{\Lambda}$ entre (IV.65) et (IV.70). Tenant compte de la formule de Goldberger et Treiman, il vient :

$$1 - \left(\frac{G_V}{G_A} \right)^2 = - \left(\frac{2m}{g K(0)} \right)^2 m \frac{\partial}{\partial s} \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; 0, 0) \Big|_{s=m^2} \quad (IV.71)$$

Cette relation n'est rien d'autre que la formule de Adler et Weisberger. Toutefois, pour lui donner la forme (IV.24), il nous reste à écrire une relation de dispersion vers l'avant pour l'amplitude $M_{\pi-p}(s, 0; 0, 0)$, où les pions sont hors de leur couche de masse ($q^2 = q'^2 = 0$). De façon générale, l'amplitude $M_{\pi-p}(s, 0; q^2, q'^2)$ est une fonction analytique en s , dans le plan coupé de $s = (m+\mu)^2$ à $+\infty$, et de $u = (m+\mu)^2$ à $+\infty$ (s et u sont liés par $s+u = 2m^2 + 2q^2$) :

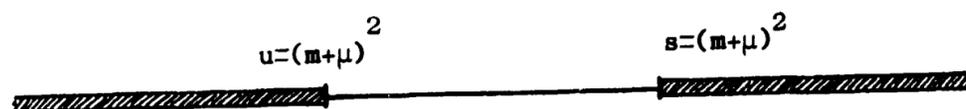


Figure (IV.6)

La discontinuité sur la coupure de droite est donnée par le théorème optique dans la voie s :

$$\text{Im } \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; q^2, q^2) \Big|_{s > (m+\mu)^2} = |\vec{q}| \frac{W}{m} \sigma_{\text{tot}}^-(s, q^2) \quad (\text{IV.72})$$

$|\vec{q}|$ est la 3-impulsion du pion incident dans le système du centre de masse total, et $\sigma_{\text{tot}}^-(s, q^2)$ est la section efficace totale πp , à l'énergie totale dans le centre de masse $s = W^2$ (équation (IV.22)). De façon analogue, la discontinuité sur la coupure de gauche est donnée par le théorème optique dans la voie croisée u :

$$\text{Im } \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; q^2, q^2) \Big|_{u > (m+\mu)^2} = |\vec{q}|_u \frac{W_u}{m} \sigma_{\text{tot}}^+(u, q^2) \quad (\text{IV.73})$$

où $u = W_u^2$.

Lorsque $q^2 = 0$: $|\vec{q}| W = \frac{s-m^2}{2}$ et $|\vec{q}|_u W_u = \frac{u-m^2}{2}$

Supposons maintenant que $\sigma_{\text{tot}}^+(s, q^2)$ et $\sigma_{\text{tot}}^-(s, q^2)$ tendent vers une limite finie lorsque $s \rightarrow \infty$, même pour des pions hors de leur couche de masse. Le théorème de Pomeranchuk nous apprend alors que cette limite est la même pour σ^+ et σ^- , ce qui nous autorise à écrire une relation de dispersion une fois soustraite pour $M_{\pi-p}$. Lorsque $q^2 = 0$, il vient, en faisant la soustraction au point $s = u = m^2$:

$$m M_{\pi-p}(s, 0; 0, 0) = \text{Cte} + \frac{s-m^2}{2\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma_{\text{tot}}^-(s', 0)}{s'-s} - \frac{\sigma_{\text{tot}}^+(s', 0)}{s'-u} \right\} ds' \quad (\text{IV.74})$$

Par dérivation par rapport à s , on en tire :

$$m \frac{\partial}{\partial s} M_{\pi-p}(s, 0; 0, 0) \Big|_{s=m^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-m^2} \left\{ \sigma_{\text{tot}}^-(s', 0) - \sigma_{\text{tot}}^+(s', 0) \right\} \quad (\text{IV.75})$$

Reportant cette expression de la dérivée de $M_{\pi-p}$ dans (IV.71), nous retrouvons la formule de Adler et Weisberger (IV.24).

Remarquons que la constante de soustraction dans (IV.74) est fixée par (IV.64), et est égale à $g^2 K(0)^2$.

Cette seconde démonstration de la formule de Adler et Weisberger amène quelques remarques. Tout d'abord, son point de départ est la règle de commutation entre deux courants axiaux, et non celle entre charges axiales. Donc, a priori, le résultat pourrait dépendre de termes éventuels de Schwinger. Nous avons vu comment la limite $q \rightarrow 0$ éliminait leur contribution.

Quant au procédé qui consiste à se placer dans un repère de moment infini, il apparaît maintenant comme une façon commode d'écrire une relation de dispersion vers l'avant, lorsque les masses carrées q^2 et q'^2 sont nulles. L'hypothèse que l'on peut intervertir la limite $p_0 \rightarrow \infty$ et l'intégrale sur dW^2 dans (IV.15), est alors équivalente à l'hypothèse que $\frac{\partial}{\partial s} M(s, 0; 0, 0)$ satisfait une relation de dispersion non soustraite. Il est clair qu'avec une soustraction (deux soustractions dans la relation de dispersion pour M), la relation (IV.71) perdait tout intérêt.

La méthode des singularités proches, exploitant toutes les contraintes contenues dans (IV.38), nous a fourni, de surcroît, la relation de Goldberger et Treiman, ainsi que la "relation de consistance" d'Adler (IV.64). Cela est très général, et nous verrons comment, dans des contextes différents, la même méthode fournit des relations du même type.

Remarquons encore la difficulté qu'il y a à faire le test de la formule de Adler et Weisberger, du fait de la masse nulle des pions. Une première approximation consiste à remplacer $\sigma^+(s, 0)$ par les sections efficaces physiques $\sigma^+(s, \mu^2)$, en introduisant au besoin des corrections cinématiques^[2]. Une seconde approximation consiste à remplacer dans le second membre de (IV.71) $M_{\pi-p}(s, 0; 0, 0)$ par l'amplitude physique $M_{\pi-p}(s, 0; \mu^2, \mu^2)$, et à écrire pour cette amplitude une relation de dispersion, faisant intervenir les sections efficaces physiques

$\sigma_{\text{tot}}^+(s, \mu^2)$. Les deux approximations ne sont pas équivalentes et diffèrent par des facteurs cinématiques dans l'intégrant. Les différences portent surtout sur le début de la coupure, qui est la région la plus importante pour l'évaluation de l'intégrale.

Il n'en reste pas moins, malgré toutes ces difficultés, que l'accord expérimental est frappant, et que la formule de Adler et Weisberger est un succès majeur au crédit de l'algèbre des courants.

REFERENCES

- [1] - S. FUBINI et G. FURLAN : Physics, 1, 229, (1965)
- [2] - S. ADLER : Phys. Rev. Letters, 14, 1051, (1965)
Phys. Rev. 140, B 736, (1965)
le deuxième article est beaucoup plus détaillé que le premier.
- [3] - W. WEISBERGER : Phys. Rev. Letters, 14, 1047, (1965)
- [4] - L. SCHWARTZ : Théorie des distributions, Hermann
- [5] - Cette ambiguïté est discutée en détail dans le deuxième article de la référence [2] .
- [6] - S. ADLER : Phys. Rev., 137, B 1022, (1965)

La méthode des singularités proches a été exposée en détail dans :

M. JACOB : Algèbre des courants et singularités proches

Rapport interne Saclay (66) non publié

M. JACOB et G. MAHOUX : Nuovo Cimento, à paraître .

GENERALISATIONS DE LA FORMULE DE ADLER ET WEISBERGER
DESINTEGRATIONS SEMI-LEPTONIQUES

Dans le chapitre précédent, nous avons traité en détail la renormalisation de la constante de couplage axiale de la désintégration du neutron. Les mêmes techniques s'appliquent aussi bien aux désintégrations leptoniques des particules étranges, hyperons et mésons K . La première partie de ce chapitre est consacrée aux hyperons, ainsi qu'à une généralisation de la formule de Adler et Weisberger ne faisant intervenir que les mésons π ; la seconde partie traite des désintégrations leptoniques et semi-leptoniques des mésons. Le chapitre se termine sur une application de l'algèbre des courants à des processus électromagnétiques.

1) Désintégrations semi-leptoniques des hyperons

Les deux seules désintégrations semi-leptoniques qui nous intéresseront maintenant, sont celles du Λ et du Σ^- :

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \\ \Sigma^- &\rightarrow n + e^- + \bar{\nu} \end{aligned} \quad (V.1)$$

Nous avons besoin de généraliser l'hypothèse CADDP aux mésons K . Dans le cadre de la symétrie SU(3) , cette extension se fait naturellement, mais nous avons vu (chapitre II, page 19) qu'elle était a priori beaucoup moins justifiée que CADDP .

Il nous faut connaître encore l'expression de l'élément de matrice d'une composante de l'octet des courants axiaux, entre deux états à un baryon (voir appendice B) :

$$\begin{aligned} \langle B^\alpha(p') | J_\mu^{AY}(0) | B^\beta(p) \rangle = \\ = G_A \left[(1-\alpha) f_{\alpha\beta\gamma} + \alpha d_{\alpha\beta\gamma} \right] \bar{u}(p') \gamma_\mu \gamma_5 u(p) \end{aligned} \quad (V.2)$$

Dans cette formule, apparaissent les couplages F et D de SU(3) .

Nous avons négligé le terme pseudo-scalaire, ainsi que la dépendance en $(p'-p)^2$ du facteur de forme G_A . Si la théorie de la symétrie unitaire SU(3) est correcte, G_A est le même pour toutes les désintégrations semi-leptoniques des hyperons, et, en particulier, est identique à la quantité calculée dans la relation de Adler et Weisberger. Quant à l'expression du courant faible axial, elle est donnée par la théorie de Cabibbo (équation (II.5)).

Lorsque l'on généralise les calculs du chapitre précédent aux deux réactions (V.1), il apparaît les amplitudes de diffusion K^\pm - Nucléon, pour lesquelles nous devons écrire des relations de dispersion. Malheureusement, une difficulté supplémentaire s'introduit ici, car ces amplitudes possèdent des seuils anormaux dus aux états intermédiaires $\pi \Lambda$ et $\pi \Sigma$. Il nous faut donc trouver une approximation à la partie absorptive de l'amplitude KN en dessous du seuil, en utilisant un modèle phénoménologique, au lieu du théorème optique. La méthode consiste à prendre, pour les ondes S, une formule de portée effective, avec une longueur de diffusion complexe^[1]; pour les ondes P, on retient la contribution de la résonance $Y_1^*(1385)$, appartenant à un décuplet de SU(3). On peut espérer ainsi une approximation de l'ordre de 20%.

Les deux règles de somme^[2], que l'on peut comparer avec l'expérience, correspondent aux voies K-Nucléon chargées et neutres. Elles s'écrivent :

$$\left(\frac{G_V}{G_A}\right)^2 - (1-2\alpha)^2 = \frac{2m^2}{\pi g^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \left\{ A_{K^-n}(\nu) - A_{K^+n}(\nu) \right\} \quad (V.3)$$

$$\left(\frac{G_V}{G_A}\right)^2 - \left(1-2\alpha + \frac{4}{3}\alpha^2\right) = \frac{m^2}{\pi g^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \left\{ A_{K^-p}(\nu) - A_{K^+p}(\nu) \right\} ,$$

où ν est l'énergie du méson K incident, dans le centre de masse total, ν_0 est l'énergie correspondant au seuil $\Lambda \pi$, et A_{KN} est la partie absorptive l'amplitude K-Nucléon, pour des mésons K de masse nulle.

Le calcul, précédemment indiqué, des intégrales dans (V.3), donne deux solutions en α et (G_A/G_V) :

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha = 0 & , \quad (G_A/G_V) = 0,85 \\ \text{b) } \alpha = 0,75 \pm 0,10 & , \quad (G_A/G_V) = 1,28 \pm 0,10 \end{aligned} \quad (V.4)$$

La première solution est à rejeter, car elle infirme la théorie de

* Ces résultats sont obtenus d'une façon identique à celle que nous avons décrite en détail pour la relation de Adler-Weisberger. Nous nous limitons donc à l'écriture du résultat.

Cabibbo, et est en désaccord avec la valeur expérimentale de (G_A/G_V) . La seconde solution, en revanche, est en accord avec la valeur expérimentale du rapport $D/(F+D)$ dans les désintégrations leptoniques des hyperons, qui est $(0,76 \pm 0,04)$; de plus, elle donne une valeur correcte pour la constante de renormalisation G_A/G_V ^[2].

D'autres types de relations peuvent être obtenues de la même façon que la relation de Adler et Weisberger. Adler^[3] a proposé de tester la validité des relations de commutation (III.15), en considérant leurs éléments de matrice entre des états à un méson π . On est alors conduit à une relation entre $(G_A/G_V)^2$ et les sections efficaces totales $\pi \pi$. Il existe cependant une différence essentielle avec le cas du chapitre précédent : il n'apparaît pas d'état intermédiaire à un pion, car $\langle \pi | j_\mu^A | \pi \rangle = 0$, à cause de la conservation de la parité. Une première difficulté apparaît du fait de notre méconnaissance des sections efficaces $\pi \pi$, que l'on doit alors calculer de façon approchée en utilisant les résonances connues. Une seconde difficulté vient de ce que l'on est obligé de traiter de façon dissymétrique les quatre pions, deux d'entre eux seulement restant sur leur couche de masse.

Désignant par $\sigma_{tot}^\pm(W^2, 0)$ la section efficace totale de diffusion d'un pion π^\pm de masse nulle, sur un pion π^+ physique, la règle de somme cherchée s'écrit :

$$2 \left(\frac{G_V}{G_A}\right)^2 = \left(\frac{2m}{gK(0)}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{2\mu}^{\infty} \frac{dW^2}{W^2 - \mu^2} \left\{ \sigma_{tot}^-(W^2, 0) - \sigma_{tot}^+(W^2, 0) \right\} \quad (V.5)$$

Ce résultat est à comparer avec (IV.24). La différence essentielle tient dans l'absence du 1 dans le premier membre de (V.5). Si l'on recherche l'origine de ce 1 dans (IV.24), on s'aperçoit aisément qu'il vient de l'état intermédiaire à un nucléon. Dans le cas qui nous préoccupe ici, il n'y a pas d'état intermédiaire à une particule, d'où l'absence du 1. Quant au facteur 2 devant $(G_V/G_A)^2$ dans le premier membre de (V.5), il vient de ce que $I_3 = 1$ pour un π^+ , au lieu de 1/2 pour un proton.

On peut évaluer les intégrales dans (V.5) en supposant que les voies $I = 0$ et 1 sont dominées par les résonances f_0 et ρ . Ce faisant, on néglige σ_{tot}^+ qui est $I = 2$ pur.

Les effets dûs aux prolongements dans les masses de deux des pions, sont difficiles à estimer. La contribution de l'onde partielle ℓ s'annule au seuil comme $q^{2\ell}$, où q est l'impulsion dans le centre de masse. Ceci suggère de corriger la section efficace physique $\sigma_{\text{tot}}^{\ell}(W^2, \mu^2)$ par un facteur $(q'/q)^{2\ell}$, et d'écrire :

$$\sigma_{\text{tot}}^{\ell}(W^2, 0) = (q'/q)^{2\ell} \sigma_{\text{tot}}^{\ell}(W^2, \mu^2)$$

$$\left(\frac{q'}{q}\right)^{2\ell} = \left[\frac{(W^2 - \mu^2)^2}{W^2 (W^2 - 4\mu^2)} \right]^{\ell} \quad (\text{V.6})$$

On obtient ainsi-pour $2(G_V/G_A)^2$ la valeur 0,53, le ρ contribuant pour 0,42 et le f_0 pour 0,11. Or le résultat expérimental est 1,43. On peut attribuer ce désaccord à une forte onde S, $T = 0$, dans la diffusion $\pi\text{-}\pi$ à basse énergie. Si l'on décrit l'amplitude correspondante à l'aide d'une longueur de diffusion, on est amené, pour cette longueur de diffusion, à la valeur de 1,3 longueurs d'onde de Compton de pion.*

2) Désintégrations leptoniques et semi-leptoniques des mésons

Nous avons vu comment l'algèbre des courants et l'hypothèse CADDP permettent de relier deux processus ne différant que par l'émission d'un méson π : $A \rightarrow B$ et $A \rightarrow B + \pi$. Dans les mêmes conditions, en utilisant les règles de commutation (III.14) de la forme $[Q^V, Q^A] = Q^A$, nous pourrions relier les processus leptoniques suivants: [4]

$$\begin{aligned} \pi &\rightarrow \text{paire de leptons} \\ K &\rightarrow \text{paire de leptons} \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

aux processus semi-leptoniques :

$$\begin{aligned} \pi &\rightarrow \pi^0 + \text{paire de leptons} \\ K &\rightarrow \pi^0 + \text{paire de leptons.} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Puis, utilisant cette fois-ci les règles de commutation (III.15) de la forme $[Q^A, Q^A] = Q^V$, nous relierons entre eux les processus semi-leptoniques suivants que nous ne traiterons qu'au chapitre VII.

$$K \rightarrow \pi + \text{paire de leptons} \quad (\text{V.9})$$

$$K \rightarrow 2\pi + \text{paire de leptons} .$$

* Ceci est en accord avec certaines estimations de l'interaction $\pi\pi$ à basse énergie. Ce n'est bien sûr pas la seule solution !

Les désintégrations (V.7) font intervenir les éléments de matrice de courants axiaux $\langle 0 | j_{\mu}^A | \pi \rangle$ et $\langle 0 | j_{\mu}^A | K \rangle$, tandis que les désintégrations (V.8) sont décrites par les éléments de matrice de courants vecteurs $\langle \pi^0 | j_{\mu} | \pi \rangle$ et $\langle \pi^0 | j_{\mu} | K \rangle$. Considérons tout d'abord $\langle \pi^0 | j_{\mu}^-(0) | \pi^+ \rangle$, et introduisons comme d'habitude l'amplitude :

$$T_{\mu\nu} = \int e^{iq'x} \langle 0 | \mathcal{R} \left\{ j_{\mu}^{A0}(x), j_{\nu}^-(0) \right\} | \pi^+(q) \rangle, \quad (\text{V.10})$$

où $j_{\mu}^{A0}(x)$ est le courant axial qui a les nombres quantiques du π^0 , et j_{ν}^- le courant vecteur qui a ceux du π^- . Contractant $T_{\mu\nu}$ avec q'^{μ} , il vient :

$$t_{\nu}(q'^2, k^2) - q'^{\mu} T_{\mu\nu}(q'^2, k^2) = F_{\nu}, \quad (\text{V.11})$$

où $k = q' - q$. On a posé par définition :

$$t_{\nu} = i \int d_4x e^{iq'x} \langle 0 | \mathcal{R} \left\{ \partial^{\mu} j_{\mu}^{A0}(x), j_{\nu}^-(0) \right\} | \pi^+(q) \rangle$$

$$F_{\nu} = \int d_4x e^{iq'x} \langle 0 | \delta(x_0) \left[j_{\nu}^{A0}(x), j_{\nu}^-(0) \right] | \pi^+(k) \rangle . \quad (\text{V.12})$$

La règle (IV.41) nous permet de séparer le terme de pôle en $q'^2 = \mu^2$ dans $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}(q'^2, k^2) = f_{\pi} \frac{iq'_{\mu}}{\mu^2 - q'^2} M_{\nu}(q'^2, k^2) + \mathcal{R}_{\mu\nu} . \quad (\text{V.13})$$

Par définition :

$$M_{\nu} = (\mu^2 - q'^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle 0 | \mathcal{R} \left\{ \mathcal{I}_{\pi^0}(x), j_{\nu}^-(0) \right\} | \pi^+(q) \rangle, \quad (\text{V.14})$$

et $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ est la contribution à $T_{\mu\nu}$ de la partie $j_{\mu}^{A0}(x)$ du courant axial $j_{\mu}^{A0}(x)$, qui n'est pas couplée au pion.

L'hypothèse CADDP nous permet d'autre part de mettre t_{ν} sous la forme suivante :

$$t_{\nu}(q'^2, k^2) = i f_{\pi} \frac{\mu^2}{\mu^2 - q'^2} M_{\nu}(q'^2, k^2) . \quad (\text{V.15})$$

De (V.11, 13, 15), on déduit aussitôt :

$$i f_{\pi} M_{\nu}(q'^2, k^2) - q'^{\mu} R_{\mu\nu} = F_{\nu} \quad (V.16)$$

Nous constatons, sans surprise maintenant, que le pôle en $q'^2 = \mu^2$ a automatiquement disparu.

Remarquons que M_{ν} est l'amplitude que nous cherchions. De façon précise :

$$\lim_{q'^2 \rightarrow \mu^2} M_{\nu}(q'^2, k^2) = \langle \pi^0(q') | j_{\nu}^{-}(0) | \pi^{+}(q) \rangle \quad (V.17)$$

Quant à F_{ν} , il est donné par l'algèbre des courants :

$$F_{\nu} = - \langle 0 | j_{\nu}^{A-}(0) | \pi^{+}(q) \rangle \quad (V.18)$$

On voit donc que (V.16) relie, comme il était annoncé, les processus $\pi^{+} \rightarrow \pi^0 +$ paire de leptons, et $\pi^{+} \rightarrow$ paire de leptons. Pour nous débarrasser de la quantité inconnue $R_{\mu\nu}$, nous devons faire $q' = 0$, ce qui donne la relation suivante, entre amplitudes de désintégrations :

$$\lim_{q_{\pi^0} \rightarrow 0} A(\pi^{+} \rightarrow \pi^0 e^{+} \nu_e) = \frac{1}{f_{\pi}} A(\pi^{+} \rightarrow e^{+} \nu_e) \quad (V.19)$$

Ce résultat n'est pas extrêmement intéressant, car l'hypothèse CVC nous apprend beaucoup mieux sur l'élément de matrice $\langle \pi^0(q') | j_{\nu}^{-}(0) | \pi^{+}(q) \rangle$. En effet, d'après CVC, j_{ν}^{-} s'identifie à la composante négative du courant de spin isotopique, d'où l'on déduit aussitôt :

$$\langle \pi^0(q') | j_{\nu}^{-}(0) | \pi^{+}(q) \rangle = - (q+q')_{\nu} F(k^2) \quad F(0) = 1 \quad (V.20)$$

Cette relation n'est valable que lorsque $q^2 = q'^2 = \mu^2$. Lorsque le pion π^0 n'est plus sur sa couche de masse, on a, de façon générale :

$$M_{\nu}(q'^2, k^2) = - (q'+q)_{\nu} f_{+}(q'^2, k^2) + (q'-q)_{\nu} f_{-}(q'^2, k^2) \quad (V.21)$$

La conservation du courant vecteur (CVC), s'écrit alors :

$$(q'-q)^{\nu} M_{\nu}(q'^2, k^2) = (\mu^2 - q'^2) \quad (V.22)$$

ce qui entraîne pour les facteurs de forme f_{+} et f_{-} , la contrainte :

$$(\mu^2 - q'^2) f_{+}(q'^2, k^2) + k^2 f_{-}(q'^2, k^2) = \mu^2 - q'^2 \quad (V.23)$$

Au point non physique $q' = 0$, il vient :

$$f_{+}(0, \mu^2) + f_{-}(0, \mu^2) = 1 \quad (V.24)$$

Revenons maintenant à la relation (V.16) de l'algèbre des courants. Le second membre F_{ν} s'écrit $-if_{\pi} q_{\nu}$ (équation (IV.39)). Le premier membre s'exprime en fonction de f_{+} et f_{-} . Finalement, (V.16) s'écrit :

$$if_{\pi} \left[(q+q')_{\nu} f_{+} + (q-q')_{\nu} f_{-} \right] + q'^{\mu} R_{\mu\nu} = if_{\pi} q_{\nu} \quad (V.25)$$

Faisons $q' = 0$, nous obtenons exactement la relation (V.24) déduite de CVC. Ainsi, l'algèbre des courants (avec CADDP), conduit, au point non physique $q' = 0$, à la même contrainte que CVC. Ce résultat est important et d'une portée assez générale. Veltman [5] en effet, a proposé récemment une nouvelle méthode de calcul, conduisant à certains résultats de l'algèbre des courants, sans faire appel à aucun commutateur. Cette méthode consiste à se donner explicitement l'expression de la divergence des courants (dans CVC, cette divergence est nulle).

Remarquons encore, que CVC nous apprend beaucoup plus de choses que l'algèbre des courants. En particulier, CVC donne un résultat bien précis sur la couche de masse (équation (V.20)), alors que l'algèbre des courants donne une contrainte seulement hors de la couche de masse. Pour passer de cette dernière contrainte au résultat sur la couche de masse, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur f_{+} et f_{-} , par exemple que f_{+} et f_{-} varient peu quand q' varie de 0 à une valeur physique, et que f_{-} reste constamment négligeable devant f_{+} .

La relation (V.19) s'étend aisément aux amplitudes de désintégration leptoniques et semi-leptoniques des mésons K. Il nous faut utiliser les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0) \left[j_0^{A3}(x), j_{\nu}^4(y) \right] &= -\frac{i}{2} j_{\nu}^{A5}(x) \delta_4(x-y) \\ \delta(x_0 - y_0) \left[j_0^{A3}(x), j_{\nu}^5(y) \right] &= \frac{i}{2} j_{\nu}^{A4}(x) \delta_4(x-y) \end{aligned} \quad (V.26)$$

On trouve alors que :

$$\lim_{q_{\pi^0} \rightarrow 0} \left| A(K^{\pm} \rightarrow \pi^0 + \text{paire de leptons}) \right| = \frac{1}{2f_{\pi}} \left| A(K^{\pm} \rightarrow \text{paire de leptons}) \right| \quad (V.27)$$

Le facteur 1/2 dans le membre de droite vient des règles de commutation (V.26) qui font intervenir des courants étranges. Comme précédemment, nous pouvons écrire :

$$\langle 0 | j_{\nu}^{A4}(0) - i j_{\nu}^{A5}(0) | K^+(P) \rangle = i f_K P_{\nu} \quad (V.28)$$

$$\langle \pi^0(q) | j_{\nu}^4(0) - i j_{\nu}^5(0) | K^+(P) \rangle = - (P+q)_{\nu} f_+(q^2, k^2) - (P-q)_{\nu} f_-(q^2, k^2),$$

où $k = q - P$.

La relation (V.27) devient :

$$\left| f_+(0, m_K^2) + f_-(0, m_K^2) \right| = \frac{|f_K|}{2f_{\pi}} \quad (V.29)$$

Pour comparer ce résultat avec l'expérience, nous négligerons les variations de f_+ et f_- lorsque q varie de 0 à une valeur physique. D'après Callan et Treiman, (V.29) prédit pour $|f_K|$ la valeur $(0,074 \pm 0,014)m_K$, en accord étonnant avec la valeur expérimentale $(0,070 \pm 0,001)m_K$.

Jusqu'à présent nous n'avons utilisé que les règles de commutation du type $[j^V, j^A] = j^V$. Pour relier les modes semi-leptoniques avec un et deux pions, il faut faire usage de commutateur du type $[j^A, j^A] = j^V$. On obtient :

$$\lim_{q_{\pi^0} \rightarrow 0} \left| A(K^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0 e^+ \nu_e) \right| = \frac{1}{2f_{\pi}} \left| A(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e) \right| \quad (V.30)$$

et des résultats analogues avec des pions chargés dans l'état final. La comparaison avec l'expérience est plus difficile, à cause des nombreux facteurs de forme qui décrivent le processus $K \rightarrow 2\pi + \text{paire de leptons}$, et nous y reviendrons plus tard (chapitre VII).

3) Théorème de Kroll-Ruderman :

Nous terminerons ce chapitre sur une application de l'algèbre des courants à des processus forts et électromagnétiques. Les calculs sont tout à fait analogues à ceux que nous venons de faire pour des processus faibles. Signalons tout d'abord que le théorème de Kroll-Ruderman^[6] que nous avons en vue, et qui concerne la photoproduction de méson π à basse énergie, a été démontré en 1954, bien avant le développement de l'algèbre des courants. Il a joué un rôle important dans l'histoire des interactions fortes, car il a permis de mesurer la constante de couplage forte. Il a été étendu par la suite à la photoproduction de particules étranges.

Nous donnerons une rapide démonstration de ce théorème dans le cadre de l'algèbre des courants. Nous nous intéressons à la photoproduction d'un π^+ sur un proton : $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$. Séparons tout d'abord le photon en ses composantes isovecteur et isoscalaire, et considérons l'élément de matrice entre un neutron et un proton, du produit retardé d'un courant axial chargé avec un courant vecteur neutre :

$$T_{\mu\nu} = \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | R \left\{ j_{\mu}^{A-}(x), j_{\nu}^0(0) \right\} | p \rangle \quad (V.31)$$

Le lecteur étant désormais familier avec les techniques de l'algèbre des courants, nous écrivons immédiatement :

$$t_{\nu}(s, t; q^2, q'^2) - q'^{\mu} T_{\mu\nu}(s, t; q^2, q'^2) = F_{\nu}(t) \quad (V.32)$$

où t_{ν} contient le produit retardé de la divergence du courant axial $\partial^{\mu} j_{\mu}^{A-}(x)$ avec $j_{\nu}^0(0)$, et où F_{ν} est donné par l'algèbre des courants :

$$F_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{G_A}{G_V} \right) \bar{u}(p') \gamma_{\nu} \gamma_5 u(p) \quad (V.33)$$

L'amplitude $T_{\mu\nu}$ se décompose en plusieurs termes, auxquels sont associés les graphes suivants :

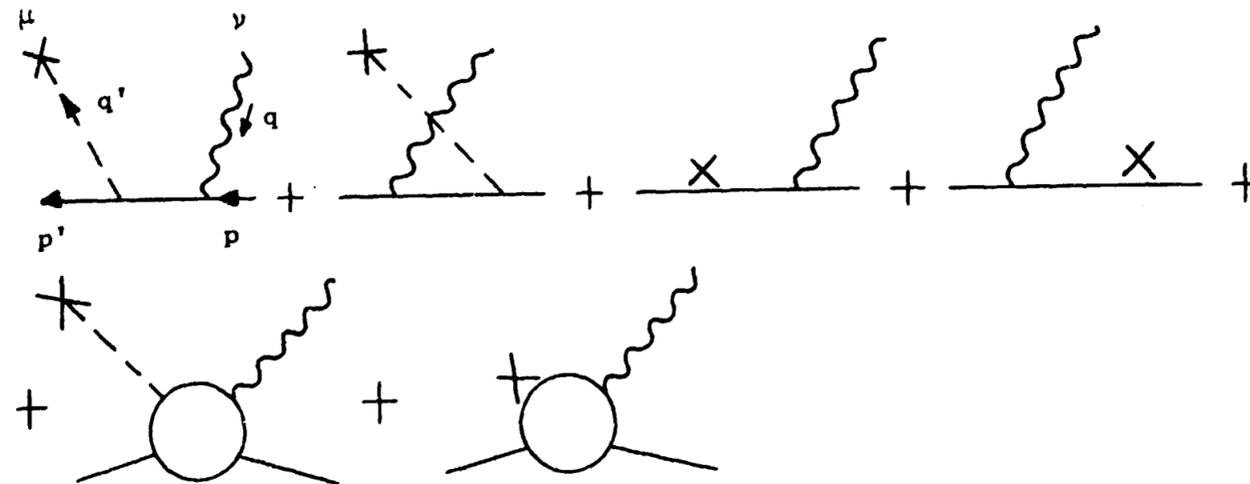


Figure (V.1)

De même t_ν se décompose en trois termes :

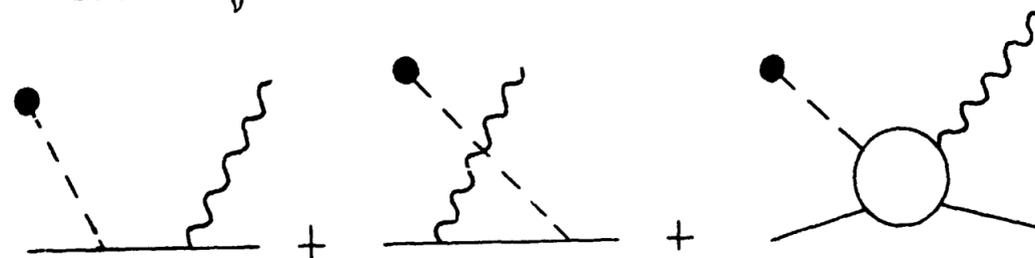


Figure (V.2)

La séparation des différents pôles se fait de façon standard. Le pôle du pion à $q'^2 = \mu^2$ disparaît automatiquement. La condition pour que les pôles du nucléon à $s = m^2$ et $u = m^2$ disparaissent, donne, une fois de plus, la relation de Goldberger et Treiman. Finalement on obtient :

$$i f_\pi \tilde{M}_\nu - q'^\mu \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{G_A}{G_V} \right) \bar{u}(p) \gamma_5 \gamma_\nu u(p) = F_\nu \quad (V.34)$$

M_ν est l'amplitude de production d'un pion π^+ sur proton, en présence du champ vectoriel j_ν^0 :

$$M_\nu = (\mu^2 - q'^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | R \left\{ \hat{\pi}_\pi^-(x), j_\nu^0(0) \right\} | p \rangle \quad (V.35)$$

\tilde{M}_ν est l'amplitude M_ν dont a retiré la contribution des états intermédiaires à un nucléon (termes de born renormalisés). Quant à $\tilde{R}_{\mu\nu}$, c'est une fonction

régulière lorsque $q' \rightarrow 0$. Dans cette limite, on voit aussitôt que \tilde{M}_ν tend vers zéro.

La partie isoscalaire du photon se traite de la même façon, en considérant cette fois-ci l'amplitude :

$$T_{\mu\nu} = \int d_4x e^{iq'x} \langle p' | R \left\{ j_\mu^{A-}(x), j_\nu^B(0) \right\} | p \rangle \quad (V.36)$$

où j_ν^B est le courant associé au nombre baryonique. On trouve encore, dans ce cas, que l'amplitude tronquée \tilde{M}_ν s'annule lorsque $q' \rightarrow 0$.

Ainsi, l'algèbre des courants nous apprend que l'amplitude de photoproduction d'un pion sur nucléon est entièrement donnée par les termes de Born renormalisés, lorsque la 4-impulsion du pion tend vers zéro. Ceci est le théorème de Kroll-Ruderman. Le calcul de ces termes de Born donne :

$$\frac{e g_K(0)}{2m} \chi_f^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \chi_i \quad (V.37)$$

où χ_f et χ_i sont des spineurs à deux composantes, et où \vec{E} est le champ électrique.

REFERENCES

- [1] - DALITZ et TUAN : Ann. Phys. (N.Y), 10, 307 (1960)
- [2] - W. WEISBERGER : Phys. Rev., 143, 1302 (1966)
AMATI, BOUCHIAT et NUYS : Physics Letters, 19, 59 (1965)
- [3] - S. ADLER : Phys. Rev., 140, B 736 (1965)
- [4] - CALLAN et TREIMAN : Phys. Rev. Letters, 16, 153 (1966)
- [5] - VELTMAN : Phys. Rev. Letters, 17, 553 (1966)
- [6] - KROLL et RUDERMAN : Phys. Rev., 93, 233 (1954) .

DES INTEGRATIONS NON LEPTONIQUES

I) Introduction :

Nous avons déjà vu dans le chapitre II, que la structure de l'hamiltonien faible $\mathcal{H}_W(0)$, responsable des désintégrations non leptoniques, est a priori différente de celle que suggère l'étude des désintégrations leptoniques. Rappelons que l'amplitude de transition d'un processus non leptonique, s'écrit comme l'élément de matrice de $\mathcal{H}_W(0)$ entre les états initial et final : $\langle f | \mathcal{H}_W(0) | i \rangle$. Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'à des transitions $\Delta S = 1$.

Une première difficulté vient de l'observation^[1] d'une violation de CP, dans les désintégrations des K neutres en deux pions. Nous laisserons de côté ces difficultés, qui correspondent, de toutes façons, à des effets faibles. Plusieurs modèles ont été proposés pour \mathcal{H}_W . Rappelons-les :

1) Hamiltonien courant x courant : $\mathcal{H}_W(0)$ s'écrit :

$$\mathcal{H}_W = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha \dots} J_{\mu}^{\alpha} J^{\mu\alpha} \quad (VI.1)$$

où J_{μ}^{α} est la composante α d'un octet de courants. Si l'on ne retient dans la somme sur α , que les courants chargés couplés aux leptons, \mathcal{H}_W est un opérateur réductible pour le groupe unitaire SU(3). Il contient une composante d'un octet, et une composante appartenant à la représentation 27. Cette dernière ne satisfait pas la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$. Ces courants chargés satisfaisant la règle $\Delta S/\Delta Q = 1$ les transitions $\Delta S = 2$, inobservées, sont interdites. Pour faire disparaître la composante 27 indésirable dans \mathcal{H}_W , l'on est amené à introduire des courants neutres. L'invariance par CP impose alors le couplage suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_W &= \frac{G}{\sqrt{2}} d_{6\alpha\beta} J_{\mu}^{\alpha} J^{\mu\beta} \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} d_{6\alpha\beta} \left[J_{\mu}^{\alpha} J^{\mu\beta} + J_{\mu}^{A\alpha} J^{A\mu\beta} \right] + \frac{G}{\sqrt{2}} d_{6\alpha\beta} \left[J_{\mu}^{\alpha} J^{A\mu\beta} + J_{\mu}^{A\alpha} J^{\mu\beta} \right] \end{aligned} \quad (VI.2)$$

où nous avons explicité les parties paire et impaire de \mathcal{H}_W .

2) Le modèle des quarks : ce modèle, qui a été très utile comme guide dans la recherche des règles de commutation entre courants, suggère pour \mathcal{H}_W , une forme bilinéaire, qui contient à la fois la conservation de CP et la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$. On écrit, q étant le champ associé aux quarks :

$$\mathcal{H}_W = g_+ \bar{q} \lambda_6 q + g_- \bar{q} i\gamma_5 \lambda_7 q \quad (VI.3)$$

où, là encore, nous avons explicité les parties paire et impaire de \mathcal{H}_W .

Les expressions (VI.2 et 3) permettent de calculer les relations de commutation de \mathcal{H}_W avec les courants vecteur et axial (pour le modèle des quarks, il faut évidemment utiliser la forme explicite des courants)*. Si, de plus, l'on choisit $g_+ = g_-$, le deuxième modèle satisfait, comme le premier, la symétrie V-A :

$$\delta(x_0) \left[J_0^{\alpha}(x), \mathcal{H}_W(0) \right] = \delta(x_0) \left[J_0^{A\alpha}(x), \mathcal{H}_W(0) \right] \quad \text{pour } \alpha = 1, 2, 3. \quad (VI.4)$$

Dans ce chapitre, nous n'utiliserons pas de propriété de $\mathcal{H}_W(0)$ autre que celle exprimée par (VI.4). Nous verrons qu'elle nous permet de relier entre eux, des processus ne différant que par l'émission d'un méson π , $A \rightarrow B + \pi(q)$ et $A \rightarrow B$, dans la limite $q \rightarrow 0$. Par exemple, nous considérerons les processus :

$$K \rightarrow 3\pi, \quad K \rightarrow 2\pi, \quad K \rightarrow \pi, \quad K \rightarrow 0.$$

Seuls les deux premiers sont physiques. Cependant les deux autres sont très intéressants, car le troisième fait intervenir l'élément de matrice de $\mathcal{H}_W(0)$ entre deux états d'un même multiplet, et le quatrième est une transition $\Delta I = \frac{1}{2}$ pure. Puisque nous sommes capables de relier entre eux ces divers processus, nous voyons apparaître là un mécanisme naturel pour expliquer la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$. De la même façon, nous relierons l'amplitude de désintégration d'un

* Nous négligeons dans le calcul la présence de termes de Schwinger. Nous n'utiliserons les éléments de matrice de ces opérateurs qu'à la limite de l'impulsion nulle où ces termes ne contribuent pas.

hypéron $Y \rightarrow Y' + \pi$, à l'élément de matrice de $\mathcal{H}_w(0)$ entre les états Y et Y' , qui appartiennent à l'octet des baryons.

II) Phénoménologie des désintégrations $K \rightarrow 3\pi$:

La cinématique de ces processus est décrite par les 3 variables de Mandelstam $s_{lm} = (q_l + q_m)^2$ (q_1, q_2 et q_3 étant les 4-impulsions des pions). Dans le système au repos du méson K, on a :

$$s_{lm} = m_K^2 + \mu^2 - 2 m_K \omega_n$$

$$m_K = \omega_l + \omega_m + \omega_n$$

(VI.5)

où ω_l, ω_m et ω_n sont les énergies des 3 pions. Les variables s_{lm} sont représentées sur un diagramme de Dalitz :

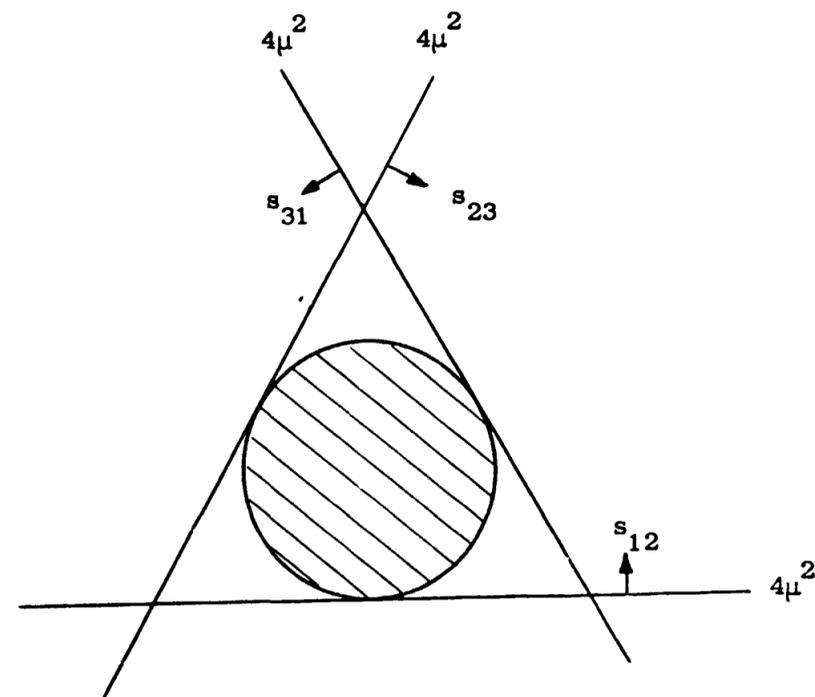


Figure (VI.1)

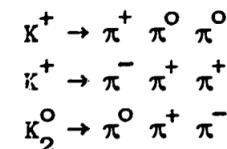
La partie hachurée (un cercle dans l'approximation non relativiste), est la région physique. La largeur totale s'écrit :

$$\Gamma = \frac{S}{32(2\pi)^3 m_K^3} \int ds_{12} ds_{23} ds_{31} \delta(s_{12} + s_{23} + s_{31} - 3\mu^2 - m_K^2) |M|^2$$

(VI.6)

$$= \frac{S}{64 \pi^3 m_K} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - m_K) |M|^2$$

où M est l'amplitude invariante du processus considéré. Il faut tenir compte d'un facteur statistique S , dû au fait que l'on a affaire à des particules identiques. Si $|M|$ est une constante, le diagramme de Dalitz est uniformément peuplé. Ce n'est cependant pas ce que l'on observe dans les désintégrations :



où l'on trouve une variation linéaire dans l'énergie du pion "singulier" (respectivement π^+, π^- et π^0 dans les désintégrations ci-dessus). Expérimentalement, on a :

$$\frac{|M|^2}{|M_{\text{centre}}|^2} = 1 + 2\varepsilon \frac{\omega - \omega_c}{m_K^2}$$

(VI.7)

où $\omega_c = m_K/3$ est l'énergie moyenne d'un pion. Les mesures de ε et $|M_{\text{centre}}|$ donnent [2] :

	$ M_{\text{centre}} $	ε
$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$	$0,85 \cdot 10^{-6}$	$-12,5 \pm 1,0$
$K^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$	$1,72 \cdot 10^{-6}$	$\left\{ \begin{array}{l} 5,7 \pm 1,0 \text{ et} \\ 4,65 \pm 0,5 \end{array} \right.$
$K_2^0 \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$	$0,71 \cdot 10^{-6}$	
$K_2^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$	$2,20 \cdot 10^{-6}$	0

(VI.8)

Postulons la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$, l'état final ne peut être que $I = 0$ ou 1 . Montrons que $I = 0$ est exclu. Dans la désintégration des K chargés, cela est évident, puisque l'état final est chargé. Pour le K_2^0 , c'est la conservation de CP qui interdit $I = 0$. En effet, 3 pions dans un état $J = 0$, ont la parité -1 (conservation du moment angulaire). Or $PC = -1$, donc $C = +1$. D'autre part, $G_{3\pi} = -1$. Ces deux derniers résultats excluent $I = 0$ dans l'état final. L'amplitude la plus générale s'écrit alors :

$$(\bar{S} \vec{\tau} K) \left\{ \vec{\pi}_1 (\vec{\pi}_2 \cdot \vec{\pi}_3) f(q_1; q_2, q_3) + \text{permutations cycliques} \right\} \quad (VI.9)$$

S est un spurion d'isospin $\frac{1}{2}$, K , $\vec{\pi}_1$, $\vec{\pi}_2$ et $\vec{\pi}_3$ sont les fonctions d'onde d'isospin du méson K et des 3 pions, $\vec{\tau}$ a pour composantes les 3 matrices de Pauli, et f est une fonction invariante, symétrique dans l'échange de ses deux derniers arguments.

On vérifie aisément que (VI.9) contient les trois états $I = 1$, linéairement indépendants, que l'on peut former avec trois isovecteurs, et classés suivant les représentations du groupe des permutations de trois objets :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{\pi}_1 (\vec{\pi}_2 \cdot \vec{\pi}_3) + \vec{\pi}_2 (\vec{\pi}_3 \cdot \vec{\pi}_1) + \vec{\pi}_3 (\vec{\pi}_1 \cdot \vec{\pi}_2) && \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \\ \vec{V}_2 &= \vec{\pi}_1 (\vec{\pi}_2 \cdot \vec{\pi}_3) - \vec{\pi}_2 (\vec{\pi}_3 \cdot \vec{\pi}_1) && \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \\ \vec{V}_3 &= \vec{\pi}_1 (\vec{\pi}_2 \cdot \vec{\pi}_3) - \vec{\pi}_3 (\vec{\pi}_1 \cdot \vec{\pi}_2) && \end{aligned}$$

En fait, on a :

$$\begin{aligned} &\vec{\pi}_1 (\vec{\pi}_2 \cdot \vec{\pi}_3) f(q_1; q_2, q_3) + \text{permutations cycliques} = \\ &= \frac{1}{3} \left[f(q_1; q_2, q_3) + f(q_2; q_3, q_1) + f(q_3; q_1, q_2) \right] \vec{V}_1 + \\ &+ \frac{1}{3} \left[f(q_1; q_2, q_3) - 2f(q_2; q_3, q_1) + f(q_3; q_1, q_2) \right] \vec{V}_2 + \\ &+ \frac{1}{3} \left[f(q_1; q_2, q_3) + f(q_2; q_3, q_1) - 2f(q_3; q_1, q_2) \right] \vec{V}_3 \end{aligned}$$

Des trois termes du second membre, le premier est totalement symétrique, les deux autres se transforment linéairement l'un dans l'autre par permutation.

Dans la suite, q_1 , q_2 et q_3 seront éventuellement hors de leur couche de masse. Nous utiliserons alors pour f , l'expression approchée :

$$f(q_1; q_2, q_3) = f_0 + f_1 (q_2 + q_3)^2 \quad (VI.10)$$

Négligeant les termes en f_1^2 , on obtient aisément les prédictions de la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$, pour l'amplitude moyenne \bar{M} (ou sa valeur au centre du diagramme de Dalitz) :

$$\frac{|\bar{M}_{+00}|}{1} = \frac{|\bar{M}_{-+}|}{2} = \frac{|\bar{M}_{0+-}|}{1} = \frac{|\bar{M}_{000}|}{3} \quad (VI.11)$$

où les indices se rapportent aux charges des pions. Les valeurs expérimentales pour ces quatre rapports, sont (voir (VI.8)) :

$$0,85 \times 10^{-6}; 0,86 \times 10^{-6}; 0,71 \times 10^{-6}; 0,74 \times 10^{-6}$$

Ceci montre que l'accord de la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ est ici de l'ordre de 10 %.

III) Relations de l'algèbre des courants dans les désintégrations $K \rightarrow 3\pi$:

Dès l'abord, nous introduisons l'amplitude :

$$T_\mu^\alpha = \int d_4x e^{iq'x} \langle f | R \left\{ j_\mu^{A\alpha}(x), \mathcal{K}_W(0) \right\} | i \rangle \quad (VI.12)$$

correspondant à la transition faible $i \rightarrow f$, en présence d'un champ extérieur axial. Nous précisons ultérieurement les états i et f .

Contractons T_μ^α avec q'^μ . Il vient :

$$t^\alpha - q'^\mu T_\mu^\alpha = F^\alpha \quad (VI.13)$$

où l'on a posé, par définition :

$$\begin{aligned} t^\alpha &= i \int d_4x e^{iq'x} \langle f | R \left\{ \partial^\mu j_\mu^{A\alpha}(x), \mathcal{K}_W(0) \right\} | i \rangle \\ F^\alpha &= \int d_4x e^{iq'x} \langle f | \delta(x_0) \left[j_0^{A\alpha}(x), \mathcal{K}_W(0) \right] | i \rangle \end{aligned} \quad (VI.14)$$

Comme d'habitude, nous séparons T_μ^α et t^α en plusieurs termes :

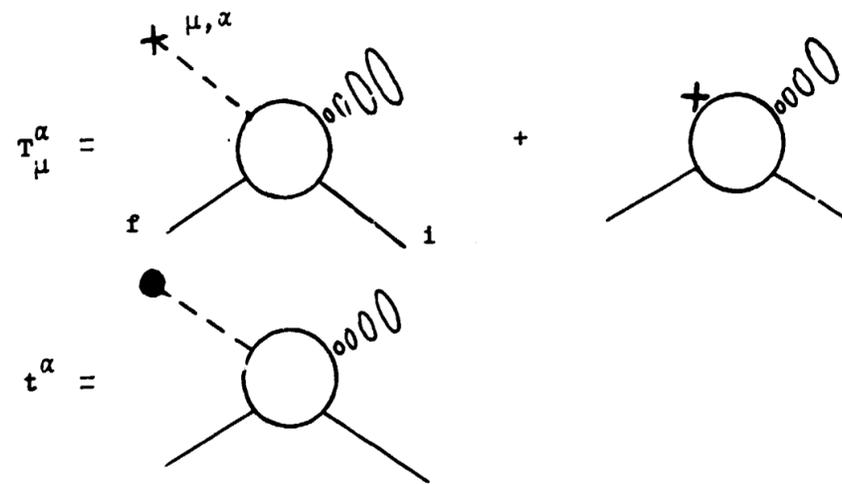


Figure (VI,2)

où les "ronds de fumée" représentent le spurion attaché à l'hamiltonien faible $\mathcal{H}_w(0)$ *. Le pôle du pion à $q'^2 = \mu^2$ disparaît dans la somme $t^\alpha - q'^\mu T_\mu^\alpha$, et il vient :

$$i f_\pi M^\alpha - q'^\mu R_\mu^\alpha = F^\alpha \quad (VI.15)$$

M^α est l'amplitude de transition du processus faible $i \rightarrow f + \pi$:

$$M^\alpha = (\mu^2 - q'^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle f | R \left[\Phi^\alpha(x), \mathcal{H}_w(0) \right] | i \rangle \quad (VI.16)$$

R_μ^α est l'amplitude de transition du processus faible $i \rightarrow f$, en présence d'un champ extérieur axial, non couplé au pion. Il n'existe pas ici, d'état intermédiaire à une particule, donnant une contribution singulière à $q' = 0$. On a donc :

$$\lim_{q' \rightarrow 0} M^\alpha = -\frac{1}{f_\pi} \int d_4x \delta(x_0) \langle f | \left[J_0^{A\alpha}(x), \mathcal{H}_w(0) \right] | i \rangle \quad (VI.17)$$

Utilisons la symétrie V-A généralisée (éq.(VI.4)). Il vient :

$$\lim_{q' \rightarrow 0} M^\alpha = -\frac{1}{f_\pi} \langle f | \left[Q_\alpha, \mathcal{H}_w(0) \right] | i \rangle \quad (VI.18)$$

où Q_α est la composante α de l'opérateur de spin isotopique.

* Le calcul fait intervenir une fonction à 4 points. Un spurion emporte étrangeté et isospin, mais aussi de l'impulsion. L'amplitude physique correspond au spurion d'énergie nulle. Nous traduisons ceci dans le dessin du graphe en représentant effectivement le spurion, mais par des "ronds de fumée".

Lorsque les états i et f sont fixés, il est aisé de calculer le second membre de (VI.18), car on sait comment se transforment i et f sous l'action de Q_α . Pour appliquer (VI.18) aux désintégrations $K \rightarrow 3\pi$, nous choisirons pour état i , un état à un méson K , et pour état f , un état à deux pions, d'énergie totale égale à m_K . On trouve aisément (avec des notations déjà utilisées) :

$$\begin{aligned} \lim_{q_- \rightarrow 0} M_{-++} &= 0 & \lim_{q_+ \rightarrow 0} M_{-++} &= \frac{1}{2f_\pi} \langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_w(0) | K_1^0 \rangle \\ \lim_{q_+ \rightarrow 0} M_{+00} &= \frac{1}{2f_\pi} \langle \pi^0 \pi^0 | \mathcal{H}_w(0) | K_1^0 \rangle & \lim_{q_0 \rightarrow 0} M_{+00} &= 0 \\ \lim_{q_0 \rightarrow 0} M_{0+-} &= \frac{1}{2f_\pi} \langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_w(0) | K_1^0 \rangle & \lim_{q_+ \rightarrow 0} M_{0+-} &= 0 \\ \lim_{q_- \rightarrow 0} M_{0+-} &= 0 & \lim_{q_0 \rightarrow 0} M_{000} &= \frac{1}{2f_\pi} \langle \pi^0 \pi^0 | \mathcal{H}_w(0) | K_1^0 \rangle \end{aligned} \quad (VI.19)$$

Pour trouver ces relations, nous avons dû négliger l'amplitude de transition $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$, qui correspond à une violation de la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$.

L'exploitation des relations (VI.19) nécessite des informations supplémentaires sur les diverses amplitudes M . Le plus simple consiste à postuler la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$, ainsi que la linéarité de la fonction $f(q_1; q_2, q_3)$ (éq. (VI.10)). Dans ces conditions, toutes les relations (VI.19) sont satisfaites, à condition que :

$$f(q; q', q'') = 1 \frac{M(K \rightarrow 2\pi)}{2f_\pi (m_K^2 - \mu^2)} \left[(q' + q'')^2 - \mu^2 \right] \quad (VI.20)$$

En conséquence, les diverses amplitudes $K \rightarrow 3\pi$ s'écrivent maintenant [3] :

$$\begin{aligned} M_{-++} &= 1 \frac{M(K \rightarrow 2\pi)}{2f_\pi} \cdot \frac{m_K^2 + \mu^2 - s}{m_K^2 - \mu^2} \\ M_{+00} = M_{0+-} &= 1 \frac{M(K \rightarrow 2\pi)}{2f_\pi} \cdot \frac{s - \mu^2}{m_K^2 - \mu^2} \\ M_{000} &= 1 \frac{M(K \rightarrow 2\pi)}{2f_\pi} \cdot \frac{m_K^2}{m_K^2 - \mu^2} \end{aligned} \quad (VI.21)$$

où $s = (q' + q'')^2$ est la masse totale au carré du système des deux pions non "singuliers". Ces résultats sont représentés sur la figure suivante :

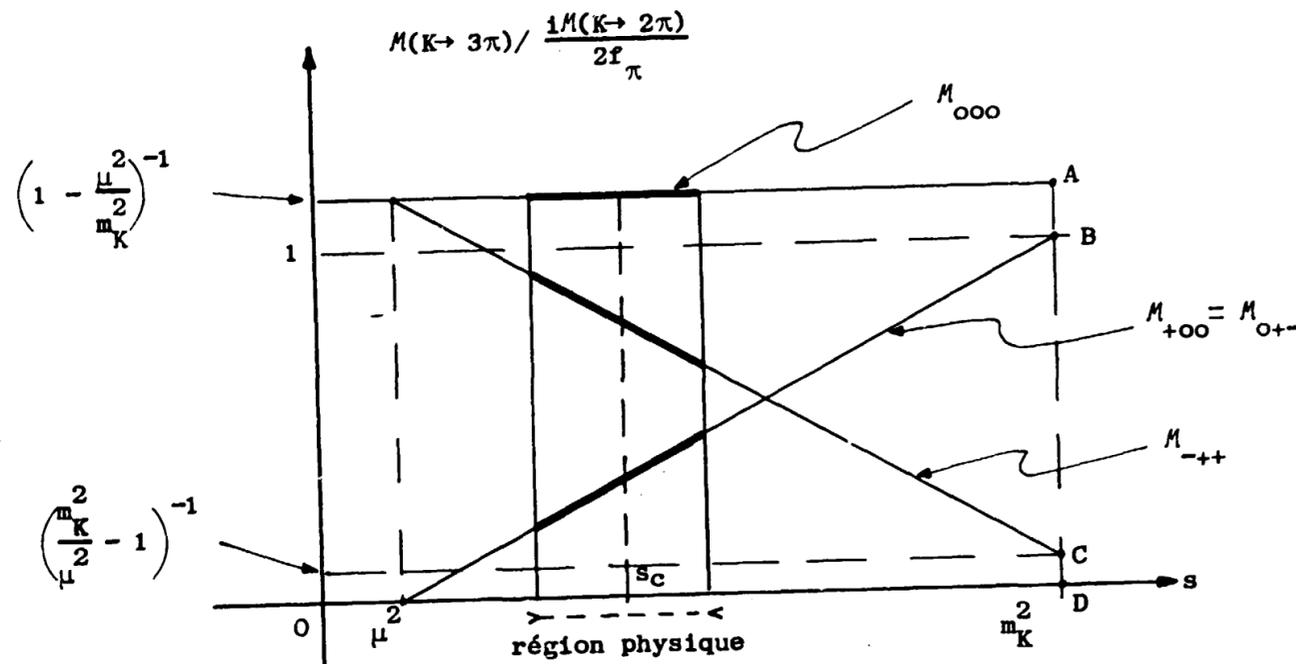


Figure (VI,3)

Il est à noter quelques ambiguïtés, dues au fait que l'on utilise pour des pions tous physiques, les relations (VI.21) démontrées avec l'un des trois pions hors de sa couche de masse. Par exemple, il n'est pas clair que l'on doive utiliser $s+t+u = m_K^2 + 3\mu^2$ plutôt que $m_K^2 + 2\mu^2$. Dans ce dernier cas, le point A vient en B, et C vient en D.

Nous pouvons maintenant comparer l'amplitude moyenne dans l'équation (VI.11), avec celle déduite de (VI.21), qui est :

$$\frac{M(K \rightarrow 2\pi)}{2f_\pi} \cdot \frac{m_K^2}{3(m_K^2 - \mu^2)} = (0,79 \pm 0,10) 10^{-6} \quad (VI.22)$$

* Il est bien sûr possible de traiter les 3 pions de façon symétrique. C'est une complication inutile ici, à la précision attendue pour ces calculs, mais à laquelle il faut faire face dans certains cas (chapitre VII).

L'accord est excellent. Utilisant (VI.21) pour le calcul des pentes

ϵ , on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon_{-++} &= 6 \\ \epsilon_{+00} &= \epsilon_{0+-} = -12. \end{aligned} \quad (VI.23)$$

Là encore, l'accord est très bon (voir (VI.8)).

Le succès de l'algèbre des courants, associée à l'approximation linéaire, semble exclure les anciennes explications des spectres $K \rightarrow 3\pi$, qui faisaient appel à une résonance σ de deux pions dans l'onde $S^{[4]}$. Si l'on écrit l'amplitude :

$$\frac{C}{s - (m_\sigma + i\frac{\Gamma}{2})^2}$$

avec C constant, les valeurs moyennes de m_σ et Γ sont de l'ordre de 450 et 100 MeV. Avec l'algèbre des courants, on écrirait plutôt :

$$\frac{C'(s - \mu^2)}{s - (m_\sigma + i\frac{\Gamma}{2})^2}$$

conduisant à $m_\sigma \sim 400$ MeV et $\Gamma \sim 300$ MeV, résultats sans grande signification. En conséquence, il semble difficile, actuellement, de tirer aucune propriété précise de l'interaction $\pi\pi$ à basse énergie, de l'étude des spectres $K \rightarrow 3\pi$.

Insistons sur le fait que l'approximation linéaire est indépendante des contraintes de l'algèbre des courants. Cette approximation ne sert qu'à extrapoler l'amplitude en dehors de la région physique, jusqu'aux points $s = \mu^2$ et m_K^2 , où l'algèbre des courants impose à l'amplitude une valeur particulière. En résumé, on trouve que si la règle $\Delta I = 1/2$ est satisfaite pour la désintégration $K \rightarrow 2\pi$, elle l'est pour les désintégrations $K \rightarrow 3\pi$ en 2 points non physiques, et, utilisée pour extrapoler l'amplitude $K \rightarrow 3\pi$ hors de la région physique, elle fournit des valeurs en très bon accord avec l'expérience.

IV) Relations de l'algèbre des courants dans les désintégrations $K \rightarrow 2\pi$:

Rappelons que la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ prédit l'égalité des amplitudes $K_1^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ et $K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$. Puisque les deux pions neutres sont identiques, cela entraîne le rapport de branchement :

$$\frac{\Gamma(K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_1^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)} = 2 \quad (VI.24)$$

Ceci étant, la formule (VI.18) va nous servir maintenant, avec comme état i , un état à un méson K_1^0 , et comme état f , un état à un méson π . Il vient aisément (avec des notations évidentes) :

$$\lim_{q_{\pm} \rightarrow 0} M_{+-} = \frac{1}{2f_{\pi}} \langle \pi^{\pm} | \mathcal{H}_W(0) | K^{\pm} \rangle \quad (VI.25)$$

$$\lim_{q_0 \rightarrow 0} M_{00} = - \frac{1}{2f_{\pi}} \langle \pi^0 | \mathcal{H}_W(0) | K_2^0 \rangle .$$

Le point non physique de l'algèbre des courants est à $s = \mu^2$, très éloigné du point physique à $s = m_K^2$. L'extrapolation d'un point à l'autre est donc assez délicate.

Mais l'algèbre des courants nous permet d'aller jusqu'à $s = 0$. En effet, prenant le vide comme état f dans (VI.18), il vient aisément :

$$\lim_{q_{+} \rightarrow 0} M(K^+ \rightarrow \pi^+) = \frac{1}{2f_{\pi}} \langle 0 | \mathcal{H}_W(0) | K_1^0 \rangle \quad (VI.26)$$

$$\lim_{q_0 \rightarrow 0} M(K_2^0 \rightarrow \pi^0) = \frac{1}{2f_{\pi}} \langle 0 | \mathcal{H}_W(0) | K_1^0 \rangle .$$

Ainsi, aux extrapolations près, toutes les amplitudes que nous avons considérées dans ce chapitre, s'expriment en fonction du seul élément de matrice $\langle 0 | \mathcal{H}_W(0) | K_1^0 \rangle$, qui correspond à une transition (non physique) $\Delta I = \frac{1}{2}$ pure. Ceci n'est pas suffisant pour expliquer le succès de la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$, car il y a loin de $s = 0$ à $s = m_K^2$, mais il est néanmoins encourageant de constater que l'algèbre des courants conduit naturellement à cette règle.

Des problèmes relativement délicats ont été laissés de côté dans cette analyse rapide. Il convient de traiter les deux mésons π de façon symétrique et de se préoccuper de singularités proches qui risquent d'entraîner des variations importantes de l'amplitude entre le point d'extrapolation et le point physique. Les conclusions restent néanmoins les mêmes^[5].

V) Phénoménologie des désintégrations non leptoniques des hyperons

Les processus auxquels nous nous intéressons maintenant, sont les suivants :

$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$	amplitude	Λ^{0-}	
$\quad \quad n + \pi^0$		Λ^{00}	
$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$		Σ^{++}	
$\quad \quad p + \pi^0$		Σ^{+0}	(VI.27)

$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$	Σ^{--}	(VI.27)
$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$	Ξ^{00}	
$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$	Ξ^{--}	

Nous avons noté, à droite, les noms que nous donnerons aux amplitudes de chacune de ces désintégrations. Le premier indice se rapporte à la charge de l'hyperon initial, le second à la charge du pion final.

Appelons p, p' et q' , les 4-impulsions respectives des hyperons initial et final, et du pion. Le taux de désintégration s'écrit :

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi} \frac{mq'}{M} \sum_{\text{pol.}} \int d \cos \theta |M|^2 \quad (VI.28)$$

où θ est l'angle que fait la direction de l'hyperon final \vec{p}' , dans le système du centre de masse total, avec le vecteur polarisation initiale \vec{P}_1 , M est l'amplitude de transition invariante, M et m les masses des hyperons initial et final.

La forme la plus générale de M est :

$$M = \bar{u}(p') \left\{ A + B \gamma_5 \right\} u(p) \quad (VI.29)$$

Appelons χ_1 et χ_f les spineurs au repos (à 2 composantes) des hyperons, M peut se réécrire :

$$M = \chi_f^\dagger (S + \vec{\sigma} \cdot \hat{p}' P) \chi_1 \quad (VI.30)$$

$$\text{avec : } S = \sqrt{\frac{E'+m}{2m}} A, \quad P = \sqrt{\frac{E'-m}{2m}} B \quad (VI.31)$$

(E' = énergie de l'hyperon final dans le système du centre de masse total et $\hat{p}' = \vec{p}' / |\vec{p}'|$).

La conservation du moment angulaire entraîne que l'état final est un mélange d'onde s et d'onde p. Nous reconnaissons dans A et B (ou S et P), les amplitudes respectives d'ondes s et p.

Le taux de désintégration total s'écrit :

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{mq'}{M} (|S|^2 + |P|^2) \quad (VI.32)$$

S et P (ainsi que A et B) sont sans dimension.

Soit \vec{P}_1 le vecteur polarisation de la cible. La distribution angulaire de l'hypéron final, dans le système du centre de masse total, est en $(1 - \alpha P_1 \cos\theta)$, où le paramètre α est défini par :

$$\alpha = - \frac{2 \operatorname{Re} S^* P}{|S|^2 + |P|^2} \quad (\text{VI.33})$$

Prenons l'axe des z suivant \vec{p}' , le plan $x o z$ passant par \vec{P}_1 :

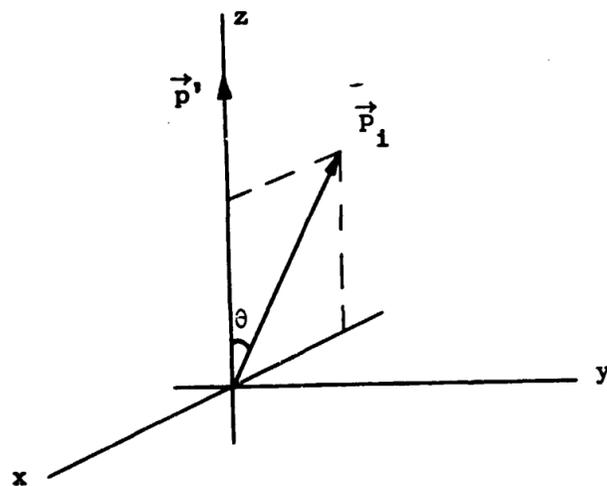


Figure (VI.4)

Les composantes dans ce trièdre, du vecteur \vec{P}_1 , polarisation de l'hypéron final, sont données par :

$$\begin{aligned} (\vec{P}_1)_x &= -\gamma P_1 \sin\theta / (1 - \alpha P_1 \cos\theta) \\ (\vec{P}_1)_y &= \beta P_1 \sin\theta / (1 - \alpha P_1 \cos\theta) \\ (\vec{P}_1)_z &= (P_1 \cos\theta - \alpha) / (1 - \alpha P_1 \cos\theta) \end{aligned} \quad (\text{VI.34})$$

avec :

$$\beta = \frac{2 \operatorname{Im} S^* P}{|S|^2 + |P|^2}, \quad \gamma = \frac{|S|^2 - |P|^2}{|S|^2 + |P|^2} \quad (\text{VI.35})$$

Remarquons que les paramètres α , β et γ sont reliés par $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Le renversement du sens du temps nous apprend que la phase de l'amplitude $M_{\ell I Y}$, dans la voie de moment angulaire $\ell(0 \text{ ou } 1)$, d'isospin total $I(\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2})$ et d'hypercharge $Y(1, 0 \text{ ou } -1)$, est égale à la phase $\delta_{\ell I Y}(M^2)$ de la diffusion élastique hypéron-pion, dans la même voie (ℓ, I, Y) , à l'énergie totale M . Si l'on néglige les interactions dans l'état final (ce qui est assez bien justifié car les masses M sont très peu au-dessus des seuils élastiques $m+\mu$), alors les amplitudes S et P sont toutes réelles et les paramètres β sont nuls.

Le taux total Γ , et les 3 paramètres α, β, γ , décrivent complètement le processus $Y' \rightarrow Y + \pi$.

Nous allons examiner maintenant les diverses désintégrations (VI.27), et voir que la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ est assez bien vérifiée.

A/ Désintégrations du Λ^0 :

La règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ nous apprend que $\Lambda_{\ell}^{00} = -\Lambda_{\ell}^{0-}/\sqrt{2}$ ($\ell = 0, 1$), ce qui entraîne le rapport de branchement suivant :

$$\frac{\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow n \pi^0)}{\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-)} = \frac{1}{2}, \quad (\text{VI.36})$$

ainsi que l'égalité des 3 paramètres α, β, γ pour les deux voies de désintégration. Expérimentalement, on a obtenu les résultats suivants^[6] :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow n \pi^0)}{\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-)} &= 0,51 \pm 0,03 \\ \frac{\alpha^{00}}{\alpha^{0-}} &= 1,10 \pm 0,27 \\ \gamma^{0-} &= 0,78 \pm 0,04 \\ \gamma^{00} &= 0,78 \begin{cases} + 0,22 \\ - 0,42 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{VI.37})$$

Le rapport de branchement est en excellent accord avec la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ (avec une transition $\Delta I = 3/2$ pure, il serait égal à 2). Les erreurs expérimentales sur α et γ sont trop grandes pour espérer tester la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$, mais

on peut constater qu'ils sont en accord avec elle.

Le temps de vie du Λ^0 est $(2,62 \pm 0,02) 10^{-10}$ sec, les deux modes non leptoniques contribuant à eux-seuls, à la quasi-totalité de la largeur du Λ^0 .

B/ Désintégrations des Σ :

La règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ s'écrit ici :

$$\sqrt{2} \Sigma_{\ell}^{+0} = \Sigma_{\ell}^{--} - \Sigma_{\ell}^{++} \quad (VI.38)$$

Si l'on considère dans un plan, les vecteurs $\vec{\Sigma}$, de composantes $\Sigma_{\ell=0}$ et $\Sigma_{\ell=1}$, les trois vecteurs $\sqrt{2} \vec{\Sigma}^{+0}$, $\vec{\Sigma}^{--}$ et $\vec{\Sigma}^{++}$, doivent former les 3 cotés d'un triangle. Les derniers résultats expérimentaux^[7] sont en bon accord avec cette prédiction. Les paramètres α^{--} et α^{++} sont très petits, ce qui indique que les désintégrations correspondantes ont lieu pratiquement dans une seule onde partielle, s ou p. Seule la mesure du signe des paramètres γ , permettrait de fixer l'onde en question. A l'heure actuelle, les résultats expérimentaux sont compatibles avec les deux configurations suivantes (les erreurs expérimentales ne sont pas prises en compte dans ces figures) :

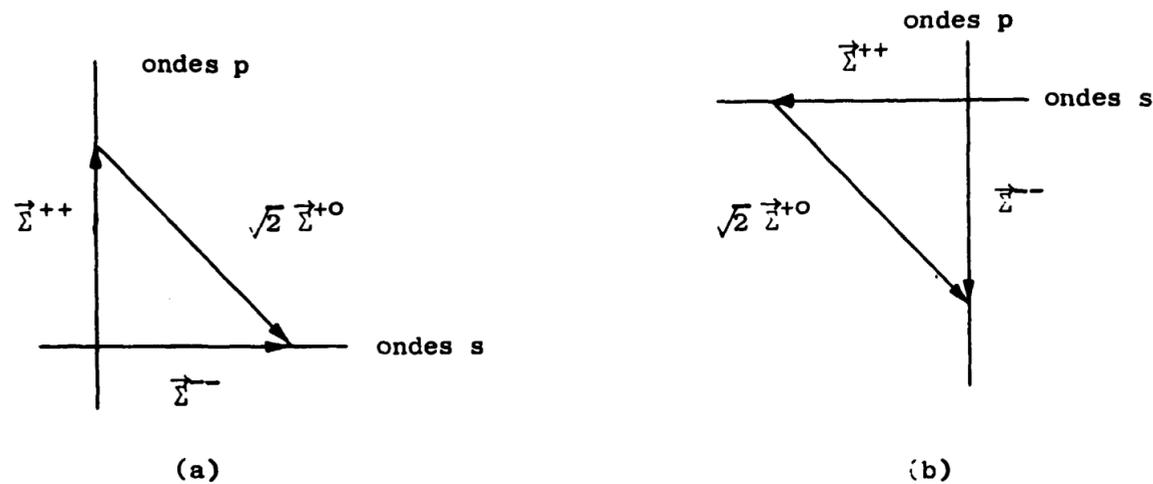


Figure (VI.4)

Les résultats sont^[7] :

$$\tau^{-} = (1,648 \pm 0,023) 10^{-10} \text{ sec}$$

$$\tau^{+} = (0,818 \pm 0,015) 10^{-10} \text{ sec}$$

$$\frac{\Sigma^{++}}{\Sigma^{++} + \Sigma^{+0}} = 0,473 \pm 0,015 \quad (VI.39)$$

$$\alpha^{--} = + 0,017 \pm 0,042$$

$$\alpha^{++} = + 0,006 \pm 0,043$$

$$\alpha^{+0} = + 0,960 \pm 0,067$$

C/ Désintégrations des Ξ :

La règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ nous apprend que $\Xi_{\ell}^{--} = \sqrt{2} \Xi_{\ell}^{00}$, ce qui entraîne le rapport de branchement :

$$\frac{\Gamma(\Xi^{-} \rightarrow \Lambda^0 \pi^{-})}{\Gamma(\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0)} = 2 \quad (VI.40)$$

ainsi que l'égalité des trois paramètres α, β, γ pour les deux voies de désintégration. Expérimentalement, on trouve^[6] :

$$\tau^{-} = (1,74 \pm 0,05) \cdot 10^{-10} \text{ sec}$$

$$\tau^0 = (3,06 \pm 0,40) \cdot 10^{-10} \text{ sec}$$

$$(VI.41)$$

ce qui est en moins bon accord, cette fois-ci, avec la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$.

6) Relations de l'algèbre des courants dans les désintégrations des hyperons

Introduisons l'amplitude de transition faible, d'un hyperon α en un hyperon β , en présence d'un champ extérieur axial :

$$T_{\mu i}^{\beta\alpha} = \int d_4x e^{iq'x} \langle p' \sigma' \beta | R \left\{ j_{\mu}^{A1}(x), \psi_w(0) \right\} | p \sigma \alpha \rangle \quad (VI.42)$$

où α et β sont les indices de spin unitaire des hyperons initial et final, (p, σ) et (p', σ') leurs 4-impulsion et spin respectifs, i est l'indice d'isospin du courant axial.

Contractons $T_{\mu 1}^{\beta\alpha}$ avec q'^{μ} . Il vient :

$$t_1^{\beta\alpha} - q'^{\mu} T_{\mu 1}^{\beta\alpha} = F_1^{\beta\alpha} \quad (VI.43)$$

où l'on a posé, par définition :

$$t_1^{\beta\alpha} = i \int d_4x e^{iq'x} \langle p' \sigma' \beta | R \left\{ \partial^{\mu} j_{\mu}^{A1}(x), \mathcal{H}_W(0) \right\} | p \sigma \alpha \rangle \quad (VI.44)$$

$$F_1^{\beta\alpha} = \int d_4x e^{iq'x} \langle p' \sigma \beta | \delta(x_0) \left[j_0^{A1}(x), \mathcal{H}_W(0) \right] | p \sigma \alpha \rangle .$$

Contrairement à ce qui se passait dans les désintégrations des mésons K, ici les amplitudes t et T ont des pôles dans la variable $s = (p' + q')^2$, dûs aux états intermédiaires à un hyperon. Les contributions de ces pôles ne sont pas toutes singulières lorsque $q' \rightarrow 0$ (à cause des différences de masses à l'intérieur de l'octet des baryons). Elles varient cependant fortement au voisinage de $q' = 0$, et pour cette raison, nous les calculerons explicitement, pour les séparer d'un reste que nous supposerons peu variable en s . En termes de diagrammes, on a :

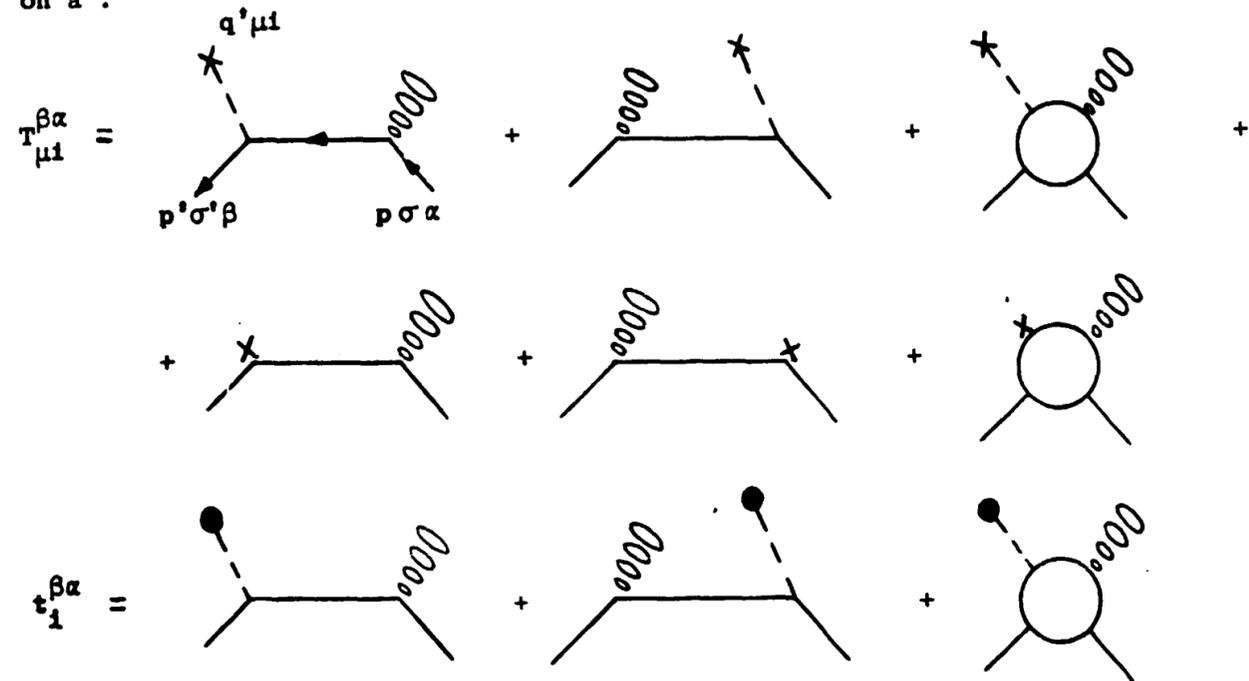


Figure (VI.5)

Commençons par séparer les termes ayant le pôle du pion à $q'^2 = \mu^2$.

La règle (IV.41) nous permet d'écrire :

$$T_{\mu 1}^{\beta\alpha} = f_{\pi} \frac{iq'_{\mu}}{\mu^2 - q'^2} M_1^{\beta\alpha} + R_{\mu 1}^{\beta\alpha} \quad (VI.45)$$

$$t_1^{\beta\alpha} = i f_{\pi} \frac{\mu^2}{\mu^2 - q'^2} M_1^{\beta\alpha}$$

où $M_1^{\beta\alpha}$ est l'amplitude de désintégration non leptonique d'un hyperon :

$$M_1^{\beta\alpha} = (\mu^2 - q'^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle p' \sigma' \beta | R \left\{ \phi_{\pi}^1(x), \mathcal{H}_W(0) \right\} | p \sigma \alpha \rangle . \quad (VI.46)$$

L'équation (VI.43) devient ainsi :

$$if_{\pi} M_1^{\beta\alpha} - q'^{\mu} R_{\mu 1}^{\beta\alpha} = F_1^{\beta\alpha} . \quad (VI.47)$$

Pour calculer les contributions des divers diagrammes de la figure (VI.5), nous devons connaître les éléments de matrice, entre états à un hyperon, du courant de pion j_{π}^1 , du courant axial j_{μ}^{A1} , et de l'Hamiltonien faible \mathcal{H}_W . Nous les calculerons dans la limite de la symétrie unitaire exacte. Le premier de ces éléments de matrice (couplage entre l'octet des mésons pseudo-scalaires et l'octet des baryons $\frac{1}{2}^+$), est donné explicitement dans l'appendice B. Nous le noterons :

$$\langle p' \sigma' \beta | j_{\pi}^1(0) | p \sigma \alpha \rangle = g_{\beta\alpha}^1 \bar{u}_{\sigma'}(p') i \gamma_5 u_{\sigma}(p) . \quad (VI.48)$$

Nous négligerons la dépendance de $g_{\beta\alpha}^1$ dans le transfert $(p' - p)^2$. Le couplage du courant d'axial j_{μ}^{A1} aux hyperons s'écrit, de façon analogue :

$$\langle p' \sigma' \beta | j_{\mu}^{A1}(0) | p \sigma \alpha \rangle = \frac{1}{2} G_{\beta\alpha}^1 \bar{u}_{\sigma'}(p') \gamma_{\mu} \gamma_5 u_{\sigma}(p) . \quad (VI.49)$$

Ici nous négligeons, non seulement la dépendance de $G_{\beta\alpha}^1$ dans le transfert $(p' - p)^2$, mais aussi le terme pseudo-scalaire induit en $(p' - p)_{\mu} \gamma_5$. Toutefois ce terme s'annule lorsque $p' - p = 0$. Il n'apparaît donc pas dans le résultat final, et nous ne perdons rien à ne pas l'écrire.

Calculons maintenant l'élément de matrice de l'hamiltonien faible \mathcal{H}_w . Nous postulons que \mathcal{H}_w se transforme par SU(3), comme la composante d'un octet. Nous avons vu que, dans ces conditions, l'hypothèse courant x courant jointe à la conservation de CP, entraîne que \mathcal{H}_w se transforme comme λ_6 (voir équations (VI.2)). Dans le modèle des quarks, cependant, \mathcal{H}_w contient deux composantes, l'une se transformant comme λ_6 (conservant la parité), l'autre comme λ_7 (et de parité -1) (voir équation (VI.3)). Par souci d'économie, nous postulons ici que \mathcal{H}_w se transforme comme la composante 6 d'un octet. L'élément de matrice de \mathcal{H}_w entre des états à un hyperon, contient alors deux termes, correspondant aux couplages F et D. Nous écrivons :

$$\langle p' \sigma' \beta | \mathcal{H}_w(0) | p \sigma \alpha \rangle = S_{\beta\alpha} \bar{u}_{\sigma'}(p') u_{\sigma}(p) \quad , \quad (VI.50)$$

avec :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta | \text{Trace} \left(\sigma \bar{B} [\lambda_6, B] + \rho \bar{B} \{ \lambda_6, B \} \right) | \alpha \rangle \quad (VI.51)$$

B et \bar{B} sont les matrices 3 x 3 représentant l'octet des baryons $\frac{1}{2}^+$ (voir appendice B), σ et ρ sont des fonctions de vertex dont nous négligerons la dépendance dans le transfert $(p' - p)^2$.

Ceci étant, nous avons tous les éléments pour calculer les différents diagrammes de la figure (VI.5). Calculons pour commencer, la contribution à $M_{11}^{\beta\alpha}$ des états intermédiaires à un hyperon (termes de Born généralisés) :

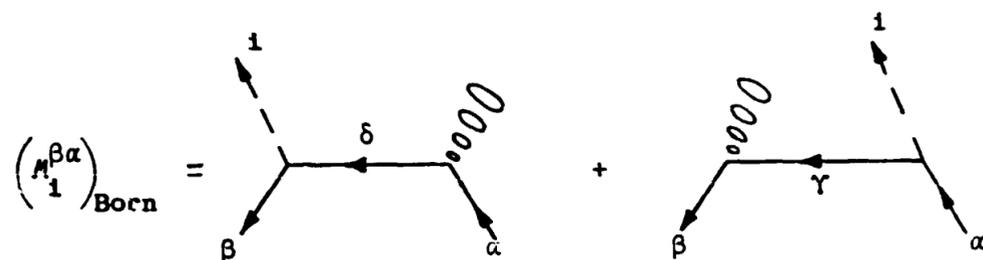


Figure (VI.6)

* Ce terme est pair par parité. Seule la partie paire de l'hamiltonien faible a des éléments de matrice non nuls entre deux membres du même octet. Ceci suppose SU(3), \mathcal{H}_w membre d'un octet et pair par CP.

Il vient aisément :

$$\begin{aligned} \left(M_{11}^{\beta\alpha} \right)_{\text{Born}} &= - \sum_{\delta} g_{\beta\delta}^1 S_{\delta\alpha} \bar{u}_{\sigma'}(p') i\gamma_5 \frac{\not{p}' + \not{q}' + m_{\delta}}{s - m_{\delta}^2} u_{\sigma}(p) + \\ &\quad - \sum_{\gamma} S_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}^1 \bar{u}_{\sigma'}(p') \frac{\not{p} - \not{q}' + m_{\gamma}}{u - m_{\gamma}^2} i\gamma_5 u_{\sigma}(p) \end{aligned} \quad (VI.52)$$

où l'on reconnaît les couplages définis ci-dessus, ainsi que les propagateurs des hyperons intermédiaires $-(\not{p}' + \not{q}' + m_{\delta})/(s - m_{\delta}^2)$ et $-(\not{p} - \not{q}' + m_{\gamma})/(u - m_{\gamma}^2)$.

L'amplitude physique correspond à $p = p' + q'$, soit $s = (p' + q')^2 = m_{\alpha}^2$ et $u = (p - q')^2 = m_{\beta}^2$, ce qui donne :

$$\left(M_{11}^{\beta\alpha} \right)_{\text{Born}}^{\text{phys.}} = - \left(\sum_{\delta} \frac{g_{\beta\delta}^1 S_{\delta\alpha}}{m_{\alpha} - m_{\delta}} + \sum_{\gamma} \frac{S_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}^1}{m_{\beta} - m_{\gamma}} \right) \bar{u}_{\sigma'}(p') i\gamma_5 u_{\sigma}(p) \quad . \quad (VI.53)$$

Remarquons que ces termes de Born ne contiennent que des ondes p. Les ondes s nous seront donc données par le reste de l'amplitude M, que nous calculerons dans la limite $q' \rightarrow 0$.

Les termes de Born de $R_{\mu 1}^{\beta\alpha}$ se calculent aisément. On trouve, après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} \left(q'^{\mu} R_{\mu 1}^{\beta\alpha} \right)_{\text{Born}} &= \frac{1}{2i} \sum_{\delta} (m_{\beta} + m_{\delta}) G_{\beta\delta}^1 S_{\delta\alpha} \bar{u}_{\sigma'}(p') i\gamma_5 \frac{\not{p}' + \not{q}' + m_{\delta}}{s - m_{\delta}^2} u_{\sigma}(p) + \\ &\quad + \frac{1}{2i} \sum_{\gamma} (m_{\gamma} + m_{\alpha}) S_{\beta\gamma} G_{\gamma\alpha}^1 \bar{u}_{\sigma'}(p') \frac{\not{p} - \not{q}' + m_{\gamma}}{u - m_{\gamma}^2} i\gamma_5 u_{\sigma}(p) + \\ &\quad + \frac{1}{2i} \left(\sum_{\delta} G_{\beta\delta}^1 S_{\delta\alpha} + \sum_{\gamma} S_{\beta\gamma} G_{\gamma\alpha}^1 \right) \bar{u}_{\sigma'}(p') i\gamma_5 u_{\sigma}(p) \quad . \end{aligned} \quad (VI.54)$$

Ecrivons que $i f_{\pi} M_{11}^{\beta\alpha} - q'^{\mu} R_{\mu 1}^{\beta\alpha}$ n'a pas de singularité en $s = m_{\delta}^2$ et $u = m_{\gamma}^2$. Par comparaison de (VI.54) avec (VI.52), il vient aussitôt :

$$f_{\pi} = \frac{(m_{\alpha} + m_{\beta}) G_{\alpha\beta}^1}{2 g_{\alpha\beta}^1} \quad , \quad (VI.55)$$

qui n'est rien d'autre qu'une généralisation de la relation de Goldberger et

Treiman à l'octet des baryons. Tenant compte de cette relation, on a :

$$f_{\pi} M_1^{\beta\alpha} + i q'_{\mu} R_{\mu 1}^{\beta\alpha} = f_{\pi} \left(\sum_{\delta} \frac{g_{\beta\delta}^1 s_{\delta\alpha}}{m_{\beta} + m_{\delta}} + \sum_{\gamma} \frac{s_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}^1}{m_{\gamma} + m_{\alpha}} \right) \bar{u}_{\sigma}(p') i\gamma_5 u_{\sigma}(p) + f_{\pi} \tilde{M}_1^{\beta\alpha} + i q'_{\mu} \tilde{R}_{\mu 1}^{\beta\alpha} \quad (VI.56)$$

où \tilde{M} et \tilde{R} sont les amplitudes M et R dont on a soustrait les termes de Born. Revenons à l'équation (VI.47), remplaçons son premier membre par l'expression (VI.56) et prenons la limite $q' \rightarrow 0$. Il vient :

$$\lim_{q' \rightarrow 0} \tilde{M}_1^{\beta\alpha} = - \left(\sum_{\delta} \frac{g_{\beta\delta}^1 s_{\delta\alpha}}{m_{\beta} + m_{\delta}} + \sum_{\gamma} \frac{s_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}^1}{m_{\gamma} + m_{\alpha}} \right) \bar{u}_{\sigma}(p') i\gamma_5 u_{\sigma}(p) + \frac{1}{if_{\pi}} F_1^{\beta\alpha} \quad (VI.57)$$

Remarquons que là encore, les termes de Born de R ne contiennent que des ondes p . Ainsi, les ondes s sont entièrement données par le commutateur F de l'algèbre des courants. Calculons donc F . Pour cela, nous ferons usage de l'hypothèse "V-A" généralisée (équation (VI.4)). Il vient aisément :

$$F_1^{\beta\alpha} = \langle p' \sigma' \beta | [Q_1, \mathcal{K}_W(0)] | p \sigma \alpha \rangle \quad (VI.58)$$

où Q_1 est la composante 1 de l'opérateur de spin isotopique. Lorsque les indices de spin unitaire α et β sont fixés, il est facile de calculer l'action de Q_1 sur les états initial et final. Le second membre de (VI.58) s'exprime alors en fonction des seuls éléments de matrice de \mathcal{K}_W entre des états à un hyperon, dont nous connaissons les expressions (VI.50). Cette fois-ci, F ne contient que des ondes s .

En définitive, les ondes s sont données par le seul terme F de l'algèbre des courants, en fonction des deux paramètres σ et ρ , alors que les ondes p sont données partiellement par les termes de Born de M , et partiellement par ceux de R , en fonction des paramètres σ et ρ , et du rapport

$\alpha = F/(F+D)$ du couplage des mésons pseudoscalaires avec l'octet des baryons $\frac{1}{2}^+$:

$$\begin{aligned} \left(M_1^{\beta\alpha} \right)_{\text{ondes } s} &= -\frac{1}{f_{\pi}} \sum_{\gamma} \left(f_{1\alpha\gamma} s_{\beta\gamma} - f_{1\beta\gamma} s_{\gamma\alpha} \right) \bar{u}_{\sigma}(p') u_{\sigma}(p) , \\ \left(M_1^{\beta\alpha} \right)_{\text{ondes } p} &= - \left(\sum_{\delta} \frac{g_{\beta\delta}^1 s_{\delta\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\delta}} + \sum_{\gamma} \frac{s_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}^1}{m_{\beta} + m_{\gamma}} \right) \bar{u}_{\sigma}(p') i\gamma_5 u_{\sigma}(p) + \\ &\quad - \left(\sum_{\delta} \frac{g_{\beta\delta}^1 s_{\delta\alpha}}{m_{\beta} + m_{\delta}} + \sum_{\gamma} \frac{s_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}^1}{m_{\gamma} + m_{\alpha}} \right) \bar{u}_{\sigma}(p') i\gamma_5 u_{\sigma}(p) . \end{aligned} \quad (VI.59)$$

Pour écrire ces relations sur la couche de masse, nous avons fait, comme d'habitude, l'hypothèse que l'amplitude \tilde{M} varie peu, lorsque l'on passe du point de l'algèbre des courants $q'=0$ et $q^2=\mu^2$, au point physique $q=0$ et $q^2=\mu^2$.

Les expressions des divers amplitudes intéressantes, sont données dans le tableau (VI.7). Les paramètres y et y' sont définis par :

$$y = \frac{\sigma - \rho}{3\sigma + \rho} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\sigma + \rho}{3\sigma - \rho}$$

Il est remarquable de constater que l'amplitude Σ^{++} ne contient pas d'onde s , ce qui est compatible avec les résultats expérimentaux (figure (VI.4.a)). Ceci est une conséquence de l'hypothèse que \mathcal{K}_W se transforme comme un isospineur $\frac{1}{2}$, jointe à l'hypothèse "V-A". En effet, les ondes s sont données par l'élément de matrice $\langle n | [Q_-, \mathcal{K}_W] | \Sigma^+ \rangle$. Le commutateur $[Q_-, \mathcal{K}_W]$, avec les hypothèses ci-dessus, se transforme aussi comme un isospineur $\frac{1}{2}$, et ne peut en conséquence induire la transition $\Sigma^+ \rightarrow n$, qui est une transition $\Delta I = 3/2$. Donc l'élément de matrice est nul.

Oublions provisoirement les ondes p , et déterminons les paramètres σ et ρ à partir des ondes s expérimentales. L'accord avec les résultats expérimentaux (solution correspondant à la figure (VI.4.a)) est excellent avec :

$$\rho = -0,35 \sigma \quad (VI.60)$$

termes de Born de M	termes de Born de Ω	ondes s
Λ^{00} $= -\sqrt{2} \Lambda^{00}$	$\frac{3\sigma+p}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{M_\Lambda - M_N} - \frac{2(1-\alpha)y}{M_\Sigma - M_N} \right)$	$-\frac{3\sigma+p}{\sqrt{6}} \frac{1}{G_A M_N}$
Σ^{++}	$\frac{3\sigma+p}{3} (1-\alpha) \left(\frac{3y}{M_\Sigma - M_N} - \frac{1}{M_\Lambda - M_N} \right)$	0
Σ^{+0} $= \frac{\Sigma^{++} - \Sigma^{+-}}{\sqrt{2}}$	$-(\sigma-p) \frac{1-2\alpha}{\sqrt{2} (M_\Sigma - M_N)}$	$-\frac{\sigma-p}{2\sqrt{2} G_A M_N}$
Σ^{--}	$\frac{3\sigma+p}{3} \left(\frac{3\alpha y}{M_\Sigma - M_N} - \frac{1-\alpha}{M_\Lambda - M_N} \right)$	$-\frac{(\sigma-p)}{2 G_A M_N}$
Ξ^{--} $= \sqrt{2} \Xi^{00}$	$\frac{3\sigma-p}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1-2\alpha}{M_\Xi - M_\Lambda} + \frac{2(1-\alpha)y}{M_\Sigma - M_\Lambda} \right)$	$-\frac{3\sigma-p}{\sqrt{6}} \frac{1}{2 G_A M_N}$

Toutes les amplitudes ont été divisées par $g\sqrt{2}$

TABLEAU (VI.7)

On trouve en effet [8] :

	Ondes s expérimentales	Ondes s théoriques
Λ^{0-}	$+ 0,332 \cdot 10^{-6}$	$0,332 \cdot 10^{-6}$
Σ^{++}	$- 0,001 \cdot 10^{-6}$	0
Σ^{+0}	$+ 0,299 \cdot 10^{-6}$	$0,293 \cdot 10^{-6}$
Σ^{--}	$0,404 \cdot 10^{-6}$	$0,414 \cdot 10^{-6}$
Ξ^{--}	$- 0,440 \cdot 10^{-6}$	$- 0,420 \cdot 10^{-6}$

TABLEAU (VI.8)

Quelques remarques, concernant ces ondes s, s'imposent ici :

1) Les deux amplitudes Λ_s^{00} et Λ_s^{0-} s'expriment en fonction du seul élément de matrice $\langle n | \mathcal{H}_W | \Lambda^0 \rangle$ qui correspond à une transition $\Delta I = \frac{1}{2}$. Ainsi au point non physique de l'algèbre des courants $q^2 = 0$, les amplitudes Λ_s^{00} et Λ_s^{0-} satisfont automatiquement la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$. Il en est de même au point physique $q^2 = \mu^2$, si, au cours du prolongement d'un point à l'autre, les amplitudes varient de façon négligeable.

2) Les trois amplitudes Σ^{++} , Σ^{--} et Σ^{+0} s'expriment en fonction des deux éléments de matrice $\langle p | \mathcal{H}_W | \Sigma^+ \rangle$ et $\langle n | \mathcal{H}_W | \Sigma^0 \rangle$. Éliminant ces deux quantités entre les trois amplitudes, on obtient une relation indépendante de toute hypothèse sur \mathcal{H}_W [9] :

$$\sqrt{2} \Sigma_s^{+0} = \Sigma_s^{++} + \Sigma_s^{--} \quad (VI.61)$$

Ce résultat est à comparer avec la contrainte (VI.38) de la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$. Elle en diffère par le signe devant Σ_s^{++} . Si donc l'on impose la

règle $\Delta I = \frac{1}{2}$, alors Σ_s^{++} doit être nul, ce qui est bien ce que nous avons trouvé. Retournons l'argument : l'algèbre des courants et l'hypothèse que Σ_s^{++} est nul, entraînent la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ pour les amplitudes de désintégration d'onde s des Σ :

3) Les deux amplitudes Ξ_s^{--} et Ξ_s^{00} s'expriment en fonction du seul élément de matrice $\langle \Lambda^0 | \mathcal{H}_w | \Xi^0 \rangle$ qui correspond à une transition $\Delta I = \frac{1}{2}$. Donc là aussi, la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$ est automatiquement vérifiée.

En ce qui concerne les ondes p, la situation théorique est beaucoup moins favorable. Avec les valeurs de σ et ρ déterminées par les ondes s, les ondes p calculées sont en désaccord important avec les ondes p expérimentales. Il est toutefois possible d'obtenir un compromis entre les ondes s et p. Pour un rapport ρ/σ égal à -0,65, et un paramètre α égal à 0,35 on obtient les résultats suivants, qui montrent un accord de l'ordre de 30 % :

	Ondes s		Ondes p	
	expérimentales	théoriques	expérimentales	théoriques
Λ^{0-}	$0,332 \cdot 10^{-6}$	$0,332 \cdot 10^{-6}$	$0,133 \cdot 10^{-6}$	$0,129 \cdot 10^{-6}$
Σ^{++}	$-0,001 \cdot 10^{-6}$	0	$0,404 \cdot 10^{-6}$	$0,223 \cdot 10^{-6}$
Σ^{+0}	$0,299 \cdot 10^{-6}$	$0,404 \cdot 10^{-6}$	$-0,299 \cdot 10^{-6}$	$-0,199 \cdot 10^{-6}$
Σ^{--}	$0,404 \cdot 10^{-6}$	$0,571 \cdot 10^{-6}$	$-0,003 \cdot 10^{-6}$	$-0,054 \cdot 10^{-6}$
Ξ^{--}	$-0,440 \cdot 10^{-6}$	$-0,516 \cdot 10^{-6}$	$0,087 \cdot 10^{-6}$	$0,026 \cdot 10^{-6}$

TABLEAU (VI.9)

Il est peu probable que le désaccord des ondes p soit dû à des effets de prolongement hors de la couche de masse des diverses fonctions de vertex σ , ρ , g . Il semble que l'on ne puisse réduire les ondes p aux seuls termes

de Born. Des états intermédiaires lourds, dont les contributions subissent des modifications importantes entre les points $q' = 0$ et $q = 0$, pourraient expliquer le désaccord observé. Examinons les états les plus proches :

1) La résonance $N^*(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ intervient dans des diagrammes du type suivant :



Figure (VI.10)

Les couplages aux deux vertex sont nécessairement dérivatifs, ce qui entraîne que la contribution de tels graphes est en (qq') . Elle s'annule donc aux deux points $q = 0$ et $q' = 0$, et n'a aucun effet sur l'amplitude physique.

2) La résonance $Y_0^*(1405)$, qui est un état $\frac{1}{2}^-$ intervient dans le diagramme suivant (amplitudes Σ^{++} et Σ^{--} seulement) :

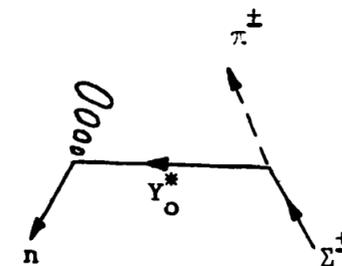


Figure (VI.11)

Malheureusement, un tel graphe est susceptible d'introduire des variations beaucoup plus importantes dans les ondes s que dans les ondes p.

Notons toutefois qu'il ne viole pas la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$.

Ainsi, il est difficile d'expliquer le désaccord observé, en faisant appel à des états intermédiaires lourds. On peut mettre alors en doute le calcul des constantes de couplage $g_{\alpha\beta}^1$ et $S_{\alpha\beta}$, dans la limite de la symétrie unitaire exacte (équations (VI.48 et 51)). A ce propos, une remarque s'impose. En calculant ainsi $g_{\alpha\beta}^1$ et $S_{\alpha\beta}$, nous avons négligé des termes de l'ordre de $\Delta M/M$, où ΔM est une différence de masses typique entre les baryons $\frac{1}{2}^+$, et M leur masse moyenne. Or, si nous regardons le tableau (VI.7), nous voyons que les termes de Born de R sont précisément en $\Delta M/M$ par rapport aux termes de Born de M . Par souci de cohérence, nous devrions donc les négliger. Nous ne l'avons pas fait, et ceci pour la raison suivante. Nous avons supposé que le couplage du pion aux hyperons est non dérivatif. Nous aurions pu aussi bien faire le calcul avec un couplage dérivatif, et écrire, au lieu de (VI.48) :

$$\langle p' \sigma' \beta | j_{\pi}^1(0) | p \sigma \alpha \rangle = f_{\beta\alpha}^1 \bar{u}_{\sigma'}(p') (\not{p}' - \not{p}) \gamma_5 u_{\sigma}(p) \quad (VI.62)$$

Dans ces conditions, on s'aperçoit que les nouveaux termes de Born sont exactement la somme des anciens termes de Born de M et R , et que la nouvelle amplitude R a ses termes de Born identiquement nuls à la limite $q' \rightarrow 0$. Le résultat final n'est pas changé, mais la séparation des ondes p en deux termes d'origines différentes, n'existe plus. Il n'y a donc pas de raison de négliger une partie de ces ondes p par rapport à l'autre.

Ceci étant, une source d'ennuis assez sérieuse vient de ce que, lorsque $q \neq 0$, M dépend de quatre amplitudes, et non plus seulement de deux. En effet M s'écrit :

$$A + A' \frac{q}{M} + \left[B + B' \frac{q}{M} \right] \gamma_5$$

Au point physique $q = 0$, A' et B' disparaissent. Mais au point $q' = 0$ de l'algèbre des courants, M devient :

$$A + A' \frac{m-M}{M} + \left[B + B' \frac{m+M}{M} \right] \gamma_5$$

Ainsi ce que nous calculons au point $q' = 0$, n'est pas le prolongement analytique de A et B , mais celui des fonctions $A + A' (m-M)/M$ et $B + B' (m+M)/M$.

En ce qui concerne les ondes s , le terme supplémentaire $A'(m-M)/M$ est en $\Delta M/M$, et nous pouvons à bon droit le négliger. Il n'en est plus de même du terme supplémentaire $B'(m+M)/M$ des ondes p . En l'absence de tout argument nous permettant de négliger l'amplitude B' devant B , ceci nous donne la possibilité de rejeter sur elle, la responsabilité du désaccord observé dans les ondes p .

7) Relation entre les désintégrations non leptoniques des mésons K et celles des hyperons

En abandonnant le couplage faible de la forme courant \times courant dans les désintégrations non leptoniques, nous avons perdu la notion d'universalité, et de ce fait, les paramètres qui définissent les amplitudes de désintégration des mésons K d'une part, des hyperons d'autre part, ne sont pas reliés entre eux. Examinons dans quelle mesure nous pouvons retrouver cette universalité.

Considérons la partie \mathcal{H}_W^+ de la densité d'hamiltonien faible changeant l'étrangeté, qui conserve la parité, et qui est donc paire par C . Supposons que \mathcal{H}_W^+ se transforme, par $SU(3)$, comme une composante d'un octet. Nous connaissons un opérateur qui a les mêmes nombres quantiques que \mathcal{H}_W^+ : c'est la divergence $\partial^\mu j_\mu^7$ du courant vecteur j_μ^7 . En effet $\partial^\mu j_\mu^7$ conserve la parité, C , la charge électrique, et change l'étrangeté d'une unité. Dans la limite de la symétrie unitaire exacte, $\partial^\mu j_\mu^7$ s'annule, mais nous savons aussi que dans la même limite, il n'y a plus de désintégration faible. Il est donc tentant de faire l'hypothèse que \mathcal{H}_W^+ est proportionnel à $\partial^\mu j_\mu^7$:

$$\mathcal{H}_W^+(x) = \xi \partial^\mu j_\mu^7(x) \quad (VI.63)$$

Ceci entraîne pour l'hamiltonien H_W^+ , l'expression suivante :

$$H_W^+ = \xi \dot{Q}_7 = -i \xi [H_8^{MF}, Q_7] \quad (VI.64)$$

où H_8^{MF} est la partie de l'hamiltonien qui est non invariante par $SU(3)$. Nous ne postulons pas, à vrai dire, une égalité entre opérateurs, qui conduirait à des difficultés, mais une égalité approchée des éléments de matrice de (VI.64), entre membres d'un même octet. Supposons que H_8^{MF} se transforme par $SU(3)$, comme la huitième composante d'un octet. Alors (VI.64) s'écrit :

$$H_W^+ = -\xi \sqrt{3} H_6^{MF} \quad (VI.65)$$

où H_6^{MF} est la sixième composante de l'octet auquel appartient H_8^{MF} . Ceci nous permet de compléter (VI.63) :

$$\mathcal{H}_W^+ = \xi \partial^\mu j_\mu^7 = -\xi \sqrt{3} \mathcal{H}_6^{MF} \quad (VI.66)$$

Examinons les conséquences de l'hypothèse (VI.63). Les désintégrations $K \rightarrow 2\pi$ et 3π s'expriment en fonction de l'élément de matrice $\langle \pi^0 | \mathcal{H}_W | K_2^0 \rangle$, qui ne fait intervenir que \mathcal{H}_W^+ . Nous pouvons donc calculer toutes les désintégrations $K \rightarrow 2\pi$ et 3π , en fonction du seul paramètre ξ (les éléments de matrice de $\partial^\mu j_\mu^7$ ne font pas intervenir de constante inconnue). De la même façon nous pouvons calculer toutes les ondes s dans les désintégrations des hyperons, c'est-à-dire relier les paramètres σ et ρ à ξ , donc, en définitive, à $\langle \pi^0 | \mathcal{H}_W | K_2^0 \rangle$. Remarquons tout de suite, que, puisque l'hamiltonien faible H_W et l'hamiltonien fort H_8^{MF} , responsable de la violation de $SU(3)$, appartiennent au même octet, le rapport F/D dans les éléments de matrice de ces deux hamiltoniens entre états à un baryon, est le même. Cette prévision est remarquablement vérifiée, puisque nous avons trouvé la valeur $-0,35$ pour le rapport ρ/σ , alors que le rapport F/D des interactions fortes est $-0,32$.

Calculons donc les éléments de matrice de \mathcal{H}_W^+ entre états à un baryon.

On a :

$$\langle \beta | \mathcal{H}_W^+ | \alpha \rangle = -3\sqrt{2} \xi \left(f \text{Trace } \bar{B}_\beta [\lambda_8, B_\alpha] + d \text{Trace } \bar{B}_\beta \{ \lambda_8, B_\alpha \} \right) \quad (VI.67)$$

où α et β sont les indices de spin unitaire des baryons, et f et d , les paramètres définis par les masses des baryons :

$$m_\alpha - m_\beta = \langle \alpha | \mathcal{H}_8^{MF} | \beta \rangle = \sqrt{6} f \text{Trace } \bar{B}_\alpha [\lambda_8, B_\beta] + \sqrt{6} d \text{Trace } \bar{B}_\alpha \{ \lambda_8, B_\beta \} \quad (VI.68)$$

On obtient aisément, d'autre part, l'élément de matrice de \mathcal{H}_W^+ entre un π^0 et un K_2^0 :

$$\langle \pi^0 | \mathcal{H}_W^+ | K_2^0 \rangle = \frac{\xi}{2} (m_K^2 - m_\pi^2) \quad (VI.69)$$

Les relations (VI.67,68,69,25 et 59) relient les désintégrations non leptoniques des hyperons à celles des mésons. Prenant la valeur expérimentale $0,796 \cdot 10^{-6} m_K$ de l'amplitude ($K_1^0 \rightarrow 2\pi$), on obtient pour l'onde s de la

désintégration du Λ :

$$\Lambda_8^{0-} = 0,5 \cdot 10^{-6} \quad (VI.70)$$

à comparer avec la valeur $0,33 \cdot 10^{-6}$. L'accord, sans être excellent, est assez frappant pour que l'on puisse penser qu'une hypothèse d'universalité telle que (VI.63) contient une part de vérité.

REFERENCES :

- [1] - CHRISTENSON, CRONIN, FITCH et TURLAY : Phys. Rev. Letters, 13, 138 (1964)
- [2] - TRILLING : Compte-Rendus de la Conférence Internationale sur les Interactions Faibles, Laboratoire National d'Argonne (1965)
- [3] - Y. HARA et Y. NAMBU : Phys. Rev. Letters, 16, 875 (1966)
- [4] - BROWN et SINGER : Phys. Rev., 133, B 812 (1964)
- [5] - ITZYKSON, JACOB et MAHOUX : K meson non leptonic decays, (Il Nuovo Cimento, à paraître)
- [6] - J.S. BELL : Les Houches (1965)
- [7] - R.O. BANGERTER et al : Phys. Rev. Letters, 17, 495 (1966)
- [8] - L.S. BROWN et C.M. SOMMERFIELD : Phys. Rev. Letters, 16, 751 (1966)
La normalisation des amplitudes, choisie dans ces notes, diffère de celle de la référence ci-dessus. Nous avons tenu compte aussi des résultats expérimentaux récents^[7], concernant les Σ , résultats en meilleur accord avec la règle $\Delta I = \frac{1}{2}$
- [9] - H. SUGAWARA : Phys. Rev. Letters, 15, 870 (1965)

AMPLITUDES A BASSE ENERGIE

I) Introduction

Considérons l'amplitude $M(s, t; q^2, q'^2)$ de la réaction :



où les particules A et B ne sont pas précisées. Les techniques générales, que nous avons développées au cours des chapitres précédents, nous permettent d'obtenir deux relations pour M. La première, indépendante de l'algèbre des courants et conséquence seulement de CADDP, donne la valeur de M au point non physique $q' = 0$ (soit $s = m_B^2$, $t = q^2 = (p - p')^2$ et $q'^2 = 0$). La deuxième donne la dérivée de M par rapport à s, au même point non physique (voir, par exemple, les équations (IV.64 et 71)). Dans le chapitre IV, nous avons utilisé la seconde de ces relations pour calculer la constante de renormalisation (G_A/G_V). Dans ce chapitre, nous adopterons l'attitude inverse, c'est-à-dire que, connaissant la valeur expérimentale de (G_A/G_V), nous calculerons les quantités $M[m_B^2, (p' - p)^2; (p' - p)^2, 0]$ et $\frac{\partial}{\partial s} M[s, (p' - p)^2; (p' - p)^2, 0]_{s=m_B^2}$. De là, nous essaierons d'en déduire, moyennant un certain nombre d'hypothèses, la valeur de l'amplitude M au seuil physique $s_0 = (m_{A,B} + \mu)^2$, $t = (p' - p)^2$, $q^2 = q'^2 = \mu^2$, ce qui nous permettra d'atteindre des grandeurs physiques telles que longueurs de diffusion d'onde s, constantes de couplage et rapports de branchement.

Le problème essentiel consiste donc à prolonger l'amplitude M, d'une part dans la variable s, d'autre part dans les variables q^2 et q'^2 . La connaissance de M et de sa dérivée première au point $s = m_B^2$, suggère une approximation linéaire en s jusqu'au seuil physique s_0 . Cette approximation n'est certainement pas valable au-delà du seuil, car M possède un point de

branchement en s_0 , et le développement de Taylor de M au voisinage de $s = m_B^2$ ne peut converger au-delà de s_0 . Il n'est donc pas question d'utiliser l'approximation linéaire en s pour calculer une portée effective. En revanche, nous pouvons espérer atteindre, de cette façon, les longueurs de diffusion.

En ce qui concerne le prolongement en q^2 et q'^2 , nous ferons l'hypothèse que M varie peu, lorsque, à s et t fixés, q^2 et q'^2 varient respectivement de $(p' - p)^2$ et 0, à μ^2 . Notons tout de suite que, au cours de ce prolongement, la variable u varie. L'hypothèse ci-dessus ne sera donc acceptable, qu'à la condition que cette variation de u soit négligeable devant la variation de s, entre le point non physique $s = m_B^2$ et le seuil s_0 . Raisonnons, pour simplifier, dans le cas où $m_A = m_B = m$, et $p' = p$ ($t = 0$). A s et t fixés, la variation de u est $2\mu^2$, lorsque q^2 et q'^2 varient de 0 à μ^2 . D'autre part, au cours du prolongement en s, la variation de s est $(m + \mu)^2 - m^2$. La condition cherchée est donc : $m \gg \mu$. Ainsi, nous ne pouvons négliger les effets du prolongement en q^2 et q'^2 , que dans la mesure où la masse du pion est négligeable devant celle des particules A et B. Dans le cas où A et B sont eux-mêmes des pions, il serait déraisonnable de faire une telle approximation. Nous verrons alors, comment on peut se tirer d'affaire. Dans les autres cas, nous oublierons purement et simplement le prolongement en q^2 et q'^2 .

II) Longueurs de diffusion pion-nucléon

Nous avons déjà écrit, dans le chapitre IV, toutes les relations dont nous avons besoin pour calculer l'amplitude $M_{\pi-p}$. L'équation (IV.54) nous donne tout d'abord, vers l'avant :

$$\begin{aligned} m M_{\pi-p}(s, 0; \mu^2, \mu^2) &= -2m g^2 \bar{u}(p) i\gamma_5 \frac{\not{p} + \not{p} + m}{s - m} i\gamma_5 u(p) + m \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; \mu^2, \mu^2) \\ &= -g^2 + \frac{g^2 \mu^2}{s - m} + m \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; \mu^2, \mu^2) . \end{aligned} \quad (VII.2)$$

D'autre part, tenant compte de (IV.64 et 71), nous obtenons pour $\tilde{M}(s, 0; 0, 0)$ l'approximation linéaire suivante :

$$m \tilde{M}_{\pi-p}(s, 0; 0, 0) = [gK(0)]^2 \left\{ 1 - \frac{s-m^2}{4m^2} \left[1 - \left(\frac{G_V}{G_A} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{VII.3})$$

Lorsque les pions sont sur leur couche de masse, nous écrirons la même relation, en remplaçant toutefois le facteur de forme $K(0)$ par $K(\mu^2) = 1$. L'amplitude π - p complète s'écrit alors :

$$m M_{\pi-p}(s, 0; \mu^2, \mu^2) = \frac{g^2 \mu^2}{s-m^2} - g^2 \frac{s-m^2}{4m^2} \left[1 - \left(\frac{G_V}{G_A} \right)^2 \right]. \quad (\text{VII.4})$$

Notons, tout de suite, que l'amplitude π^+p se déduit de $M_{\pi-p}$ par croisement des voies s et u , donc :

$$m M_{\pi+p}(s, 0; \mu^2, \mu^2) = \frac{g^2 \mu^2}{u-m^2} - g^2 \frac{u-m^2}{4m^2} \left[1 - \left(\frac{G_V}{G_A} \right)^2 \right]. \quad (\text{VII.5})$$

Au seuil physique ($s = (m+\mu)^2$ et $u = (m-\mu)^2$), $M_{\pi+p}$ et $M_{\pi-p}$ s'expriment en fonction des longueurs de diffusion d'onde s pion-nucléon, a_1 et a_3 , dans les états de spin isotopique total $I = \frac{1}{2}$ et $3/2$:

$$M_{\pi-p}(\text{seuil}) = -4\pi \frac{m+\mu}{m} \left(\frac{2}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_3 \right) \quad (\text{VII.6})$$

$$M_{\pi+p}(\text{seuil}) = -4\pi \frac{m+\mu}{m} a_3.$$

Les quatre dernières équations nous permettent de calculer a_1 et a_3 . Avec $G_A/G_V = 1,18$, le calcul donne :

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,183 \quad 1/\mu \\ a_3 &= 0,117 \quad 1/\mu. \end{aligned} \quad (\text{VII.7})$$

Ces résultats sont en accord remarquable avec les résultats expérimentaux^[1] :

$$\begin{aligned} a_1 &= -(0,183 \pm 0,017) \quad 1/\mu \\ a_3 &= (0,109 \pm 0,011) \quad 1/\mu. \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

III) Amplitudes de diffusion π - π à basse énergie

Prenons pour états A et B , des états à un méson π , et considérons l'amplitude π - π :

$$M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}(s, t; q^2, q'^2) = (\mu^2 - q^2)(\mu^2 - q'^2) \int d_4x e^{iq'x} \langle \pi_\delta(p') | \mathcal{R} \{ \Phi^\beta(x), \Phi^\alpha(0) \} | \pi_\gamma(p) \rangle. \quad (\text{VII.9})$$

Les calculs de l'algèbre des courants sont ici exactement les mêmes que ceux du chapitre IV, et nous pouvons écrire directement, au vu de l'équation (IV.50), avec des notations évidentes :

$$f_\pi \frac{q_\nu}{\mu^2 - q^2} \left\{ f_\pi M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha} - q'^\mu \bar{\Lambda}_{\delta\gamma, \mu}^{\beta\alpha} \right\} + f_\pi \bar{\Lambda}_{\delta\gamma, \nu}^{\beta\alpha} - F_{\delta\gamma, \nu}^{\beta\alpha} - q'^\mu R_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{VII.10})$$

où M , $\bar{\Lambda}$, Λ et R sont réguliers à $q' = 0$ (pas d'état intermédiaire à un pion), et où le terme de l'algèbre des courants F est donné par :

$$\begin{aligned} F_{\delta\gamma, \mu}^{\beta\alpha} &= -i \varepsilon_{\alpha\beta\xi} \langle \pi_\delta(p') | j_\mu^\xi(0) | \pi_\gamma(p) \rangle \\ &= -\varepsilon_{\alpha\beta\xi} \varepsilon_{\gamma\delta\xi}(p+p')_\mu F(t), \end{aligned} \quad (\text{VII.11})$$

avec $F(0) = 1$.

Nous avons pu scinder l'équation (IV.50) en deux équations (IV.52 et 53), moyennant une hypothèse supplémentaire sur le prolongement en q^2 des deux membres de (IV.51). Dans le cas qui nous occupe, une telle hypothèse est fortement sujette à caution, car la masse du pion n'est plus négligeable devant celle des particules A et B , qui sont elles-mêmes des pions. En effet, appelons $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$, la fonction suivante, régulière à $q^2 = \mu^2$:

$$\frac{1}{\mu^2 - q^2} \left\{ f_\pi M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha} - q'^\mu \bar{\Lambda}_{\delta\gamma, \mu}^{\beta\alpha} \right\} = \sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}. \quad (\text{VII.12})$$

Sans hypothèse supplémentaire, l'équation (VII.10) se scinde en deux nouvelles équations, dont la première est restreinte à $q^2 = \mu^2$:

$$f_{\pi} M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}(s,t;\mu^2,q'^2) = q'^{\mu} \bar{\Lambda}_{\delta\gamma,\mu}^{\beta\alpha}(s,t;\mu^2,q'^2), \quad (\text{VII.13})$$

$$f_{\pi} \Lambda_{\delta\gamma,\mu}^{\beta\alpha}(s,t;q^2,q'^2) = -\varepsilon_{\alpha\beta\xi} \varepsilon_{\gamma\delta\xi} (p+p')_{\mu} F(t) - f_{\pi} \sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha} q_{\mu} + q'^{\lambda} R_{\lambda\mu}. \quad (\text{VII.14})$$

Elles ne diffèrent de (IV.51 et 53) que par le terme en $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$ qui est supposé nul dans (IV.53). Ce terme, en q_{μ} , est à comparer au terme en $(p+p')_{\mu}$ de l'algèbre des courants. Il est d'ordre μ/M par rapport à ce dernier, M étant une masse moyenne de l'ordre des masses des particules A et B. Lorsque A et B sont des particules lourdes, on peut donc le négliger. Dans le cas présent, où A et B sont des pions, il n'en est plus de même, et nous verrons, plus loin, que nous ne pouvons obtenir une amplitude $\pi\pi$ ayant les bonnes propriétés de croisement, si nous supposons $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$ identiquement nul.

L'équation (VII.14) ressemble à un début de développement de l'amplitude Λ , en puissances des 4-vecteurs $(p+p')$, q et q' . Elle ne fixe d'ailleurs que le coefficient du terme linéaire en $(p+p')$. Nous ferons l'hypothèse que, dans le domaine de basse énergie qui nous intéresse, le développement de l'amplitude Λ peut être limité aux termes linéaires en $(p+p')$, q et q' , ce qui revient à limiter le développement de M aux termes bilinéaires. Cette hypothèse nous permet de traiter sur le même pied, les variables s, q^2 et q'^2 , et d'éviter ainsi la difficulté signalée dans l'introduction de ce chapitre.

Compte tenu de la propriété de symétrie de Λ dans la transformation $p \leftrightarrow -p'$ et $\gamma \leftrightarrow \delta$, nous pouvons écrire :

$$f_{\pi} \Lambda_{\delta\gamma,\mu}^{\beta\alpha} = -(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})(p+p')_{\mu} - \left[\sigma(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + \sigma' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] q_{\mu} + \left[\tau(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + \tau' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] q'_{\mu}, \quad (\text{VII.15})$$

où σ, σ', τ et τ' sont des constantes. La relation de croisement entre Λ et $\bar{\Lambda}$ (échange $q \leftrightarrow -q'$ et $\alpha \leftrightarrow \beta$), donne ensuite :

$$f_{\pi} \bar{\Lambda}_{\delta\gamma}^{\beta\alpha} = -(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})(p+p')_{\mu} - \left[\sigma(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + \sigma' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] q'_{\mu} + \left[\tau(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + \tau' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] q_{\mu}. \quad (\text{VII.16})$$

Portons cette expression de $\bar{\Lambda}$ dans (VII.13), nous en déduisons l'amplitude physique $M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}(s,t;\mu^2,\mu^2)$ (tous les pions sur leur couche de masse):

$$f_{\pi}^2 M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}(s,t;\mu^2,\mu^2) = \left[-\sigma' \mu^2 + \tau' \left(\mu^2 - \frac{t}{2} \right) \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \left[-\frac{s-u}{2} - \sigma \mu^2 + \tau \left(\mu^2 - \frac{t}{2} \right) \right] \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \left[-\frac{u-s}{2} - \sigma \mu^2 + \tau \left(\mu^2 - \frac{t}{2} \right) \right] \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}. \quad (\text{VII.17})$$

La statistique de Bose impose l'invariance de $M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$ dans les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} t \leftrightarrow u & \quad \text{et} \quad \alpha \leftrightarrow \gamma \\ u \leftrightarrow s & \quad \text{et} \quad \alpha \leftrightarrow \beta \\ s \leftrightarrow t & \quad \text{et} \quad \alpha \leftrightarrow \delta \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

Cela fixe la valeur de trois des quatre paramètres σ, σ', τ et τ' :

$$\tau = -1, \quad \tau' = 2, \quad \sigma' = 1 + \sigma. \quad (\text{VII.19})$$

Finalement, M s'écrit :

$$M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha} = -\frac{s-\mu^2+\sigma\mu^2}{f_{\pi}^2} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \frac{t-\mu^2+\sigma\mu^2}{f_{\pi}^2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \frac{u-\mu^2+\sigma\mu^2}{f_{\pi}^2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}. \quad (\text{VII.20})$$

Appelons $A(s)$ la fonction $-(s-\mu^2+\sigma\mu^2)/f_{\pi}^2$. Les amplitudes M_s^I de spin isotopique total $I = 0$ ou 2 , dans la voie s , sont données par :

$$\begin{aligned} M_s^0 &= 3A(s) + A(t) + A(u) = -\frac{1}{f_{\pi}^2} (2s - \mu^2 + 5\sigma\mu^2) \\ M_s^2 &= A(t) + A(u) = \frac{1}{f_{\pi}^2} (s - 2\mu^2 - 2\sigma\mu^2). \end{aligned} \quad (\text{VII.21})$$

Au seuil physique $s = 4\mu^2$, M_s^0 et M_s^2 s'expriment en fonction des longueurs de diffusion a_0 et a_2 , d'onde s , $I = 0$ ou 2 :

$$\begin{aligned} M_s^0(\text{seuil}) &= -16\pi \mu a_0 \\ M_s^2(\text{seuil}) &= -16\pi \mu a_2 \end{aligned} \quad (\text{VII.22})$$

Des quatre dernières équations, nous déduisons les expressions de a_0 et a_2 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{7+5\sigma}{16\pi} \frac{\mu}{f_\pi^2} \\ a_2 &= -\frac{2(1-\sigma)}{16\pi} \frac{\mu}{f_\pi^2} \end{aligned} \quad (\text{VII.23})$$

Lorsque $\sigma = 0$, nous retrouvons les formules données par Weinberg^[2], correspondant à un rapport $a_0/a_2 = -7/2$. Les valeurs numériques de a_0 et a_2 sont alors :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,40 \text{ } 1/\mu \\ a_2 &= -0,11 \text{ } 1/\mu \end{aligned} \quad (\text{VII.24})$$

Les deux longueurs de diffusion ont des signes opposés. Le résultat est à comparer avec celui d'une théorie simpliste, où $A(s)$ est pris constant : $a_0/a_2 = 5/2$.

La valeur théorique $0,40 \text{ } 1/\mu$ de a_0 semble petite pour expliquer la forte interaction $\pi\text{-}\pi$ dans l'onde s , $I = 0$ (particule ABC). Toutefois, en l'absence d'une mesure directe de a_0 , il est difficile de se prononcer sur la validité de (VII.24).

Revenons maintenant à la fonction $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$. Remarquons tout d'abord, que si nous l'avions supposée nulle, nous n'aurions pu satisfaire la relation $\sigma' = \sigma + 1$, ce qui montre bien que $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$ n'est pas négligeable devant le terme en $(p+p')_\mu$ de l'algèbre des courants, dans l'équation (VII.14).

Montrons que $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$ est reliée au "champ $\sigma(x)$ ", défini par le commutateur à temps égaux, de la composante de temps du courant axial, avec le champ du méson π :

$$[J_0^{A\alpha}(x), \Phi^\beta(y)] \delta(x_0 - y_0) = i \delta_4(x-y) \sigma^{\alpha\beta}(x). \quad (\text{VII.25})$$

Pour cela, considérons la transformée de Fourier de l'élément de matrice du produit retardé du courant axial $J_\mu^{A\alpha}$ avec le champ Φ^β :

$$T_\mu^{\beta\alpha} = \int d_4x e^{iq \cdot x} \langle B | \mathcal{R} \{ J_\mu^{A\alpha}(x), \Phi^\beta(0) \} | A \rangle. \quad (\text{VII.26})$$

Contractons $T_\mu^{\beta\alpha}$ avec q^μ , puis utilisons les techniques habituelles. Il vient aisément la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu^2 - q^2} \{ i_\pi M^{\beta\alpha} - q^\mu \bar{\Lambda}_\mu^{\beta\alpha} \} = \langle B | \sigma^{\alpha\beta}(0) | A \rangle. \quad (\text{VII.27})$$

Ainsi, la fonction $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$ s'identifie avec l'élément de matrice du champ $\sigma^{\alpha\beta}$ entre états à un pion. Nous voyons aussi que l'hypothèse supplémentaire du chapitre IV (p. 49), revient à négliger la contribution de ce champ, devant celle du commutateur de l'algèbre des courants, dans l'équation (IV.53).

Le champ $\sigma^{\alpha\beta}(x)$ est symétrique dans ses deux indices α et β . Supposons qu'il ne contienne que de l'isospin zéro :

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} \sigma(x). \quad (\text{VII.28})$$

Dans ces conditions, la fonction $\sigma_{\delta\gamma}^{\beta\alpha} = \langle \pi_\delta(p') | \sigma^{\alpha\beta}(0) | \pi_\gamma(p) \rangle$ est proportionnelle à $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}$, ce qui correspond à un paramètre σ nul dans les équations (VII.15 à 23). Ainsi, les longueurs de diffusion (VII.24) de Weinberg, correspondent à un champ $\sigma^{\alpha\beta}(x)$ isoscalaire.

Examinons la contribution à $M_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}$ du commutateur de l'algèbre des courants. Elle s'écrit :

$$- \varepsilon_{\alpha\beta\xi} \varepsilon_{\gamma\delta\xi} \frac{q \cdot (p+p')}{f_\pi^2} F(t), \quad (\text{VII.29})$$

et correspond à l'échange d'un isospin 1 dans la voie t . Supposons, que même

à $t = 0$, cette contribution soit dominée par l'échange du méson ρ . On a alors :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\xi} \varepsilon_{\gamma\delta\xi} \frac{q'(p+p')}{f_\pi^2} = \varepsilon_{\alpha\beta\xi} \varepsilon_{\gamma\delta\xi} \frac{G^2}{m_\rho^2} (q+q')(p+p'), \quad (\text{VII.30})$$

où G est la constante de couplage $\rho\pi\pi$, définie de telle sorte que la largeur du ρ soit :

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{G^2}{4\pi} \frac{1}{m_\rho} \left(\frac{m_\rho^2}{4} - \mu^2 \right)^{3/2}. \quad (\text{VII.31})$$

La relation (VII.30) fixe G [3] :

$$G^2 = \frac{m_\rho^2}{2f_\pi^2} = \frac{(g_{K(o)})^2}{2} \left(\frac{m_\rho}{m} \right)^2 \left(\frac{G_V}{G_A} \right)^2. \quad (\text{VII.32})$$

Avec $(G_A/G_V)/K(o) = 1,3$, le calcul donne 140 MeV pour la largeur du ρ , ce qui n'est pas tellement éloigné de la valeur expérimentale de 120 MeV.

IV) Désintégrations des mésons ω et η

Considérons l'amplitude de désintégration $M(s,t;q^2,q'^2)$ du méson ω en trois pions :

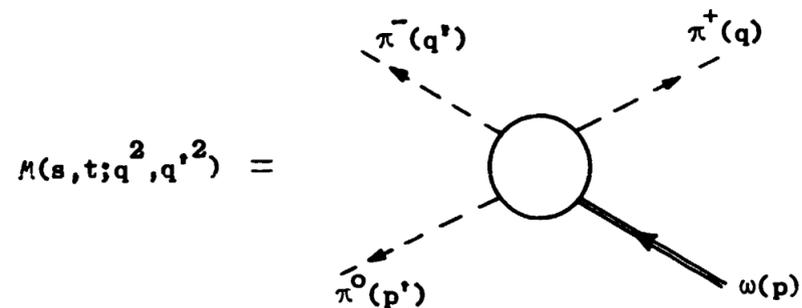


Figure (VII.1)

Cette amplitude peut s'écrire :

$$M(s,t;q^2,q'^2) = G_{3\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\nu q'^\rho p'^\sigma, \quad (\text{VII.33})$$

où $G_{3\pi}$ est une fonction symétrique de s,t,u . Etant donnée l'imprécision de nos calculs, nous supposons dans la suite, que $G_{3\pi}$ est constant. La polarisation de $l'\omega$, est repérée par l'indice μ .

Nous avons, d'autre part, les relations suivantes :

$$f_\pi M(s,t;\mu^2,q'^2) = q'^\mu \bar{\Lambda}_\mu(s,t;\mu^2,q'^2) \quad (\text{VII.34})$$

$$f_\pi \lim_{q'^2 \rightarrow 0} \Lambda_\nu(s,t;q^2,q'^2) = \langle \pi^0(p') | j_\nu^3(o) | \omega(p) \rangle. \quad (\text{VII.35})$$

Le second membre de (VII.35) n'est rien d'autre que l'amplitude de désintégration de $l'\omega$ en $\pi^0\gamma$, qui s'écrit :

$$\langle \pi^0(p') | j_\nu^3(o) | \omega(p) \rangle = G_\gamma \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\sigma p'^\rho, \quad (\text{VII.36})$$

où G_γ est une constante de couplage phénoménologique.

Faisons l'hypothèse que, jusqu'aux valeurs physiques de q' qui nous intéressent, une bonne approximation de Λ est donnée par le seul terme de l'algèbre des courants. On en déduit immédiatement une expression de M :

$$M(s,t;q^2,q'^2) = \frac{G_\gamma}{f_\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q'^\nu p^\sigma p'^\rho, \quad (\text{VII.37})$$

et par comparaison avec (VII.33), on obtient une relation entre les constantes de couplage G_γ et $G_{3\pi}$:

$$G_{3\pi}^2 = \frac{G_\gamma^2}{f_\pi^4}. \quad (\text{VII.38})$$

$G_{3\pi}$ et G_γ sont reliées aux largeurs partielles correspondantes [3] :

$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow \pi\gamma)}{\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)} = 2 \left(\frac{m_\omega^2}{g_{K(o)}^2} \right)^2 \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^4 \frac{\pi^2 (m_\omega^2 - \mu^2)^3}{9R m_\omega^{10}}. \quad (\text{VII.39})$$

R est une constante sans dimension, obtenue par intégration sur l'espace de phase des trois pions ($G_{3\pi}$ constant) :

$$R = \frac{1}{m_\omega} \int d\omega d\omega' \left\{ (\omega^2 - \mu^2)(\omega'^2 - \mu^2) - \frac{1}{4} [m_\omega^2 + \mu^2 - 2m_\omega(\omega + \omega') + 2\omega\omega']^2 \right\}, \quad (\text{VII.40})$$

où ω et ω' sont les énergies des pions π^+ et π^- . Le calcul donne $R = 1,2 \cdot 10^{-4}$, d'où :

$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow \pi\pi)}{\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)} = 0,18, \quad (\text{VII.41})$$

alors que le résultat expérimental est $0,12 \cdot \left(\frac{m_e}{g}\right)^2$ dans l'équation (VII.39), Remarquons la présence du facteur $\left(\frac{m_e}{g}\right)^2$ les autres facteurs étant essentiellement donnés par la cinématique.

Dès la découverte de l' ω , on expliqua sa faible largeur par une interaction à courte portée. En conséquence, l'on prédisait un grand rapport de branchement pour le mode $\pi^0 \gamma$. En effet, $G_{3\pi}$ et $G_{\pi\gamma}$ ont respectivement la dimension de l'inverse d'une masse au cube, et de l'inverse d'une masse. Dans tout modèle, cette masse M est reliée à la portée des forces. Par exemple, une théorie naïve consiste à calculer les deux modes 3π et $\pi\gamma$ par les deux graphes suivants, qui font intervenir une boucle de nucléon :

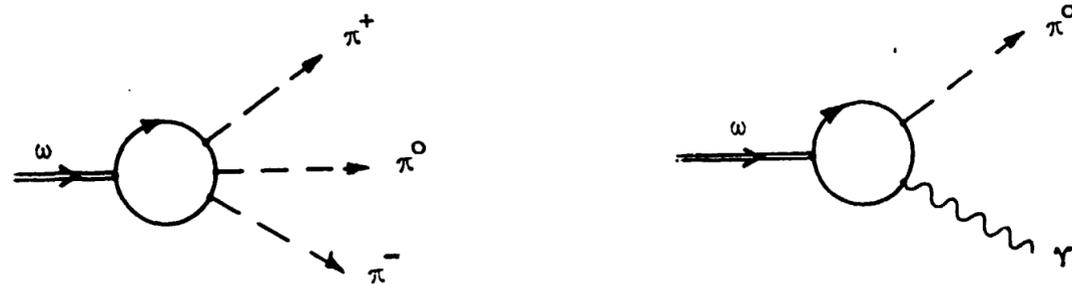


Figure (VII.2)

La masse qui apparaît alors, est celle du nucléon. Il est amusant de constater que l'algèbre des courants donne le même résultat que ce calcul naïf, à savoir essentiellement le facteur $\left(\frac{m_e}{g}\right)^2$. Dans le modèle de Gell-Mann^[4], c'est la masse du ρ qui apparaît, donnant un rapport de branchement de 0,17.

Remplaçons maintenant le méson ω par le méson η , et le π^0 par un photon. Reliant les désintégrations isoscalaire et isovecteur du η en 2γ par la symétrie unitaire, on obtient le rapport de branchement :

$$\frac{\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)}{\Gamma(\eta \rightarrow \gamma \gamma)} = 0,30, \quad (\text{VII.42})$$

à comparer avec le résultat expérimental : $(5,5 \pm 1,2)/(38,6 \pm 2,7)$.

Là encore, ce rapport est essentiellement donné par le facteur $\left(\frac{m_e}{g}\right)^2$, que suggère un calcul naïf de graphes.

V) Désintégrations semi-leptoniques K_{e4}

Dans le chapitre V, nous avons relié les processus semi-leptoniques K_{e3} , aux processus leptoniques $K \rightarrow$ paire de leptons. Nous allons continuer maintenant l'étude des désintégrations des mésons K , en reliant les processus K_{e4} et K_{e3} . Nous nous intéressons donc aux réactions :

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu & M_\mu^{+-} \\ K^+ &\rightarrow \pi^0 \pi^0 e^+ \nu & M_\mu^{00} \\ K_2^0 &\rightarrow \pi^- \pi^0 e^+ \nu & M_\mu^{0-} \end{aligned} \quad (\text{VII.43})$$

De ces trois réactions, seule la première a été observée expérimentalement (environ 80 évènements). Notre but est de les relier au processus K_{e3} :

$$K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu \quad (\text{VII.44})$$

Les réactions (VII.43) sont décrites par l'élément de matrice du courant faible J_μ changeant l'étrangeté ($\Delta S = -1$, $\Delta I_3 = -\frac{1}{2}$), entre les états à un méson K , et à deux pions :

$$M_{\mu}^{\alpha\beta} = \langle \pi^{\alpha} \pi^{\beta} | \mathcal{J}_{\mu}(0) | K^{\gamma} \rangle . \quad (\text{VII.45})$$

Définissons les facteurs de forme F_1 , F_2 , F_3 et F_4 :

$$i m_K \langle \pi^{\alpha}(q) \pi^{\beta}(q') | \mathcal{J}_{\mu}(0) | K^{\gamma}(p) \rangle = (q+q')_{\mu} F_1 + (q-q')_{\mu} F_2 + (p-q-q')_{\mu} F_3 + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^{\nu} q^{\rho} q'^{\sigma} F_4 , \quad (\text{VII.46})$$

F_1 , F_2 , F_3 et F_4 sont des fonctions de p , q et q' , que nous serons amenés à prolonger hors de la couche de masse du pion d'impulsion q' . Dans (VII.46), le terme en F_4 est axial, et provient de la partie vecteur du courant \mathcal{J}_{μ} . L'algèbre des courants ne peut rien nous apprendre sur lui, car il disparaît à la limite $q' \rightarrow 0$. Mais par le fait même qu'il est d'ordre μ/m_K par rapport aux premiers termes, il est difficile de le voir expérimentalement. Nous le négligerons donc, ce qui nous permettra de ne retenir que la partie axiale \mathcal{J}_{μ}^A du courant \mathcal{J}_{μ} . Notons de plus, que $(p-q-q')$ représente la 4-impulsion totale du système des leptons, qui n'emportent qu'une très faible masse. Le terme en F_3 est donc, lui aussi, difficile à voir expérimentalement. Nous le garderons cependant, car l'algèbre des courants nous donnera des informations intéressantes à son sujet.

Les facteurs de forme F_1 et F_2 sont pratiquement constants sur tout l'espace de phase. La largeur partielle d'un processus K_{e4} s'écrit alors :

$$\Gamma = (1,67 F_1^2 + 0,32 F_2^2) 10^3 \text{ sec}^{-1} . \quad (\text{VII.47})$$

Les données expérimentales sont^[5] :

$$\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu) = (2,9 \pm 0,6) 10^3 \text{ sec}^{-1}$$

$$|F_1^{+-}/F_2^{+-}| = 0,8 \pm 0,3 . \quad (\text{VII.48})$$

▼

Nous laisserons au lecteur, le soin de démontrer que les hypothèses

V-A et CADDP, entraînent la relation suivante :

$$\lim_{q' \rightarrow 0} i f_{\pi} M_{\mu}^{\alpha\beta} = \langle \pi^{\alpha}(q) | [Q_{\beta}, \mathcal{J}_{\mu}^{\nu}] | K^{\gamma}(p) \rangle . \quad (\text{VII.49})$$

Dans le second membre, apparaît la partie vecteur du courant faible : $\mathcal{J}_{\mu}^{\nu} = j_{\mu}^4 - i j_{\mu}^5$, dont les éléments de matrice entre états à un méson K et un pion, décrivent les processus K_{e3} . Connaissant l'action de l'opérateur de spin isotopique Q_{β} sur les états K^{γ} et π^{α} , (VII.49) permet de calculer les différentes amplitudes $M_{\mu}^{\alpha\beta}$, dans la limite $q' \rightarrow 0$, en fonction des deux éléments de matrice $\langle \pi^0 | \mathcal{J}_{\mu}^{\nu} | K^{\pm} \rangle$ et $\langle \pi^{\pm} | \mathcal{J}_{\mu}^{\nu} | K_2^0 \rangle$. Faisons l'hypothèse que \mathcal{J}_{μ}^{ν} est la composante $-\frac{1}{2}$ d'un isospineur, alors ces deux éléments de matrice sont égaux. Restant fidèles aux notations du chapitre V, nous écrivons :

$$\langle \pi^0(q) | \mathcal{J}_{\mu}^{\nu}(0) | K^+(p) \rangle = -f_{+}(p+q)_{\mu} - f_{-}(p-q)_{\mu} , \quad (\text{VII.50})$$

où f_{+} et f_{-} sont des facteurs de forme que nous supposerons constants. Finalement, on obtient pour les différents états de charge des mésons π et K :

$$\lim_{q_{+} \rightarrow 0} i f_{\pi} M_{\mu}^{+-} = 0$$

$$\lim_{q_{-} \rightarrow 0} i f_{\pi} M_{\mu}^{+-} = -(f_{+} + f_{-}) p_{\mu} - (f_{+} - f_{-}) q_{+\mu}$$

$$\lim_{q_0 \rightarrow 0} i i_{\pi} M_{\mu}^{00} = \frac{1}{2} (f_{+} + f_{-}) p_{\mu} + \frac{1}{2} (f_{+} - f_{-}) q'_{0\mu} \quad (\text{VII.51})$$

$$\lim_{q_0 \rightarrow 0} i f_{\pi} M_{\mu}^{0-} = \frac{1}{2} (f_{+} + f_{-}) p_{\mu} + \frac{1}{2} (f_{+} - f_{-}) q_{-\mu}$$

$$\lim_{q_{-} \rightarrow 0} i f_{\pi} M_{\mu}^{0-} = -\frac{1}{2} (f_{+} + f_{-}) p_{\mu} - \frac{1}{2} (f_{+} - f_{-}) q_{0\mu} .$$

Intéressons-nous tout d'abord à l'amplitude M_{μ}^{+-} . Les deux premières relations (VII.51), nous apprennent que :

$$1) \text{ lorsque } q_{+} = 0 : F_1^{+-} = F_2^{+-} \text{ et } F_3^{+-} = 0$$

$$2) \text{ lorsque } q_{-} = 0 : F_1^{+-} + F_2^{+-} = -\frac{2f_{+}}{f_{\pi}} m_K$$

$$F_3^{+-} = -\frac{f_{+} + f_{-}}{f_{\pi}} m_K . \quad (\text{VII.52})$$

Une remarque s'impose aussitôt : le facteur de forme F_3^{+-} ne peut être supposé constant dans le domaine de variations de q_{+} et q_{-} qui nous intéresse.

Nous savons en effet, d'après la relation (V.29) de Callan et Treiman, que $(f_+ + f_-)$ est différent de zéro. Quelles sont les causes possibles de cette variation rapide de F_3^{+-} , entre les points $q_+ = 0$ et $q_- = 0$? Tout d'abord, une forte interaction $\pi-\pi$ est susceptible de faire varier fortement tous les facteurs de forme F_1 . S'il en est ainsi, nous n'avons aucun espoir de pouvoir exploiter (VII.52), à moins de faire appel à une théorie des interactions dans l'état final. Une deuxième cause possible est la contribution du graphe suivant^[6] :

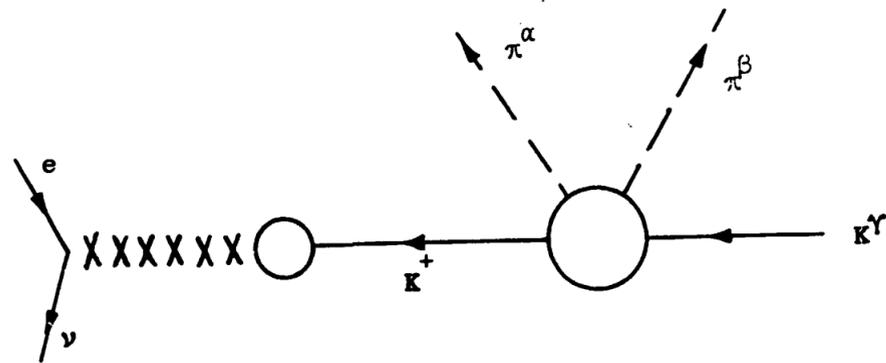


Figure (VII.3)

En effet, lorsque q_α ou q_β tend vers zéro, le méson K^+ intermédiaire est presque sur sa couche de masse. En conséquence, la contribution de ce graphe peut varier fortement lorsque l'on passe de $q_\alpha = 0$ à $q_\beta = 0$. De

façon précise, cette contribution s'écrit :

$$(p-q-q')_\mu \frac{1}{(p-q-q')^2 - m_K^2} \left[\langle +|\gamma \rangle \delta_{\alpha\beta} h_1 + \langle +|\tau_\delta|\gamma \rangle \varepsilon_{\alpha\beta\delta} h_2 \right]. \quad (\text{VII.53})$$

L'expression entre crochets est l'amplitude $K^+ K^- \rightarrow \pi^\alpha \pi^\beta$, où l'on a explicité la dépendance dans les indices de spin isotopique α, β et γ . Les fonctions h_1 et h_2 sont, la première symétrique, la seconde antisymétrique, dans l'échange de q_α et q_β .

Première remarque : le graphe (VII.3) ne contribue qu'au facteur de forme F_3 . Ensuite, h_1 a la même limite, lorsque q_α ou q_β tend vers zéro, et pour cette raison ne nous intéresse pas. En revanche h_2 a des limites opposées. Mais du fait du facteur $\varepsilon_{\alpha\beta\delta}$, h_2 ne contribuera pas au mode $\pi^0 \pi^0 e^+ \nu$, où les deux pions sont identiques : dans ce cas-là, nous pourrions supposer F_3 constant. Dans les autres cas, ne gardant dans F_3 que les termes d'ordre le plus bas en q_α et q_β , nous écrirons :

$$F_3 = \alpha + \beta \frac{p(q_\alpha - q_\beta)}{p(q_\alpha + q_\beta)}, \quad (\text{VII.54})$$

où α et β sont des constantes.

Revenons alors à (VII.52), et supposons F_1 et F_2 constants (pas d'interaction dans l'état final). La solution des équations (VII.52) est :

$$F_1^{+-} = F_2^{+-} = -\frac{f_+}{f_\pi} m_K$$

$$F_3^{+-} = -\frac{f_+ + f_-}{2f_\pi} m_K \left[1 + \frac{p(q_+ - q_-)}{p(q_+ + q_-)} \right]. \quad (\text{VII.55})$$

Dans la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0 e^+ \nu$, F_2 est nul à cause de la statistique, et l'on trouve aisément :

$$F_1^{00} = \frac{f_+}{f_\pi} m_K$$

$$F_3^{00} = \frac{1}{2} \frac{f_+ + f_-}{f_\pi} m_K. \quad (\text{VII.56})$$

Enfin, pour la désintégration $K_2^0 \rightarrow \pi^0 \pi^- e^+ \nu$, il vient :

$$\begin{aligned} F_1^{0-} &= 0 \\ F_2^{0-} &= -\frac{f_+}{f_\pi} m_K \\ F_3^{0-} &= -\frac{1}{2} \frac{f_+ + f_-}{f_\pi} m_K \frac{p(q_0^- - q_-)}{p(q_0^+ + q_-)} \end{aligned} \quad (\text{VII.57})$$

Les équations (VII.55) prédisent tout d'abord un rapport F_1^{+-}/F_2^{+-} égal à 1, en bon accord avec le résultat expérimental $0,8 \pm 0,3$. Ensuite, compte tenu de la valeur expérimentale de f_+ , elles prédisent le taux de désintégration suivant^[6] :

$$\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu) = (2,87 \pm 0,33) \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1} \quad (\text{VII.58})$$

L'accord avec (VII.48) est remarquable. Il laisse à penser que les interactions $\pi\pi$ dans l'état final sont vraiment négligeables, et cela, malgré le grand espace de phase disponible pour les deux pions ($s = (q_+ + q_-)^2$ varie de $4\mu^2$ à environ $7,5 \mu^2$). Cela est en accord d'autre part, avec les faibles longueurs de diffusion $\pi\pi$, calculées au début de ce chapitre.

Les équations (VII.55 à 57) prédisent aussi les deux rapports de branchement :

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0 e^+ \nu)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu)} = 0,84 \quad (\text{VII.59})$$

$$\frac{\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^- \pi^0 e^+ \nu)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu)} = 0,16,$$

mais aucun résultat expérimental n'est encore disponible.

Pour conclure ce chapitre, nous insisterons, avec Weinberg^[6], sur cinq nombres que nous avons calculés théoriquement, et que nous avons trouvés en excellent accord avec l'expérience. Ce sont les deux longueurs de diffusion π -Nucléon, les deux facteurs de forme F_1^{+-} et F_2^{+-} , ainsi que la valeur de $|f_K|$ dans le

chapitre V (p.62). Pour obtenir ces nombres, outre l'algèbre des courants et CADDP, nous avons utilisé l'hypothèse que, lorsque des pions de 4-impulsions $q, q' \dots$ tendant vers zéro, sont en jeu, les amplitudes que nous calculons, peuvent être développées en puissances de $q, q' \dots$, et limitées aux termes d'ordre le plus bas. Cette hypothèse nous permet de prolonger analytiquement les amplitudes, des points non physiques de l'algèbre des courants, aux points physiques, avec un succès que ne contrarie pas l'existence possible d'interactions dans l'état final.

REFERENCES

- [1] - WOOLCOCK et al : Phys. Rev. Letters, 15, 936 (1965)
- [2] - S. WEINBERG : Phys. Rev. Letters, 17, 616 (1966)
Dans cet article, les longueurs de diffusion $\pi\pi$ diffèrent d'un facteur 2 des longueurs de diffusion, que nous avons définies par (VII.22)
- [3] - K. KAWARABARYASHI et M. SUZUKI : Phys. Rev. Letters, 16, 225 (1966)
- [4] - GELL-MANN et al : Phys. Rev. Letters, 8, 261 (1962)
- [5] - R.W. BIRGE et al : Phys. Rev. 139, B1600 (1965)
- [6] - S. WEINBERG : Phys. Rev. Letters, 17, 336 (1966)

RELATIONS DE SUPER CONVERGENCE

Nous avons vu, au chapitre précédent, comment les méthodes de calcul mises au point pour les applications de l'algèbre des courants, peuvent être utilisées pour obtenir des résultats propres aux interactions fortes. Nous avons, jusqu'à présent, présenté toutes les relations obtenues sous forme de relations de basse énergie, l'existence de relations de dispersion non soustraites pour les amplitudes considérées, permettant éventuellement de traduire ces relations sous forme de règles de somme. Dans ce chapitre, nous étudierons directement des règles de somme qui résultent des contraintes imposées par l'algèbre des courants, et de comportements asymptotiques caractérisés par un petit nombre de trajectoires de Regge. En fait nous n'utiliserons parfois que la localité et non l'algèbre des courants, et, bien que la méthode de calcul soit calquée sur celle que nous avons déjà utilisée, le contenu physique sera alors très différent.

Nous partons du produit retardé de deux opérateurs courants (vecteur ou axial) entre deux états physiques A et B

$$T_{\mu\nu}(p', q', p, q) = \int d_4x e^{iq'x} \langle B(p') | R \{ j_\mu(x), j_\nu(0) \} | A(p) \rangle . \quad (\text{VIII.1})$$

Nous introduisons aussi la partie absorbitive de l'amplitude correspondante :

$$U_{\mu\nu} = \int d_4x e^{iq'x} \langle B(p') | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | A(p) \rangle \quad (\text{VIII.2})$$

chaque courant a un indice de spin unitaire qui n'a pas été indiqué explicitement en (VIII.1 et 2).

Intégrant par partie, nous écrirons comme précédemment :

$$\begin{aligned} t_\nu - q'^\mu T_{\mu\nu} &= F_\nu \\ u_\nu - q'^\mu U_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

$$\begin{aligned} \text{où } t_\nu &= i \int d_4x e^{iq'x} \langle B | R \{ \partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(0) \} | A \rangle \\ F_\nu &= \int d_4x e^{iq'x} \delta(x_0) \langle B | [j_0(x), j_\nu(0)] | A \rangle \\ \text{et } u_\nu &= i \int d_4x e^{iq'x} \langle B | [\partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(0)] | A \rangle . \end{aligned} \quad (\text{VIII.4})$$

Nous pouvons d'autre part développer T et U sur une base de tenseurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= A \mathcal{A}_{\mu\nu} + B \mathcal{B}_{\mu\nu} + \dots \\ U_{\mu\nu} &= a \mathcal{A}_{\mu\nu} + b \mathcal{B}_{\mu\nu} + \dots \end{aligned}$$

où A, B... et a, b... sont des fonctions des invariants s, t, q^2 et q'^2 avec $s = (p+q)^2$ et $t = (p-p')^2$. Nous pouvons de même développer t_ν et u_ν sur une base de vecteurs indépendants. Nous supposons que cela a été fait de telle sorte que les fonctions A, B... a, b... n'aient pas de singularités cinématiques en s et de plus satisfassent à des relations de dispersion.

A t, q^2 et q'^2 fixés, A et a (comme les autres fonctions des invariants) sont reliés par des relations de dispersion du type suivant :

$$A(s, t, q^2, q'^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{a(s', t, q^2, q'^2) ds'}{s' - s - i\epsilon} . \quad (\text{VIII.5})$$

Nous avons écrit une relation de dispersion non soustraite. En fait même l'hypothèse de Mandelstam nous conduit à introduire le plus souvent dans (VIII.5) un certain nombre de soustractions qu'il faudrait écrire explicitement le cas échéant. Le nombre de tenseurs indépendants dépend du spin des états A et B. Pour simplifier au maximum, nous supposons que ces deux états sont des états à une particule de spin nul (un méson π par exemple). Dans ces conditions il n'y a que 10 tenseurs indépendants pour $T_{\mu\nu}$ ou $U_{\mu\nu}$, et 3 vecteurs indépendants pour t_ν ou u_ν .

Ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= A P_{\mu\nu} + B P_{\mu\nu} + C P_{\mu\nu} + D P_{\nu\mu} + E P_{\nu\mu} + F Q_{\mu\nu} + G Q_{\mu\nu} + H Q_{\nu\mu} \\ &+ I \Delta_{\mu\nu} + J \mathcal{E}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

$$\begin{aligned} \text{où : } 2P &= p+p' \\ \Delta &= p-p' = q'-q \\ 2Q &= q+q' \end{aligned}$$

De même :

$$t_\nu = K P_\nu + L Q_\nu + M \Delta_\nu, \quad (\text{VIII.7})$$

U et u s'expriment de la même façon. Seules changent les fonctions des invariants, qui sont reliées aux précédentes par 13 relations semblables à (VIII.5).

On contracte (VIII.6) avec q'_μ . Ceci donne :

$$\begin{aligned} q'^\mu T_{\mu\nu} &= \left(A(q'.P) + D(q'.Q) + E(q'.\Delta) \right) P_\nu + \left(B(q'.P) + F(q'.Q) + H(q'.\Delta) + J \right) Q_\nu \\ &+ \left(C(q'.P) + G(q'.Q) + I(q'.\Delta) + \frac{J}{2} \right) \Delta_\nu. \end{aligned} \quad (\text{VIII.8})$$

Ayant choisi des états à une particule (la même) sans spin, F_ν est nul si les courants ne sont pas tous deux vecteurs ou axiaux. Dans l'un ou l'autre cas, le commutateur à temps constant est proportionnel à $\delta(\vec{x}) j(x)$ où j est un courant vecteur conservé et

$$F_\nu = F(t) P_\nu. \quad (\text{VIII.9})$$

Combinant (VIII.3,8 et 9) on obtient 3 relations :

$$\begin{aligned} K - \left(A(q'.P) + D(q'.Q) + E(q'.\Delta) \right) - F(t) &= 0 \\ L - \left(B(q'.P) + F(q'.Q) + H(q'.\Delta) + J \right) &= 0 \\ M - \left(C(q'.P) + G(q'.Q) + I(q'.\Delta) + \frac{J}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.10})$$

auxquelles se joignent 3 autres relations :

$$\begin{aligned} k - \left(a(q'.P) + d(q'.Q) + e(q'.\Delta) \right) &= 0 \\ \ell - \left(b(q'.P) + f(q'.Q) + h(q'.\Delta) + j \right) &= 0 \\ m - \left(c(q'.P) + g(q'.Q) + i(q'.\Delta) + \frac{j}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.11})$$

D'après les définitions choisies :

$$q'.P = \frac{1}{4} (2s-q^2 - q'^2 - 2\mu^2 + t) = \frac{1}{4} (s-u)$$

$$q'.Q = \frac{-t + q^2 + 3q'^2}{4}$$

$$q'.\Delta = \frac{t - q^2 + q'^2}{2}$$

Fixant t, q^2 et q'^2 , on écrit à l'aide de (VIII.5,10 et 11) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int \frac{k(s') ds'}{s'-s} - \frac{1}{\pi} \frac{s}{2} \int \frac{a(s') ds'}{s'-s} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{4} (q^2 + q'^2 - 2\mu^2 - t) \int \frac{a(s') ds'}{s'-s} - \\ - \frac{1}{\pi} (q'.Q) \int \frac{d(s') ds'}{s'-s} - \frac{1}{\pi} (q'.\Delta) \int \frac{e(s') ds'}{s'-s} - F(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.12})$$

$$k(s') - \frac{s'}{2} a(s') + \frac{1}{4} (q^2 + q'^2 - 2\mu^2 - t) a(s') - (q'.Q) d(s') - (q'.\Delta) e(s') = 0. \quad (\text{VIII.13})$$

Combinant (VIII.12 et 13), on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int a(s') ds' = F(t), \quad (\text{VIII.14})$$

pour chaque valeur de t, q^2 et q'^2 .

Nous avons choisi la combinaison impaire d'isospin pour avoir un second membre non nul. A est donc impair par croisement, $s \leftrightarrow u$, t fixé.

Ceci donne $a(s') = a(-s')$, et nous pouvons remplacer (VIII.14) par une intégrale sur les valeurs positives de s' , dont la borne inférieure s_0 est fournie par l'unitarité généralisée :

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} a(s, t, q^2, q'^2) ds = F(t). \quad (\text{VIII.15})$$

Nous avons bien sûr supposé la validité de la représentation de Mandelstam, et, de plus, que toutes les relations écrites peuvent l'être sans soustraction.

L'algèbre des courants implique que $F(t)$ est le facteur de forme électromagnétique du méson π , multiplié par un coefficient déterminé. En fait, une relation du type de (VIII.15), où $F(t)$ est déterminé, ne repose que sur la localité.

La relation (VIII.15) est une relation de super convergence. Prenons en effet deux indices identiques pour les courants axiaux ou vecteurs, F est alors nul, et nous obtenons :

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} a(s, t, q^2, q'^2) ds' = 0, \quad (\text{VIII.16})$$

alors que nous sommes partis d'une relation non-soustraite :

$$A(s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{a(s')}{s' - s} ds'.$$

La validité de cette expression implique un comportement asymptotique en s qui s'écrit :

$$A(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{s} \int a(s') ds' + R(s)$$

avec $\lim_{s \rightarrow \infty} s R(s) \rightarrow 0$

mais (VIII.16) étant vérifiée, A(s) a un comportement asymptotique à décroissance plus rapide que s^{-1} , et nous aurions pu, dans ces conditions, écrire une relation de dispersion non soustraite pour s A(s). On dit que A(s) satisfait une relation de super-convergence.

Nous voyons ainsi que, parmi les différentes amplitudes invariantes A, B, C ... associées à la double diffusion d'une particule dans un champ extérieur, l'une d'entre elle jouit d'un comportement asymptotique avec une décroissance plus rapide que les autres.

Nous avons choisi le terme linéaire en P_ν . Nous aurions pu obtenir d'autres relations en prenant ceux linéaires en Δ_ν ou Q_ν . Il est aisé de vérifier qu'elles sont automatiquement satisfaites avec les propriétés de croisement obtenues.

Si l'amplitude physique associée à $T_{\mu\nu}$ ne peut pas être définie sans ambiguïté nous pouvons par contre isoler sans difficulté chaque terme singulier, et, en particulier, les pôles dans les variables q^2 et q'^2 . Si nous choisissons de prendre deux courants vecteurs avec un indice d'isospin 1, 2 ou 3, nous pouvons isoler un terme ayant le double pôle du ρ , dont la fonction résidu est

l'amplitude de diffusion $\rho\pi$:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{q^2 - m_\rho^2} \frac{1}{q'^2 - m_\rho^2} M_{\mu\nu} + \dots$$

M ne contribue qu'à certains des tenseurs introduits dans (VIII.6). On peut l'écrire :

$$M_{\mu\nu} = P_\mu P_\nu A_0 + \frac{1}{2} (P_\mu Q_\nu + P_\nu Q_\mu) B_0 + Q_\mu Q_\nu C_0 + g_{\mu\nu} D_0.$$

Il est facile de vérifier que l'invariance par parité et renversement du sens du temps, implique que 4 amplitudes seulement sont indépendantes.

q^2 et q'^2 étant fixés, et égaux à m_ρ^2 , nous obtenons à t fixé, en utilisant (VIII.15) :

$$\int \text{Im } A_0(s, t) ds = 0.$$

Le second membre est nul, même si nous prenons deux indices de spin isotopique différents. Nous, avons en effet pris un terme singulier de $T_{\mu\nu}$ (pôle double en q^2 et q'^2), alors que la localité implique que F, transformée de Fourier d'un commutateur à temps constant, est une fonction régulière de q'^2 .

Si la section efficace élastique $\rho\pi$ tend vers une limite finie asymptotiquement, ou ne croît que logarithmiquement en s, les amplitudes invariantes A_0, B_0, C_0 et D_0 doivent tendre vers 0 d'autant plus vite que les facteurs cinématiques qui leurs sont respectivement associés, et qui traduisent ici le fait que le ρ a un spin 1, donnent des contributions en puissances élevées de s, dans le calcul de la section efficace.

Il est préférable pour cela d'utiliser une décomposition en tenseurs orthogonaux. Ceci s'écrit :

$$T_{\mu\nu} = A_0' P_\mu P_\nu + B_0' \frac{1}{2} (P_\mu Q_\nu + P_\nu Q_\mu) + C_0' Q_\mu Q_\nu + D_0' N_\mu N_\nu$$

$$\text{avec } P_\mu' = P_\mu - \frac{(P \cdot Q) Q_\mu}{Q^2} \quad N_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu Q_\rho \Delta_\sigma.$$

Soit, tels que : $P' \cdot Q = P' \cdot N = Q \cdot N = 0$.

Dans l'expression de la section efficace élastique, le terme proportionnel à $|A'_0|^2$ est multiplié par $(P'^2)^2$ soit asymptotiquement, s^4 . Pour le même comportement asymptotique de la section efficace, l'amplitude invariante A'_0 doit donc décroître beaucoup plus rapidement, en fait avec un facteur supplémentaire s^{-2} , que celle associée à une diffusion élastique de particules sans spin. Si le comportement d'une amplitude de diffusion pour des particules sans spin a un comportement asymptotique de la forme s^α (t fixé) les amplitudes A_0, B_0, C_0 et D_0 associées à la diffusion $\pi\rho$, doivent avoir dans les mêmes conditions, des comportements asymptotiques respectifs en $s^{\alpha-2}$ pour A_0 , $s^{\alpha-1}$ pour B_0 , et s^α pour C_0 et D_0 , A_0, B_0, C_0 et D_0 s'exprimant en fonction de combinaisons linéaires de A'_0, B'_0, C'_0 et D'_0 .

Nous entendons par mêmes conditions, les mêmes nombres quantiques dans la voie croisée et le même comportement de la section efficace asymptotique, ce qui n'est bien sûr qu'une hypothèse.

Si nous considérons l'amplitude associée à un isospin 1 dans la voie croisée, le comportement asymptotique est déterminé par la trajectoire du ρ , avec $\alpha(0) \approx 0.5$. Pour les valeurs de t inférieures à m_ρ^2 , $\alpha(t) < 1$ et $s A_0(s)$ tend vers 0 à l'infini. $A_0^{(1)}$ satisfait donc une relation de superconvergence qui donne la règle de somme :

$$\int \text{Im } A_0^{(1)}(s, \theta) ds = 0 \quad t < m_\rho^2, \quad (\text{VIII.17})$$

alors que les amplitudes $B_0^{(1)}, C_0^{(1)}$ et $D_0^{(1)}$ ne satisfont a priori aucune relation de ce type.

Ce résultat impose deux remarques ; d'abord le spin cesse ainsi d'être une complication inessentielle. Dans les diffusions entre particules à spin, certaines amplitudes invariantes satisfont des contraintes beaucoup plus strictes que dans le cas sans spin. Le spin est donc important pour la description de la dynamique d'une réaction, et non pas seulement de la cinématique. Ceci est cependant naturel comme nous allons le voir, pour un comportement asymptotique de Regge correspondant à des pôles mobiles uniquement.

D'autre part, il peut être tentant d'utiliser (VIII.17) ainsi que d'autres relations analogues obtenues pour $A^{(2)}$ et $B^{(2)}$, correspondant à l'échange d'isospin 2, pour obtenir des relations entre constantes de couplage, en saturant (à $t = 0$ par exemple), ces règles de somme à l'aide d'un petit nombre d'états intermédiaires (le π , le ω et le φ , dans la diffusion $\pi\rho$). En fait on ne peut éviter la solution où toutes ces constantes de couplage sont nulles, si l'on se limite à un nombre fini d'états intermédiaires, et l'utilisation pratique des règles de somme obtenues, a priori n'est pas aisée.

Revenons à la première remarque et considérons la diffusion Compton sur un méson π , $\gamma + \pi \rightarrow \gamma + \pi$, dont un des termes singulier est directement relié à la diffusion $\rho + \pi \rightarrow \rho + \pi$. Nous pouvons partir de (VIII.1) où les 2 courants sont des courants vecteurs et, utilisant (VIII.10), écrire la règle de somme :

$$\frac{1}{\pi} \int z^{1j} (s, t, q^2, q'^2) ds = \epsilon^{ijk} F_k(t), \quad (\text{VIII.18})$$

où a est le terme proportionnel à $P_\mu P_\nu$ dans la décomposition (VIII.10) de :

$$U_{\mu\nu} = \int d_4x e^{iq'x} \langle \pi(p') | [j_\mu^1(x), j_\nu^j(o)] | \pi(p) \rangle.$$

Nous fixerons ici q^2 et q'^2 à la valeur 0. En fait nous n'avons pas considéré la diffusion Compton au sens propre, mais introduit des courants chargés d'indice d'isospin i et j, au lieu du courant électromagnétique $j^3 + \sqrt{3} j_\mu^8$.

Les amplitudes associées à la réaction croisée $\gamma^i \gamma^j \rightarrow \pi \pi$ s'expriment à partir de deux amplitudes indépendantes, qui peuvent être définies à l'aide des hélicités des 2 photons.

Nous pouvons prendre l'axe Oz le long de l'impulsion relative des deux photons. Les deux états d'hélicité correspondent aux polarisations $\frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}}$. Tous les termes linéaires en q et q', ou Q et Δ , dans (VIII.10) ne contribuent donc pas. En fait, la conservation des courants réduit le nombre des tenseurs indépendants. Seuls les termes en $P_\mu P_\nu$ et $g_{\mu\nu}$ restent.

L'amplitude T_{+-} ne fait pas intervenir $g_{\mu\nu}$, et A est donc proportionnel à l'amplitude T_{+-} . On trouve immédiatement :

$$T_{+-} = 2 A(s,t) p^2 \sin^2 \theta_t, \quad (\text{VIII.19})$$

avec $t = 4(p^2 + \mu^2)$. θ_t est l'angle de diffusion dans la voie croisée. T_{+-} peut être développé en amplitudes partielles

$$T_{+-} = \frac{1}{q} \sum_J (J + \frac{1}{2}) T_{+-}^J(t) d_{20}^J(\theta_t). \quad (\text{VIII.20})$$

D'où l'on déduit :

$$A(s,t) = \frac{1}{2p^2 q} \sum_{J \geq 2} \frac{(J + \frac{1}{2}) T_{+-}^J(t) P_J''(\cos \varphi)}{\sqrt{(J+2)(J+1)(J-1)J}}, \quad (\text{VIII.21})$$

l'état d'hélicité $+-$ implique un moment cinétique au moins égal à 2 dans la voie croisée alors que l'état $++$ peut avoir tous les moments angulaires.

Si l'on fait une transformation de Sommerfeld-Watson pour les 2 amplitudes d'hélicité, et que l'on suppose que ces amplitudes, considérées comme fonctions analytiques de la variable J , ont les bonnes propriétés de méromorphie, un pôle dominant, à $\alpha(t)$, donnera un comportement asymptotique en $s^{\alpha(t)}$ pour T_{++} mais $s^{\alpha(t)-2}$ pour $A(s,t)$. La relation (VIII.21) fait intervenir en effet la dérivée seconde des polynômes de Legendre. Les deux amplitudes d'hélicité ont, elles, le même comportement asymptotique.

Si nous considérons l'échange d'un isospin 1, le pôle dominant est le ρ et, pour $t < m_\rho^2$, $s A(s,t) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$. A satisfait donc une relation de super-convergence, et on peut écrire :

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} a^{1J}(s,t) ds = 0, \quad (\text{VIII.22})$$

sans qu'une relation de ce type existe pour les autres amplitudes invariantes.

On voit clairement sur cet exemple comment la transformation de Sommerfeld-Watson, appliquée aux amplitudes d'hélicité dans la voie croisée, implique une relation de super-convergence pour la fonction invariante A associée au tenseur $P_\mu P_\nu$. La contrainte dynamique nouvelle, qui apparaît pour une diffusion

entre particules à spin, est ici une simple conséquence de l'hypothèse de méromorphie, impliquant un comportement de Regge. Cependant (VIII.22 et 18) sont a priori incompatibles, dès que l'on introduit des courants chargés (que l'on relie facilement à l'existence d'un groupe de jauge non-Abélien) à côté du courant électromagnétique proprement dit. En fait il n'existe pas de contradiction profonde entre la règle de somme tirée de l'algèbre des courants et de la validité d'une relation de dispersion non-soustraite (justifiée pour un comportement caractérisé par la trajectoire du ρ) d'une part, et la règle de somme obtenue directement d'autre part, comme une conséquence de la dominance de la trajectoire du ρ .

En fait nous avons traité l'effet Compton pour des photons chargés, à tous les ordres dans le couplage fort, mais au deuxième ordre seulement dans le couplage électromagnétique, et rien n'exclut la présence d'un pôle fixe (à $J = 1$) qui disparaîtrait dans un calcul effectué à tous les ordres dans le couplage électromagnétique.

L'unitarité n'exclut pas automatiquement la présence d'un pôle fixe en J (quelque soit t) pour une amplitude obtenue à un ordre donné de perturbation. Une relation linéaire, permettant un pôle fixe remplace dans ce cas la relation habituelle quadratique qui, elle, exclut un pôle fixe.

Un pôle fixe à $J = 1$, de résidu $F(t)$, donne un comportement asymptotique de A en $\frac{F(t)}{s}$. La règle de somme (VIII.18) est alors satisfaite. Ce pôle fixe n'apparaît pas dans la partie absorptive de l'amplitude. Un tel terme apparaît naturellement dans la diffusion de photons chargés, qui peuvent se coupler par l'intermédiaire d'un photon neutre, au courant du pion, suivant le graphe suivant :

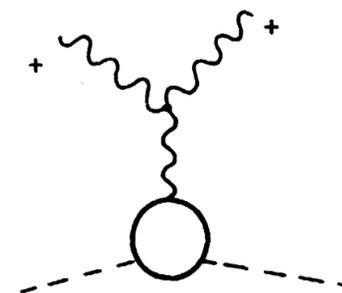


Figure (VIII,1)

Ce terme n'apparaît pas dans $T_{\mu\nu}$ tel que nous l'avons défini, où les courants ne correspondent qu'aux charges portées par les hadrons. Il apparaît par contre dans l'amplitude totale $\tau_{\mu\nu}$ satisfaisant la relation

$$q^\mu \tau_{\mu\nu} = 0 ,$$

au deuxième ordre dans l'interaction faible considérée. $q^\mu T_{\mu\nu}$ et A doivent donc inclure une contribution associée à ce pôle fixe.

Toute la complication vient du fait que la relation (VIII.1) qui définit $T_{\mu\nu}$ ne définit pas une amplitude de diffusion directement mesurable.

Si l'on prend par contre un terme singulier de $T_{\mu\nu}$, correspondant par exemple au pôle double du ρ , le comportement de Regge s'applique sans difficulté à la fonction résidu. On est conduit pour sa contribution A_ρ à une règle de somme du type (VIII.22). Ce terme ne contribue pas à F , fonction régulière de q^2 et q'^2 , et la règle de somme du type (VIII.18) associée à A_ρ n'a pas de second membre. Un terme singulier, qui s'affranchit du calcul des perturbations au deuxième ordre, ne conduit donc à aucune contradiction entre les deux origines de la règle de somme.

En fait, il est intéressant de remarquer comment ce pôle fixe à $J = 1$ qui apparaît dans $T_{\mu\nu}$, mais non pas dans l'amplitude Compton ou dans toute amplitude forte apparaissant dans les termes singuliers de $T_{\mu\nu}$, s'introduit naturellement dans le comportement de T en fonction de J . L'amplitude $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ où les deux photons (éventuellement virtuels), ont les états d'hélicité $+1$ et -1 , introduit dans une décomposition en ondes partielles, des fonctions $d_{20}^J(\theta_t)$. Nous pouvons "Reggeifier" cette amplitude à l'aide de la relation de Froissart-Gribov, en projetant les ondes partielles à l'aide de polynômes de Legendre. On utilise pour cela l'orthogonalité des fonctions $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$, et cela implique, comme on le vérifie facilement, que la dépendance angulaire de chaque onde partielle est donnée simultanément par P^{J-2} , P^J et P^{J+2} . Ceci nous amène à introduire par la transformation de Froissart-Gribov, utilisant les parties absorptives, les fonctions Q^{J-2} , Q^J et Q^{J+2} .

Utilisant (VIII.19), nous effectuons la décomposition en ondes partielles sur A , au lieu de T_{+-} . Ceci donne^[4],

$$A^J = \frac{1}{(2J-1)(2J+1)(2J+3)} \left\{ (2J+3) a_{J-2} - 2(2J+1) a_J + (2J-1) a_{J+2} \right\}$$

$$\text{avec } a_J = \int d\cos\theta_t \operatorname{Im} A(s, \cos\theta_t) P_J(\cos\theta_t) = \frac{1}{\pi pq} \int ds a(s, t) Q_J\left(\frac{s+p^2+q^2}{2pq}\right)$$

(VIII.23)

auquel s'ajoute le terme associé au canal u qui donne simplement, combiné avec celui-ci, le facteur de signature.

Nous trouvons un terme en Q_{J-2} dans l'amplitude A^J soit un terme singulier $(Q_J(\cos\theta))$ à un pôle pour toutes les valeurs entières négatives de J pour A^1 . Le résidu du pôle de Q^J étant 1 à P_{J+1} on peut calculer le coefficient associé à ce pôle fixe en J . On trouve d'après (VIII.23), un terme proportionnel à :

$$\int_{s_0}^{\infty} ds a(s, t) = 0 \quad (\text{ou } G(t)) .$$

L'algèbre des courants donne ainsi le résidu de ce pôle fixe qui, suivant le cas, peut aussi apparaître ($i = 1, j = 2$ par exemple) ou ne pas apparaître ($i = j = 3$) dans l'amplitude de double diffusion dans un champ extérieur, et que le choix que l'on est amené à faire pour prolonger les amplitudes d'hélicité en J , conduit à introduire de façon très naturelle.

REFERENCES

- S. FUBINI - Nuovo Cimento 43, 475 (67)
 V. DE ALFARO, S. FUBINI, G. ROSSETTI et G. FURLAN - Phys. Letters, 21, 576 (66)
 J.B. BRONZAN, I.S. GERSTEIN, B.W. LEE et F.E. LOW - Phys. Rev. Letters, 18, 32 (67)
 V. SINGH - Phys. Rev. Letters 18, 36 (67) .

ALGÈBRE DES COURANTS ET EXPERIENCES "NEUTRINO"

1) Introduction

Toutes les applications de l'algèbre des courants que nous avons étudiées jusqu'ici, résultent en fait de deux hypothèses différentes. La première hypothèse est traduite par les relations de commutation à temps constant entre charges. C'est une forme restreinte de l'algèbre des courants, que nous avons seule utilisée dans ce cours, même si, pour des commodités d'exposition, nous avons très fréquemment utilisé les relations de commutation à temps égaux entre densités de courant. La seconde est CACP (PCAC) traduite par CADDP (PDDAC). Nous avons insisté sur les nombreuses relations qui permettent de tester uniquement la seconde hypothèse, et qui montrent son bien fondé. CACP étant ainsi acquis, on peut tenter d'interpréter les autres succès comme une vérification indirecte des propriétés de commutation. Il serait cependant extrêmement intéressant de pouvoir les vérifier sans avoir à faire appel à CACP, comme ce fut toujours le cas dans les relations obtenues ici.

En fait, si nous avons introduit CACP, c'était pour éliminer des éléments de matrice de densité axiale inconnus, en les rattachant, par l'intermédiaire de la divergence du courant axial, à des amplitudes d'émission ou d'absorption de méson π , pouvant être, elles, relativement aisément reliées à des quantités mesurables. Si nous avions pu écrire directement des quantités mesurables, nous n'aurions pas invoqué CACP pour soumettre les règles de commutation à une vérification expérimentale. En fait, il est possible d'éviter CACP, en faisant appel aux expériences neutrino. Les éléments de matrice du courant axial (ou vecteur) apparaissent en effet directement dans l'écriture des amplitudes associées aux réactions de neutrinos :

$$\nu(\bar{\nu}) + A \rightarrow \ell(\bar{\ell}) + B \quad , \quad (IX.1)$$

où ℓ représente un lepton et A et B, deux états hadroniques. Dans le cadre de la théorie des interactions semi-leptoniques, extrêmement satisfaisante à faible transfert, l'amplitude de réaction (IX.1) s'écrit :

$$M = i \frac{G_V \cos\theta}{\sqrt{2}} \bar{u}_\ell(q') \gamma_\mu (1+\gamma_5) u_\nu(q) \langle B(p') | \mathcal{J}_\mu(0) | A(p) \rangle ,$$

où q, q', p et p' sont respectivement les impulsions du neutrino, du lepton et des états hadroniques initial et final.

Les éléments de matrice du courant faible sont ainsi aisément reliés aux résultats des expériences neutrino, dont un des buts est de vérifier, à grands transferts, la validité de la forme donnée au couplage faible, ainsi que les relations, attendues dans ce cadre, entre les éléments de matrice des courants hadroniques faible et électromagnétique (chapitre II).

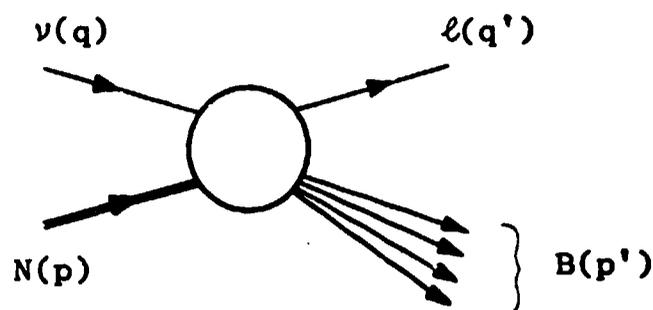
2) Algèbre des courants SU(2) x SU(2)

Nous nous limitons, dans cet exposé, aux réactions sans changement d'étrangeté, du type

$$\nu(\bar{\nu}) + N \rightarrow \ell(\bar{\ell}) + B$$

où N est un nucléon.

a) graphe



b) événement

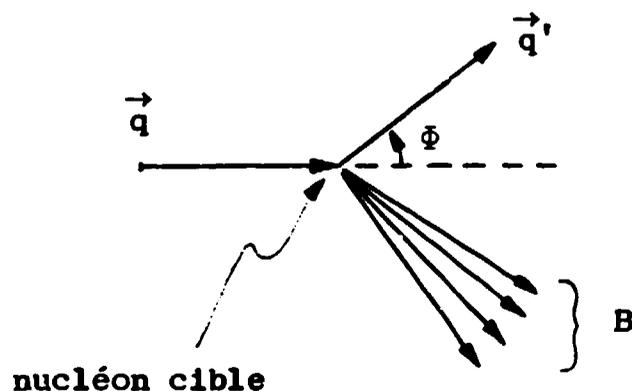


Figure (IX,1)

Revenons à l'expression (IV.18), qui s'écrit :

$$1 = \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 \left\{ 1 + m \left(\frac{2m\mu}{gK(0)} \right)^2 \int \frac{dw^2}{(w^2 - m^2)^2} \left(F^-(w^2, 0) - F^+(w^2, 0) \right) \right\}, \quad (IX.2)$$

mais sans faire intervenir cette fois CACP. Cela est aisé car cette hypothèse n'intervient que dans l'interprétation des quantités F^- et F^+ , que nous avons donnée dans l'équation (IV.14) :

$$F^\pm(w^2, k^2) = \sum_{\alpha_j} \delta(w^2 - p_j^2) |\langle p | \Phi_{\pi^\pm}(0) | p_j \alpha_j \rangle|^2.$$

Nous devons l'écrire, sans CACP :

$$F^\pm(w^2, k^2) = \sum_{\alpha_j} \delta(w^2 - p_j^2) \left(\frac{G_V}{G_A} \right)^2 \left(\frac{gK(0)}{\sqrt{2m\mu}} \right)^2 |\langle p | \partial^\mu J_\mu^{A^\pm}(0) | p_j \alpha_j \rangle|^2$$

en utilisant (IV.11).

Introduisons alors :

$$G^\pm(w^2, 0) = \sum_{\alpha_j} \delta(w^2 - p_j^2) |\langle p | \partial^\mu J_\mu^{A^\pm}(0) | p_j \alpha_j \rangle|^2 = \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2m\mu}}{gK(0)} \right)^2 F^\pm(w^2, 0), \quad (IX.3)$$

et écrivons de nouveau (IX.2) sous la forme :

$$1 = \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 + 4m \int \frac{wdw}{(w^2 - m^2)^2} \left(G^-(w^2, 0) - G^+(w^2, 0) \right). \quad (IX.4)$$

En fait (IX.4) doit venir avant (IX.2). Nous n'avons fait que défaire des transformations déjà faites sur (IX.4) pour l'amener sous la forme (IX.2). Ces transformations avaient été faites "en cours de route" dans le chapitre IV. La relation (IX.4) n'utilise que l'algèbre des courants sous la forme (III.13,14,15), et les simplifications apportées par le passage à l'impulsion infinie, justifié si l'intégrale sur w^2 converge quelsoit l'énergie. Nous le supposons, nous plaçant dans le cadre d'une théorie où les états de "basse énergie" ont un rôle dominant.

La règle de somme (IX.4) fait intervenir les éléments de matrice de la divergence du courant axial, calculés à transfert nul. Comme l'a montré Adler (Phys. Rev. 135, B 963 (64)), ce sont les seuls qui interviennent dans la diffusion vers l'avant si l'on néglige la masse du lepton.

Reprenant l'expression donnée pour M , on peut sommer et moyenner sur les polarisations des leptons. Ceci donne :

$$\langle B | J_\mu | A \rangle \langle B | J_\nu | A \rangle^* \left(q^\mu q'^\nu + q^\nu q'^\mu - q \cdot q' g^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} q_\sigma q'_\rho \right).$$

La masse du lepton étant négligée, les vecteurs q et q' sont proportionnels, et le carré du moment de transfert est nul $k^2 = (q - q')^2 = 0$, lorsque le lepton est produit vers l'avant. Si l'on exclut la diffusion élastique, l'énergie transférée k_0 n'est pas nulle. On écrit :

$$q = k \frac{q_0}{k_0}, \quad q' = k \frac{q'_0}{k_0}.$$

On obtient :

$$\langle B | J_\mu | A \rangle \langle B | J_\nu | A \rangle^* \frac{2 k^\mu k^\nu}{k_0^2} q_0 q'_0 = \frac{2 q_0 q'_0}{k_0^2} |\langle B | \partial_\mu J^\mu | A \rangle|^2.$$

La section efficace différentielle inélastique vers l'avant est ainsi directement reliée aux éléments de matrice de la divergence du courant axial. La section efficace élastique $\nu + N \rightarrow \ell + N$ reçoit, elle, une grosse contribution de l'amplitude vecteur.

Nous citons les résultats donnés par Adler (Phys. Rev., 140, B 736 (65)) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega_\ell dE_\ell} &= G_V^2 \cos^2\theta f(w) G^+(w^2, 0) & (\nu + p \rightarrow \ell^- + B) \\ \frac{d^2\sigma}{d\Omega_\ell dE_\ell} &= G_V^2 \cos^2\theta f(w) G^-(w^2, 0) & (\bar{\nu} + p \rightarrow \ell^+ + B), \end{aligned} \quad (IX.5)$$

où E_ℓ et Ω_ℓ sont l'énergie et l'angle solide du lepton dans le système du laboratoire, où le proton est initialement au repos. On a défini :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{m^2 + 2m E_\nu - w^2}{w^2 - m^2} \right)^2,$$

où E_ν est l'énergie dans le laboratoire, du neutrino incident :

$$dE_\ell = -\frac{1}{2m} dw^2.$$

On obtient ainsi, à partir de (IX.4 et 5), une règle de somme permettant de vérifier directement les relations de commutation. Ceci n'est pas encore possible à l'aide des résultats obtenus jusqu'ici dans les expériences "neutrino".

Des relations semblables peuvent être obtenues pour les réactions avec changement d'étrangeté (Phys. Rev., 140, B 736 (65)).

3) Relations de commutation locales : tests pratiques

Nous sommes partis de l'algèbre des charges, et avons été automatiquement conduits à introduire des amplitudes à transfert nul, et, de ce fait, à une règle de somme mettant en jeu des sections efficaces différentielles vers l'avant. Il est aussi possible d'obtenir des règles de somme à transfert non nul qui sont alors des conséquences des hypothèses plus restrictives (III.4.5,6), mettant en jeu les densités de charge, et qui, après une double intégration seulement, donnent les relations de commutation entre les charges.

Ceci sort légèrement du cadre assigné à ce cours, mais nous l'indiquons quand même, puisque c'est le prolongement direct de ce qui vient d'être dit à propos des réactions de neutrinos. Nous ne donnons d'ailleurs qu'une rapide introduction à l'article très détaillé d'Adler sur ce sujet (Phys. Rev., 143, 1144 (66)), et ne considérons que les densités de charge (composantes de temps), alors qu'Adler envisage simultanément des vérifications possibles des relations de commutation des composantes d'espace. Pour celles-ci cependant, les termes de Schwinger apportent des complications appréciables. Nous nous limitons aux réactions sans changement d'étrangeté. Le cas des réactions avec changement d'étrangeté est aussi traité par Adler.

Comme nous le montrerons plus loin, les sections efficaces différentielles des réactions neutrino :

$$\nu(\bar{\nu}) + p \rightarrow \ell(\bar{\ell}) + B \quad (s = 0) ,$$

peuvent s'exprimer chacune à l'aide de trois quantités seulement : α^\pm , β^\pm , et γ^\pm , qui sont toutes des fonctions de k^2 et de w . On a :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_\ell dE_\ell} \left(\frac{\nu}{\bar{\nu}} + p \rightarrow \frac{\ell}{\bar{\ell}} + B \right) = \frac{G_V^2 \cos^2\theta}{2\pi^2} \frac{E_\ell}{E_\nu} \times \left\{ k^2 \alpha^\pm(k^2, w) + 2E_\nu E_\ell \cos^2 \Phi/2 \beta^\pm(k^2, w) + (E_\nu + E_\ell) k^2 \gamma^\pm(k^2, w) \right\} , \quad (IX.6)$$

où Φ est l'angle de diffusion (lepton neutrino), dans le système du laboratoire.

Si les relations de commutation à temps égaux, entre densités de charge, sont satisfaites (III.4,5,6) :

$$\delta(x_0 - y_0) \left[j_0^1(x), j_0^j(y) \right] = i \varepsilon_{1jk} j_0^k(x) \delta_4(x-y)$$

$$\delta(x_0 - y_0) \left[j_0^1(x), j_0^{Aj}(y) \right] = i \varepsilon_{1jk} j_0^{Ak}(x) \delta_4(x-y)$$

$$\delta(x_0 - y_0) \left[j_0^{A1}(x), j_0^{Aj}(y) \right] = i \varepsilon_{1jk} j_0^k(x) \delta_4(x-y)$$

alors, moyennant les hypothèses de convergence indiquées, on doit avoir :

$$2 = g_A^2(k^2) + F_1^2(k^2) + k^2 F_2^2(k^2) + \int_{m+\mu}^{\infty} \frac{w}{m} dw \left(\beta^-(k^2, w) - \beta^+(k^2, w) \right) , \quad (IX.7)$$

où g_A, F_1 et F_2 sont les facteurs de forme introduits dans les diffusions élastiques :

$$\langle N(p') | j_\mu^+(0) | N(p) \rangle = i \bar{u}(p') (F_1 \gamma_\mu - F_2 \sigma_{\mu\nu} k_\nu) \tau^+ u(p)$$

$$\langle N(p') | j_\mu^{A+}(0) | N(p) \rangle = i \bar{u}(p') (g_A \gamma_\mu - i h_A k_\mu) \gamma_5 \tau^+ u(p) .$$

En fait la règle de somme (IX.7) est obtenue par addition de deux relations, correspondant respectivement aux termes vecteur et axial :

$$1 = F_1^2(k^2) + k^2 F_2^2(k^2) + \int_{m+\mu}^{\infty} \frac{w}{m} dw \left(\beta_V^-(k^2, w) - \beta_V^+(k^2, w) \right) \quad (IX.8.1)$$

$$1 = g_A^2(k^2) + \int_{m+\mu}^{\infty} \frac{w}{m} dw \left(\beta_A^-(k^2, w) - \beta_A^+(k^2, w) \right) . \quad (IX.8.2)$$

Avant de reproduire leur démonstration, il est bon de faire quelques remarques.

A $k^2 = 0$ (réaction neutrino vers l'avant), la partie vectorielle ne contribue pas à la diffusion inélastique ($w > m + \mu$), et (IX.8.1) se ramène à $F_1(0) = 1$. La partie axiale, en revanche, a une contribution non nulle par l'intermédiaire de sa divergence.

$$\beta_A^\pm(o, w) = \frac{4 m^3 \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2}{\pi g^2 K^2(0)} \frac{\sigma^\pm(o, w)}{w^2 - m^2} \quad (IX.9)$$

Combinant (IX.9) et (IX.8.2), il vient :

$$1 = \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 + 4 \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 \frac{m^2}{\pi g^2 K^2(0)} \int_{m+\mu}^{\infty} \frac{w dw}{w^2 - m^2} \left(\sigma^-(o, w) - \sigma^+(o, w) \right)$$

ce qui est la relation de Adler-Weisberger, telle que nous l'avons déjà obtenue (IV.24).

Nous pouvons écrire, à E_ν fixé :

$$d\Omega_\ell dE_\ell = \pi \frac{dk^2}{E_\nu E_\ell} dk_0$$

$$\cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2E_\nu E_\ell} \left(2E_\nu^2 - 2E_\nu k_0 - \frac{1}{2} k^2 \right)$$

et modifier (IX.6) pour la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2 dk_0} \left(\begin{array}{c} \nu \\ \bar{\nu} \end{array} + p \rightarrow \begin{array}{c} \ell \\ \bar{\ell} \end{array} + B \right) = \frac{G_V^2 \cos^2 \theta}{4\pi E_\nu^2} \times \left(k^2 \alpha^\pm + (2E_\nu^2 - 2E_\nu k_0 - \frac{1}{2} k^2) \beta^\pm + (2E_\nu - k_0) \gamma^\pm \right)$$

La contribution asymptotique ($E_\nu \rightarrow \infty$) est limitée à β^\pm , lorsque k_0 est fixé :

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d^2\sigma}{dk^2 dk_0} (\bar{\nu}) - \frac{d^2\sigma}{dk^2 dk_0} (\nu) \right\} = \frac{G_V^2 \cos^2 \theta}{2\pi} (\beta^- - \beta^+) \quad (IX.10)$$

Sommons sur k_0 , en supposant que le passage à la limite $E_\nu \rightarrow \infty$ est justifié (c'est automatiquement le cas si seuls des états de masses relativement peu élevées sont produits) :

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d\sigma}{dk^2} (\bar{\nu}) - \frac{d\sigma}{dk^2} (\nu) \right\} = \frac{G_V^2 \cos^2 \theta}{2\pi} \int dk_0 (\beta^- - \beta^+) \quad (IX.11)$$

Avec la relation $w^2 = 2mk_0 + m^2 - k^2$, à k^2 fixé, on retrouve (IX.7) au second membre de (IX.11). La somme sur k_0 implique aussi la diffusion élastique. Les relations de commutation locales sont aussi traduites en une relation entre les pentes asymptotiques des distributions angulaires de neutrino. Les relations de commutation imposent :

$$\int dk_0 (\beta^- - \beta^+) = g_A^2(k^2) + F_1^2(k^2) + k^2 F_2^2(k^2) + \int_{m+\mu}^{\infty} \frac{w}{m} dw \left(\beta^-(k^2, w) - \beta^+(k^2, w) \right) = 2$$

qui, combiné avec (IX.11) donne :

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left(\frac{d\sigma}{dk^2} (\bar{\nu}) - \frac{d\sigma}{dk^2} (\nu) \right) = \frac{G_V^2 \cos^2 \theta}{\pi} \quad (IX.12)$$

Cette relation, obtenue par Adler, a été étudiée par Adler et Gilman (CAL. TECH., preprint), afin de déterminer quelle énergie pouvait être pratiquement considérée comme suffisamment élevée pour que la relation (IX.12) puisse être vérifiée, tout au moins au voisinage de l'avant.

A $k^2 = 0$, la contribution au second membre de (IX.11) des termes vecteurs de β^+ et β^- , se réduit à 1, celle des termes axiaux s'écrit :

$$\left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 + \int_{m+\mu}^{k_0 \text{ max}} dk_0 (\beta^- - \beta^+)$$

soit encore, d'après (IX.9) :

$$\left(\frac{G_A}{G_V}\right)^2 \left(1 + \frac{4m^2}{\pi g^2 K^2(0)} \int_{m+\mu}^{W_{\max}} \frac{wdw}{w^2 - m^2} \left(\sigma^-(0,w) - \sigma^+(0,w)\right)\right), \quad (\text{IX.13})$$

où : $2(1 - \cos\phi) (E_\nu^2 - E_\nu k_0) = k^2$

soit : $k_0 = E_\nu - \frac{k^2}{2E_\nu (1 - \cos\phi)}$

$k_{0 \max} = E_\nu - \frac{k^2}{4E_\nu}$, $W_{\max}^2 (k^2=0) = 2mk_{0 \max} + m^2$.

La valeur de l'intégrale qui apparaît dans (IX.13) ne varie que peu, dès que W_{\max} dépasse la région d'énergie où les effets des résonances sont très sensibles. Gilman et Adler arrivent à la conclusion que les énergies de neutrino, supérieures à 5 GeV, devraient permettre une vérification de la règle de somme.

Revenons à (IX.8.1). Nous avons vu que la règle de somme était automatiquement satisfaite à $k^2=0$. Dérivons maintenant les deux membres par rapport à k^2 . On obtient :

$$0 = 2F_1(k^2) \frac{d}{dk^2} F_1(k^2) + F_2^2(k^2) + k^2 F_2^2(k^2) \frac{d}{dk^2} F_2(k^2) + \int_{m+\mu}^{\infty} \frac{w}{m} dw \frac{d}{dk^2} \left(\beta_V^-(k^2,w) - \beta_V^+(k^2,w)\right).$$

Cette relation prend une forme particulièrement simple à $k^2=0$:

$$2 \frac{d}{dk^2} F_1^V(k^2) \Big|_{k^2=0} = -\mu_V^2 - \int_{m+\mu}^{\infty} \frac{w}{m} dw \frac{d}{dk^2} \left(\beta_V^-(k^2,w) - \beta_V^+(k^2,w)\right) \Big|_{k^2=0} .$$

Ici apparaissent le rayon et le moment magnétique isovecteurs. C'est la règle de somme de Cabibbo et Radicati, β_V^+ étant relié aux sections efficaces de photo-production. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{3} \left(\langle r^2 \rangle_p - \langle r^2 \rangle_n\right) - (\mu_p - \mu_n)^2 = \frac{1}{2\pi^2 \alpha} \int \frac{\sigma_{3/2}^V - \sigma_{1/2}^V}{\omega} d\omega$$

où $\sigma_{3/2}^V$ et $\sigma_{1/2}^V$ sont les sections efficaces de réaction γ (isovecteur) + proton $\rightarrow I = 3/2$ et $I = 1/2$. Cette règle de somme semble bien satisfaite, mais elle ne doit pas être limitée à quelques résonances. Une étude précise est nécessaire (Gilman et Schnitzer, Phys. Rev., 150, 1362 (66)). On teste ainsi la forme locale des relations de commutation des charges vecteurs.

Pour une étude critique et détaillée de ces règles de somme électromagnétiques, qui sortirait du cadre choisi pour ce cours, on peut se reporter à l'article de Bèg (Phys. Rev. 150, 1276 (66)).

4) Démonstration des relations (IX.8)

Nous reprenons rapidement la cinématique des réactions neutrino (T.D. Lee et C.N. Yang, Phys. Rev. 126, 2239 (62)). Nous revenons à l'expression de l'amplitude donnée au début de cette section :

$$M = i \frac{G_V \cos\theta}{\sqrt{2}} \bar{u}_\ell(q') \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu(q) \langle B(p') | (j_\mu^V + j_\mu^A) | N(p) \rangle .$$

La section efficace totale s'écrit :

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{G^2 \cos^2\theta}{2} \int E_\ell^2 dE_\ell d\Omega_\ell \sum_B \delta(E_\nu + m - E_\ell - E_B) R_B$$

où $R_B = \sum |\bar{u}(q') \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu \langle B(p') | (j_\mu^V + j_\mu^A) | N(p) \rangle|^2$,

la première somme est effectuée sur tous les états finaux et sur leurs variables internes. La seconde (dans R_B), est une somme sur les polarisations finales, et une moyenne sur les polarisations initiales. Le calcul est long s'il n'est pas fait de façon astucieuse, et assez long de toute façon. Nous renvoyons par exemple à l'article de Adler (66) pour cette seconde version, et citons seulement le résultat :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_\ell dE_\ell} = \frac{G^2 \cos^2\theta}{(2\pi)^2} \frac{E_\ell}{E_\nu} \left\{ k^2 \alpha(k^2,w) + 2E_\nu E_\ell \cos^2 \frac{\phi}{2} \beta(k^2,w) - k^2 (E_\nu + E_\ell) \gamma(k^2,w) \right\}, \quad (\text{IX.14})$$

où α, β et γ sont des combinaisons des sommes sur les éléments de matrice au carré des courants hadroniques, ainsi que de leurs divergences. Ces éléments de matrice sont pris entre un état à un proton, et un état hadronique de masse W . La somme effectuée porte sur les variables internes propres à l'état final de masse W , ainsi que sur sa polarisation. Elle implique aussi une moyenne sur la polarisation du proton initial. Il faut introduire 3 fonctions différentes pour chacune des réactions $\nu + p$ et $\bar{\nu} + p$. Nous renvoyons à l'article de Adler (66) pour la forme explicite de ces fonctions. Nous nous bornons à rappeler certains de ses résultats.

Nous indiquerons simplement pourquoi trois fonctions indépendantes seulement apparaissent dans l'expression de la section efficace. Ceci correspond à une interaction de type vecteur (axial), considérée au premier ordre, et au fait que les sections efficaces calculées sont sommées et moyennées sur les polarisations. Dans ces conditions aucun effet de violation de la parité apparaît. Nous pouvons suivre le choix de Christ et Lee (Phys. Rev. 148, 1520 (66)) et introduire 4 "facteurs de forme"

$$F_+ = \langle 3/2 | J_+ | 1/2 \rangle, F_- = \langle -1/2 | J_- | 1/2 \rangle, F_z = \langle 1/2 | J_z | 1/2 \rangle \quad \text{et} \quad F_D = \langle 1/2 | D | 1/2 \rangle$$

qui sont les amplitudes de transition entre l'état initial et l'état final d'hélicité $\lambda' = -1/2, 1/2$ ou $3/2$, le proton étant choisi avec la polarisation $\lambda = 1/2$ le long de l'impulsion du système hadronique final. Cette paramétrisation traduit l'interaction vecteur à l'ordre le plus bas. Les 3 composantes spatiales du courant interviennent, ainsi que sa composante de temps, où, avec un autre choix sa divergence D . La parité relie $(F_+)_{\lambda\lambda'}$ à $(F_-)_{-\lambda-\lambda'}$, et après sommation et moyenne sur les polarisations initiales et finales, F_+ et F_- ne peuvent apparaître que par l'intermédiaire de $(|F_+|^2 + |F_-|^2)$, qui, avec $|F_z|^2$ et $|D|^2$, donnent ainsi au maximum 3 quantités indépendantes, pour exprimer la section efficace différentielle.

A $k^2 = 0$, $\beta(k^2, w)$ s'écrit simplement

$$\begin{aligned} \beta(0, w) &= \sum_B \sum_{\mu} |\langle B | \sigma^{\mu} J_{\mu}^A | N \rangle|^2 \frac{4m^2}{(w^2 - m^2)^2} \delta(E_B + E_{\ell} - E_{\nu} - m) \\ &= \frac{m^2}{g^2 K^2(0)} \frac{4 \left(\frac{G_A}{G_V}\right)^2}{\sum_B \sum_{\mu} |\langle B | \phi_{\mu} | N \rangle|^2} \frac{4m^2}{(w^2 - m^2)^2} 2m \delta(w^2 - p'^2), \end{aligned}$$

en utilisant CACP (II.28).

Ceci se transforme en utilisant (IV.14) et (IV.23) pour donner :

$$\frac{1}{\pi} \frac{4m^3 \left(\frac{G_A}{G_V}\right)^2}{g^2 K^2(0)} \frac{1}{(w^2 - m^2)} \sigma_{\text{tot}}(0, w), \quad (\text{IX.15})$$

soit l'expression utilisée pour retrouver la relation de Adler-Weisberger à partir de la règle de somme pour β .

Dans le cas particulier d'une réaction élastique $\bar{\nu} + p \rightarrow \bar{\ell} + n$, α, β et γ s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \alpha^-(k^2, w) &= \delta(w-m) \left\{ \left(1 + \frac{k^2}{4m^2}\right) g_A^2(k^2) + \frac{k^2}{4m^2} g_V^2(k^2) \right\} \\ \beta^-(k^2, w) &= \delta(w-m) \left\{ g_A^2(k^2) + F_1^{V2}(k^2) + k^2 F_2^{V2}(k^2) \right\} \\ \gamma^-(k^2, w) &= \delta(w-m) \left\{ -g_A(k^2) g_V(k^2)/m \right\}, \end{aligned} \quad (\text{IX.16})$$

$$\text{où} \quad g_V = F_1^V + 2m F_2^V.$$

Combinant (IX.7 et 16), on voit que la règle de somme obtenue correspond à une intégration sur tous les états finaux y compris l'état à un neutron, les neutrinos eux n'ayant pas de réaction élastique sur un proton. Ceci s'écrit :

$$2 = \int_m^{\infty} \frac{w}{m} dw (\beta^- - \beta^+).$$

Il reste à montrer comment cette règle de somme est une conséquence des relations de commutation à temps constant sous la forme locale. Comme nous l'avons déjà indiqué, cette règle de somme est en fait obtenue par addition de deux relations correspondant respectivement aux couplages vecteur et axial. Le calcul s'effectue de la même façon dans les deux cas. Pour le cas axial on introduit :

$$I(t) = -i \int d^3x e^{-ikx} j_0^{A1}(x,t)$$

$$J(t) = -i \int d^3x e^{ikx} j_0^{AJ}(x,t)$$

ainsi que les dérivées par rapport au temps :

$$\frac{dI}{dt} = \int d^3x e^{-ikx} \left(D^1 - \partial^k j_k^{A1} \right) = \int d^3x e^{-ikx} \left(D^1 - i k^k j_k^{A1} \right)$$

où $D = \partial^\mu j_\mu^A$ ($\mu = 0,1,2,3$ et $k = 1,2,3$).

De même :

$$\frac{dJ}{dt} = \int d^3y e^{iky} \left(D^J + i k^k j_k^{AJ} \right)$$

Ces deux opérateurs sont introduits dans l'identité suivante, où N représente un état propre de l'impulsion (état à un proton) :

$$\lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{1}{q_0} \int_0^\infty e^{iq_0 t} dt \langle N | \left[\dot{A}(t), \dot{B}(0) \right] | N \rangle = -i \langle N | \left[A(0), B(0) \right] | N \rangle + \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2q_0} \left(\langle N | \left[\dot{A}(0), B(0) \right] | N \rangle + \langle N | \left[\dot{B}(0), A(0) \right] | N \rangle \right)$$

le membre de gauche s'écrit :

$$(2\pi)^3 \delta_3(\vec{0}) \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{1}{q_0} \int e^{-iqx} \theta(x_0) \langle p | \left[\left(D^1(x) - \partial^k j_k^{A1}(x) \right), \left(D^J(0) - \partial^k j_k^{AJ}(0) \right) \right] | p \rangle d^4x$$

en utilisant l'invariance par translation pour intégrer sur d^3y .

Le premier terme du membre de droite s'écrit :

$$i \int d^3x d^3y e^{-iq(x-y)} \langle p | \left[j_0^{A1}(x,t), j_0^{AJ}(y,t) \right] | p \rangle = \epsilon_{1jk} \int d^3x \langle p | j_0^k(x) | p \rangle = \epsilon_{1jk} (2\pi)^3 \delta_3(\vec{0}) \frac{1}{2} \langle \tau_k \rangle$$

en utilisant les relations de commutation sous leur forme locale, et en moyennant sur la polarisation. Si l'on se limite à la partie antisymétrique en i, j , le second terme ne contribue pas. On obtient ainsi :

$$1 = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\epsilon_{1j3}}{q_0} \int d^4x e^{-iqx} \theta(x_0) \langle p | \left[\left(D^1(x) - i q^k j_k^{S1} \right), \left(D^J(0) + i q^k j_k^{SJ} \right) \right] | p \rangle$$

où le membre de droite est aussi moyenné sur la polarisation du proton.

On écrit alors une relation de dispersion pour le produit retardé et les parties absorptives se rattachent aux produits d'éléments de matrice introduits dans la définition de α, β et γ . Nous renvoyons à l'article de Adler pour le calcul explicite. Si l'écriture d'une relation de dispersion non soustraite est justifiée pour la dérivée par rapport à k_0 du produit retardé (qui est une fonction de k^2 et de k_0), la relation obtenue peut être de nouveau traduite en règle de somme. On obtient ainsi :

$$1 = \int_0^\infty dk_0 (\beta_A^- - \beta_A^+)$$

Un calcul semblable donne la même règle de somme pour les termes "vecteur" correspondants. En combinant les deux expressions, on obtient la relation d'Adler :

$$2 = \int_0^\infty dk_0 \left(\beta^-(k^2, k_0) - \beta^+(k^2, k_0) \right)$$

que l'étude détaillée des réactions de neutrino, qui déterminent les fonctions β^+ et β^- dans l'expression de la section efficace différentielle, peut permettre de vérifier.

APPENDICE A

NOTATIONS ET CONVENTIONS DIVERSES

I) Métrique : $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$p = (p^0, \vec{p}) \quad (\vec{p})^1 = p^1$

II) Matrices de Dirac :

$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu}$

$\gamma_5 = i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \quad \gamma_5^2 = 1$

$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

$\beta = \gamma_0$

$\vec{\alpha} = \gamma_0 \vec{\gamma}$

définition des matrices A et C :

$\gamma_\mu^\dagger = A \gamma_\mu A^{-1}$

$\gamma_5^\dagger = -A \gamma_5 A^{-1}$

$\gamma_\mu^T = -C \gamma_\mu C^{-1}$

$\gamma_5^T = C \gamma_5 C^{-1}$

avec des matrices γ_μ unitaires, A et C ont les propriétés suivantes :

$A^\dagger = A^{-1} = A = \gamma_0$

$C^\dagger = C^{-1} = -C^* \quad C^T = -C$

Choix particulier de matrices γ unitaires :

$$\beta = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$

les σ^i sont les matrices usuelles de Pauli :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \gamma_0$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

III) Equation de Dirac :

spinors : $\psi(x) \quad \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) A$

$$(i \gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi(x) = 0$$

$$\bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\gamma}_\mu \partial^\mu - m) = 0 \quad (\overleftarrow{\partial} \equiv -\partial)$$

séparation en parties à fréquences positives et négatives :

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d_4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) \left\{ e^{-ipx} \psi^+(p) + e^{ipx} \psi^-(p) \right\}$$

$$(\not{p} - m) \psi^+(p) = 0$$

$$(\not{p} + m) \psi^-(p) = 0$$

Ondes planes :

$$\psi_v^+(p) = u_v(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}} u_v(0) \quad \text{avec} \quad u_v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_v^-(p) = v_v(p) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}} v_v(0) \quad \text{avec} \quad v_v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

normalisation :

$$\bar{\psi}_v^\pm(p) \psi_{v'}^\pm(p) = \pm \delta_{vv'}$$

$$\bar{\psi}_v^\pm(p) \psi_{v'}^\mp(p') = 0$$

projecteurs sur les états à fréquences positives ou négatives :

$$\sum_{v=1,2} \psi_v^\pm(p) \bar{\psi}_v^\pm(p) = \frac{\not{p} \pm m}{2m}$$

IV) Champ de Dirac quantifié :

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{v=1,2} \int \frac{m}{E} d_3 p \left\{ e^{-ipx} a(p,v) u_v(p) + e^{ipx} b^\dagger(p,v) v_v(p) \right\}$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{v=1,2} \int \frac{m}{E} d_3 p \left\{ e^{ipx} a^\dagger(p,v) \bar{u}_v(p) + e^{-ipx} b(p,v) \bar{v}_v(p) \right\}$$

$a(p, \nu)$ et $a^\dagger(p, \nu)$: opérateurs de destruction et de création de particules
 $b(p, \nu)$ et $b^\dagger(p, \nu)$: opérateurs de destruction et de création d'antiparticules.

$$[a(p, \nu), a^\dagger(p', \nu')]_+ = \frac{E}{m} \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\nu, \nu'}$$

$$[b(p, \nu), b^\dagger(p', \nu')]_+ = \frac{E}{m} \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\nu, \nu'}$$

$$[a(p, \nu), b^\dagger(p', \nu')]_+ = 0$$

$$[\Psi(x), \bar{\Psi}(y)]_+ \delta(x_0 - y_0) = \gamma_0 \delta_4(x-y)$$

Transformations \mathcal{C} (conjugaison de charge), \mathcal{P} (parité) et \mathcal{T} (renversement du sens du temps) :

$$\begin{cases} \mathcal{C} \Psi(x) \mathcal{C}^{-1} = C^{-1} \bar{\Psi}^T(x) \\ \mathcal{C} \bar{\Psi}(x) \mathcal{C}^{-1} = -\Psi^T(x) C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} \Psi(x) \mathcal{P}^{-1} = \gamma_0 \Psi(x_0, -\vec{x}) \\ \mathcal{P} \bar{\Psi}(x) \mathcal{P}^{-1} = \bar{\Psi}(x_0, -\vec{x}) \gamma_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{T} \Psi(x) \mathcal{T}^{-1} = B \Psi(-x_0, \vec{x}) \\ \mathcal{T} \bar{\Psi}(x) \mathcal{T}^{-1} = \bar{\Psi}(-x_0, \vec{x}) B^{-1} \end{cases} \quad (B = C \gamma_5)$$

\mathcal{T} est antiunitaire.

Transformation par \mathcal{C}, \mathcal{P} et \mathcal{T} des courants vecteur et axial :

$$j_\mu^V(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x)$$

$$j_\mu^A(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \Psi(x)$$

$$\begin{cases} \mathcal{C} j_\mu^V(x) \mathcal{C}^{-1} = -j_\mu^V(x) \\ \mathcal{P} j_\mu^V(x) \mathcal{P}^{-1} = g_{\mu\mu} j_\mu^V(x_0, -\vec{x}) \\ \mathcal{T} j_\mu^V(x) \mathcal{T}^{-1} = g_{\mu\mu} j_\mu^V(-x_0, \vec{x}) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{C} j_\mu^A(x) \mathcal{C}^{-1} = j_\mu^A(x) \\ \mathcal{P} j_\mu^A(x) \mathcal{P}^{-1} = -g_{\mu\mu} j_\mu^A(x_0, -\vec{x}) \\ \mathcal{T} j_\mu^A(x) \mathcal{T}^{-1} = g_{\mu\mu} j_\mu^A(-x_0, \vec{x}) \end{cases}$$

V) Normalisation des états de l'espace de Fock :

Les opérateurs de création et d'annihilation de bosons (ainsi que ceux des neutrinons) sont normalisés de façon invariante relativiste, telle que :

$$[a_\alpha(\vec{q}), a_\beta^\dagger(\vec{q}')] = \delta_{\alpha\beta} 2\omega_q \delta_3(\vec{q}' - \vec{q})$$

(où α et β sont éventuellement des indices de spin, isospin, etc...). Pour les fermions, sauf les neutrinons :

$$[a_\alpha(\vec{p}), a_\beta^\dagger(\vec{p}')]_+ = \delta_{\alpha\beta} \frac{E}{m} \delta_3(\vec{p}' - \vec{p})$$

les états à une particule sont définis par :

$$|\vec{p}, \alpha\rangle = (2\pi)^{3/2} a_\alpha^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$$

($|0\rangle$ est l'état du vide). Ils sont donc normalisés suivant :

$$\langle \vec{q}', \beta | \vec{q}, \alpha \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} 2\omega_q \delta_3(\vec{q}' - \vec{q}) \text{ pour les bosons}$$

$$\langle \vec{p}', \beta | \vec{p}, \alpha \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \frac{E}{m} \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \text{ pour les fermions.}$$

Dans la décomposition de l'unité, la somme sur les états à une particule s'écrit :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_\alpha \int \frac{d_3 q}{2\omega_q} |\vec{q}, \alpha\rangle \langle \vec{q}, \alpha| \quad \text{pour les bosons}$$

et pour les fermions :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha} \int \frac{m}{E} d_3p |\vec{p}, \alpha\rangle \langle \vec{p}, \alpha|$$

VI) Temps de vie et sections efficaces :

La matrice T est définie à partir de la matrice S par :

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + i (2\pi)^4 \delta_4(p_f - p_i) \langle f|T|i\rangle$$

a) temps de vie :

désintégration : particule A → état final f

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{\chi}{m_A} \sum_f (2\pi)^4 \delta_4(p_f - p_A) |\langle f|T|i\rangle|^2$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si A est un boson} \\ m_A & \text{si A est un fermion} \end{cases}$$

b) sections efficaces :

A(p_A) + B(p_B) → f

$$\sigma = \chi_A \chi_B \sum_f (2\pi)^4 \delta_4(p_f - p_A - p_B) \frac{|\langle f|T|i\rangle|^2}{\sqrt{(p_A p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}}$$

APPENDICE B

ALGÈBRE DE SU(3)

I) Matrices de Gell-Mann :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_8 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

propriétés des matrices λ_i :

a) avec la matrice unité, elles forment une base complète des matrices 3 × 3.

b) hermiticité : $\lambda_i^\dagger = \lambda_i$

c) $[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k$

f_{ijk} est réel, et complètement antisymétrique dans ses trois indices. Ces relations de commutation signifient que les matrices λ_i forment une algèbre de Lie : l'algèbre de SU(3).

d) $[\lambda_i, \lambda_j]_+ = 2 d_{ijk} \lambda_k + \frac{4}{3} \delta_{ij}$

d_{ijk} est réel, et complètement symétrique dans ses trois indices.

e) Trace $\lambda_i = 0$

f) Trace $\lambda_i \lambda_j = 2 \delta_{ij}$

Tableau des constantes f_{ijk} et d_{ijk} non nulles :

ijk	f_{ijk}	ijk	d_{ijk}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	1/2	146	1/2
156	-1/2	157	1/2
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$
257	1/2	247	-1/2
345	1/2	256	1/2
367	-1/2	338	$1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	1/2
678	$\sqrt{3}/2$	355	1/2
		366	-1/2
		377	-1/2
		448	$-1/2\sqrt{3}$
		558	$-1/2\sqrt{3}$
		668	$-1/2\sqrt{3}$
		778	$-1/2\sqrt{3}$
		888	$-1/\sqrt{3}$

II) Groupe SU(3)

SU(3) est le groupe des matrices 3×3 , unitaires et de déterminant 1.

Toute matrice de SU(3) peut s'écrire :

$$U(g) = \exp \left(i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \lambda_i \right)$$

$$U^\dagger(g) = U^{-1}(g) = \exp \left(-i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \lambda_i \right)$$

où les α_i sont des nombres réels, qui repèrent la transformation g :

$$g = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8\}$$

$U(g)$ définit SU(3), et est aussi une représentation unitaire irréductible particulière de SU(3) : la représentation (3). Par conjugaison complexe, on obtient une représentation ($\bar{3}$) non équivalente à (3).

Dans une transformation g de SU(3), le spineur unitaire $q(x)$ des quarks, introduit dans (II.7), se transforme suivant la représentation (3), tandis que $\bar{q}(x)$ se transforme suivant ($\bar{3}$) :

$$q(x) \xrightarrow{g} U(g) q(x)$$

$$\bar{q}(x) \xrightarrow{g} U^*(g) \bar{q}(x) = \bar{q}(x) U^\dagger(g)$$

Le produit tensoriel $[q(x) \otimes \bar{q}(x)]$ se transforme donc suivant :

$$[q(x) \otimes \bar{q}(x)] \xrightarrow{g} U(g) [q(x) \otimes \bar{q}(x)] U^\dagger(g)$$

Introduisons maintenant les matrices 3×3 représentant l'octet des baryons $\frac{1}{2}^+$, et l'octet des mésons pseudoscalaires 0^- :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & P \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & N \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = B^\dagger \gamma_0 = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{P} & \bar{N} & -\frac{2\bar{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\Pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \Pi^+ & K^+ \\ \Pi^- & -\frac{\Pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

où, par exemple, Σ^+ est le champ de Dirac quantifié du Σ^+ (il détruit un Σ^+ , et crée un $\bar{\Sigma}^+$), et, de même, K^0 est le champ scalaire quantifié associé au K^0 (il détruit un K^0 , et crée un \bar{K}^0). Remarquons que $M^\dagger = M$.

Dans une transformation g de $SU(3)$, les trois matrices B , \bar{B} et M se transforment comme le produit tensoriel $q(x) \otimes \bar{q}(x)$:

$$\begin{aligned} B &\xrightarrow{g} U(g) B U^\dagger(g) \\ \bar{B} &\xrightarrow{g} U(g) \bar{B} U^\dagger(g) \\ M &\xrightarrow{g} U(g) M U^\dagger(g) \end{aligned}$$

III) Couplages des baryons avec les mésons :

Sachant comment se transforment les baryons $\frac{1}{2}^+$ et les mésons pseudoscalaires, nous pouvons immédiatement écrire les deux couplages de Yukawa, invariants par $SU(3)$:

$$\begin{aligned} \text{couplage } F &= g\sqrt{2} \alpha \text{ trace } (\bar{B} \gamma_5 [M, B]) \\ \text{couplage } D &= g\sqrt{2}(1-\alpha) \text{ trace } (\bar{B} \gamma_5 [M, B]_+) \end{aligned}$$

où g est la constante π -Nucléon : $g^2/4\pi = 14,7$, et où le "rapport F/D " est donné par $\alpha/(1-\alpha)$.

La forme explicite des couplages F et D étant très utile pour les calculs, nous la donnons ici :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\alpha} \text{ couplage } F &= \\ &= \Pi^0 (\bar{P} \gamma_5 P - \bar{N} \gamma_5 N + 2 \bar{\Sigma}^+ \gamma_5 \Sigma^+ - 2 \bar{\Sigma}^- \gamma_5 \Sigma^- + \bar{\Xi}^0 \gamma_5 \Xi^0 - \bar{\Xi}^- \gamma_5 \Xi^-) + \\ &+ \Pi^+ (\sqrt{2} \bar{P} \gamma_5 N - \sqrt{2} \bar{\Xi}^0 \gamma_5 \Xi^- - 2 \bar{\Sigma}^+ \gamma_5 \Sigma^0 + 2 \bar{\Sigma}^0 \gamma_5 \Sigma^-) + \text{h.c.} + \\ &+ K^+ (-\sqrt{3} \bar{P} \gamma_5 \Lambda + \sqrt{3} \bar{\Lambda} \gamma_5 \Xi^- - \bar{P} \gamma_5 \Sigma^0 - \sqrt{2} \bar{N} \gamma_5 \Sigma^- + \bar{\Sigma}^0 \gamma_5 \Xi^- + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{2} \bar{\Sigma}^+ i\gamma_5 \Xi^0) + \text{h.c.} + \\
 & + K^0 (-\sqrt{3} \bar{N} i\gamma_5 \Lambda + \sqrt{3} \bar{\Lambda} i\gamma_5 \Xi^0 + \bar{N} i\gamma_5 \Sigma^0 - \sqrt{2} \bar{P} i\gamma_5 \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^0 i\gamma_5 \Xi^0 + \\
 & \quad + \sqrt{2} \bar{\Sigma}^- i\gamma_5 \Xi^-) + \text{h.c.} + \\
 & + \eta (\sqrt{3} \bar{P} i\gamma_5 P + \sqrt{3} \bar{N} i\gamma_5 N - \sqrt{3} \bar{\Xi}^0 i\gamma_5 \Xi^0 - \sqrt{3} \bar{\Xi}^- i\gamma_5 \Xi^-) \\
 & \frac{1}{g(1-\alpha)} \text{ couplage D} = \\
 & = \Pi^0 (\bar{P} i\gamma_5 P - \bar{N} i\gamma_5 N + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Sigma}^0 i\gamma_5 \Lambda + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Lambda} i\gamma_5 \Sigma^0 - \bar{\Xi}^0 i\gamma_5 \Xi^0 + \bar{\Xi}^- i\gamma_5 \Xi^-) + \\
 & + \Pi^+ (\sqrt{2} \bar{P} i\gamma_5 N + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Sigma}^+ i\gamma_5 \Lambda + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Lambda} i\gamma_5 \Sigma^- - \sqrt{2} \bar{\Xi}^0 i\gamma_5 \Xi^-) + \text{h.c.} + \\
 & + K^+ (-\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{P} i\gamma_5 \Lambda + \bar{P} i\gamma_5 \Sigma^0 + \sqrt{2} \bar{N} i\gamma_5 \Sigma^- - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\Lambda} i\gamma_5 \Xi^- + \bar{\Sigma}^0 i\gamma_5 \Xi^- + \\
 & \quad + \sqrt{2} \bar{\Sigma}^+ i\gamma_5 \Xi^0) + \text{h.c.} + \\
 & + K^0 (-\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{N} i\gamma_5 \Lambda - \bar{N} i\gamma_5 \Sigma^0 + \sqrt{2} \bar{P} i\gamma_5 \Sigma^+ - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\Lambda} i\gamma_5 \Xi^0 - \bar{\Sigma}^0 i\gamma_5 \Xi^0 + \\
 & \quad + \sqrt{2} \bar{\Sigma}^- i\gamma_5 \Xi^-) + \text{h.c.} + \\
 & + \eta (-\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{P} i\gamma_5 P - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{N} i\gamma_5 N - \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Lambda} i\gamma_5 \Lambda + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Sigma}^+ i\gamma_5 \Sigma^+ + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Sigma}^0 i\gamma_5 \Sigma^0 + \\
 & \quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\Sigma}^- i\gamma_5 \Sigma^- - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\Xi}^0 i\gamma_5 \Xi^0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\Xi}^- i\gamma_5 \Xi^-) .
 \end{aligned}$$

FIN